16 Módulos finitamente generados

Un R–módulo derecha M es **finitamente generado** si existen $m_1, \ldots, m_t \in M$ verificando que para cada $m \in M$ existen $r_1, \ldots, r_t \in R$ tales que $m = \sum_{i=1}^{t} m_i r_i$. Como consecuencia, existe un homomorfismo sobreyectivo $R^t \longrightarrow M$, que es una propiedad que caracteriza a los módulos finitamente generados.

Lemma. 16.1.
(1) Todo cociente de un módulo finitamente generado es finitamente generado.
(2) La suma directa de un numero finito de módulos finitamente generados es finitamente generado.

Proposition. 16.2.
Todo módulo finitamente generado no nulo tiene un submódulo maximal.

PROOF. Dado un módulo finitamente generado no nulo M, definimos $\Gamma = \{N \subseteq M \mid N \neq M\}$. Es claro que $0 \in \Gamma$, luego $\Gamma \neq \emptyset$. Cada cadena de elementos de Γ tiene una cota superior en Γ, por tanto Γ tiene elementos maximales; cada elemento maximal de Γ es un submódulo maximal. □

Exercise. 16.3.
El grupo abeliano $\mathbb{Q}$ no contiene subgrupos maximales.
Ref.: 2102e_021 *SOLUTION*

SOLUTION. Exercise (16.3.)
Sea $N \subseteq \mathbb{Q}$ un subgrupo maximal, por tanto $\mathbb{Q}/N$ es un grupo abeliano simple, y existe $p \in \mathbb{Z}$ primo positivo tal que $\mathbb{Q}/N \cong \mathbb{Z}_p$. Si $\mathbb{Q}/N = \langle r+N \rangle \cong \mathbb{Z}_p$, consideramos $\frac{r}{p}+N$. Si $\frac{r}{p} \in N$, entonces $r \in N$, lo que es una contradicción; entonces $\frac{r}{p} \notin N$, esto es, $\frac{r}{p}+N$ es un generador de $\mathbb{Q}/N \cong \mathbb{Z}_p$, y por tanto $0 = p\left(\frac{r}{p}+N\right) = r+N \neq 0$, lo que es una contradicción. □

Como consecuencia $\mathbb{Q}$ no es un grupo abeliano finitamente generado.

2102-09.tex

Lemma. 16.4.
Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de* R*–módulos derecha. Si* M' *y* M'' *son finitamente generados, entonces* M *es finitamente generado.*

PROOF. Sea $\{m'_1, \ldots, m'_t\}$ un sistema de generadores de M', y $\{m''_1, \ldots, m''_s\}$ un sistema de generadores de M''. Si $m_i \in M$ es una preimagen de m''_i, para $i = 1, \ldots, s$, y si identificamos $M' \longrightarrow M$ con la inclusión, entonces $\{m'_1, \ldots, m'_t\} \cup \{m_1, \ldots, m_s\}$ es un sistema de generadores de M. □

Vamos a ver condiciones equivalentes a la de ser finitamente generado.

Sabemos que cada módulo M es la unión de la familia formada por todos los submódulos finitamente generados, y que esta familia es dirigida superiormente. Vamos a usar este hecho para dar una caracterización de módulo finitamente generado.

Proposition. 16.5.
Sea M *un* R*–módulo derecha, son equivalentes:*

(a) M *es finitamente generado.*
(b) La unión de toda familia dirigida superiormente de submódulos propios de M *es un submódulo propio.*

PROOF. (a) $\Rightarrow$ (b). Si $\{N_i \mid i \in I\}$ es una familia dirigida superiormente de submódulos propios y $\cup_i N_i = M$, entonces existe un índice i tal que $m_1, \ldots, m_t \in N_i$ y $M = N_i$, lo que es una contradicción.
(b) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que M no es finitamente generado y consideramos la familia $\{N_i \mid i \in I\}$ de todos los submódulos finitamente generados. Tenemos: $\cup_i N_i \neq M = \cup_i N_i$, lo que es una contradicción. □

De cara a buscar nuevas caracterizaciones consideramos el comportamiento de $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ cuando M es finitamente generado. Se tiene:

Proposition. 16.6.
Si M *es un* R*–módulo derecha finitamente generado, para cada familia de* R*–módulos derecha* $\{M_i \mid i \in I\}$ *se tiene* $\mathrm{Hom}_R(M, \oplus_i M_i) \cong \oplus_i \mathrm{Hom}_R(M, M_i)$.

PROOF. Llamamos $q_j : M_j \longrightarrow \oplus_i M_i$ a la inclusión canónica; podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,M_j) \arrow[r, "g_j"] \arrow[dr, "(q_j)_*"'] & \oplus_i \mathrm{Hom}_R(M,M_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "g"] & \prod_i \mathrm{Hom}_R(M,M_i) \arrow[d, "\cong"] \\
& \mathrm{Hom}_R(M,\oplus_i M_i) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_R(M,\prod_i M_i)
\end{tikzcd}$$

Donde g existe por la propiedad universal de la suma directa, y está definida $g((f_i)_i) = \sum_i q_i j_i$. Es claro que g es un monomorfismo. Para ver que es un epimorfismo, sea $h \in \mathrm{Hom}_R(M,\oplus_i M_i)$; consideramos

$$M \xrightarrow{h} \oplus_i M_i \xrightarrow{p_j} M_j$$

y $(p_i h)_i \in \oplus_i \mathrm{Hom}_R(M,M_i)$, se tiene $g((p_i h)_i) = \sum_i q_i p_i h = (\sum_i q_i p_i)h = h$. □

¿Podría ser ésta propiedad, aplicada a M, equivalente a ser finitamente generado? Vamos a ver que no. Primero caracterizamos los R–módulos derecha M tales que $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con sumas directas.

Proposition. 16.7.
Si M es un R–módulo derecha, son equivalentes:
(a) $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ *conmuta con suma directas.*
(b) La unión de cada cadena numerable de submódulos propios es un submódulo propio.

PROOF. (a) ⇒ (b). Sea $\{N_i \mid i \in I\}$ una cadena submódulos propios tal que $\cup_i N_i = M$; consideramos los cocientes M/N_i y la propiedad universal del producto directo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dashed, "t"'] \arrow[dr, "t_j"] & \\
\prod_i \frac{M}{N_i} \arrow[r, "p_j"] & \frac{M}{N_i}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con sumas directas, entonces t se factoriza por $\oplus_i \frac{M}{N_i}$ ya que $\cup_i N_i = M$. Entonces se tiene $t = \sum_i p_i t$, pero todos los $p_j t = t_j \neq 0$, lo que es una contradicción.
(b) ⇒ (a). Supongamos que $\mathrm{Hom}_R(M,\oplus_i M_i) \neq \oplus_i \mathrm{Hom}_R(M,M_i)$; siempre se tiene $\oplus_i \mathrm{Hom}_R(M,M_i) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,\oplus_i M_i)$, luego existe $t \in \mathrm{Hom}_R(M,\oplus_i M_i)$ que tiene infinitas componentes no nulas; estas son $t_j := p_j t$. Podemos considerar $N \cong C \subseteq I$ de forma que $t_n = p_n t \neq 0$, y definimos $M \xrightarrow{t} \oplus_n M_n$, la restricción de t a este nuevo codominio. Definimos nuevos submódulos $H_m = \cap_{n>m} \mathrm{Ker}(p_n f)$, que forman una cadena ascendente, posiblemente no estrictamente ascendente, de submódulos propios cuya unión es M ya que $t : M \longrightarrow \oplus_n M_n$, lo que es una contradicción. □

Podemos considerar propiedades en $\mathscr{L}(M)$ y propiedades de $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ y las relaciones entre las mismas.

M es finitamente generado si, y sólo si, $M \in \mathscr{L}(M)$ es **compacto**; para cada familia dirigida superiormente de submódulos propios la unión es un submódulo propio.

Otro concepto es el de **cad–compacto** en $\mathscr{L}(M)$; para cada cadena numerable de submódulos propios la unión es un submódulo propio.

Según hemos comprobado M es cad–compacto si, y sólo si, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con sumas directas, llamamos módulos **sum–compactos** a estos últimos. Observa que un R–módulo derecha M es sum–compacto si cada homomorfismo $f : M \longrightarrow \oplus_i M_i$ se factoriza por una suma directa finita. Como consecuencia cada cociente de un sum–compacto es sum–compacto.

Esto nos da pie a definir un módulo **compacto** si $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con límites directos.

La situación es la siguiente:

Prop. internas		**Prod. externas**
$M \in \mathscr{L}(M)$ elemento compacto módulo finitamente generado	$\Leftarrow$	M compacto $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con límites directos
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$M \in \mathscr{L}(M)$ elemento cad–compacto	$\Leftrightarrow$	M sum–compacto $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conmuta con sumas directas

Existen ejemplos de módulos sum–compactos que no son finitamente generados.

Example. 16.8.
Se considera un ordinal no numerable ω_1 y el grupo abeliano libre sobre ω_1, lo representamos por $G = \mathbb{Z}^{(\omega)}$; si en G consideramos el orden lexicográfico definido utilizando los órdenes naturales de $\mathbb{Z}$ y de ω_1, tenemos un grupo totalmente ordenado.

Sea K un cuerpo. Consideramos el conjunto de las series formales indizadas en G, esto es, expresiones del tipo $f = \sum_g k_g X^g$, con soporte bien ordenado en G^{op}, considerando el orden inverso, junto con la suma componente a componente y multiplicación dada por la regla

$$\sum_g k_g X^g \sum_g k'_g X^g = \sum_g \Big(\sum_{g_1+g_2=g} k_{g_1} k'_{g_2} \Big) X^g$$

Cada serie se escribe $k_{g_1} X^{g_1} + \cdots + k_{g_t} X^{g_t} + \cdots$, con $g_1 > \cdots > g_t > \cdots$. Para cada f definimos $\nu(f)$ como el menor $g \in G^{op}$ tal que $k_g \neq 0$.

Definimos R el anillo de las series f tales que $\nu(f)$ es menor que el elemento unidad de G; R es un dominio conmutativo y llamamos F a su cuerpo de fracciones (en realidad se tiene $F = K$). Tenemos que F es un R–módulo. Para cada $t \in \omega_1$ definimos $M_t = \{f \in F \mid \nu(f) \leq t\}$; si $t_1 \geq t_2$, entonces $M_{t_1} \subseteq M_{t_2}$; e indizando en ω_1, tenemos una cadena ascendente $\{M_t \mid t \in \omega_1\}$. Se tiene $\cup_t M_t = F$, y para cada t se tiene $M_t \neq F$; por lo tanto K no es un R–módulo finitamente generado.

Todos los submódulos de F son de la forma M_t, ó $M_{(t)} = \{f \in F \mid \nu(f) < t\}$, por lo tanto la unión de cualquier cadena numerable de submódulos propios es un submódulo propio, esto es, $\mathrm{Hom}_R(F,-)$ conmuta con sumas directas, es sum–compact y no es finitamente generado.

Proposition. 16.9.
Si R es un anillo noetheriano derecha, se tiene:

(1) Cada submódulo de un sum–compacto es sum–compacto.
(2) Cada sum–compacto es finitamente generado.

PROOF. (1). Si $N \subseteq M$ y existe $f : N \longrightarrow \oplus_i M_i$ un homomorfismo de módulos, podemos considerar la envolvente inyectiva E_i de cada M_i, y construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, dashed, "g"] \\ \oplus_i M_i \arrow[r] & \oplus_i E_i \end{tikzcd}$$

Como g se factoriza por una suma directa finita, también lo hace f.

(2). Supongamos que M es sum–compacto y no es finitamente generado, existe una cadena numerable ascendente de submódulos finitamente generados; $N_1 \subsetneqq N_2 \subsetneqq \cdots$; si llamamos $N = \cup_n N_n$, resulta que N no es sum–compacto, lo que es una contradicción. En consecuencia M tiene que ser finitamente generado. □

17 El retículo de submódulos

Retículos

Sea M un R–módulo derecha, y $\mathscr{L}(M)$ el conjunto de todos los submódulos N de M. En $\mathscr{L}(M)$ existe una relación de orden, definida por:

$$N_1 \leq N_2 \text{ si } N_1 \subseteq N_2.$$

Sea $\mathscr{P}$ la categoría cuyos objetos son los conjuntos parcialmente ordenados y homomorfismos de conjuntos p.o., en donde $f : (X_1, \leq) \longrightarrow (X_2, \leq)$ es un **homomorfismo de conjuntos p.o.** si es una aplicación $f : X_1 \longrightarrow X_2$ que verifica: si $x \leq y$, entonces $f(x) \leq f(y)$, para todos $x, y \in X_1$ es una **aplicación monótona**.

Existe un functor $\mathscr{L} : \mathbf{Mod}\text{–}R \longrightarrow \mathscr{P}$ definido por

- $\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(M)$, y
- si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ es un homomorfismo de módulos, $\mathscr{L}(f) = f_* : \mathscr{L}(M_1) \longrightarrow \mathscr{L}(M_2)$ está definido $f_*(N) = f(N)$ para cada $N \in \mathscr{L}(M_1)$.

Existe un functor contravariante $\mathscr{L} : \mathbf{Mod}\text{–}R \longrightarrow \mathscr{P}$ definido por

- $\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(M)$, y
- si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ es un homomorfismo de módulos, $\mathscr{L}(f) = f^* : \mathscr{L}(M_2) \longrightarrow \mathscr{L}(M_1)$ está definido $f^*(H) = f^{-1}(H)$ para cada $H \in \mathscr{L}(M_2)$.

Un **retículo** es un conjunto p.o. $(\mathscr{L}, \leq)$, tal que cada par de elementos tiene un supremo y un ínfimo. Dados $a, b \in \mathscr{L}$ el **supremo** se representa por $a \vee b$, y el **ínfimo** por $a \wedge b$.

Proposition. 17.1.
En todo retículo $(\mathscr{L}, \leq)$, para cualesquiera $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{L}$ se verifican las siguientes propiedades:

(1) ***Asociatividad.*** $a_1 \vee (a_2 \vee a_3) = (a_1 \vee a_2) \vee a_3$.
(2) ***Conmutatividad.*** $a_1 \vee a_2 = a_2 \vee a_1$.
(3) ***Absorción.*** $a_1 \vee (a_1 \wedge a_2) = a_1$.
(4) ***Idempotencia.*** $a_1 \vee a_1 = a_1$.

Y las propiedades duales:

(1') ***Asociatividad.*** $a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = (a_1 \wedge a_2) \wedge a_3$.
(2') ***Conmutatividad.*** $a_1 \wedge a_2 = a_2 \wedge a_1$.
(3') ***Absorción.*** $a_1 \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1$.
(4') ***Idempotencia.*** $a_1 \wedge a_1 = a_1$.

2102-08.tex

Tenemos una forma alternativa de definir un retículo; podemos definir un **retículo abstracto** como una terna $(L, \vee, \wedge)$, siendo L un conjunto y $\vee$, $\wedge$ operaciones (binarias) en L que verifican las propiedades de la Proposición (17.1.). En todo retículo abstracto tenemos una relación de orden definida

$$a \leq b \text{ si } a \vee b = b.$$

Lemma. 17.2.
Si $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo abstracto, entonces

(1) $a \leq b$ si $a \vee b = b$, para $a, b \in L$, es una relación de orden.
(2) $a \vee b = b$ si, y sólo si, $a \wedge b = a$, para todo $a, b \in L$.

PROOF. (2). Si $a \vee b = b$, se tiene $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$. □

Si $f : (\mathscr{L}_1, \leq) \longrightarrow (\mathscr{L}_2, \leq)$ es un homomorfismo de conjuntos p.o. entre dos retículos, se tiene

$$\begin{array}{l} f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \text{ y} \\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \end{array}$$

para cada $a, b \in \mathscr{L}_1$. Como consecuencia, la categoría $\mathscr{L}$ de los retículos y homomorfismos de conjuntos p.o. es una subcategoría de la categoría $\mathscr{P}$ de los conjuntos p.o.

Definimos un **homomorfismo de retículos abstractos** $f : (L_1, \vee, \wedge) \longrightarrow (L_2, \vee, \wedge)$ como una aplicación $f : L_1 \longrightarrow L_2$ que cumple

$$\begin{array}{l} f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \text{ y} \\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \end{array}$$

para cada $a, b \in L_1$. Existe una categoría $\mathscr{L}'$, formada por los retículos abstractos y los homomorfismos de retículos abstractos.

Podemos pues identificar retículos y retículos abstractos, ya que existe un isomorfismo entre las categorías $\mathscr{L}$, de los retículos y homomorfismos de conjuntos p.o., y $\mathscr{L}'$ de los retículos abstractos y homomorfismos de retículos abstractos.

$$\mathscr{L}' \cong \mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{P}.$$

El retículo de los submódulos de un módulo

Dado un R–módulo a derecha M_R, llamamos $\mathscr{L}(M_R)$ al conjunto de todos los submódulos de M, y en él consideramos la relación de orden dada por $N_1 \leq N_2$ si $N_1 \subseteq N_2$. Tenemos:

Lemma. 17.3.
Para cada R–módulo derecha M se tiene que $\mathscr{L}(M)$ es un retículo.

- $N_1 \vee N_2 = N_1 + N_2$ *para cualesquiera* $N_1, N_2 \in \mathscr{L}(M)$.
- $N_1 \wedge N_2 = N_1 \cap N_2$ *para cualesquiera* $N_1, N_2 \in \mathscr{L}(M)$.

Retículos acotados

Un elemento c de un retículo $\mathscr{L}$ se llama un **cero** si $c \wedge a = c$ para cada $a \in \mathscr{L}$, esto es, $c \leq a$ para cada $a \in \mathscr{L}$, y un elemento $u \in \mathscr{L}$ se llama un **uno** si $u \vee a = u$ para cada $a \in \mathscr{L}$, esto es, $a \leq u$ para cada $a \in \mathscr{L}$.
Un retículo con elemento cero y elemento uno se llama un **retículo acotado**.

Exercise. 17.4.
Si $\mathscr{L}$ es un retículo y $c \in \mathscr{L}$ es un cero, se tiene $c \wedge a = a$ para cada $a \in \mathscr{L}$; y dualmente se tiene $u \vee a = a$.
Ref.: 2102e_022 *SOLUTION*

SOLUTION. Exercise (17.4.)
Es consecuencia de la ley de absorción: $c \vee a = (c \wedge a) \vee a = a$. □

Proposition. 17.5.
Para cada R–módulo derecha M se tiene que $\mathscr{L}(M)$ tiene cero y uno, esto es, es un retículo acotado. El cero es $0 = \{0\}$, y el uno es M.

Observa que si $f : \mathscr{L}_1 \longrightarrow \mathscr{L}_2$ es un homomorfismo de retículos, no necesariamente se tiene $f(c) = c$ y $f(u) = u$, esto es, no necesariamente se preservan el cero y el uno. Para cada homomorfismo de R–módulos derecha $h : M_1 \longrightarrow M_2$ se tiene que $h_*(0) = 0$, pero, en general $h_*(M_1) \neq M_2$. Igualmente, se tiene $h^*(M_2) = M_1$, pero $h^*(0) = \mathrm{Ker}(h)$, que no necesariamente es igual a 0.

Retículos modulares

Proposition. 17.6. (Ley modular)
Si $N_1, N_2, N_3 \in \mathscr{L}(M)$ son submódulos verificando $N_1 \subseteq N_3$, se verifica $N_1 \vee (N_2 \wedge N_3) = (N_1 \vee N_2) \wedge N_3$.

PROOF. La inclusión $\subseteq$ es inmediata. Por otro lado, si $x \in (N_1 \vee N_2) \wedge N_3$, existen $n_i \in N_i$ tales que $x = n_1 + n_2 = n_3$, por tanto $n_2 = n_3 - n_1 \in N_2 \wedge N_3$, y $x = n_3 = n_1 + (n_3 - n_1) \in N_1 \vee (N_2 \wedge N_3)$. □

Un retículo $\mathscr{L}$ que verifica la ley modular se llama un **retículo modular**. Por lo tanto para cada R–módulo derecha M se tiene que $\mathscr{L}(M)$ es un retículo modular.

De forma natural surge la pregunta de cuando en un retículo L con operaciones $\vee$ y $\wedge$, para cualesquiera $a, b, c \in L$ se tiene

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

El problema es que esta propiedad, la **ley distributiva**, no es cierta en todos los retículos de módulos, como el siguiente ejemplo prueba.

Example. 17.7.
Sea considera el anillo $\mathbb{Z}$ y el grupo abeliano $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; el retículo de los submódulos de M es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle (1,0) \rangle \arrow[dr, dash] & \langle (1,1) \rangle \arrow[d, dash] & \langle (0,1) \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \{(0,0)\} &
\end{tikzcd}$$

Si $a = \langle (1,0) \rangle$, $b = \langle (1,1) \rangle$ y $c = \langle (0,1) \rangle$, se tiene:

$$a \vee (b \wedge c) = \langle (1,0) \rangle \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Sin embargo, este retículo sí cumple la ley modular.

Remark. 17.8.
Existen ejemplos de retículos, definidos a partir de estructuras, que no verifican la ley modular; este es el caso del retículo de los subgrupos del grupo D_4. Si $D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = \sigma\tau\sigma\tau = 1 \rangle$,

tomando $N_1 = \langle\tau\rangle \subseteq \langle\tau,\sigma^2\rangle = N_3$ y $N_2 = \langle\tau\sigma\rangle$, se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
 & D_4 \arrow[dl, dash] \arrow[ddr, dash] & \\
N_3 = \langle\tau,\sigma^2\rangle \arrow[dd, dash] & & \\
 & & N_2 = \langle\tau\sigma\rangle \arrow[ddl, dash] \\
N_1 = \langle\tau\rangle \arrow[dr, dash] & & \\
 & \{1\} &
\end{tikzcd}$$

Como consecuencia, el retículo de los subgrupos de D_4 no es un retículo modular.

Retículos completos

Para cada R–módulo derecha M, en $\mathscr{L}(M)$ existen el supremo y el ínfimo de cada familia de submódulos $\{N_i \mid i \in I\}$; estos están definidos por

- $\vee_i N_i = \sum_i N_i$,
- $\wedge_i N_i = \cap_i N_i$.

Un retículo L en el que existe el supremo y el ínfimo de cada familia de elementos, se llama un **retículo completo**. Observa que todo retículo completo es un retículo acotado.

Retículos superiormente continuos y compactamente generados

En el retículo $\mathscr{L}(M)$ las familias dirigidas superiormente $\{N_i \mid i \in I\}$ verifican propiedades importantes. Por ejemplo, un submódulo $N \subseteq M$ es finitamente generado si cuando $N \subseteq \cup_i N_i$, existe un índice i_0 tal que $N \subseteq N_{i_0}$. Vamos a formalizar en un retículo el concepto de submódulo finitamente generado.

- Un retículo $\mathscr{L}$ es **superiormente continuo** si para cada familia dirigida superiormente $\{d_i \mid i \in I\}$, y cada elemento $d \in \mathscr{L}$ se tiene
$$d \wedge (\vee_i d_i) = \vee_i (d \wedge d_i).$$
- Un elemento $c \in \mathscr{L}$ es **compacto** si para cada familia dirigida superiormente $\{d_i \mid i \in I\}$ tal que $c \leq \vee_i d_i$, existe un índice i_0 tal que $c \leq d_{i_0}$.
- Un retículo $\mathscr{L}$ es **compactamente generado** si cada elemento es un supremo de una familia de elementos compactos.

Lemma. 17.9.
Si $c_1, c_2 \in \mathscr{L}$ son compactos, entonces $c_1 \vee c_2$ es compacto.

PROOF. Si $c_1 \vee c_2 \subseteq \vee_i d_i$, existen d_{i_1}, d_{i_2} tales que $c_j \leq d_{i_j}$, $j = 1, 2$. Como existe i_0 tal que $d_{i_1}, d_{i_2} \leq d_{i_0}$, entonces $c_1 \vee c_2 \leq d_{i_0}$. □

Corollary. 17.10.
En un retículo compactamente generado cada elemento es el supremo de una familia superiormente dirigida de elementos compactos.

PROOF. Supongamos que $d = \vee\{d_i \mid i \in I\}$ y cada d_i es compacto, consideramos una nueva familia, que es superiormente dirigida, $\{\vee_{j\in F} d_j \mid F \subseteq I, F \text{ finito}\}$, y tenemos $d = \vee_i d_i \leq \vee_F d_F \leq \vee_i d_i = d$. □

En retículos superiormente continuos los elementos compactos se caracterizan como aquellos que verifican la siguiente condición: *para cada familia dirigida superiormente $\{d_i \mid i \in I\}$ tal que $c = \vee_i d_i$, existe un índice i_0 tal que $c = d_{i_0}$*. Por otro lado se tiene que los retículos compactamente generados son continuos superiormente.

Proposition. 17.11.
Todo retículo compactamente generado es superiormente continuo.

PROOF. Sea $\{d_i \mid i \in I\}$ una familia dirigida superiormente y $d \in \mathscr{L}$; siempre se tiene $\vee_i(d \wedge d_i) \leq d \wedge (\vee_i d_i)$; la relación inversa es consecuencia de que para cada elemento compacto c tal que $c \leq d \wedge (\vee_i d_i)$, se tiene $c \leq \vee_i d_i$, y existe d_{i_0} tal que $c \leq d_{i_0}$, esto es, $c \leq d \wedge d_{i_0} \leq \vee_i(d \wedge d_i)$ y de ser $\mathscr{L}$ compactamente generado. □

Tenemos que para cada módulo M el retículo $\mathscr{L}(M)$ es compactamente generado y por tanto superiormente continuo.

En resumen, para cada R–módulo derecha M se tiene que $\mathscr{L}(M)$ es un retículo

- acotado,
- modular,
- completo,
- compactamente generado,

- superiormente continuo.

Existen otras propiedades que puede verificar o no un retículo; algunas de ellas son ciertas para todo retículo de módulos, otras no; éstas últimas nos ayudaran a definir nuevos tipos de módulos que pueden ser de interés para la clasificación y el estudio de anillos.

Question. 17.12.
In Example (5.24.) we studied the direct product of lattices. We are now interested in the following problem: If $M = N_1 \times N_2$, when is the lattice $\mathscr{L}(M)$ the direct product of the lattices $\mathscr{L}(N_1)$ and $\mathscr{L}(N_2)$?

Question. 17.13.
If $\mathscr{L}(M) = \mathscr{L}(N_1) \times \mathscr{L}(N_2)$ is a direct product, there exists an equivalence relation $\mathscr{R}$ if $\mathscr{L}(M)$ such that
(1) each two classes are lattice isomorphic; for instance $X\mathscr{R}Y$ if $X + N_1 = Y + N_2$,
(2) each class has a unique representative L satisfying $N_1 \subseteq L \subseteq M$,
(3) the canonical map $p : \mathscr{L}(M) \longrightarrow \mathscr{L}(M)/\mathscr{R}$ is a lattice map.

The question is: does exist a decomposition of $\mathscr{L}(M)$, as a direct product, whenever there is an equivalence relation $\mathscr{R}$ in $\mathscr{L}(M)$ satisfying the above properties?
If the answer is positive, study what happens in a modular bounded lattice.

Ejercicios

Exercise. 17.14.
Sea $f : S \longrightarrow R$ un homomorfismo de anillo, para cada R–módulo derecha M se tienen homomorfismos de retículos:

$$\mathscr{L}(M_R) \hookrightarrow \mathscr{L}(M_{f(S)}) = \mathscr{L}(M_S) \hookrightarrow \mathscr{L}(M_{\mathbb{Z}}).$$

Ref.: 2102e_023 *SOLUTION*

SOLUTION. Exercise (17.14.)
HACER □

Exercise. 17.15.
Para cada R–módulo derecha M con estructura dada por $\beta : R^{op} \longrightarrow \operatorname{End}(M)$, se tiene
(1) $\operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Ann}(M_R) = \operatorname{Ann}(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\}$.
(2) $\mathscr{L}(M_R) = \mathscr{L}(M_{R/\operatorname{Ann}(M)})$.

Ref.: 2102e_024 *SOLUTION*

18 Módulos noetherianos

Sea M un R–módulo derecha,

- M verifica la **condición maximal** si toda familia no vacía de submódulos, ordenada por inclusión, tiene un elemento maximal.
- M verifica la **condición de cadena ascendente** si toda cadena ascendente de submódulos de M es estacionaria, esto es, si $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ es una cadena ascendente de submódulos de M, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N_m = N_n$ para todo $n \geq m$.
- M se llama **noetheriano** si es finitamente generado y cada submódulo N de M es finitamente generado.

Observa que las dos definiciones primeras son aplicables a un retículo:

- Un retículo $\mathscr{L}$ verifica la **condición maximal** si todo subconjunto no vacío tiene un elemento maximal.
- Un retículo $\mathscr{L}$ verifica la **condición de cadena ascendente** si para toda cadena ascendente $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{L}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = x_n$ para todo $n \geq m$.

Caracterizar el retículo de los submódulos de un módulo finitamente generado es otro problema que estudiaremos en otra parte.

Lemma. 18.1.
Sea M un R–módulo derecha, son equivalentes los siguientes enunciados:
(a) M es noetheriano.
(b) M verifica la condición maximal.
(c) M verifica la condición de cadena ascendente.

PROOF. (a)⇒(b). Sea Γ una familia no vacía de submódulos de M. Sea $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots$ una cadena de elementos de Γ, entonces $\cup_i N_i$ es un submódulo finitamente generado de M por ser M noetheriano. Si $\{m_1, \ldots, m_t\}$ es un sistema de generadores de $\cup_i N_i$, existe un índice j tal que $\{m_1, \ldots, m_t\} \subseteq M_j$, y por tanto $\cup_i N_i = N_j \in \Gamma$. Así pues, por el Lema de Zorn, Γ tiene elementos maximales.

(b)⇒(c). Si $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots$ es una cadena ascendente de submódulos de M, entonces la familia $\{N_0, N_1, \ldots\}$ tiene un elemento maximal, sea N_j, por tanto para $h > j$ se verifica $N_h = N_j$ y la cadena es estacionaria.

(c)⇒(a). Si N es un submódulo de M, consideramos un elemento $n_1 \in N$. Si $n_1R = N$, entonces N es finitamente generado. En caso contrario existe $n_2 \in N \setminus n_1R$. Si $n_1R + n_2R = N$, entonces N es finitamente generado. En caso contrario existe $n_3 \in N \setminus n_1R + n_2R \ldots$ Si para cada índice i

2102-10.tex

podemos encontrar un elemento $n_{i+1} \in N \setminus n_1R + \cdots + n_iR$, entonces podemos construir una cadena estrictamente ascendente

$$n_1R \subsetneqq n_1R + n_2R \subsetneqq \cdots \subsetneqq n_1R + \cdots + n_iR \subsetneqq \cdots ,$$

lo que es una contradicción. □

Lemma. 18.2.
Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de R–módulos derecha. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(a) M *es noetheriano.*
(b) M' *y* M'' *son noetherianos.*

PROOF. (a)⇒(b). Ya que cada cadena de submódulos de M' es también una cadena de submódulos de M, tenemos que cada cadena de submódulos de M' estabiliza. Si $M''_1 \subset M''_2 \subseteq \cdots$ es una cadena de submódulos de M'', entonces identificando M'' con M/M', tenemos que existe una cadena

$$M_1 \subseteq M_1 \subseteq \cdots$$

de submódulos de M, en donde $M_i/M' = M''_i$ para cada índice i. Como la cadena de submódulos de M estabiliza, entonces la cadena $M''_1 \subset M''_2 \subseteq \cdots$ también estabiliza. □

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corollary. 18.3.
(1) Cada submódulo y cada cociente de un R–módulo derecha noetheriano es noetheriano.
(2) Cada suma directa finita de R–módulos derecha es noetheriana si, y solo si, cada sumando es noetheriano.

Módulos artinianos

Sea M un R–módulo derecha,

- M verifica la **condición minimal** si toda familia no vacía de submódulos, ordenada por inclusión, tiene un elemento minimal.
- M verifica la **condición de cadena descendente** si toda cadena descendente de submódulos de M es estacionaria, esto es, si $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$ es una cadena descendente de submódulos de M, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N_m = N_n$ para todo $n \geq m$.

Observa que las dos definiciones primeras son aplicables a un retículo:

- Un retículo $\mathscr{L}$ verifica la **condición minimal** si todo subconjunto no vacío tiene un elemento minimal.
- Un retículo $\mathscr{L}$ verifica la **condición de cadena descendente** si para toda cadena descendente $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{L}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = x_n$ para todo $n \geq m$.

Existen otras caracterizaciones que pasan por dualizar el concepto de finitamente generado.

Lemma. 18.4.
Sea M un R–módulo derecha, son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) M verifica la condición minimal.
(b) M verifica la condición de cadena descendente.

Un R–módulo derecha M que verifica las condiciones equivalentes del Lema se llama **artiniano**.
Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corollary. 18.5.
(1) Cada submódulo y cada cociente de un R–módulo derecha artiniano es artiniano.
(2) Cada suma directa finita de R–módulos derecha es artiniana si, y solo si, cada sumando es artiniano.

Anillos noetherianos

Un anillo R se llama **noetheriano a derecha** si R_R es un R–módulo derecha noetheriano.

Lemma. 18.6.
Sea R un anillo, son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) R es noetheriano derecha .
(b) Cada R–módulo derecha finitamente generado es noetheriano.

PROOF. (a)$\Rightarrow$(b). Si M es un R–módulo derecha finitamente generado, entonces existe una presentación libre $R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$, y como R_R es noetheriano, entonces M lo es.
(b)$\Rightarrow$(a). Como R_R es un R–módulo derecha finitamente generado, tenemos que R_R es noetheriano y por tanto R es un anillo noetheriano. $\square$

Lemma. 18.7.
Si R es un anillo noetheriano derecha y $\mathfrak{A}$ es un ideal (bilátero), entonces $R/\mathfrak{A}$ es un anillo noetheriano derecha.

PROOF. Si $\mathfrak{b}$ es un ideal derecha de $R/\mathfrak{A}$, existe un ideal derecha $\mathfrak{b}'$ de R tal que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'/\mathfrak{A}$, y por tanto, como $\mathfrak{b}'$ es finitamente generado, resulta que $\mathfrak{b}$ también lo es. □

Existen más formas de construir anillos noetherianos a partir de otros que ya lo son. Veamos algunos ejemplos.

Proposition. 18.8. (Teorema de la base de Hilbert.)
Si R es un anillo noetheriano derecha, el anillo de polinomios $R[X]$ es un anillo noetheriano derecha.

PROOF. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal derecha de $R[X]$. Consideramos el conjunto de los coeficientes líderes de los polinomios en $\mathfrak{a}$. Este conjunto es un ideal derecha de R, llamémoslo $\mathfrak{b}$. Ya que R es un anillo noetheriano derecha, $\mathfrak{b}$ es un ideal derecha finitamente generado. Supongamos que $\mathfrak{b} = a_1R + \cdots + a_tR$, con los $a_i \neq 0$, y sea $F_i \in \mathfrak{a}$ tal que

$$F_i = a_iX^{n_i} + \text{términos de grado menor.}$$

Sea $\mathfrak{a}'$ el ideal derecha de $R[X]$ generado por $F_1, \ldots, F_t$. Es claro que $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$.
Sea $F = aX^m + \text{términos de grado menor} \in \mathfrak{a}$. Si $m \geq n = \max\{n_i \mid i = 1, \ldots, t\}$, entonces consideramos una combinación tal que $a = \sum_{i=1}^t a_ir_i$ y construimos entonces

$$G = F - \sum_{i=1}^t F_ir_iX^{m-n_i} \in \mathfrak{a}.$$

Resulta que $\mathrm{gr}(G) < \mathrm{gr}(F)$. Luego reiterando este proceso el número de veces que sea necesario podemos suponer que $\mathrm{gr}(F) < n$.
Sea M el R–módulo derecha generado por $1, X, \ldots, X^{n-1}$, entonces $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$. Por ser M finitamente generado es noetheriano y entonces $\mathfrak{a} \cap M$ es finitamente generado. Sea $G_1, \ldots, G_s$ una familia de generadores de $\mathfrak{a} \cap M$, entonces $\mathfrak{a}$ está generado como $R[X]$–módulo por $G_1, \ldots, G_s, F_1, \ldots, F_t$, e $\mathfrak{a}$ es finitamente generado. □

Corollary. 18.9.
Si R es un anillo noetheriano derecha, el anillo de polinomios $R[X_1, \ldots, X_n]$ es noetheriano derecha.

Corollary. 18.10.
Sea A un anillo conmutativo noetheriano y R una A–álgebra finitamente generada, entonces R es noetheriano a derecha y a izquierda. En particular toda álgebra finitamente generada sobre un cuerpo es noetheriana.

Lemma. 18.11.
Sea M un R–módulo derecha noetheriano, entonces $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ es un anillo noetheriano derecha. En particular si un anillo R tiene un R–módulo derecha fiel noetheriano, entonces R es un anillo noetheriano derecha.

PROOF. Llamamos $S = R/\operatorname{Ann}_R(M)$, considerando M como S–módulo derecha tenemos que los retículos de R–submódulos y S–submódulos de M coinciden.

Podemos por tanto suponer que M es un R–módulo derecha fiel y noetheriano. Para ver que R es un anillo noetheriano derecha, supongamos que $M = m_1R + \cdots + m_rR$, podemos definir un homomorfismo

$$f : R \longrightarrow M^r, \qquad f(x) = (m_1x, \ldots, m_rx).$$

Si $f(x) = 0$, entonces $m_ix = 0$ para $1 \leq i \leq r$. Luego $x \in \operatorname{Ann}_R(M) = 0$, y por tanto f es un homomorfismo inyectivo. Como M^r es noetheriano, entonces R_R también lo es, ya que es isomorfo a un submódulo de M^r. □

Ya conocemos que si R es un anillo noetheriano derecha, entonces $R[X]$ es también un anillo noetheriano derecha. El recíproco también es cierto, ya que $R \cong R[X]/(X)$. También es cierto que si A es un anillo conmutativo noetheriano, cada A–álgebra finitamente generada es también noetheriana, ya que es un cociente de un anillo de polinomios en un número finito de indeterminadas. El siguiente teorema resuelve una parte del problema recíproco.

Theorem. 18.12. (Teorema de Eakin–Nagata.)
Sea A un anillo conmutativo, $B \supseteq A$ una A–álgebra conmutativa, finitamente generada como A–módulo. Son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) A es un anillo noetheriano.
(b) B es un anillo noetheriano.

PROOF. (b)⇒(a). Llamamos

$$\Gamma = \{\mathfrak{a}B \mid \mathfrak{a} \subseteq A,\ B/\mathfrak{a}B \text{ no es un } A\text{–módulo noetheriano}\}.$$

Si A no es noetheriano, entonces como $A \longrightarrow B$, $x \mapsto 1x$, tenemos que B no es un A–módulo noetheriano, y por tanto $0 \in \Gamma$ y $\Gamma \neq \emptyset$. Utilizando que B es un anillo noetheriano, resulta que existe $\mathfrak{a}B \in \Gamma$ maximal.

Consideramos la extensión de anillos:

$$A' = A/\operatorname{Ann}_A(B/\mathfrak{a}B) \longrightarrow B/\mathfrak{a}B = B',$$

entonces B' es un anillo noetheriano que es un A'–módulo finitamente generado, no es un A'–módulo noetheriano y cada cociente $B'/\mathfrak{b}B'$, con $\mathfrak{b} \subseteq A'$ es un A'–módulo noetheriano. Hacemos ahora el cambio $A \mapsto A'$ y $B \mapsto B'$.

Llamamos $\Lambda = \{X \mid X$ es un A–submódulo de B y $\operatorname{Ann}_A(B/X) = 0\}$. Si $B = s_1A + \cdots + s_tA$, entonces los elementos de Λ pueden ser caracterizados por la propiedad:

$$\text{Para cada } 0 \neq a \in A,\ \{s_1a, \ldots, s_ta\} \nsubseteq X.$$

Ya que $0 \in \Lambda$, tenemos $\Lambda \neq \emptyset$. Sea $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ una cadena en Λ. Si llamamos $X = \cup X_n$ y si $X \notin \Lambda$, entonces existe $a \in A$ tal que $\{s_1a, \ldots, a_ta\} \subseteq X$, lo que es una contradicción. Tenemos pues que Λ es un conjunto inductivo.

Sea $X_0 \in \Lambda$ maximal, si B/X_0 es A–noetheriano, entonces $A/\operatorname{Ann}_A(B/X_0) = A$ es noetheriano ya que es un A–submódulo. Si B/X_0 no es A–noetheriano, entonces tenemos la siguiente situación: existe un A–módulo M que es un cociente de B y tal que:

(1) M no es noetheriano, es fiel y es finitamente generado.
(2) Para cada ideal $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ el cociente $M/M\mathfrak{a}$ es noetheriano.
(3) Para cada submódulo $0 \neq N \subseteq M$ el cociente M/N no es fiel

Sea $0 \neq N \subseteq M$, entonces M/N no es fiel y existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que $Ma \subseteq N$, entonces por (2), el cociente M/Ma es noetheriano y como consecuencia $N/Ma \subseteq M/Ma$ es finitamente generado. Además B era finitamente generado y por tanto M es finitamente generado y como consecuencia Ma es finitamente generado. Entonces N es finitamente generado. Tenemos que cada submódulo de M es finitamente generado, lo que implica que M es noetheriano. Esto es una contradicción. □

Anillos artinianos

La teoría dual a la de anillos noetherianos es la de los anillos artinianos. En este caso los resultados que se obtienen son más modestos, aunque, como más adelante veremos, cada anillo artiniano será un anillo noetheriano, e incluso podremos dar un teorema de estructura de los anillos artinianos.

Un anillo R se llama **artiniano derecha** si R_R es un R–módulo derecha artiniano.

Lemma. 18.13.
Sea R un anillo, son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) R es artiniano derecha.
(b) Cada R–módulo derecha finitamente generado es artiniano.

Lemma. 18.14.
Si R es un anillo artiniano derecha y si $\mathfrak{A}$ es un ideal, entonces $R/\mathfrak{A}$ es un anillo artiniano derecha.

Módulos de longitud finita

Los módulos derecha artinianos no necesariamente son noetherianos, pero son de interés aquellos módulos que son simultáneamente artinianos y noetherianos. Estudiaremos estos módulos utilizando como herramienta esencial los módulos simples, por lo que comenzamos recordando este tipo particular de módulos.

Un R–módulo derecha M se llama **simple** si es no nulo y sus únicos submódulos son 0 y M.

Lemma. 18.15.
Sea M un R–módulo derecha no nulo. Son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) M es simple.
(b) Existe un ideal derecha maximal $\mathfrak{a}$ de R tal que $M \cong R/\mathfrak{a}$.
(c) Cada elemento no nulo de M es un generador.

Proposition. 18.16. (Lema de Schur.)
Sea M un R–módulo derecha simple, tenemos que $\operatorname{End}_R(M)$ es un anillo de división.

Si M es un R–módulo derecha, una **serie de submódulos** de M es una cadena estrictamente ascendente finita de submódulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M.$$

Si se verifica que para cada índice i el cociente M_i/M_{i-1} es un R–módulo derecha simple entonces se llama una **serie de composición** de M. En este caso los cocientes M_i/M_{i-1} se llaman **factores de composición** de M.

El número t se llama **longitud** de la serie de composición.

Vamos a probar que la longitud de una serie de composición de un R–módulo derecha es un invariante.

Dos series de composición $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M$ y $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_s = M$ son **equivalentes** si $t = s$ y existe una permutación $\sigma \in S_t$ tal que $M_i/M_{i-1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)-1}$, para cada $1 \leq i \leq t$.

Lemma. 18.17.
Toda serie de submódulos de M que es equivalente a una serie de composición es una serie de composición.

Dada una serie de submódulos de M, por ejemplo

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M,$$

un **refinamiento** es una serie de submódulos $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_s = M$ tal que para cada índice $1 \leq i \leq t$ existe un índice $1 \leq j_i \leq s$ tal que $M_i = N_{j_i}$.

Proposition. 18.18. (Teorema de Schreier.)
Cada dos series de submódulos de M tienen refinamientos equivalentes.

PROOF. Dadas dos series de submódulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M, \text{ y} \tag{II.1}$$

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_s = M, \tag{II.2}$$

construimos un refinamiento de (II.1) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}0 = M_1 \cap N_0 \subseteq M_1 \cap N_1 \subseteq \cdots \subseteq M_1 \cap N_s = M_1 \\ = M_1 + (M_2 \cap N_0) \subseteq \cdots \subseteq M_1 + (M_2 \cap N_s) = M_2 \\ = M_2 + (M_3 \cap N_0) \subseteq \cdots \subseteq M_{t-1} + (M_t \cap N_s) = M.\end{aligned} \tag{II.3}$$

Llamamos $M_{i,j} = M_{i-1} + (M_i \cap N_j)$, para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq s$. Observar que se tiene $M_{i-1,s} = M_{i,0}$. En la misma forma construimos un refinamiento para (II.2).

$$\cdots \subseteq N_{j-1} + (N_j \cap M_i - 1) \subseteq N_{j-1} + (N_j \cap M_i) \subseteq \cdots \tag{II.4}$$

Veamos que (II.3) y (II.4) son equivalentes. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{M_{i,j}}{M_{i,j-1}} = \frac{M_{i-1} + (M_i \cap N_j)}{M_{i-1} + (M_i \cap N_{j-1})} &= \frac{M_{i-1} + (M_i \cap N_{j-1}) + (M_i \cap N_j)}{M_{i-1} + (M_i \cap N_{j-1})} \\
&\cong \frac{M_i \cap N_j}{(M_{i-1} + (M_i \cap N_{j-1})) \cap M_1 \cap N_j} = \frac{M_i \cap N_j}{M_i \cap (M_{i-1} + N_{j-1}) \cap M_1 \cap N_j} \\
&= \frac{M_i \cap N_j}{(M_{i-1} + N_{j-1}) \cap M_1 \cap N_j} = \frac{M_i \cap N_j}{(M_i \cap N_{j-1}) + (M_{i-1} \cap N_j)}.
\end{aligned}$$

y en la misma forma

$$\frac{N_{j,i}}{N_{j,i-1}} \cong \frac{M_i \cap N_j}{(M_i \cap N_{j-1}) + (M_{i-1} \cap N_j)}.$$

□

Proposition. 18.19. (Teorema de Jordan–Hölder.)
Sea M un R–módulo derecha que tiene una serie de composición de longitud t, entonces:

(1) Cada cadena estrictamente ascendente de submódulos de M se puede refinar a una serie de composición.
(2) Todas las series de composición de M tienen longitud t.

Si M es un R–módulo derecha que tiene una serie de composición, llamamos **longitud** de M, y la representamos por $\operatorname{long}(M)$, a la longitud de sus series de composición. Como consecuencia diremos que M tiene **longitud finita** si tiene una serie de composición, y que tiene longitud infinita si no tiene una serie de composición.

Lemma. 18.20.
Sea M un R–módulo derecha. Son equivalentes:

(a) M tienen una serie de composición.
(b) M es noetheriano derecha y artiniano derecha.

Proposition. 18.21.
Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de* R*–módulos derecha. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(a) M *tiene longitud finita.*
(b) M' *y* M'' *tienen longitud finita.*

Además, la función $\operatorname{long}(-)$ *es aditiva sobre sucesiones exactas cortas de módulos de longitud finita, esto es,* $\operatorname{long}(M) = \operatorname{long}(M') + \operatorname{long}(M'')$ *si* M*,* M' *y* M'' *tienen longitud finita.*