Problema 7

Ejercicio 0.12: Se considera $f \in \mathbb{Q}$ un polinomio de grado seis tal que $Gal(f/\mathbb{Q}) \cong S_6$. Llamamos $E = \mathbb{Q}[f]$ al cuerpo de descomposición de f.

1. Determina cuántos cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq E$ existen tales que $[E : F] = 9$.
2. Prueba que la intersección de los cuerpos F,del apartado anterior, contiene propiamente a $\mathbb{Q}$.
3. Si $\alpha_1 \in E$ es una raíz de f, prueba que $Gal(E/\mathbb{Q}(\alpha_1)) \cong S_5$.
4. Prueba que $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ no está contenido en ningún F.
5. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in E$ es otra raíz de f, prueba que $Irr(\alpha_2, \mathbb{Q}(\alpha_1))$ tiene grado 5.

Solución:

1. Si $[E : F] = 9$ habrá tantos como subgrupos de orden 9 tenga S_6. Estos pueden ser a priori, tipo C_9 o tipo $C_3 \times C_3$. Usando la descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos y que permutaciones disjuntas tienen como orden el mínimo commún múltiplo de los órdenes de las permutaciones, se deduce que el máximo orden es 6. Por tanto, todos deben ser tipo $C_3 \times C_3$.

   Los subgrupos de este tipo son generados por ciclos disjuntos de la forma $\langle(123), (456)\rangle$. Hay por tanto, $\frac{\binom{6}{3}}{2} = 10$ subgrupos.

2. Primero, por la teoría de Galois, sabemos que $\cap F$ se corresponde con $\vee H$ donde los H son los subgrupos que fijan los F.

   Segundo, para los ciclos anterior se verifica $\langle(123), (456)\rangle = \langle 123\rangle \cdot \langle(456)\rangle = \langle(123)\rangle \vee \langle(456)\rangle$ donde hemos utilizado la descripción de los subgrupos generados por conjuntos finitos y el teorema del producto de Lederman (en nuestras le damos este nombre).

   En consecuencia, el subgrupo buscado es $\vee H = \vee$ 3-ciclos de $S_6 \leq A_6$ está formado por permutaciones pares y en consecuencia, no puede ser el total. De nuevo, por la correspondencia de Galois el cuerpo correspondiente no es $\mathbb{Q}$.

3. Para este apartado utilizamos el teorema de los irracionales naturales de forma práctica tal como aparece en el libro de Cox. En un ambiente Galois finito se tiene el isomorfismo:

   $$Gal(KL/K) \cong Gal(L/K \cap L)$$

   Si llamamos $K = \mathbb{Q}(\alpha_1), l = \mathbb{Q}(\alpha_2, \ldots, \alpha_6)$ entonces tendremos:

   $$Gal(E/\mathbb{Q}(\alpha_1)) \cong Gal(\mathbb{Q}(\alpha_2, \ldots, \alpha_6))$$

   Por otro lado, sabemos que existe un homomorfismo inyectivo de $Gal(\mathbb{Q}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n))$ a S_5 y al ser $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_6$ cualquier permutación de las 5 raíces está en este grupo (la primera raíz se deja fija en el grupo $Gal(E/\mathbb{Q})$. En consecuencia, $Gal(\mathbb{Q}(\alpha_2, \ldots, \alpha_6)) \cong S_5$.

4. Si $\mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq F$ entonces $H \leq S_5$ donde H es el subgrupo que fija a F. Pero esto es imposible ya que $9 = |F| \nmid |S_5| = 120$.

5. El polinomio $\prod_{i=2}^{6}(x - \alpha_i) \in \mathbb{Q}(\alpha_1)[X]$ por el algoritmo de la división sobre cuerpos. Claramente, α_2 es una raíz de este polinomio y dado qque hemos visto que el grupo de Galois es S_5 que es un

subgrupo transitivo de S_5, tendremos que el polinomio es irreducible. Por tanto:

$$Irr(\alpha_2, \mathbb{Q}(\alpha_1)) = \prod_{i=2}^{6}(x - \alpha_i)$$

que tiene grado 5.