

# Пробный экзамен

ШАД Хелпер

May 2023

1. Вычислите сумму ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{7^k}$$

при всех  $x$ .

2. Докажите, что для любой целочисленной матрицы  $A \in M_4(\mathbb{Z})$  матрица  $A^4 + E$  либо невырожденная, либо нулевая. Остаётся ли утверждение верным для матрицы  $A \in M_4(\mathbb{R})$ ?
3. Капитон стреляет в тире по мишени из пистолета четыре раза. Известно, что второй и третий выстрелы попали дальше от центра, чем первый. Какая вероятность, что и четвёртый выстрел будет дальше от мишени, чем первый ?
4. В компании Тындекс работает 1001 человек, некоторые из которых знают друг друга. Для любых пятисот сотрудников найдётся ещё один сотрудник, знающий их всех.
- а) Какое наибольшее число попарно знакомых сотрудников гарантированно есть?
- б) Какое наибольшее число сотрудников, знакомых со всеми, гарантированно есть?
5. Матрица смежности графа на вершинах  $1, \dots, n$  — это матрица с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ соединены ребром,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для любых натуральных  $m$  и  $n$  найдите сигнатуру квадратичной формы, матрица которой совпадает с матрицей смежности полного двудольного графа, доли которого состоят из  $m$  и  $n$  вершин.

6. Выберем из отрезка  $[0, 1]$  независимо и равновероятно (равномерно) числа  $X_1, \dots, X_N$ .
- (а) К чему сходится (и в каком смысле) среднее геометрическое чисел  $X_1, \dots, X_N$  при  $N \rightarrow \infty$ ?
- (б) Найти плотность распределения произведения этих чисел  $Y = X_1 X_2 \dots X_N$ .
7. Рассмотрим последовательность

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_0 = b$$

для некоторого числа  $b > 0$ . Найти такие положительные числа  $\alpha$  и  $c$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^\alpha} = c$$

8. Дан массив  $a$  из  $n$  положительных целых чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным.

Более формально, нужно выбрать индексы  $i_1, \dots, i_{k-1}$  ( $i_k = n$ ), такие что массив разбивается на подмассивы

$$[a_1, \dots, a_{i_1}], [a_{i_1+1}, \dots, a_{i_2}], \dots, [a_{i_{k-1}+1}, \dots, a_{i_k}],$$

в результате сортировки каждого из которых (и обратной склейки) получается отсортированный исходный массив; количество блоков разбиения  $k$  должно быть максимально возможным.

Предложите  $O(n \log n)$  алгоритм для решения этой задачи, можно использовать  $O(n)$  дополнительной памяти.

Обязательно обоснуйте работоспособность вашего алгоритма. Оцените его сложность и объём необходимой дополнительной памяти. Мы будем признательны, если описание алгоритма будет дано не листингом кода, а просто текстом, возможно, с привлечением псевдокода.

**Формат входных данных** В первой строке указано число  $n$ , во второй строке приведены через пробел  $n$  чисел — массив  $a$ .

**Формат выходных данных** Выведите число  $k$ , а затем с новой строки  $k$  чисел:  $i_1, \dots, i_k$ .

#### Примеры

**Ввод:**

6  
3 1 2 4 6 5

**Вывод:**

3  
3 4 6

**Ввод:**

5  
7 5 3 2 1

**Вывод:**

1  
5