



Problemas de Teoría de Cuerpos

Rodrigo Raya Castellano
Universidad de Granada



1. Problema 1

Lema 1.1.

Dada cualquier extensión de cuerpos $\frac{F}{K}$, el conjunto

$$M = \{\alpha \in F : \alpha \text{ es algebraico sobre } K\}$$

es un subcuerpo de F que contiene a K . Además la extensión $\frac{M}{K}$ es algebraica.

Demostración. Veamos que M es cerrado para sumas y productos. En efecto, si $\alpha, \beta \in M$ entonces $\frac{K(\alpha, \beta)}{K}$ es una extensión finita ya que es de generación finita por generadores algebraicos. Como es una extensión finita, tiene que ser algebraica.

Entonces todo elemento de $K(\alpha, \beta)$ es algebraico sobre K y claramente $\alpha + \beta, \alpha\beta \in K(\alpha, \beta)$, luego son algebraicos sobre K .

Por otro lado, es claro que $K \subseteq M$ ya que si $\alpha \in K$ entonces ciertamente, α es raíz del polinomio $X - \alpha$. En particular, $1, -1 \in M$ y por tanto, se tiene que M es un subanillo. Nos falta comprobar que también es cerrado para inversos de los elementos no nulos.

Sea $\alpha \neq 0$ algebraico, entonces α es raíz de algún polinomio con coeficientes en K . Sea este $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ entonces es claro que $\sum_{i=0}^n a_{n-i} X^i$, si evaluamos en $\frac{1}{\alpha}$ y multiplicamos por α^n es claro que $\frac{1}{\alpha}$ es raíz de este polinomio. En resumen $\frac{1}{\alpha} \in M$.

Por tanto, M es un cuerpo que contiene a K . Claramente, la extensión $\frac{M}{K}$ es algebraica ya que todos los elementos de α son raíces de algún polinomio con coeficientes en K . \square

Lema 1.2.

Sea $\frac{F}{K}$ una extensión de cuerpos, $p \in K[x]$ y $z \in F$ tal que $p(z) = 0$. Si $\sigma : F \rightarrow F$ es un endomorfismo de anillos tal que $\sigma|_K = Id|_K$ entonces $\sigma(z)$ es raíz de p .

Demostración. Sea $p(X) = \sum a_i X^i$ entonces $p(\sigma(z)) = \sum a_i \sigma(z)^i$ y ya que σ fija los elementos de K lo anterior es igual a $\sigma(p(z))$ como $p(z) = 0$ por hipótesis, se tiene que $p(\sigma(z)) = 0$. \square

EJERCICIO 1.1: Se considera F_1 (resp. F_2) el subcuerpo de \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) de todos los elementos algebraicos sobre \mathbb{Q} . Probar que $\frac{F_i}{\mathbb{Q}}$ es una extensión algebraica y que $[F_2 : F_1] = 2$.

Demostración. Basta tomar $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{Q}$ en el lema 1.1

Por otro lado, se tiene la siguiente cadena de cuerpos $\mathbb{Q} \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \mathbb{C}$. Vamos a ver que de hecho $F_2 = F_1[i] \cong \frac{F_1[X]}{\langle X^2+1 \rangle}$ de donde la dimensión es claramente dos, esto es, $[F_2 : F_1] = 2$.

$F_1[i] \subseteq F_2$ Claramente, $1, i \in F_2$ ya que son números complejos y son raíces de los polinomios $X - 1, X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. También se verifica que $F_1 \subseteq F_2$. Como F_2 es un cuerpo, cualquier combinación lineal de sus elementos $\alpha + \beta i$ con $\alpha, \beta \in F_1$ está en F_2 . Esto completa la inclusión.

$F_2 \subseteq F_1[i]$ Sea $\alpha + \beta i \in F_2$ raíces de cierto polinomio $p \in \mathbb{Q}[X]$ y queremos ver que $\alpha, \beta \in F_1$. Por el lema 1.2, ya que $\sigma(\alpha + i\beta) = \alpha - i\beta$ es un endomorfismo por cálculo directo, se tiene que la raíz conjugada $\alpha - i\beta$ también es raíz de $p \in \mathbb{Q}[X]$. En consecuencia como claramente $\frac{1}{2}, \frac{1}{2i} \in F_2$ y F_2 es cuerpo y como $\alpha = \frac{\alpha+i\beta}{2} + \frac{\alpha-i\beta}{2} \wedge \beta = \frac{\alpha+i\beta}{2i} - \frac{\alpha-i\beta}{2i}$ se tiene que $\alpha, \beta \in F_2$ y como $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica claramente que $\alpha, \beta \in F_1$, como se quería. \square

EJERCICIO 1.2: Calcular:

- $Irr(\sqrt{2}, \mathbb{F}_3)$
- $Irr(\sqrt[4]{2}, \mathbb{F}_3)$
- $Irr(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}, \mathbb{F}_3)$
- $Irr(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$

Para determinar los valores α que corresponden a cada una de las expresiones ambiguas $\sqrt[4]{}$ nos vamos a ir a un cuerpo extensión. Uno natural es $\mathbb{F}_9 \cong \frac{\mathbb{F}_3[X]}{\langle x^2+2x+2 \rangle} \cong \mathbb{F}_3[\sqrt{2}]$.

1. Por definición si $\alpha = \sqrt{2}$ entonces $\alpha^2 - 2 = 0$ y por tanto, α será un número algebraico sobre \mathbb{F}_3 que anula al polinomio $p(X) = X^2 - 2$. Este polinomio es irreducible y mónico sobre \mathbb{F}_3 ya que no tiene raíces en \mathbb{F}_3 . Como α es una raíz suya deducimos que $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3) = X^2 - 2$.

Obsérvese que en el cuerpo extensión estas raíces son $\alpha = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

2. Por definición si $\alpha = \sqrt[4]{2}$ entonces $\alpha^4 - 2 = 0$ y por tanto, α será un número algebraico sobre \mathbb{F}_3 que anula al polinomio $p(X) = X^4 - 2$. Este polinomio no es irreducible sobre \mathbb{F}_3 . Veámoslo.

Como p no tiene raíces sobre \mathbb{F}_3 , no tiene factores de grado 1 ni de grado 3. Luego sólo puede tener factores de grado 2. Los irreducibles de grado 2 en $\mathbb{F}_3[X]$ son $X^2 + 1, X^2 + X + 2, X^2 + 2X + 2$ y realizando la división euclídea se tiene que $p(X) = (X^2 + X + 2)(X^2 + 2X + 2)$. Por ser α una raíz del polinomio p será una raíz del polinomio $X^2 + X + 2$ o $X^2 + 2X + 2$ que como son mónicos e irreducibles son candidatos a ser $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3)$.

Las raíces $\alpha = 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ tienen $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3) = X^2 + 2X + 2$ y las raíces $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}$ tienen $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3) = X^2 + X + 2$.

3. Primero obtenemos un polinomio que se anule en α mediante cálculo directo:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} \\ (\alpha - \sqrt{2})^2 &= \sqrt{2} \\ (\alpha^2 + 2)^2 &= ((2\alpha + 1)\sqrt{2})^2 \\ \alpha^4 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 2 &= 0 \\ \alpha^4 - \alpha^2 + \alpha + 2 &= 0 \\ (\alpha - 1)^2(\alpha^2 + 2\alpha^2 + 2) &= 0\end{aligned}$$

La raíz $\alpha = 1$ tiene $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3) = X - 1$ y las raíces $\alpha = 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ tienen $Irr(\alpha, \mathbb{F}_3) = X^2 + 2X + 2$.

Nos damos cuenta que esto no puede contener a todas las sumandos de las raíces halladas en los apartados 1 y 2. La razón es que en el primer paso hemos asumido implícitamente que $\sqrt{2} = (\sqrt[4]{2})^2$. Pero también podríamos elegir $\sqrt{2} = -(\sqrt[4]{2})^2$. Los cálculos en este caso son los siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} \\ (\alpha - \sqrt{2})^2 &= -\sqrt{2} \\ (\alpha^2 + 2)^2 &= ((2\alpha - 1)\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 8\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha^4 - \alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

$$(\alpha - 2)^2(\alpha^2 + \alpha + 2)$$

Por tanto, si $\alpha = 2$ obtengo que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{F}_3) = X - 2$ y si $\alpha = 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$ tienen $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{F}_3) = X^2 + X + 2$.

4. Repitiendo el proceso anterior, llegamos al polinomio

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 2 = 0$$

Esto nos da como candidato a polinomio mínimo $p(X) = X^4 - 4X^2 - 8X + 2$.

Sabemos que estudiar la irreducibilidad de un polinomio primitivo en \mathbb{Z} es equivalente a estudiarla en \mathbb{Q} . Entonces en nuestro caso basta aplicar el criterio de Eisenstein con un primo $p = 2$ para obtener que es irreducible.

Dado que p es irreducible, mónico y α debe ser raíz de p deducimos que

$$\text{Irr}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}) = X^4 - 4X^2 - 8X + 2$$

2. Problema2

EJERCICIO 2.1: Hallar $\sigma \in \mathbb{F}_{3^6}^X$ con $gr(Irr(\sigma, \mathbb{F}_3)) = 6$ y expresarlo como elemento de $\mathbb{F}_3(\alpha)$ donde α es una raíz del polinomio $q = X^6 + X + 2$ (que es un generador de $\mathbb{F}_{3^6}^X$).

Necesitamos un polinomio p mónico e irreducible sobre \mathbb{F}_3 tal que algún polinomio X^i con $i < 728$ al dividirlo por p de resto 1.

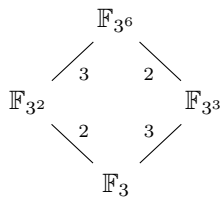
Los factores irreducibles del polinomio $X^{3^6} - X$ son los irreducibles sobre \mathbb{F}_3 de grado divisor de 6. En Mathematica esta lista se puede obtener mediante el comando

$$\text{Factor}[X^{729} - X, \text{Modulus} \rightarrow 3]$$

Tras un par de comprobaciones el polinomio $p = 2 + x + x^2 + 2x^3 + x^6$ verifica que x^{104} da 1 de resto al dividirse por p . Tenemos entonces un σ que no puede ser generador. La expresión de σ en $\mathbb{F}_3(\alpha)$ se obtiene al dividir p mediante el polinomio q de donde obtenemos el polinomio $2X^3 + X^2$ visto como elemento en $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{\langle X^6 + X + 2 \rangle}$ el correspondiente elemento en $\mathbb{F}_3(\alpha)$ es $\alpha^2 + 2\alpha^3$.

EJERCICIO 2.2: Un elemento $\beta \in \mathbb{F}_{729}$ de orden 8 en $\mathbb{F}_{3^6}^X$ da una extensión $\mathbb{F}_3(\beta) = \mathbb{F}_9$

Observemos primero la construcción sobre la cual trabajan este ejercicio y el posterior.



Un cuerpo de p^m elementos es subcuerpo de otro con p^n si y sólo si $m|n$.

Volviendo a nuestro problema, si $\beta^8 = 1$ esto implica que β es raíz del polinomio $X^9 - X$ y por tanto, su polinomio mínimo será un factor irreducible de este. Pero los factores irreducibles de este deben tener grado divisor de 2. Luego deben ser de grado 1 o grado 2. De hecho, si observamos la descomposición en Mathematica mediante la orden

$$\text{Factor}[X^9 - X, \text{Modulus} \rightarrow 3]$$

obtenemos los polinomios $X, (1 + X), (2 + X), (1 + X^2), (2 + X + X^2), (2 + 2X + X^2)$. Como β es de orden 8 β no puede ser 0, 1, 2 ya que estos tienen orden $\infty, 1, 2$ respectivamente luego tiene que ser raíz de los de grado 2. Esto implica que $\mathbb{F}_3(\beta) = \mathbb{F}_9$.

EJERCICIO 2.3: Analiza qué ocurre al considerar el elemento σ para encontrar elementos que generen las extensiones \mathbb{F}_{3^2} y \mathbb{F}_{3^3} .

Como ya habíamos comentado el orden es 104. En el primer caso, el método anterior donde tomamos $\sigma^{\frac{104}{8}} = \sigma^{13}$ entonces el método funciona y se obtiene cero al comprobar donde el polinomio irreducible del que es raíz σ resulta ser $X^2 + X + 2$. Sin embargo, aunque $\sigma^{\frac{104}{26}} = \sigma^4$ que es un elemento de orden 26, aparentemente no sirve para generar la extensión \mathbb{F}_{3^3} . Actualmente, no sabemos por qué se obtiene este resultado. Podríamos ser un poco tramposos y cambiar el polinomio por uno tal que 26 no divida su orden. Pero dejamos para una posterior revisión determinar la razón de que no funcione para este elemento.

EJERCICIO 2.4: Determina el polinomio $Irr(\alpha, \mathbb{F}_{27})$. Para el elemento σ que encontraste al inicio calcula $Irr(\sigma, \mathbb{F}_9)$ y $Irr(\sigma, \mathbb{F}_{27})$

Primero hacemos algunos comentarios al método del guión de prácticas. α es raíz de un polinomio mónico irreducible de grado 3 sobre $\mathbb{F}_3(\delta)$ ya que el grado de la extensión $\frac{\mathbb{F}_{3^6}}{\mathbb{F}_{3^2}}$ es 3. El resto de cálculos tiene sentido porque los elementos de $\mathbb{F}_3(\delta)$ son las imágenes de clases de $\frac{\mathbb{F}_3[X]}{\langle X^2+X+2 \rangle}$ por la evaluación en δ esto es polinomios $a\delta + b$ con $a, b \in \mathbb{F}_3$.

Cálculo de $Irr(\alpha, \mathbb{F}_{27})$. Del mismo modo expresamos $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3(\epsilon)$ con ϵ una raíz del polinomio X^3+2X+1 . Se obtienen tres posibles valores para ϵ :

$$\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4$$

$$1 + \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4$$

$$2 + \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4$$

Observamos que los elementos de $\mathbb{F}_3(\epsilon)$ son polinomios de grado dos evaluados en ϵ y como estamos buscando $Irr(\alpha, \mathbb{F}_{27})$ el sistema a resolver tendrá la forma:

$$(b00 + b01 * \epsilon + b02 * \epsilon^2) + (b10 + b11 * \epsilon + b12 * \epsilon^2)X + X^2$$

Realizando las sustituciones correspondientes a esta observación se obtiene el polinomio

$$2\epsilon + 2\epsilon^2 + X(1 + \epsilon) + X^2$$

Cálculo de $Irr(\sigma, \mathbb{F}_9)$. Repitiendo el proceso que aparece en el guión, cambiando el valor de PF a $X^6 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ nos va a aparecer un irreducible de la forma:

$$2 + 2\delta + X(2 + \delta) + X^3$$

Cálculo de $Irr(\sigma, \mathbb{F}_{27})$. Tenemos que combinar las modificaciones de los apartados anteriores respecto al valor de PF y respecto al sistema de ecuaciones a resolver. Obtenemos el polinomio:

$$2 + 2\epsilon + 2\epsilon^2 + X(2 + \epsilon) + X^2$$

EJERCICIO 2.5: Determinar el número de polinomios irreducibles de grado 30 sobre \mathbb{F}_3 y cuántos de ellos tienen raíces que son generadores del grupo multiplicativo de $\mathbb{F}_{3^{30}}$.

Vamos a clarificar el razonamiento empleado en el texto del ejercicio.

Proposición 2.1.

Cada seis raíces de $\mathbb{F}_{3^6} - \mathbb{F}_{3^2} - \mathbb{F}_{3^3}$ me están determinando polinomios irreducibles de grado 6 en $\mathbb{F}_3[X]$. Por tanto, hay 116 polinomios irreducibles de grado 6 sobre \mathbb{F}_3 .

Demostración. Nosotros hemos visto que los factores irreducibles de $X^{6^n} - X$ en $\mathbb{F}_3[X]$ son exactamente los polinomios irreducibles de $\mathbb{F}_3[X]$ con grado divisor de 6.

Por otro lado, \mathbb{F}_{3^6} es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^{6^n} - X$ y por tanto, el cuerpo que contiene a todas sus raíces.

Entonces los polinomios irreducibles de $\mathbb{F}_3[X]$ con grado divisor de 6 tienen también sus raíces en \mathbb{F}_{3^6} .

Una observado lo anterior, cada seis raíces de $\mathbb{F}_{3^6} - \mathbb{F}_{3^2} - \mathbb{F}_{3^3}$ me están determinando polinomios irreducibles de grado 6 en $\mathbb{F}_3[X]$. \square

Proposición 2.2.

Hay 248 generadores de \mathbb{F}_{729}^\times . Además, si una raíz de un polinomio irreducible es generadora (no es generadora) entonces también el resto de las raíces son generadoras (no son generadoras). Como consecuencia de los 116 polinomios irreducibles de grado 6 hay 48 cuyas raíces son generadoras y 68 cuyas raíces no son generadoras.

Demostración. La proposición sobre las propiedades del orden de un elemento de mis apuntes sobre teoría de grupos muestra que un grupo cíclico tiene $\phi(\text{ord}(a))$ generadores donde a es un generador del grupo. Entonces, como \mathbb{F}_{729}^\times tiene 728 elementos, basta calcular $\phi(728) = \phi(8)\phi(7)\phi(13) = 248$.

Por otra parte, como todo polinomio de grado 6 irreducible sobre $\mathbb{F}_3[X]$ con una raíz α admite 6 raíces distintas α^{3^i} con $i = 0, \dots, 5$, entonces si una raíz α es generadora esto quiere decir que $\text{ord}(\alpha) = 728$ y entonces $\text{ord}(\alpha^{3^i}) = \frac{728}{\text{mcd}(728, 3^i)} = 728$ y por tanto siguen siendo generadoras. Si α no fuera generadora entonces el resto no pueden ser generadoras, ya que si alguna lo fuera entonces también lo sería α .

Agrupando las generadoras en grupos de 6 se obtienen 48 polinomios cuyas raíces son generadoras y agrupando los 68 polinomios restantes, se obtienen polinomios cuyas raíces no son generadoras. \square

Veamos ahora el ejercicio.

En vez de calcular el número explícitamente utilizaremos la fórmula de Gauss para el número de polinomios mónicos irreducibles sobre $\mathbb{F}_p[X]$ de grado n (una prueba de este hecho basada en teoría de básica de cuerpos finitos y el principio de exclusión-inclusión aparece en nuestros apuntes):

$$|N_n| = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu(m) p^{\frac{n}{m}}$$

donde μ es la función de Mobius:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^s & n = \prod_{i=1}^s p_i \text{ para primos distintos } p_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$|N_{30}| = \frac{1}{30} (\mu(1)p^{30} + \mu(2)p^{15} + \mu(3)p^{10} + \mu(5)p^6 + \mu(6)p^5 + \mu(10)p^3 + \mu(15)p^2 + \mu(30)p)$$

$$|N_{30}| = \frac{1}{30} (p^{30} - p^{15} - p^{10} - p^6 + p^5 + p^3 + p^2 - p)$$

$$|N_{30}| = 6863037256208$$

Por otro lado hay $\phi(3^{30} - 1) = 70207948800000$ generadores de \mathbb{F}_{30} el mismo argumento que hemos hecho para el caso del documento de la práctica sirve aquí y entonces basta dividir por 30 para obtener el número de polinomios irreducibles de grado 30 cuyas raíces son generadoras. Este número es 2340264960000. El resto, 67867683840000 no son generadoras.

3. Problema 3

EJERCICIO 3.1: Sea $\frac{E}{K}$ una extensión de cuerpos algebraica y normal y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Si $f = f_1 f_2$ es una factorización en dos irreducibles de $E[X]$. Entonces:

1. Prueba que existe un automorfismo $\sigma : \frac{E}{K} \rightarrow \frac{E}{K}$ tal que $\sigma(f_1) = f_2$ y por tanto $\sigma(f_2) = f_1$.
2. Considera el polinomio $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ y el cuerpo $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. En $\frac{E}{K}$ tenemos la factorización en irreducibles $f = (X^2 - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}) = f_1 f_2$. Describe σ en este caso.
3. Justifica que $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}{\mathbb{Q}}, \frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ son extensiones normales y que $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}}$ no lo es.
4. Determina la clausura normal $\frac{F}{\mathbb{Q}}$ de $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}}$.
5. Calcular el grupo $\text{Aut}(\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}})$ y los automorfismos que dejan fijo a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Solución:

1. Con las mismas ideas con las que se prueba la unicidad del cuerpo de descomposición es fácil ver el siguiente resultado.

Corolario 3.1 (Elementos conjugados en cuerpos de descomposición).

Sea $p \in K[X]$ irreducible con cuerpo de descomposición F . Sean $\alpha, \beta \in F$ raíces de p . Entonces existe un isomorfismo $\sigma : F \rightarrow F$ sobre K tal que $\alpha \mapsto \beta$.

En nuestro caso para f podemos considerar que en la clausura algebraica descompone como

$$f = \prod (x - \alpha_i) \prod (x - \beta_i) \prod (x - \gamma_i)$$

donde α_i son raíces del polinomio f_1 y β_i son raíces del polinomio f_2 . Seleccionamos dos de estas raíces, sean α_1, β_1 . Por el corolario existe un isomorfismo $\sigma : F \rightarrow F$ sobre K tal que $\alpha_1 \mapsto \beta_1$ donde F es un cuerpo de descomposición de f .

Como $\frac{F}{K}$ es algebraica y $\frac{E}{K}$ es normal, $\frac{FE}{F}$ es normal. Extendemos el codominio de $\sigma : F \rightarrow FE$ y obtenemos un homomorfismo sobre K .

Extiendo σ a un automorfismo $\sigma_1 : FE \rightarrow FE$ sobre K y restringimos su dominio a $\sigma_2 : E \rightarrow FE$ obteniendo un homomorfismo sobre K . Observamos que $FE \subseteq \overline{F}$ ya que $\frac{FE}{F}$ es normal. También observamos que $\overline{F} = \overline{K}$ por la transitividad de la clausura. Esto permite ver σ_2 con codominio \overline{K} y aplicar la caracterización de normalidad sobre K .

Como $\frac{E}{K}$ es normal se tendrá que $\sigma_2(E) = E$ de modo que tenemos un automorfismo en E sobre K .

Este automorfismo verifica $\sigma_2(f_1) = f_2$ ya que como α_1 es raíz de f_1 entonces

$$0 = \sigma_2(f_1(\alpha_1)) = \sigma_1(f_1(\alpha_1)) = \overline{\sigma_1}(f)(\sigma_1(\alpha_1)) = \overline{\sigma_2}(f)(\beta_1)$$

es decir que el polinomio imagen, que es irreducible, tiene a β_1 como raíz. Luego tiene que ser $\text{Irr}(\beta_1, E)$ que es igual a f_2 .

2. Podemos representar $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ por expresiones de la forma $a + b\sqrt{2}$. Como todo los σ hallados fijaban K determinaremos el homomorfismo si determinamos $\sigma(\sqrt{2})$.

Consideramos el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$. De forma natural este sería

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$$

donde la igualdad se comprueba viendo que la inclusión de los generadores en cada dirección. Por otro lado, en el cuerpo de descomposición

$$X^2 + \sqrt{2} = (X - i\sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2})$$

$$X^2 - \sqrt{2} = (X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})$$

Simplemente elegimos que llevaremos $\sqrt[4]{2} \mapsto i\sqrt[4]{2}$ y entonces obtenemos que

$$\sigma(\sqrt{2}) = \sigma((\sqrt[4]{2})^2) = (\sigma(\sqrt[4]{2}))^2 = (i\sqrt[4]{2})^2 = -\sqrt{2}$$

esto determina completamente el homomorfismo y comprobaciones rutinarias muestran que $\sigma(f_1) = f_2$.

3. Usamos que la extensiones finitas y normales se pueden caracterizar por ser cuerpo de descomposición de algún polinomio.

Proposición 3.2.

Toda extensión $\frac{F}{K}$ de grado dos de un cuerpo es normal.

Si la extensión es de grado primo, en particular, es finita. Si es finita es algebraica. Tomo $u \in F \setminus K$ por el teorema del grado se verifica que

$$[F : K] = [F : K(u)][K(u) : K]$$

Si $[K(u) : K] = 1$ entonces $K(u) = K$ pero $u \notin K$. Contradicción. Por tanto, $[K(u) : K]$ es dos. Como la extensión es algebraica existe $\text{Irr}(u, K)$ y $\text{gr}(\text{Irr}(u, K)) = 2$. Este polinomio tendrá dos raíces en su cuerpo de descomposición, claramente $K(u)$ contiene una raíz pero por las ecuaciones de Cardano-Vieta

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$$

y sabemos que $\alpha + \beta \in K$ luego teniendo u tengo la otra raíz. De modo $K(u)$ es precisamente el cuerpo de descomposición de $\text{Irr}(u, K)$ y por tanto, $\frac{F}{K}$ es normal.

- a) $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}{\mathbb{Q}}$ es normal ya que $X^2 - 2$ es irreducible sobre \mathbb{Q} por el criterio de Eisenstein y por tanto la extensión tiene grado 2.
- b) $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ es normal ya que $X^2 - \sqrt{2}$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ con lo cual la extensión tiene grado 2. En efecto, será irreducible si y solo si no tiene raíces. Las raíces son de la forma $a + b\sqrt{2}$ y operando se llega a la ecuación

$$a^2 + 2b^2 = \sqrt{2}(1 - 2ab)$$

Por distinción de casos, si $1 - 2ab = 0$ entonces se llega a $\sqrt{2} = 0$ y si $1 - 2ab \neq 0$ entonces $\sqrt{2} = \frac{a^2 + 2b^2}{1 - 2ab} \in \mathbb{Q}$ ambos casos son contradicciones.

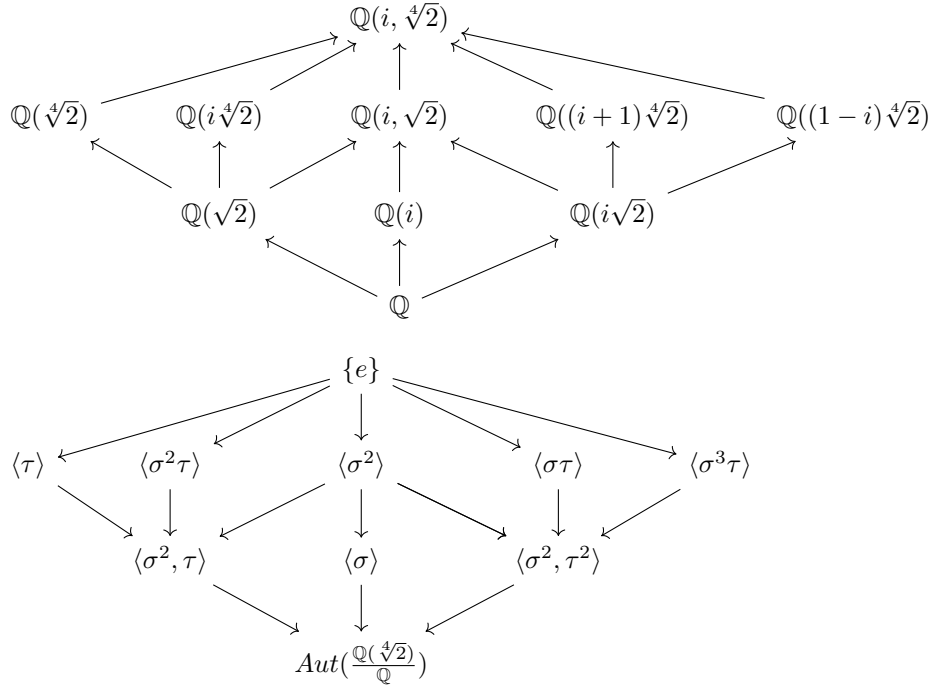
- c) $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}}$ no es normal. Si la extensión normal todo polinomio irreducible con una raíz en el cuerpo extensión descompondría en factores lineales. Pero $X^4 - 2$ es un polinomio irreducible sobre \mathbb{Q} por el criterio de Eisenstein y $\sqrt[4]{2}$ es una raíz que está en el cuerpo extensión y sin embargo, no puede descomponer en polinomios lineales ya que este cuerpo sólo contiene las raíces reales y hay dos complejas.
4. La clausura normal de una extensión de generación finita está caracterizada como el cuerpo de descomposición del producto de los irreducibles asociados a los generadores. En este caso sólo hay un generador y el cuerpo de descomposición del polinomio mínimo $X^4 - 2$ es conocido como $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

5. Claramente, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ y como las extensiones finitas de \mathbb{Q} son separables $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}}$ es una extensión de Galois. Por tanto,

$$\text{Aut}\left(\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}{\mathbb{Q}}\right) = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 8$$

Los candidatos para ser imagen de $\sqrt[4]{2}$ son $\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}$ y los candidatos para ser imagen de i son $i, -i$. Luego en efecto, todas estas posibilidades se dan.

La correspondencia de Galois viene expresada mediante los siguientes diagramas:



donde

$$\sigma(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$$

$$\sigma(i) = i$$

$$\tau(i) = -i$$

$$\tau(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$$

Realizando los cálculos en una tabla, tenemos que τ deja fijo a $\alpha = \sqrt[4]{2}$ por tanto, también deja fijo a α^2 . Por otro lado, σ^2 lleva α^2 a α^2 . Por tanto, el subgrupo que deja fijo a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ será $\langle \sigma^2, \tau \rangle$.

4. Problema 4

EJERCICIO 4.1: Sea $\frac{E}{K}$ una extensión finita de Galois y $\alpha \in \frac{E}{K}$. Vamos a determinar el polinomio irreducible de α sobre K .

Consideramos todos los conjugados de α , esto es, el conjunto $C = \{\sigma(\alpha) : \sigma \in \text{Gal}(\frac{E}{K})\}$ en el que no hay elementos repetidos ya que es un conjunto, y definimos $f(X) = \prod_{\beta \in C} (X - \beta)$. Entonces α es una raíz de $f(X)$.

1. Prueba que $f(X) \in K[X]$
2. Prueba que $f(X)$ es irreducible sobre K . Como consecuencia $f(X) = \text{Irr}(\alpha, K)$.
3. Considera la extensión $\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})}{\mathbb{Q}}$, prueba que es una extensión de Galois.
4. Determinar $\text{Gal}\left(\frac{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})}{\mathbb{Q}}\right)$ y $\text{Irr}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{-3}, \mathbb{Q})$
5. Considera la clausura normal E/\mathbb{Q} de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$, que es una extensión de Galois y describe E .
6. Determina $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ e $\text{Irr}(i + \sqrt{2} + \sqrt{-2}, \mathbb{Q})$.

Solución:

Discutamos primero la información que proporciona el enunciado. Teníamos la definición de conjugados sobre un cuerpo K que podía ser caracterizada como aquellos elementos de la clausura $u, v \in \overline{K}$ que tenían el mismo polinomio mínimo sobre el cuerpo, $\text{Irr}(u, K) = \text{Irr}(v, K)$.

Desde aquí vamos a observar que dado un $\alpha \in E \setminus K$, sus elementos conjugados son precisamente los que dice el enunciado (si $\alpha \in K$ él es su único conjugado).

Observamos que los automorfismos $\sigma \in \text{Gal}(\frac{E}{K})$ extienden a la identidad en K pues por definición fijan los elementos de K . Como el isomorfismo extendido a polinomios con $X \rightarrow X$ de la identidad es $\overline{1_K} = 1_{K[X]}$ en particular se tiene que $\text{Irr}(\alpha, K) = \text{Irr}(\sigma(\alpha), K)$. Por tanto, C está incluido en los conjugados de α .

Pero también se da el recíproco, esto es los conjugados de α están todos en E . En efecto, como la extensión es de Galois finita entonces en particular es normal y entonces $\text{Irr}(\alpha, K)$ al ser irreducible y tener una raíz en E descompone en factores lineales en E luego cualquier conjugado de α también está en E .

Finalmente, como $\text{Gal}(\frac{E}{K})$ es un grupo claramente $\alpha \in C$ con $\sigma = 1$.

Volviendo al ejercicio:

1. Sea $\sigma \in \text{Gal}(\frac{E}{K})$ sabemos que como σ extiende a la identidad las raíces del polinomio f se aplican en raíces del polinomio f mediante σ y como σ es un automorfismo, determina sobre las raíces una permutación.

Entonces cuando consideramos la extensión de σ a los polinomios con $X \rightarrow X$ que denotamos por $\bar{\sigma}$ lo que obtenemos es

$$\bar{\sigma}(f)(x) = \bar{\sigma}\left(\prod (x - \beta)\right) = \prod (x - \sigma(\beta)) = f(x)$$

Por tanto, σ deja invariantes a los coeficientes del polinomio y como esta igualdad no depende de σ se tiene que $f \in E^G[X] = K[X]$

2. Por la observación previa tenemos que C y el conjunto de los conjugados de α coinciden y en particular tienen el mismo cardinal.

Observamos también que como la extensión es de Galois finita, es una extensión separable, esto quiere decir que el polinomio $\text{Irr}(\alpha, K)$ no tiene raíces múltiples en E , cuerpo en el que descompone totalmente. Por tanto, cada conjugado determina un único factor lineal esto es,

$$gr(f) = |\{\text{conjugados de } \alpha\}| = gr(\text{Irr}(\alpha, K))$$

y dado que α es raíz de f tenemos que f es un polinomio de grado mínimo del que α es raíz. Por tanto, f es irreducible sobre K y $f = \text{Irr}(\alpha, K)$.

3. La extensión es de Galois puesto que es el cuerpo de descomposición del polinomio:

$$(X^3 - 3)(X^2 + 3) \in \mathbb{Q}[X]$$

que es separable por ser \mathbb{Q} un cuerpo de característica cero y por tanto perfecto.

4. Consideramos la torre:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})$$

El polinomio $X^3 - 3$ es irreducible sobre \mathbb{Q} ya que no tiene raíces en \mathbb{Q} y entonces la primera extensión es de grado 3. La base de la segunda extensión está incluida en \mathbb{R} y entonces claramente el polinomio $X^2 + 3$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ y por tanto la segunda extensión es de grado 2. Por el teorema del grado, la extensión total es de grado 6. Por tanto, hay exactamente 6 elementos en el grupo de Galois de la extensión. Como grupos de orden $2p$ con p primo sólo hay un cíclico y un diédrico. Por tanto, para clasificar este grupo estudiamos el orden de sus elementos.

Para hacer los cálculos hay que observar que $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ y que $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$.

notación	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt{-3}$	orden
Id	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt{-3}$	1
s	$\sqrt[3]{3}$	$-\sqrt{-3}$	2
r	$\omega \sqrt[3]{3}$	$\sqrt{-3}$	3
rs	$\omega \sqrt[3]{3}$	$-\sqrt{-3}$	2
r^2	$\omega^2 \sqrt[3]{3}$	$\sqrt{-3}$	3
r^2s	$\omega^2 \sqrt[3]{3}$	$-\sqrt{-3}$	2

En estas condiciones es isomorfo a D_3 .

Para calcular $\text{Irr}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{-3}, \mathbb{Q})$ tenemos que hacer algunos cálculos:

$$\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt{-3} \implies (\alpha - \sqrt{-3})^3 = 3 \implies \alpha^3 - 3\alpha - 3 = \sqrt{-3}(\alpha^2 - 3) \implies \alpha^6 - 6\alpha^4 - 6\alpha^3 + 3\alpha^2 + 18\alpha + 9 = 0$$

Para investigar la naturaleza de este polinomio lo reducimos módulo 2 obteniendo $p(X) = X^6 + X^2 + 1$. Vemos que no tiene raíces y entonces no puede tener en $\mathbb{Z}_2[X]$ factores de grado 1 o 5. El único irreducible de grado en $\mathbb{Z}_2[X]$ es $X^2 + X + 1$ y comprobamos que el resto de la división euclídea es $X + 1$ y por tanto, el polinomio no tiene factores de grado 2 o 4. Sin embargo resulta que $p(X) = (X^3 + X + 1)^2$ lo que nos dice que si tuviera factores serían de grado 3.

Volviendo a \mathbb{Z} vemos por ensayo y error que $X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 3X^2 + 18X + 9 = (X^3 - 3X - 3)^2$ y por el criterio de Eisenstein con $p = 3$ se obtiene que $X^3 - 3X - 3$ es irreducible. De donde, $\text{Irr}(\sqrt[3]{3} + \sqrt{-3}, \mathbb{Q}) = X^3 - 3X - 3$.

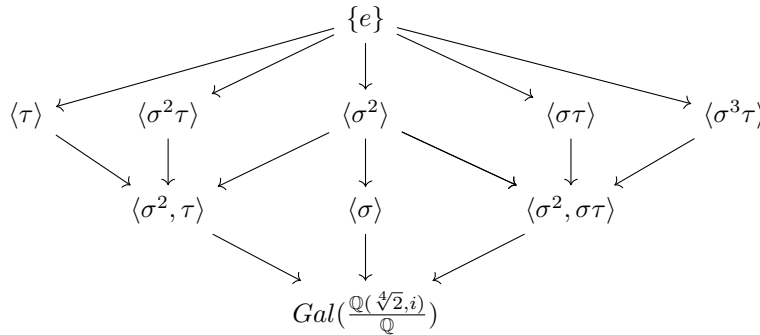
5. Claramente, $Irr(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}) = X^4 - 2$ y su cuerpo de descomposición es $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$. Esta es la clausura normal ya que la extensión es finita y tiene un solo generador. La clausura normal siempre es una extensión normal y en este caso vemos claramente que la extensión es separable puesto que los generadores tienen polinomios mínimos sobre \mathbb{Q} son $X^4 - 2, X^2 + 1$ que tienen todas sus raíces distintas, luego son separables. Por tanto, tenemos una extensión de Galois. Vamos a describir esta extensión.

Considerando la torre $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ vemos claramente que la extensión tiene grado 8 y por el teorema de Artin, $|Gal(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q})| = 8$. Para determinar el grupo calculamos los de los elementos.

notación	i	$\sqrt[4]{2}$	orden
Id	i	$\sqrt[4]{2}$	1
σ	i	$i\sqrt[4]{2}$	4
σ^2	i	$-\sqrt[4]{2}$	2
σ^3	i	$-i\sqrt[4]{2}$	4
τ	$-i$	$\sqrt[4]{2}$	2
$\sigma\tau$	$-i$	$-\sqrt[4]{2}$	2
$\sigma^2\tau$	$-i$	$i\sqrt[4]{2}$	2
$\sigma^3\tau$	$-i$	$-i\sqrt[4]{2}$	2

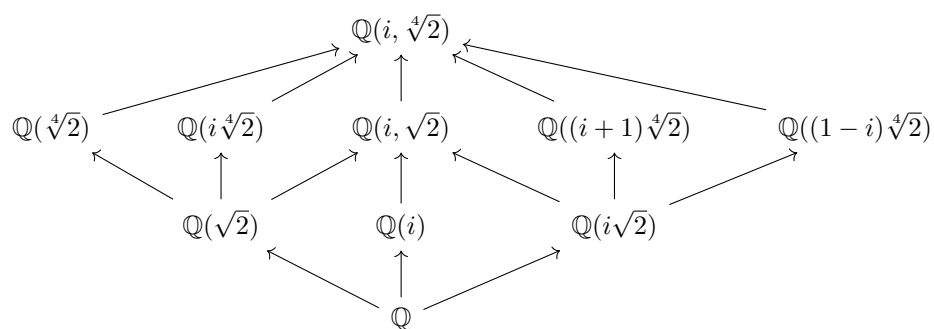
Si observamos que el grupo no es abeliano entonces tenemos que el grupo es D_4 .

La correspondencia de Galois viene expresada mediante los siguientes diagramas:



Los subgrupos de orden 2 son cíclicos por ser 2 un primo y por tanto, están generados por los elementos del grupo de orden 2 y por tanto hay 5. Los subgrupos de orden $4 = 2^2$ son o bien cíclicos o bien producto de cíclicos de orden 2. Estos últimos son los llamados de tipo Klein y para identificarlos debemos tomar dos elementos de orden 2 que conmuten entre sí. Se obtienen los subgrupos representados en la figura superior.

Observamos también que todos los de orden 4, por ser de índice 2 son subgrupos normales y entre los de orden 2 el único que es normal es el generado por el elemento que está el centro del grupo σ^2 .



Ahora pasamos a determinar la conexión de Galois entre estos subgrupos y los subcuerpos de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$. Para ello determinamos los cuerpos fijos por cada subgrupo ya que están en biyección. Para ello vemos como actúa cada isomorfismo sobre los elementos de una \mathbb{Q} -base.