

Skript zur Vorlesung  
Analysis II  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>[*] Das eindimensionale Riemann-Integral</b>	<b>4</b>
1.1	Der Integralbegriff nach Riemann . . . . .	4
1.2	[*] Integrabilitätskriterien . . . . .	7
1.3	[*] Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Orientiertes und vektorwertiges Riemann-Integral</b>	<b>23</b>
2.1	Das orientierte Riemann-Integral . . . . .	23
2.2	Riemann-Integral für vektorwertige Funktionen . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b>	<b>26</b>
3.1	Hauptsatz der Integralrechnung . . . . .	26
3.2	Integrationstechniken - Partielle Integration . . . . .	29
3.3	Integrationstechniken - Substitution . . . . .	33
<b>4</b>	<b>[*] Uneigentliche Integrale</b>	<b>35</b>
4.1	Uneigentliche Integrale - Fall I . . . . .	35
4.2	Uneigentliche Integrale - Fall II . . . . .	37
4.3	[*] Uneigentliche Integrale - Fall III . . . . .	38
4.4	[*] Uneigentliche Integrale Fall IV . . . . .	39
<b>5</b>	<b>[*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>[*] Taylors Theorem</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Die Gamma-Funktion</b>	<b>58</b>
<b>8</b>	<b>[*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume</b>	<b>62</b>
8.1	Metrische Räume . . . . .	62
8.2	Normierte Vektorräume . . . . .	63
8.3	[*] Umgebungen und offene Mengen . . . . .	64
8.4	Grundzüge der Topologie . . . . .	67
8.5	[*] Berührungspunkt, Häufungspunkt und Randpunkt . . . . .	68
<b>9</b>	<b>[*] Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen</b>	<b>71</b>
<b>10</b>	<b>[*] Kompakte Mengen und metrische Räume</b>	<b>76</b>
<b>11</b>	<b>[*] Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>81</b>
11.1	Die Ableitung . . . . .	81
11.2	[*] Richtungsableitung und partielle Ableitung . . . . .	83
11.3	Kettenregel . . . . .	85
11.4	Existenz von Ableitungen . . . . .	87
11.5	[*] Symmetrie der zweiten partiellen Ableitung - Der Satz von Schwartz . . . . .	88
11.6	Extrema und lokale Minima/Maxima . . . . .	91
<b>12</b>	<b>[*] Inverse Funktionen und implizite Funktionen</b>	<b>95</b>

<b>13 [*] Mannigfaltigkeiten</b>	<b>104</b>
13.2 Extrema und Nebenbedingungen . . . . .	107

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

## 1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

**Definition 1.1.1** (Zerlegung). Eine Zerlegung  $Z$  eines kompakten Intervalls  $I = [a, b]$  in Teilintervalle  $I_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) der Längen  $|I_j|$  ist eine Menge von Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$  (Teilpunkte von  $Z$ ) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Wir setzen  $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$ .

**Definition 1.1.2** (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung  $Z$  ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von  $Z$ :

$$\Delta(Z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

**Notation 1.1.3.** Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf  $I$ .

**Definition 1.1.4** (Riemannsche Zwischensumme). In jedem  $I_j$  wählen wir ein  $\xi_j \in I_j$  als Stützstelle und setzen  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ . Für eine Funktion  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

**Definition 1.1.5** (Ober- und Untersumme). Für  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir außerdem

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &:= \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{m}_j &:= \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\ \underline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)} \end{aligned}$$

Damit gilt für  $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Wir wollen die Zerlegung  $Z$  nun systematisch verfeinern.

**Definition 1.1.6** (Verfeinerung einer Zerlegung).

- (a) Eine Zerlegung  $Z^*$  von  $I$  ist eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$ , falls alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$  sind.
- (b) Die gemeinsame Verfeinerung  $Z_1 \vee Z_2$  zweier Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  ist die Zerlegung von  $I$ , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von  $Z_1$  und  $Z_2$  sind.

**Lemma 1.1.7.** Ist  $Z^*$  eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.*  $Z^*$  enthält alle Teilpunkte von  $Z$ , nur mehr.

SCHRITT 1: Wir nehmen an  $Z^*$  enthielte genau einen Teilpunkt ( $y_{l+1}$ ) mehr als  $Z$ . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* & \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 2: Sei  $Z^*$  eine beliebige Verfeinerung von  $Z$ . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen  $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$ . Dabei hat  $Z_{s+1}$  genau einen Punkt mehr als  $Z_s$ . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass  $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$  und  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 3: Sei  $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$  der Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z^*$ . Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

**Lemma 1.1.8.** Seien  $Z_1, Z_2$  Zerlegungen von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

*Beweis.* Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

**Bemerkung 1.1.9.** Für  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$  gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$ . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

**Definition 1.1.10** (Ober- und Unterintegral). Es sei  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

**Lemma 1.1.11.** Es sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren  $Z_2$  und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \left\{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I \right\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 1.1.12** (Integral). Es sei  $I = [a, b]$ .  $f \in \mathcal{B}(I)$  heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir  $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$  das (bestimmte) Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_I f(x) \, dx = \int_I f \, dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen  $f \in \mathcal{B}(I)$  nennen wir  $\mathcal{R}(I)$ .

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion).  $f(x) := c$  auf  $[a, b]$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a)$$

**Beispiel 1.1.14** (Dirichlet-Funktion). Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil  $\overline{J}(f) = 1$  und  $\underline{J}(f) = 0$ .

**Übung 1.1.15.** Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von  $\underline{J}(f)$  und  $\overline{J}(f)$ .

## 1.2 [\*] Integrierbarkeitskriterien

**Satz 1.2.1** (1. Kriterium). Es sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen  $f \in \mathcal{R}(I)$ , das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu  $\varepsilon > 0$  existieren Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da  $f \in \mathcal{R}(I)$  gilt  $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ . Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung  $Z := Z_1 \vee Z_2$ . Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 1.2.2** (2. Kriterium). Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung  $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$  von  $I$  mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung  $Z$  von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ , wobei  $\delta > 0$  noch später gewählt wird. Setze  $Z^* = Z' \vee Z$ . Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von  $Z^*$  mit denen in  $Z$  vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Da  $Z^*$  eine Verfeinerung von  $Z$  ist, sind alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$ . Das heißt die Intervalle  $I_j$  (zu  $Z$ ) unterscheiden sich von den Intervallen  $I_j^*$  (zu  $Z^*$ ) sofern Punkte  $x'_\nu$  (Teilpunkte von  $Z^*$ ) im Inneren von  $I_j$  liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle  $I_j$  existieren maximal, für die  $I_j$  eine Verfeinerung von  $Z$  oder ? hinter reellen  $I_j^*$  ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung  $Z'$  unterhalb von  $I_j$  liegen. Wir haben  $l$  Punkte in Zerlegung  $Z'$ . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle  $I_j$  ist maximal  $l$ .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left( \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left( \underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_j^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$



1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$

$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle  $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um  $\Delta(z) < \delta$  ist. □

**Anwendung 1.2.3.** Es sei  $(Z_n)_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\xi_n$  seien die Zwischenpunkt von Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ . Die Riemannsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen  $J(f)$  falls  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme). Seien  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  Zerlegung von  $I = [a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z$ , sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j| \quad (I_j = [x_{j-1}, x_j])$$

linear in Bezug zu  $f$ . Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des  $\mathcal{R}(I)$  später in Satz 1.2.6 noch beweisen.

**Korollar 1.2.5.** Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen  $Z_n$  von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und jede Folge  $(\xi_n)_n$  von Zwischenpunkten  $\xi_n$  zugehörig zu  $Z_n$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung  $Z_n$  und der Zwischenpunkten  $\xi_n$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \quad (I = [a, b])$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall \text{Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt außerdem

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq \underline{J}(f) = \bar{J}(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f dx$$

„ $\Leftarrow$ “ SCHRITT 1: Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  und jede Wahl von Zwischenpunkten  $(\xi_n)_n$  zu  $Z_n$ .

Seien  $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$  zwei solche Folgen von Zerlegungen mit  $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$  zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei  $(Z_n)_n$  eine neue Folge von Zerlegungen von  $I$ , wobei  $Z_{2k} = Z_k^2$  und  $Z_{2k-1} = Z_k^1$ , außerdem sei  $\xi_{2k} = \xi_k^2$  und  $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$ . Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

**Satz 1.2.6** ( $\mathcal{R}(I)$  als Vektorraum). Der Raum  $\mathcal{R}(I)$  auf einem kompakten Intervall  $I = [a, b]$  ist ein Vektorraum und  $J : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$  ist eine lineare Abbildung. Für  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  folgt also  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$  und  $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ .

*Beweis.* TEIL 1: Sei  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit zugehörigen Intervallen  $I_j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) & \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 \Rightarrow \bar{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 \Rightarrow \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \tag{1}
 \end{aligned}$$

Wir wählen  $h = \alpha f + \beta g$ , wobei  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
 \Rightarrow |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| \tag{2} \\
 \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
 &= |\alpha| \cdot (\bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + |\beta| \cdot (\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\
 \Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\
 &\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \cdot |I_j| \\
 \Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot (\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + |\beta| \cdot (\bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \tag{3}
 \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$  gilt

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 : \bar{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
 \forall \varepsilon > 0 \exists Z_2 : \bar{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
 \end{aligned}$$

Wähle  $Z = Z_1 \vee Z_2$  und verwende (3)

$$\Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist  $h = \alpha f + \beta g$  damit Riemann-integrierbar.

TEIL 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h, \xi) = \sum_{j=1}^k h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f, \xi) + \beta \cdot S_Z(g, \xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für  $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$  gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) & (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g, \xi_n)) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 1.2.7** (Kompositionen von integrierbaren Funktionen). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt

- (i)  $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$
- (ii)  $|f| \in \mathcal{R}(I)$
- (iii) Ist außerdem  $|g| \geq c > 0$  auf  $I$  für ein konstantes  $c > 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.*

- (i) Es sei  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  für  $x \in I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \quad (1)$$

Sei  $Z$  Zerlegung von  $I$  und  $I_j$  die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \end{aligned}$$

Für ein  $\varepsilon > 0$  gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1: \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2: \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei  $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt  $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$  nach Satz 1.2.1.

(ii) Für  $|f|$  verwenden wir  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x,y \in I_j} (|f(x) - f(y)|) \\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \end{aligned}$$

wie vorher folgt also  $|f| \in \mathcal{R}(I)$ .

(iii) Für  $\frac{f}{g}$  muss nur  $\frac{1}{g}$  betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{c^2} \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung.  $\square$

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto e^{\alpha x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I = [a, b]$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0$ . Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_k^n)$  mit  $x_j^n = a + j \cdot h_n$ , wobei  $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$ . Da  $f$  streng monoton wachsend ist gilt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = f(x_j) = f(x_j^n) = e^{\alpha x_j} \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f(x_{j-1}^n) = e^{\alpha x_{j-1}} \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &= \overline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n e^{\alpha x_j} \cdot h \\ &= h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \quad (\text{Geometr. Summe}) \\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha h \cdot n} - 1) \\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \end{aligned}$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha h_n} = 1$ . Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha x_{j-1}})$$

$$\begin{aligned}
&= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
&= h \cdot e^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
&= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha(b-a)} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})
\end{aligned}$$

Also gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  sowie

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

**Beispiel 1.2.9** (Polynome). Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha \neq -1$ ). Dann  $f \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

*Beweisansatz.* Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei  $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ ,  $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n)$ ,  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ,  $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$\begin{aligned}
|I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
&= a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\begin{aligned}
\overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = (x_j)^\alpha = (a \cdot q^j)^\alpha && \text{(Nach Monotonie)} \\
\underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^\alpha = (a \cdot q^{j-1})^\alpha \\
\underline{S}_Z(f) &= \underline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n (a \cdot q^{j-1})^\alpha \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \\
&= (q - 1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^n q^{(\alpha+1) \cdot (j-1)}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. □

**Übung 1.2.10.** Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

**Satz 1.2.11** (Monotonie des Integrals). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq g(x)$ , dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (1.2.1)$$

(ii) Insbesondere gilt für  $f \in \mathcal{R}(I)$  beliebig

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.2.2)$$

(iii) Sowie

$$\left| \int_a^b f \cdot g \, dx \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, dx$$

*Beweis.*

(i) Sei  $h = g - f \geq 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.6  $h \in \mathcal{R}(I)$  und  $\int_a^b h \, dx \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \int_a^b h \, dx = \int_a^b g \, dx + \int_a^b (-f) \, dx = \int_a^b g \, dx - \int_a^b f \, dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx \end{aligned}$$

(ii) Es gilt  $\pm f \leq |f|$ . Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \, dx &\leq \int_a^b |f| \, dx \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \max \left( \int_a^b f \, dx, -\int_a^b f \, dx \right) \leq \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leq \int_a^b |fg| \, dx \leq \int_a^b \left( \sup_I |f| \right) |g| \, dx = \sup_I (|f|) \cdot \int_a^b |g| \, dx \quad \square$$

**Satz 1.2.12** (Cauchy-Schwarz). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg \, dx \right|^2 &\leq \left( \int_a^b |fg| \, dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \\ \Rightarrow \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \left| t\alpha - \frac{\beta}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left( t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2 \right) \\ \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}_A + \frac{1}{t} \underbrace{\int_a^b |g|^2 \, dx}_B \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t} |g(x)|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( tA + \frac{1}{t}B \right) \end{aligned}$$

Frage: Welches  $t > 0$  maximiert  $h$ ?

$$\begin{aligned} A = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2t}B \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \\ B = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}A \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \end{aligned}$$

Minimum existiert für ein  $t_0 > 0$  und es gilt  $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} \left( A - \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0, \infty)} h(t) &= \frac{1}{2} t_0 \left( A + \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \left( A + \frac{A}{B}B \right) = \sqrt{AB} \end{aligned}$$

□



**Bemerkung 1.2.13.**

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

**Satz 1.2.14.** Sei  $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a, b])$  der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem  $I = [a, b]$ . Es gilt  $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.*  $I = [a, b]$  ist kompakt und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta$$

Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ .  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  und  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{y \in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da  $|x - y| \leq |I_j| < \delta$  gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (\overline{m}_j - \underline{m}_j) \cdot |I_j| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\leq \varepsilon (b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

**Definition 1.2.15.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I = [a, b]$  heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  von  $I$  gibt so, dass  $f$  auf jedem der offenen Intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$  stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x \rightarrow x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, k - 1$  existieren.

$f((x_{j-1}, x_j))$  können zu stetigen Funktionen auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen  $\mathcal{PC}(I)$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Piecewise continuous function in  $I$

**Satz 1.2.16.** Es gilt  $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .  $I = [a, b]$ . Ist  $Z = (x_0, \dots, x_k)$  eine Zerlegung von  $f \in \mathcal{PC}(I)$  und  $f$  stetig auf  $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall j$  und  $f_j$  eine stetige Fortsetzung von  $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$  auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . So gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x) dx$$

*Beweis.* Arbeite auf  $I_l = [x_{l-1}, x_l]$  dann ist  $f_l$  stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen).  $\square$

**Bemerkung 1.2.17** (Treppenfunktion). Ist  $f$  stückweise konstant auf  $I$ . Das heißt es existiert eine Zerlegung  $Z = (x_0, \dots, x_\nu)$  von  $I$  mit  $f$  ist konstant auf  $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, \nu$ . So heißt  $f$  Treppenfunktion. Schreiben  $\mathcal{J}(I)$  für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften

- (a) In jedem Punkt  $x \in (a, b)$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.
- (b) In  $a$  existiert der rechtsseitige und in  $b$  der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

**Bemerkung 1.2.19.** Insbesondere erfüllt  $PC(I)$  die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

**Lemma 1.2.20.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge  $(\varphi_n)_n$  von Treppenfunktionen  $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Treppenfunktion } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

*Beweis.* (Später)  $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

*Beweis.* Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.18 verlangt und  $\varepsilon > 0$ , sowie  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktion mit  $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wir definieren  $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$  auch als Treppenfunktionen. Dann gilt  $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$  und  $\Psi_2 \geq f$ . Für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(\Psi_1) &\leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da  $\varphi$  eine Treppenfunktion ist, ist  $\varphi \in PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ . Also existiert eine Folge  $(z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

(sofern  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left( \underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \right) \\ &= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon(b-a) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx + \varepsilon(b-a) \\ &= \varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.21.** Welche  $f \in \mathcal{B}(I)$  sind genau Riemann-integrierbar?

**Definition 1.2.22** (Nullmenge). Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}$  heißt Nullmenge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  höchstens abzählbar viele Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \quad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

**Beispiel 1.2.23.**  $\mathbb{Q}$  ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Nehme  $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu  $q_j$  nehme  $I_j = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned} q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Definition 1.2.24.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt fast überall stetig auf  $I$ , falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  eine Nullmenge ist.

**1.2.25** (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium).  $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

**Bemerkung 1.2.26.** Sei  $f$  wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von  $f$  höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.

Ist  $f \in PC(I)$  so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

*Beweis von Lemma 1.2.20.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  sowie ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{Treppenfunktionen } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}: \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

SCHRITT 1:  $I_1 = [a, b]$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ . Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge  $(I_n)_n$  von Intervallschachtelungen  $I_{n+1} \subseteq I_n$  mit  $|I_n| = b - a \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  mit

$$\sup_{x \in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \quad (*)$$

Beweis: Angenommen  $I_n = [a_n, b_n]$  ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{b_n + a_n}{2} \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a_n, M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x \in [M_n, b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \\ &\quad \text{(Für alle Treppenfunktionen } \varphi) \end{aligned}$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = M_n$ . Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also  $a_{n+1} = M_n$ ,  $b_{n+1} = b_n$ . Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0$$

Nehme  $c_n \subseteq I_n$

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\text{ existiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert aufgrund der monotonen Konvergenz} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \xi && \text{(da } b_n - a_n \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n &\leq \xi \leq b_n \\ \Rightarrow a_n &\leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &\geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \xi &\in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

# 1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

SCHRITT 2: Angenommen  $a < \xi < b$ . Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 & \xi - \delta \leq x \leq \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 & \xi < x \leq \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren  $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$  durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi - \delta < x \leq \xi + \delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \quad (**)$$

Aber  $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n$  groß genug ist (\*\*) im Widerspruch zu (\*). Damit folgt die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Satz 1.2.27.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  ???.

**Lemma 1.2.28.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und gebe es eine Menge  $G \subseteq I$  welche in  $I$  dicht liegt und für die  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in G$  gilt. Dann folgt  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

## 1.3 [\*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Definition 1.3.1.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert als der Mittelwert von  $f$  über  $I$ . Wir schreiben auch

$$\bar{f}_I = \int_a^b f(x) dx$$

**Satz 1.3.2.** Es sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann gilt

$$\exists \xi : a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$\begin{aligned}\underline{m} &\leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}(b-a) &= \int_a^b \underline{m} \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \overline{m} \, dx = \overline{m}(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{m}\end{aligned}$$

Ist  $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$  ist konstant auf  $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = \int_a^b f(x) \, dx$$

und  $\forall a < \xi < b$  ist  $f(x) = \underline{m}$ . Damit gilt die Behauptung. Sei also  $\underline{m} < \overline{m}$ . Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass  $x_1$  und  $x_2$  in  $I$  existieren, sodass  $f(x_1) = \underline{m}$  und  $f(x_2) = \overline{m}$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Außerdem folgt aus  $\underline{m} < \overline{m}$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$  auch

$$\underline{m} < \int_a^b f(x) \, dx < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$

[30. Apr] **Satz 1.3.3** (Verallgemeinerung des vorherigen Satzes). Es sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ ,  $p \in \mathcal{R}(I)$ . Falls  $p \geq 0$  folgt  $\exists \xi$  mit  $a < \xi < b$  und

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x) \, dx \quad (1.3.1)$$

*Beweis.* Angenommen  $\int_a^b p(x) \, dx = 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)p(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in I} \int_a^b |p(x)| \, dx = 0$$

Damit gilt (1.3.1) für alle  $a < \xi < b$ .

Ist  $\int_a^b p(x) \, dx > 0$ , dann definieren wir ein neues Mittel:

$$\text{Mittel}(f) := \frac{1}{\int_a^b p(x) \, dx} \cdot \int_a^b f(x)p(x) \, dx$$

Durch scharfes Hinschauen folgt dann die Aussage aus dem Beweis des vorherigen Satzes.  $\square$

## 2 Orientiertes und vektorwertiges Riemann-Integral

### 2.1 Das orientierte Riemann-Integral

Sei  $I = [a, b]$ ;  $a', b' \in I$  mit  $a' < b'$  und  $I' = [a', b']$ . Wenn  $f \in \mathcal{R}(I)$ , ist dann auch  $f \in \mathcal{R}(I')$ ? Ist also die Einschränkung  $\varphi := f|_{I'} : I' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  Riemann-integrierbar?

**Satz 2.1.1.** Ist  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $I' = [a', b'] \subseteq I = [a, b]$ , so ist  $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.* SCHRITT 1: Angenommen  $I' = [a, b']$  (also  $a' = a$ ). Dann folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  und Satz 1.2.1, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I : \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

Sei  $Z_0 := (a, b', b)$  eine Zerlegung und  $Z_1 = Z_0 \vee Z$  die gem. Verfeinerung mit  $Z_1 = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Dann gilt  $x_0 = a$ ,  $x_k = b$  und  $\exists l \in \{1, \dots, k-1\} : x_l = b'$ . Dann ist  $Z' = (x_0, x_1, \dots, x_l)$  eine Zerlegung von  $I'$  mit zugehörigen Intervallen  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  für  $(j = 1, \dots, l)$ . Wir definieren  $\varphi = f|_{I'}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j(f) &= \sup_{I_j} f = \sup_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j(f) &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \overline{S}_Z(\varphi) - \underline{S}_Z(\varphi) &= \sum_{j=1}^l \left( \overline{m}_j(\varphi) - \underline{m}_j(\varphi) \right) \cdot |I_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \left( \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \right) \cdot |I_j| \\ &= \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für  $I' = [a, b']$  nach Satz 1.2.1.

SCHRITT 2: Sei  $b' = b$ ,  $a < a' < b$ . Dann funktioniert der Beweis analog zu SCHRITT 1.

SCHRITT 3: Sei  $a < a' < b' < b$  mit  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Dann folgt aus SCHRITT 1, dass

$$\varphi_1 := f|_{[a, b']} \in \mathcal{R}([a, b'])$$

Außerdem gilt nach SCHRITT 2

$$\begin{aligned} \varphi_2 &:= \varphi_1|_{[a', b']} \in \mathcal{R}([a', b']) \\ &\Rightarrow f|_{I'} \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

**Definition 2.1.2** (Integral auf Teilintervall). Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  mit  $I = [a, b]$  und  $I' = [a', b'] \subseteq I$ . Dann folgt  $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$ . Und wir definieren

$$\int_{a'}^{b'} f(x) dx := \int_{a'}^{b'} \varphi(x) dx$$

mit  $\varphi := f|_{[a', b']}$ .

**Satz 2.1.3.** Sei  $I = [a, b]$  zerlegt in endlich viele Intervalle  $I_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), die höchstens die Randpunkt gemeinsam haben. Das heißt

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad I_j = [a_j, b_j]$$

und der Schnitt des Inneren der Intervalle leer ( $(a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = \emptyset$  für  $j \neq k$ ). Dann gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x) \, dx$$

*Beweis.* Sei  $(Z'_n)_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $I$  mit  $\Delta(Z'_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $Z_0$  die ursprüngliche Zerlegung aus der Voraussetzung des Satzes (das heißt die Zerlegung in die Intervalle  $I_j$ ). Wir betrachten die Verfeinerung  $Z_n := Z'_n \vee Z_0$ , für die auch gilt  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ . Wir haben Zwischenpunkte  $\xi_n$  zu  $Z_n$ .

Dadurch, dass  $Z_n$  verfeinert ist, lässt es sich in Zerlegungen  $Z_n^j$  von den Intervallen  $I_j$  aufteilen. Dann gilt auch, dass  $\Delta(Z_n^j) \rightarrow 0$  für  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Die Zwischenpunkte  $\xi_n$  lassen sich aufteilen in  $\xi_n^j$  von  $Z_n^j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \sum_{j=1}^m S_{Z_n^j}(f, \xi_n^j) \\ \Rightarrow \int_I f(x) \, dx &= \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x) \, dx \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 2.1.4** (Orientiertes Riemann-Integral). Sei  $\alpha, \beta \in I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \, dx & \varphi &:= f|_{[\alpha, \beta]} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx & \text{falls } \alpha &\neq \beta \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx &:= 0 & \text{falls } \alpha &= \beta \end{aligned}$$

**Satz 2.1.5.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta, \gamma \in I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx \quad (2.1.1)$$

*Beweis.* Sind mindestens 2 Punkte von  $\alpha, \beta, \gamma$  gleich, so stimmt die Aussage. Also seien o.B.d.A.  $\alpha, \beta, \gamma$  paarweise verschieden. Dann ist (2.1.1) äquivalent zu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) \, dx = 0$$

Diese Gleichung ist invariant unter zyklischem Vertauschen von  $\alpha, \beta, \gamma$ . (Z.B.  $\gamma, \alpha, \beta$  oder  $\beta, \gamma, \alpha$ ).

FALL 1: Sei  $\alpha < \beta < \gamma$ . Dann folgt die Aussage aus Satz 2.1.3.

FALL 2: Sei  $\beta < \alpha < \gamma$ . Dann folgt aus FALL 1, dass

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} f(x) \, dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx &= \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx \\ \Rightarrow - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx &= \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) \, dx &= \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) \, dx \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von FALL 1 oder zyklischem Vertauschen von FALL 2. Damit gilt die Gleichung für alle Fälle.  $\square$



## 2.2 Riemann-Integral für vektorwertige Funktionen

Sei  $I = [a, b]$ . Angenommen wir haben eine Funktion, die von  $I$  nach  $\mathbb{R}^d$  abbildet

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Komponentenfunktionen})$$

Wie können wir dann ein Integral für diese Funktion definieren?

**Definition 2.2.1.** Wir definieren für komplexe oder vektorwertige Funktionen einen Integralbegriff, indem wir jede Komponente einzeln integrieren.

(i) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$   $x \mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{B}(I)\} \\ \mathcal{R}(I, \mathbb{C}) &:= \{f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{R}(I)\} \end{aligned}$$

und setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) \, dx$$

(ii) Sei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Dann ist eine Funktion  $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}^d)$  Riemann-integrierbar, falls alle Komponentenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_d$  Riemann-integrierbar auf  $I$  sind. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) \, dx \\ \int_a^b f_2(x) \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(x) \, dx \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 2.2.2.** Das lässt sich auch auf Matrizen übertragen. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}$  ist Riemann-integrierbar, falls jede Komponentenfunktion integrierbar ist. Das Integral wird analog zu Vektoren definiert.

**Bemerkung 2.2.3.** Entsprechend ist auch  $\mathcal{R}(I, \mathbb{R}^d)$  ein reeller und  $\mathcal{R}(I, \mathbb{C}^d)$  ein komplexer Vektorraum und die Linearität des Integrals gilt. Das heißt  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{K}^d)$  ist

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

Alle Rechenregeln und Sätze gelten entsprechend!

### 3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir haben unseren Integralbegriff bisher über Zerlegungen definiert. Allerdings ist das für das konkrete Berechnen von Integralen nicht wirklich praktikabel. Wenn wir also ein Intervall  $I = [a, b]$  und eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(I)$  betrachten, wie rechnet man das Integral dann konkret aus?

#### 3.1 Hauptsatz der Integralrechnung

**Definition 3.1.1** (Erinnerung: Stammfunktion). Wir nennen  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$ .

**Satz 3.1.2** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann ist für jedes  $c \in [a, b]$  die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t) \, dt \quad (x \in I)$$

stetig differenzierbar und  $F' = f$ . Das heißt  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ .

[3. Mai] *Beweis.* Sei  $F(x) = \int_c^x f(t) \, dt$  und  $h \neq 0$ . Wir wollen über den Differenzenquotient zeigen, dass  $F' = f$ . Wir berechnen zuerst den Zähler

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t) \, dt - \int_c^x f(t) \, dt = \int_x^{x+h} f(t) \, dt$$

Das können wir in den Differenzenquotienten einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt - f(x) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt \end{aligned}$$

Wir definieren  $I_h(x) = [x, x+h]$ , falls  $h > 0$  und  $I_h(x) = [x+h, x]$ , falls  $h < 0$ . Damit können wir das Integral gegen seinen betragsmäßig größten Wert abschätzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| \cdot |h| \\ &\leq \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| \end{aligned}$$

Da  $f$  stetig in  $x$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= f(x) \end{aligned}$$

□

### 3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Korollar 3.1.3.** Sei  $G \in \mathcal{C}^1(I)$  (die Klasse der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $I$ ) eine Stammfunktion von  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a) =: G|_a^b =: [G]_a^b =: [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

*Beweis.* Wir setzen  $c = a$  in Satz 3.1.2 und  $F : I \rightarrow \mathbb{R} \, x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ . Dann ist  $F$  nach Satz 3.1.2 eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ . Sei  $G \in \mathcal{C}^1(I)$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Wir definieren für  $t \in I$

$$\begin{aligned} h(t) &:= F(t) - G(t) \\ \Rightarrow h'(t) &= F'(t) - G'(t) = f(t) - f(t) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist  $h$  konstant, d.h.  $h(x) = k$  für alle  $x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k &= F(x) - G(x) \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow k &= F(a) - G(a) = -G(a) \\ \Rightarrow F(x) - G(x) &= -G(a) \\ F(x) &= G(x) - G(a) \\ \Rightarrow F(b) &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

□

Damit sind wir nun in der Lage Integrale für bestimmte Arten von Funktionen konkret anzugeben.

**Beispiel 3.1.4.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $f(x) = x^p$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann hat  $f$  die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1}$ . Damit folgt

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot [b^{p+1} - a^{p+1}] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Beispiel 3.1.5.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  und  $f(x) = x^{-p}$ ,  $x \neq 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}$ . Damit folgt

$$\int_a^b x^{-p} \, dx = \frac{1}{1-p} \cdot [b^{1-p} - a^{1-p}] \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.6.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$ ,  $x > 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$ . Damit gilt

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}] \quad \forall a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.7.** Sei  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \ln|x|$ .

*Beweis.* Falls  $x > 0$ . Dann ist  $F(x) = \ln x$  und  $F'(x) = \frac{1}{x}$ .  
Falls  $x < 0$ . Dann ist  $F(x) = \ln -x$  und  $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

□

Damit gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right| \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.8.** Es gilt  $(\sin x)' = \cos x$  und  $(\cos x)' = -\sin x$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x \, dx &= [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a \\ \int_a^b \sin x \, dx &= [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a\end{aligned}$$

**Beispiel 3.1.9.** Es gilt  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  für  $|x| < \frac{\pi}{2}$ . Damit folgt  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Das heißt

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^\varphi = \tan(\varphi) \quad \forall |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

**Beispiel 3.1.10** (Fläche des Einheitskreises). Die Funktion  $\sqrt{1-x^2}$  beschreibt die obere Hälfte des Einheitskreises. Das heißt wir wollen das Integral  $\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$  berechnen. Wie wir später in Beispiel 3.2.5 sehen werden, hat  $\sqrt{1-x^2}$  die Stammfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2} \right)$$

Das lässt sich durch Ableiten mit  $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  prüfen

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right) = \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[ \frac{1}{2} \left( \arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2} \right) \right]_a^b \quad (-1 \leq a, b \leq 1)\end{aligned}$$

Geometrisch gesehen können wir damit nun die Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises berechnen

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin(1) + 0 - \arcsin(-1) - 0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

**Bemerkung 3.1.11.** Satz 3.1.2 gilt auch für Funktionen in  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{C}^d$ .

**Notation 3.1.12** (Stammfunktion). Wir schreiben

$$\int f(x) \, dx$$

für die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu  $f$  oder das unbestimmte Integral. Genauer gilt, wenn  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $f$  ist

$$\int f(x) \, dx = \{\Phi + k : k \text{ Konstante}\}$$

Wir schreiben manchmal statt einer Menge auch nur eine konkrete Stammfunktion und die mögliche Addition einer Konstante ist dann implizit enthalten.

### 3.2 Integrationstechniken - Partielle Integration

**Satz 3.2.1** (Partielle Integration). Seien  $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) für ein Intervall  $I$ . Dann gilt für  $a, b \in I$

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

*Beweis.* Wir wenden die Produktregel der Ableitung an. Es gilt

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))' \, dx &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \end{aligned} \quad (i)$$

Außerdem gilt nach Satz 3.1.2

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)g(x))' \, dx &= [f(x)g(x)]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \end{aligned} \quad (ii)$$

Wir setzen (i) und (ii) gleich

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \square$$

**Bemerkung 3.2.2** (Stammfunktion mittels partieller Integration). Wenn wir kein konkretes Integral ausrechnen wollen, sondern lediglich eine beliebige Stammfunktion für eine Funktion ermitteln wollen, lässt sich Satz 3.2.1 auch umformen zu

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

weil wir konstante Terme für die Stammfunktion vernachlässigen können und so der zweite Term aus (3.2.1) wegfällt.

**Beispiel 3.2.3** (Anwendung von partieller Integration). Wir bestimmen eine Stammfunktion von  $\ln x$  mittels partieller Integration

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x$$

**Beispiel 3.2.4.** Sei  $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int x^\alpha \cdot \ln(x) \, dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{\alpha+1} \end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.5** (Integrationstrick bei partieller Integration). Bei partieller Integration bleibt immer noch ein Integralteil übrig. Wenn dieser wieder dem ursprünglichen Integral entspricht, ist es möglich, die Gleichung danach aufzulösen und so das Integral zu bestimmen. Wir bestimmen auf diese Weise eine Stammfunktion für  $\sqrt{1-x^2}$ .

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx \\
&= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \, dx \\
&= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1-x^2} \, dx \\
\Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\
\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x)
\end{aligned}$$

**Übung 3.2.6.** Beweisen Sie analog zum vorherigen Beispiel mittels partieller Integration, dass  $\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x)$  und  $\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arccosh} x)$ .

**Beispiel 3.2.7.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{g(x)} e^{ax} \cdot \sin(bx) \, dx &= e^{ax} \cdot \left( -\frac{1}{b} \cos(bx) \right) + \int \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx) \, dx \\
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx
\end{aligned}$$

Wir wenden nochmal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \left( \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) \, dx \right) \\
\Rightarrow \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int e^{ax} \sin(bx) \, dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin(bx) \\
\Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) \, dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx)))
\end{aligned}$$

[07. Mai] **Beispiel 3.2.8.** Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx = \frac{\pi}{4}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(x) \, dx \\
&= [-\cos(x) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) \, dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

### 3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Mit dem trigonometrischen Pythagoras wissen wir außerdem, dass

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \quad \square
 \end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$\pi = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx$$

**Beispiel 3.2.9.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 \int \cos^n(x) \, dx &= \int \cos(x) \cos^{n-1}(x) \, dx \\
 &= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \int \sin(x) \cdot (n-1) \cos^{n-2}(x) \sin(x) \, dx \\
 &= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
 &= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int \cos^n(x) \, dx \\
 \Rightarrow \int \cos^n(x) \, dx &= \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) \, dx \quad (\text{Rekursionsformel})
 \end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$\int \sin^n(x) \, dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx$$

Wir nutzen nun die Rekursionsformel, um einen Wert für das Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  zu berechnen

$$\begin{aligned}
 c_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx \quad (3.2.2) \\
 &= \left[ \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
 &= \frac{n-1}{n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx}_{=c_{n-2}} \\
 \Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
 c_0 &= \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \\
 c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot c_{n-4} \\
 &= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-2j-1}{n-2j} \cdot c_{n-2j-2} \quad \forall j \in \mathbb{N} : n-2j-2 \geq 1
 \end{aligned}$$

Damit folgt für  $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot c_0 = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot c_1 = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

Aus diesem Beispiel können wir nun auch eine Grenzwertdarstellung für  $\pi$  ableiten.

**Satz 3.2.10** (Wallisches Produkt). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \prod_{j=1}^n \frac{2j \cdot 2j}{(2j-1) \cdot (2j+1)}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

*Beweis.* Mit der Definition von  $c_n$  aus (3.2.2) ergibt sich

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Für  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ist  $0 \leq \cos(x) \leq 1$ . Damit folgt  $\cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x) \leq \cos^{2n-2}(x)$ . Also gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x) dx$$

$$\Rightarrow c_{2n} \leq c_{2n-1} \leq c_{2n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach Definition gilt

$$c_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j}}{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Außerdem gilt

$$1 = \frac{c_{2n}}{c_{2n}} \geq \left( \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \right) \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_n} = 1$$

□

Außerdem erhalten wir auch eine Reihendarstellung von  $\sqrt{\pi}$

$$W_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{W_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot \sqrt{2n}} \\
 &= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Wir werden später in Bemerkung 6.1.16 sehen, dass z.B. mit Taylor-Polynomen noch andere Reihendarstellungen von  $\pi$  herleitbar sind, die im Vergleich schneller konvergieren und dadurch für die tatsächliche Anwendung geeigneter sind.

### 3.3 Integrationstechniken - Substitution

**Satz 3.3.1** (Substitutionsregel). Seien  $I = [a, b]$  und  $I^*$  kompakte Intervalle und  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{R})$  sowie  $\varphi(I^*) \subseteq I$ . Dann gilt für  $\alpha, \beta \in I^*$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx \quad (3.3.1)$$

*Beweis.* Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Wir definieren  $h(t) := F(\varphi(t))$ . Dann ist  $h \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{C})$  wegen der Kettenregel

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{d}{dt} h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
 \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) \, dt &= [h(t)]_{\alpha}^{\beta} = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x) \, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx \quad \square
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3.2** (Erste Lesart von Satz 3.3.1). Wir betrachten folgendes Szenario: Wir wollen  $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt$  ausrechnen und es existiert eine Substitution  $x = \varphi(t)$  für eine Funktion  $f(x)$ , sodass

$$g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Dann verwenden wir den Satz, setzen  $b = \varphi(\beta)$ ,  $a = \varphi(\alpha)$  und erhalten

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx$$

**Beispiel 3.3.3.** Wir betrachten das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt$$

Wir definieren  $\varphi(t) := t+c$  und  $f(x) = g(x)$ . Dann gilt  $\varphi'(t) = 1$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) \, dx = \int_{\alpha+c}^{\beta+c} g(x) \, dx \quad (\text{Translation})$$

**Beispiel 3.3.4.** Sei  $a, b > 0$ . Wir betrachten

$$\int_a^b \frac{g(t)}{t} dt$$

und definieren  $\varphi(t) := \ln(t)$ ,  $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ ,  $t = e^{\varphi(t)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} g(t) \cdot \frac{1}{t} &= g(t) \cdot \varphi'(t) = g(e^{\varphi(t)}) \cdot \varphi'(t) \\ f(x) &:= g(e^x) \end{aligned}$$

Wir wenden Substitution an und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b g(t) \frac{dt}{t} &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \\ &= \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) dx = \int_{\ln a}^{\ln b} g(e^x) dx \end{aligned}$$

**Beispiel 3.3.5.** Wir betrachten

$$\int_0^1 (1+t^2)^n \cdot t dt$$

und definieren  $\varphi(t) := 1+t^2$ ,  $f(x) := \frac{1}{2}x^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi'(t) &= 2t \\ \Rightarrow (1+t^2)^n \cdot t &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ \Rightarrow \int_0^1 (1+t^2)^n \cdot t dt &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{1}{2} \cdot x^n dt = \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot x^n dt \\ &= \left[ \frac{1}{2(n+1)} \cdot x^{n+1} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \cdot (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

[10. Mai] **Bemerkung 3.3.6** (Zweite Lesart: Transformationssatz). Es ist auch möglich, Satz 3.3.1 in die andere Richtung anzuwenden. Das heißt wir wollen das Integral auf der rechten Seite von (3.3.1) zum Integral auf der linken Seite umformen. Wir führen eine Transformation mit  $\varphi(t) = x$  durch und erhalten ein Integral der Form

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Dazu benötigt man, dass  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  invertierbar ist. (Also zum Beispiel  $\varphi' > 0$  oder  $\varphi' < 0$  auf ganz  $[\alpha, \beta]$ )

**Notation 3.3.7** (Leibnitz'sche Schreibweise). Schreiben  $x = \varphi(t)$  oder auch informell  $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ ,  $dx$  „ $=$ “  $\varphi'(t) dt$ . Eine Anwendung der 2. Lesart wäre das folgende Integral mit  $x = \sin(t)$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \quad \left( \frac{dx}{dt} = \cos t \right)$$

## 4 [\*] Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir immer nur Integrale auf kompakten Intervallen berechnet und dabei waren alle Funktionen  $f \in \mathcal{R}(I)$  insbesondere beschränkt. Frage: Was ist  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ? Was ist  $\int_0^\infty e^{-t} dt$ ?

$$\int_0^b e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^b = e^{-0} - e^{-b} = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b} \rightarrow 1 \text{ für } b \rightarrow \infty$$

Wir betrachten unterschiedliche Fälle von solchen sogenannten uneigentlichen Integralen.

### 4.1 Uneigentliche Integrale - Fall I

(V1): In diesem Teilkapitel sei  $I = [a, \infty)$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \forall a < b < \infty$ . Wir definieren  $F(b) := \int_a^b f(x) dx$ .

**Definition 4.1.1.** Es gelte (V1). Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

sofern der Grenzwert existiert. Dann nennen wir dies das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, \infty)$ . Wenn der Grenzwert existiert, sagen wir das Integral konvergiert.

Divergiert das Integral und gilt  $F(b) \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow \infty$  (oder  $F(b) \rightarrow -\infty$  für  $b \rightarrow \infty$ ), so nennen wir das Integral bestimmt divergent und schreiben

$$\int_a^\infty f(x) dx = +\infty \quad \text{oder} \quad \int_a^\infty f(x) dx = -\infty$$

**Satz 4.1.2.** Es gelte (V1). Das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |F(b_2) - F(b_1)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R$$

*Beweis.* Wir wollen die Existenz von  $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$  für  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ . Dann folgt der Satz aus dem Cauchy-Kriterium für Grenzwerte.  $\square$

**Definition 4.1.3** (Absolut konvergente uneigentliche Integrale). Das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  heißt absolut konvergent, falls  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  konvergiert.

**Satz 4.1.4.** Es gelte (V1). Ist das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  absolut konvergent, so ist es auch konvergent. Das heißt ist  $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$ , so konvergiert auch  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

*Beweis.* Wir setzen  $G(b) = \int_a^b |f(x)| dx$  und  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ . Wir nehmen an, dass  $\lim_{b \rightarrow \infty} G(b)$  existiert, das heißt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |G(b_2) - G(b_1)| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R \\ \Rightarrow |F(b_2) - F(b_1)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx = G(b_2) - G(b_1) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2.  $\square$

**Satz 4.1.5** (Majorantenkriterium). Es gelte (V1). Sei  $\varphi : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\int_a^\infty \varphi(x) dx < \infty$  und es existiert ein  $R_0 \geq 0$ , sodass

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq R_0$$

Dann ist  $\int_a^\infty f(x) dx$  absolut konvergent.

*Beweis.* Für  $b_2 \geq b_1 \geq R_0$  gilt

$$\begin{aligned} |F(b_2) - F(b_1)| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \leq \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx \\ &\leq \int_{b_1}^\infty \varphi(x) dx \rightarrow 0 \text{ für } b_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2. □

**Beispiel 4.1.6** (Konvergenz ohne absolute Konvergenz). Das Integral

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx \tag{4.1.1}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Um die Konvergenz nachzuweisen, verwenden wir partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_\pi^b \frac{\sin x}{x} dx &= \left[ -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \right]_\pi^b - \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{\cos \pi}{\pi} - \frac{\cos b}{b} - \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Wir wollen Satz 4.1.5 anwenden und definieren  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$  mit

$$\int_\pi^b \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_\pi^b = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{b} \rightarrow \frac{1}{\pi}$$

Außerdem gilt

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Damit ist (4.1.1) nach dem Majorantenkriterium konvergent. Um einzusehen, dass es nicht absolut konvergent ist, betrachten wir für  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \frac{1}{\pi(N+1)} \cdot \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi(N+1)} \\ \Rightarrow \int_\pi^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^N \frac{2}{\pi(k+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \text{ für } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.1.7.** Es gelte (V1). Dann wollen wir analog zu  $[a, \infty)$  auch die Integrale in  $(-\infty, b]$  betrachten. Wir definieren

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

sofern der Grenzwert existiert. Alle Aussagen für  $[a, \infty)$  gelten analog auch für  $(-\infty, b]$ .

**Definition 4.1.8.** Sei  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Dann nehmen wir  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und definieren, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

konvergiert, falls

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx \text{ und } \int_c^{\infty} f(x) \, dx$$

beide konvergieren. Und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx := \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{\infty} f(x) \, dx$$

**Übung 4.1.9.** Weisen Sie nach, dass sowohl die Konvergenz, als auch der Wert des Integrals in der vorherigen Definition unabhängig von der Wahl von  $c$  ist.

**Bemerkung 4.1.10.** Es ist allerdings zu beachten, dass im Allgemeinen

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) \, dx \neq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx$$

Das heißt die Integrale müssen tatsächlich getrennt betrachtet werden. Zum Beispiel bei der Funktion  $f(x) = x$  gilt  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x \, dx = 0$ , aber diese ist eigentlich nicht auf  $(-\infty, \infty)$  integrierbar, da sich bei der Trennung in zwei Integrale kein Grenzwert ergibt.

## 4.2 Uneigentliche Integrale - Fall II

(V2): In diesem Teilkapitel sei  $I = [a, b)$  (oder  $I = (a, b]$ ) und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat Singularität bei  $x = a$  (oder  $x = b$ ). Außerdem  $f \in \mathcal{R}([a, c]) \, \forall a < c < b$  (oder  $f \in \mathcal{R}([c, b]) \, \forall a < c < b$ ).

**Definition 4.2.1.** Existiert

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left( \text{oder } \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

so setzen wir

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left( \text{oder } \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

und sagen  $\int_a^b f(x) \, dx$  konvergiert.

**Satz 4.2.2.** Ist  $|f(x)| \leq \varphi(x) \, \forall x \in [a, b)$  (oder  $\forall x \in (a, b]$ ) und konvergiert  $\int_a^b \varphi(x) \, dx$ , so konvergiert auch  $\int_a^b f(x) \, dx$ .

**Beispiel 4.2.3.** Sei  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Dann gilt  $F(x) = 2\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{c \rightarrow 0+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

**4.3 [\*] Uneigentliche Integrale - Fall III**

[14. Mai]  $f$  hat eine Singularität in  $\xi$  im Inneren von  $[a, b]$ .

**Beispiel 4.3.1.**  $f(x) = \frac{1}{|\sqrt{x}|}$  auf  $[-1, 0) \cup (0, 1]$ .

**Definition 4.3.2.** Wir sagen, dass

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert/konvergiert, falls die uneigentlichen Integrale

$$\int_{\xi}^b f(x) \, dx \text{ und } \int_a^{\xi} f(x) \, dx$$

konvergieren. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^{\xi} f(x) \, dx + \int_{\xi}^b f(x) \, dx \quad (4.3.1)$$

**Bemerkung 4.3.3.** (4.3.1) ist stärker als die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{I_{\varepsilon}} f(x) \, dx$$

mit  $I = [a, b]$  und  $I_{\varepsilon} := I \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) = [a, \xi - \varepsilon] \cup [\xi + \varepsilon, b]$ . (Cauchyscher Hauptwert).

**Beispiel 4.3.4.** Sei  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $I = [-1, 1]$ . Dann existiert der Cauchysche Hauptwert, aber nicht (4.3.1).

## 4.4 [\*] Uneigentliche Integrale Fall IV

**Definition 4.4.1.** Man hat Singularitäten in  $\mathbb{R}$  für  $f$  oder/und  $b = +\infty$ ,  $a = -\infty$ . Dann zerlege  $[a, \infty)$  oder  $(-\infty, b]$  oder  $(-\infty, \infty)$  in endlich viele Intervalle, wobei die Singularitäten die Randpunkte sind (oder  $-\infty$ ,  $\infty$ ). Dann existiert das Integral, falls die endlich vielen uneigentlichen Integrale existieren. Dann nehme Summe aller dieser uneigentlichen Integrale

**Satz 4.4.2** (Integralvergleichskriterium). Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ existiert}$$

*Beweis.* Siehe Saalübung. □

**Beispiel 4.4.3.** Es sei  $f(x) = x^{-p}$  mit  $p \neq 1$ . Dann ist  $F(x) = \frac{1}{1-p} x^{1-p}$  für  $F' = f$ .

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^R$$

existiert nach Satz 4.4.2 für  $p > 1$ .

**Beispiel 4.4.4.**  $f(x) = \log_2(x) = \log(\log(x))$ ,  $x > 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_2(x) &= \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} (\log_2(x))^{1-s} &= \frac{1-s}{(\log x)^s} \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log^s n)^s} &\text{ konvergiert} \Leftrightarrow s > 1 \end{aligned}$$

**Beispiel 4.4.5** (Gamma-Funktion).

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

(a)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \forall t > 0$$

(b)

$$\begin{aligned} t^{x-1} e^{-t} &= t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall t \geq 1 \end{aligned} \quad (c_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}})$$

$t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}$  ist beschränkt auf  $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt &\leq \int_0^1 t^{x-1} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} t^x \right]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 - e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
&\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \\
&\leq \lim_{b \rightarrow \infty} c_x \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} dt < \infty \\
\int_a^b e^{-\frac{t}{2}} &= \left[ -2e^{-\frac{t}{2}} \right]_1^b = 2 \left( e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right) \rightarrow 2e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

**Satz 4.4.6** (Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion). Es gilt  $\Gamma(n+1) = n!$  und  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  für alle  $x > 0$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt
\end{aligned}$$

Wir integrieren partiell. Sei  $0 < a < b < \infty$

$$\begin{aligned}
\int_a^b t^x e^{-t} dt &= \left[ -t^x e^{-t} \right]_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= a^x e^{-b} - b^x e^{-b} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
\Rightarrow \int_a^\infty t^x e^{-t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^x e^{-t} dt \\
&= a^x e^{-a} + x \int_a^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
\Rightarrow \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dx = x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Wir betrachten außerdem

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

□

**Anwendung 4.4.7.** Nach Substitution mit  $t^2 = x$  gilt  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}
\int_a^\xi e^{-t^2} dt &= \int e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_?^b s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds
\end{aligned}$$

für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \searrow 0$

$$\Rightarrow 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dx = \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$



4 [\*] *Uneigentliche Integrale*

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Berechnung von  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  später.

## 5 [\*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz

Sei  $I = [a, b]$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn die Funktionenfolge  $(f_n)_n$  „irgendwie“ gegen  $f$  konvergiert. Wann gilt dann

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ für } n \rightarrow \infty ?$$

Wir werden in diesem Kapitel einsehen, dass punktweise Konvergenz dafür nicht ausreichend ist, sondern wir gleichmäßige Konvergenz fordern müssen.

**Beispiel 5.1.1** (Punktweise Konvergenz). Sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n)_n$  konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion ( $f_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty \forall x \in [0, 1]$ ). Außerdem gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = \frac{n}{n} = 1$$

Das Integral über die Nullfunktion ist aber 0. Das heißt punktweise Konvergenz ist kein ausreichendes Kriterium, damit die Integrale gleich sind.

**Satz 5.1.2.** Seien  $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}, \dots$ ) und  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem konvergiere  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf  $[a, b]$  und  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  groß genug. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \\ \Rightarrow f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} &\leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \quad \forall n \geq N \end{aligned} \quad (1)$$

Halte  $N$  fest und nehme Zerlegung  $Z$  von  $I = [a, b]$  mit  $\bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann gilt jeweils nach (1)

$$\begin{aligned} \bar{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z\left(f_N + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \bar{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(f_N - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4} \\ \Rightarrow \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(\underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \\ &= \bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Wir beweisen die Gleichheit der Integrale.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &= \int_a^b \left( f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \left( f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&= \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq N \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx \quad \square
\end{aligned}$$

**Beispiel 5.1.3** (Integral von Potenzreihen). Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit Konvergenzradius  $R > 0$  und

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Wir erhalten also eine Funktion  $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ). Die Stammfunktion zu  $a_n (x - x_0)^n$  ist  $\frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ . Wir definieren also eine Funktion  $F$  analog

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (c_n := \frac{a_{n-1}}{n}) \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} \right|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left( \frac{|a_{n-1}|}{n} \right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \left( |a_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Das heißt  $F$  hat denselben Konvergenzradius wie  $f$ . Unsere Hoffnung ist also, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist oder

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = F(x)$$

Das gilt tatsächlich und lässt sich folgendermaßen zeigen. Wir definieren eine Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Wir wissen  $\forall \delta > 0$  klein genug (konkret heißt das  $\delta < R$ ) konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf dem Intervall  $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ . Dann gilt nach Satz 5.1.2 für  $x \in [x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$  fest

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) \, dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} dx = F(x) \\
 \int_{x_0}^x f_n(t) dt &= \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{x_0}^x (t-x_0)^k dt \\
 &= \left[ \frac{1}{k+1} (t-x_0)^{k+1} \right]_{x_0}^x = \frac{1}{k+1} x^{k+1} - \frac{1}{k+1} x_0^{k+1}
 \end{aligned}$$

**Satz 5.1.4.** Sei  $I = [a, b]$  sowie  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) und die folgenden Voraussetzungen gelten

- (i)  $\exists x_0 \in I : f_n(x_0)$  konvergiert gegen  $f(x_0)$
- (ii)  $(f'_n)_n$  konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion  $g$
- (iii)  $f'_n$  ist stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in I$  und  $f$  ist stetig differenzierbar mit Ableitung  $f' = g$ .

*Beweis.* Sei  $x \in I$ . Da alle Ableitungen von  $f_n$  stetig sind, können wir den Hauptsatz verwenden und es gilt

$$\begin{aligned}
 f_n(x) - f_n(x_0) &= \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \\
 \Rightarrow f_n(x) &= \underbrace{f_n(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} + \underbrace{\int_{x_0}^x f'_n(t) dt}_{\rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt} \\
 \Rightarrow f(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert } \forall x \in I \text{ und} \\
 f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt
 \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt, dass  $f$  stetig differenzierbar ist mit  $f' = g$ . □

#### Anwendung 5.1.5.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\
 R &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} > 0 \\
 f_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \\
 \Rightarrow f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\
 f'_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(n+1) a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$$

Nach dem vorherigen Satz gilt damit

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$$

konvergiert auch auf  $(x_0 - R, x_0 + R)$  und gleichmäßig auf  $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ . Also konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$$

und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Also ist jede Potenzreihe differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

**Korollar 5.1.6.** Jede Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

*Beweis.* Nach Anwendung 5.1.5 ist eine Potenzreihe einmal differenzierbar mit einer Potenzreihe als Ableitung. Damit folgt induktiv die Behauptung. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-k} \\ \Rightarrow f^{(k)}(x_0) &= k! \cdot a_k \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 5.1.7.** Wir wissen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} && (|x| < 1) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.1.8** (Taylorreihe).

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) \, dt \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0) + f'(x_0)) \, dx \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt + f'(x_0) \cdot \int_{x_0}^x 1 \, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt}_{=: R_{x_0}(x)}
\end{aligned}$$

Wir können den Fehler abschätzen und erhalten für ein  $\varepsilon(x) := \sup_{t \in (x_0, x)} |f'(t) - f'(x_0)|$

$$\begin{aligned}
|R_{x_0}(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f'(t) - f'(x_0)| \, dt \leq \varepsilon(x) \cdot |x - x_0| \\
\frac{|R_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} &= \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0
\end{aligned}$$

## 6 [\*] Taylors Theorem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (6.1.1)$$

**Satz 6.1.1.** Sei  $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}((a, b))$  ( $n+1$  mal stetig differenzierbar auf  $(a, b)$ ). Dann gilt für alle  $x, x_0 \in (a, b)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x_0, x) \end{aligned}$$

mit

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

*Beweis.* Wir verwenden Induktion. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist gerade der Hauptsatz.

Induktionsschritt: Angenommen  $f \in \mathcal{C}^{(n+2)}$ . Dann gilt nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f, x_0, x) \\ R_n(f, x_0, x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

Wir integrieren partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \left( \left[ -\frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dt} (x - t)^{n+1} \end{aligned}$$

Nach (1) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt}_{=R_{n+1}(f, x_0, x)} \quad \square$$

**Korollar 6.1.2.** Sei  $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$ . Dann gilt  $\forall x, x_0 \in (a, b)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \bar{R}_n(f, x_0, x)$$

mit

$$\bar{R}_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x)] dt$$

*Beweis.* Nach Satz 6.1.1 gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \bar{R}_{n-1}(f, x_0, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n-1}(f, x_0, x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\
(n-1)! \cdot R_{n-1}(f, x_0, x) &= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt - \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \quad \square
\end{aligned}$$

**Bemerkung 6.1.3.**

$$\begin{aligned}
n! \cdot \left| \frac{R_n(f, x_0, x)}{(x - x_0)^n} \right| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^n} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{x-t}{x-x_0} \right|^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| dt \\
&\leq \int_{x_0}^x |f^{(n+1)}(t)| dt \rightarrow 0
\end{aligned}$$

**Definition 6.1.4.** Sei  $f \in \mathcal{C}((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Wir definieren

$$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (n\text{-tes Taylorpolynom})$$

Ist  $f$  unendlich oft differenzierbar, so nennen wir

$$T(f, x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Taylorreihe (von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ ).

**Bemerkung 6.1.5.**

- (i) Die Taylorreihe kann Konvergenzradius  $R > 0$  haben
- (ii) Ist eine Taylorreihe konvergent, so muss sie nicht unbedingt gegen  $f$  konvergieren

**Beispiel 6.1.6.** Wir betrachten  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $x \neq 0$ . Dann existiert  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  ein Polynom  $p_n$ , sodass

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion.

I-Anfang Es ist  $n = 0$ . Wir wählen  $p_0(x) = 1$ .



I-Schritt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( f^{(n)}(x) \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= p'_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\
&= \underbrace{\left( -p'_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^2} + 2p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^3} \right)}_{=: p_{n+1} \left( \frac{1}{x} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\
p_{n+1}(t) &:= -p'_n(t) \cdot t^2 + 2t^3 \cdot p_n(t)
\end{aligned}$$

SCHRITT 2:  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Wir nutzen wieder Induktion. Der Induktionsanfang ist klar.

I-Schritt Angenommen  $f^{(n)}(0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{|R| \rightarrow \infty} \left( R \cdot p_n(R) \cdot e^{-R^2} \right) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 6.1.7.** Ist  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ , so ist die Taylorreihe von  $f$  gleich dieser Potenzreihe.

*Beweis.* Folgt aus Korollar 5.1.6 und Gleichung ??.

□

**Beispiel 6.1.8.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \cdot x^n \\
\exp(cx) &= \exp(cx_0 + c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \exp(c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} (x - x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(cx_0) c^n}{n!} (x - x_0)^n
\end{aligned}$$

**Satz 6.1.9** (Restglieddarstellung von Schlömilch). Sei  $f \in \mathcal{C}^{n+1}((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Dann gilt

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + R_n(f, x_0, x)$$

mit

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} (x - x_0)^p \quad (8)$$

$\forall 1 \leq p \leq n+1$  und  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$

**Bemerkung 6.1.10.** Ist  $p = n + 1$ , dann haben wir die Lagrangsche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}(\xi)$$

und wenn  $p = 1$ , dann haben wir die Cauchysche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0)$$

für das Restglied.

**Satz 6.1.11** (Logarithmus). Für die Logarithmusreihe  $f_n : -1 \leq x \leq 1$  gilt

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \\ T_n(f, 0)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

SCHRITT 1: Aus Satz 6.1.9 folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + R_n(f, 0, x) \\ R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{pn!} \cdot f^{(n+1)}(x) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^p \\ &= n! \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 + \xi)^{-(n+1)} \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{pn!} \cdot n! \cdot (1 + \xi)^{-n-1} \cdot |x - \xi|^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$

Angenommen  $0 \leq x \leq 1$ .  $0 < \xi < x$ , wir wählen  $p = n + 1$

$$\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad [31. \text{ Mai}]$$

Angenommen  $-1 \leq x \leq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi$  zwischen 0 und  $x$ , das heißt  $\xi = \Theta x$  mit  $0 < \Theta < 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{p} \cdot (-1)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (x - \Theta x)^{n+1-p} \cdot x^p \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot |x|^{n+1-p} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1}$$

Da  $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \Theta x = 1 - \Theta \cdot |x| \geq 1 - \Theta > 0 \\ &\Rightarrow (1 + \Theta x)^{-n} \leq (1 - \Theta)^{-n} \\ &\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} \cdot (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - |x|)^{-1} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1} \end{aligned}$$

Wähle  $p = 1$

$$\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} \rightarrow 0$$

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die Taylorreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$  für alle  $-1 \leq x \leq 1$  konvergiert. Für  $-1 \leq x \leq 0$  gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \right| \leq \frac{1}{n} \cdot |x|^n \leq |x|^n$$

Damit folgt die Konvergenz aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Das gleiche Prinzip lässt sich für  $0 \leq x < 1$  anwenden. Für  $x = 1$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  eine alternierende monotone Reihe, die damit nach Leibniz konvergiert.

Aus SCHRITT 1 und SCHRITT 2 folgt damit die Behauptung.  $\square$

**Korollar 6.1.12.** Für  $a > 0$  und  $0 < x \leq 2a$  folgt

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot a^n} (x - a)^n$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \log x &= \log(a + (x - a)) = \log\left(a \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right) \\ &= \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 6.1.13.** Es gilt

$$\begin{aligned} \log 2 &= \log(1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} && \text{(konvergiert langsam)} \\ \log(1 + x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \\ \log(1 - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \Rightarrow \log(1 + x) - \log(1 - x) &= \sum_{n \text{ ungerade}} \left( \frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n} \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Für ein  $y > 1$  mit  $y = \frac{1+x}{1-x}$  gilt

$$(1 - x) \cdot y = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = x \cdot (y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{y + 1}$$

Für  $y = 2$  gilt also  $x = \frac{1}{3}$ . Das heißt

$$\log y = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left( \frac{y-1}{y+1} \right)^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \log 2 = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{2k+1} \quad (\text{konvergiert schneller})$$

**Satz 6.1.14** (Abelscher Grenzwertsatz). Angenommen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert. Dann ist die Potenzreihe  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

- (i) konvergent für alle  $-1 < x \leq 1$
- (ii) stetig in  $x = 1$  und
- (iii) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf allen Intervallen  $[a, 1]$  mit  $-1 < a < 1$ . (Das heißt sie konvergiert lokal gleichmäßig auf  $[-1, 1]$ ). Insbesondere in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung um  $x = 1$ .

*Beweis.* SCHRITT 1: Wir zeigen zunächst (ii) und setzen dafür

$$A_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Insbesondere ist

$$\sup_{n \geq 0} |A_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq k+1} |A_n| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$a_n = A_{n-1} - A_n \quad (\text{Wir setzen } A_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n)$$

Für ein  $L \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n &= \sum_{n=0}^L (A_{n-1} - A_n) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^L A_{n-1} \cdot x^n - \sum_{n=0}^L A_n \cdot x^n \\ &= \sum_{j=-1}^{L-1} A_j \cdot x^{j+1} - \sum_{j=0}^L A_j \cdot x^j \\ &= A_{-1} \cdot x^0 - A_L \cdot x^L + \sum_{n=0}^L A_n \cdot (x^{n+1} - x^n) \\ &= f(1) - A_L \cdot x^L + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{L-1} A_n \cdot x^n \end{aligned}$$

6 [\*] Taylors Theorem

Es gilt  $|A_L \cdot x^L| \leq |A_L|$  und  $|A_n| \leq C$  für eine Konstante  $C$ . Das heißt für  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \text{ hat Limes für } L \rightarrow \infty \\ \Rightarrow f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n = f(1) + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(1) - f(x)| = (1-x) \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \right| \leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \end{aligned}$$

Sei  $K \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(1) - f(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^K |A_n| \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \\ &\leq \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq 0} (|A_n|) \cdot \sum_{n=0}^K x^n}_{=: I_K(x)} + \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n}_{=: J_K(x)} \end{aligned}$$

Für ein festes  $K \in \mathbb{N}$  geht  $I_K \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 1-$  und es gilt

$$J_K(x) = \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n$$

Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned} &= \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \frac{x^{K+1}}{1-x} \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } L \rightarrow \infty \quad (\text{gleichmäßig in } 0 \leq x < 1) \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &\leq 0 + \limsup_{x \rightarrow 1-} J_K(x) \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } K \rightarrow \infty \quad \forall K \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= f(1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2:  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) - f_n(x) &= (x-1) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \cdot x^k - A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \cdot x^k + |A_n| \cdot x^n \quad (0 \leq x < 1) \\ &\leq (1-x) \cdot \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k + |A_n| \\ &\leq \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot (1-x) \cdot x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k + |A_n| \end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|)$$

Mit (ii) folgt  $\forall 0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \\ \Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} (|f(x) - f_n(x)|) &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \end{aligned}$$

Das heißt  $(A_n)_n$  ist eine Nullfolge. Damit gilt gleichmäßige Konvergenz auf  $[0, 1]$ .

$f(x)$  konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen innerhalb des Konvergenzradius und  $\sum a_n$  konvergiert mit Konvergenzradius  $R \geq 1$ . Das heißt  $f(x)$  konvergiert gleichmäßig auf allen  $[-\delta, \delta]$  für  $0 < \delta < 1$ .  $\square$

**Satz 6.1.15** (Arctan Reihe). Für  $|x| \leq 1$  gilt

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei  $f(x) = \arctan x$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ falls } |x| < 1 \end{aligned}$$

Für  $x = 1$  gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konvergiert nach Leibniz} \end{aligned}$$

Das heißt aus Satz 6.1.14 folgt die gleichmäßige Konvergenz von dieser Reihe für alle  $|x| \leq 1$ .  
Das heißt aus der Stetigkeit von  $\arctan$  bei  $\pm 1$  und dem Satz folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall |x| \leq 1 \quad \square$$

**Bemerkung 6.1.16** (Reihendarstellung von  $\pi$ ). Es gilt  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  und damit  $1 = \tan \frac{\pi}{4}$ ,  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ . So ergibt sich mit dem Arctan eine Reihendarstellung von  $\pi$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für die tatsächliche Anwendung allerdings zu langsam. Viel schneller ist die Berechnung über die *Machinsche Formel*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

**Satz 6.1.17** (Binomische Reihe). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (2)$$

wobei wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizient verwenden

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &:= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \\ \binom{\alpha}{n} &:= 0 \text{ für } n \geq \alpha + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt der speziellere Binomische Lehrsatz für  $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot x^n$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $f(x) = (1+x)^\alpha$  für  $x > -1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Das heißt die Taylorreihe für  $f$  in 0 ist

$$\begin{aligned} T(f, 0)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Gefunden von Newton 1665

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die obige Taylorreihe konvergiert

$$\begin{aligned}
 a_n &:= \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x| < 1 \\
 \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} \cdot x^n} \right| \\
 &= |x| \cdot \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| < 1 \\
 \Rightarrow \exists x < 1, N_0 \in \mathbb{N}: \quad &\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq x < 1 \quad \forall n \geq N_0 \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ ist absolut konvergent}
 \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Der Restterm soll verschwinden. Sei  $0 < \Theta < 1$  und  $\xi = \Theta x$ , sowie  $1 \leq p \leq n+1$

$$R_n(f, 0, x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot x^p \quad (\text{Schl\"omilch})$$

F\"ur  $p = 1$  ergibt sich die Restglieddarstellung von Cauchy

$$\begin{aligned}
 R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{n!} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (\alpha - n) \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \cdot (x - \Theta x)^n \cdot x \\
 &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \underbrace{\left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ nach SCHRITT 2}} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \\
 (1 + \Theta x)^{-(n+1)} &= \frac{1}{(1 + \Theta x)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \Theta x} \cdot \frac{1}{(1 + \Theta x)^n} \\
 &\leq \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{(1 - \Theta)^n} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &\leq \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1 - \Theta^n}{1 - \Theta} \cdot \frac{1}{1 - |x|} \\
 &= \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1}{1 - |x|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Das hei\ss t nach dem Satz von Taylor gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

□



## 7 Die Gamma-Funktion

Erinnerung: Die  $\Gamma$ -Funktion ist für  $x > 0$  definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Das funktioniert bei 0, da  $x - 1 > -1$  und es funktioniert bei  $\infty$ , da

$$C_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} < \infty$$

und

$$\begin{aligned} t^{x-1} \cdot e^{-t} &= t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \leq C_x \cdot e^{-\frac{t}{2}} \\ \Rightarrow \Gamma(x) &= \lim_{a \searrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \text{ existiert } \forall x > 0 \end{aligned}$$

Wir hatten außerdem in Satz 4.4.6, dass

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x > 0$$

**Definition 7.1.1** (Konvexität<sup>3</sup>). Eine Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  – wobei  $I$  ein Intervall ist ( $I = [0, \infty)$  ist dabei erlaubt) – heißt konvex, falls  $\forall x, y \in I$  und für alle  $0 \leq \Theta \leq 1$  gilt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \leq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y)$$

**Skizze 7.1.2** (Konvexe Funktion). Wähle ein  $\Theta \in (0, 1)$  und formuliere die Interpolation  $\Theta x + (1 - \Theta)y$ .

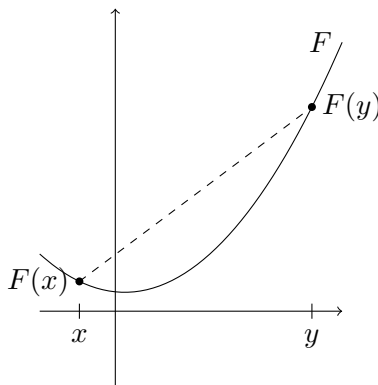


Abbildung 1: Konvexe Funktion mit eingezeichneter Sekante

**Beispiel 7.1.3.** Die Funktionen  $F(t) = e^t$  und  $F(t) = e^{-t}$  sind konvex auf  $\mathbb{R}$ . (Übung)

**Definition 7.1.4.** Eine Funktion  $F$  heißt konkav, falls  $-F$  konvex ist. Das heißt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \geq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y) \quad \forall 0 \leq \Theta \leq 1 \quad \forall x, y \in I$$

<sup>3</sup>Siehe auch Skript ANALYSIS I, Kapitel 19

**Definition 7.1.5** (Logarithmische Konvexität). Eine Funktion  $F$  heißt logarithmisch konvex, falls  $\log \circ F = \log(F)$  konvex ist. Das heißt

$$\begin{aligned}\log F(\Theta x + (1 - \Theta)y) &\leq \Theta \log F(x) + (1 - \Theta) \cdot \log F(y) \\ &= \log \left( F(x)^\Theta \right) + \log \left( F(y)^{1-\Theta} \right) \\ &= \log \left( F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta} \right)\end{aligned}$$

Das heißt die Bedingung für logarithmische Konvexität ist äquivalent zu

$$\Leftrightarrow F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \leq F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta} \quad \forall x, y \in I \quad \forall 0 \leq \Theta \leq 1 \quad (7.1.1)$$

**Satz 7.1.6.** Die Gamma-Funktion  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto \Gamma(x)$  ist logarithmisch konvex.

*Beweis.* (Übung) □

**Satz 7.1.7** (Bohr, Mollerup). Ist  $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  eine Funktion mit

- (a)  $F(1) = 1$
- (b)  $F(x+1) = x \cdot F(x)$  und
- (c)  $F$  ist logarithmisch konvex

Dann gilt  $F = \Gamma$ , das heißt  $F(x) = \Gamma(x) \quad \forall x > 0$ .

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass die obigen Eigenschaften die Funktion  $F$  eindeutig bestimmen, da wir bereits wissen, dass  $\Gamma$  die Eigenschaften erfüllt.

SCHRITT 1:

$$\begin{aligned}F(x+n) &\stackrel{(b)}{=} (x+n-1) \cdot F(x+n-1) \\ &= (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \dots \cdot (x-1) \cdot x \cdot F(x) \quad \forall x > 0\end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}F(n+1) &= n! \cdot F(1) \stackrel{(a)}{=} n! \\ \Rightarrow F(n) &= \Gamma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Das heißt es reicht zu zeigen, dass  $F(x)$  bei  $0 < x < 1$  eindeutig bestimmt ist.

SCHRITT 2: Sei  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}x+n &= (1-x) \cdot n + x \cdot (n+1) \\ \Rightarrow F(x+n) &= F((1-x) \cdot n + x \cdot (n+1))\end{aligned}$$

Nach (c) können wir (7.1.1) mit  $\Theta := 1-x$  anwenden

$$\begin{aligned}&\leq F(n)^{1-x} \cdot F(n+1)^x = F(n)^{1-x} \cdot (n \cdot F(n))^x \\ &= F(n) \cdot n^x = (n-1)! \cdot n^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < x < 1\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}n+1 &= x \cdot (n+x) + (1-x) \cdot (n+1+x) \\ \Rightarrow F(n+x) &\leq F(n+x)^x \cdot F(n+1+x)^{1-x} \\ &= F(n+x) \cdot (n+x)^{1-x}\end{aligned} \quad (2)$$

## 7 Die Gamma-Funktion

Durch die Kombination von (1) und (2) folgt

$$\Rightarrow n! \cdot (n+x)^{x-1} \leq F(n+x) \leq (n-1)! \cdot n^x$$

Es gilt  $F(n+x) = x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1) \cdot F(x)$

$$\Rightarrow \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} a_n(x) &:= \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \\ b_n(x) &:= \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \\ \Rightarrow a_n(x) &\leq F(x) \leq b_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < x < 1 \\ \Rightarrow \frac{a_n(x)}{b_n(x)} &\leq \frac{F(x)}{b_n(x)} \leq 1 \\ \frac{b_n(x)}{a_n(x)} &= \frac{n^x}{n \cdot (n+x)^{x-1}} = \frac{(n+x) \cdot n^x}{n \cdot (n+x)^x} \\ &= \frac{n+x}{n} \cdot \left( \frac{n}{n+x} \right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \Rightarrow F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

also ist  $F(x)$  eindeutig bestimmt. □

**Korollar 7.1.8** (Gaußsche Darstellung von  $\Gamma$ ).

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \tag{7.1.3}$$

*Beweis.* Da  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung für  $0 < x < 1$  direkt aus (7.1.2). Für  $x = 1$  rechnet sich die Formel leicht nach. Also ist noch zu zeigen: Gilt (7.1.3) für ein  $x$ , so gilt die Aussage auch für  $y := x + 1$ .

$$\begin{aligned} \Gamma(y) &= \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \\ &= x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{y-1}}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1)} \end{aligned}$$

Multiplikation im Zähler mit  $n$  und im Nenner mit  $y+n$  (was sich für  $n \rightarrow \infty$  entspricht) liefert

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^y}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1) \cdot (y+n)} \quad \square$$

**Satz 7.1.9.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)} \\
 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n!)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n!)^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

Wir haben ein Wallisches Produkt, was nach Satz 3.2.10 gegen  $\frac{\pi}{2}$  konvergiert

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

□

## 8 [\*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume

### 8.1 Metrische Räume

Frage 07. Wie definiert man Abstand auf allgemeinen Mengen?

**Beispiel 8.1.1** (Abstände zweier reeller Zahlen). Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wir definieren den Abstand über den Betrag. Das heißt  $d(x, y) := |x - y|$ . Der Abstand hat in diesem Fall die Eigenschaften

- (i)  $|x - y| \geq 0$  und  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $|x - y| = |y - x|$
- (iii)  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$  für ein beliebiges  $z \in \mathbb{R}$

**Definition 8.1.2** (Metrik). Sei  $X$  eine Menge und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- (iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$

In diesem Fall nennen wir  $d$  eine Metrik auf  $X$  und das Paar  $(X, d)$  einen metrischen Raum.

**Beispiel 8.1.3.**

1. Auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  definieren wir  $d(x, y) := |x - y|$
2. Für  $x, y \in \mathbb{R}^2$  definieren wir zum Beispiel die euklidische Metrik  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
3. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$ . Dann definieren wir die *induzierte Metrik*  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$
4. Die diskrete Metrik ist definiert durch  $d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
5. Die französische Eisenbahnmeterik im  $\mathbb{R}^2$  ist definiert durch  $d(x, y) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  falls  $x$  und  $y$  nicht auf einer Geraden durch  $(0, 0)$  liegen und sonst  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ .
6. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann können wir eine Metrik  $d_1$  definieren durch

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Dass  $d_1$  die Eigenschaften (i) und (ii) im Sinne der Definition erfüllt, rechnet sich leicht nach. Für (iii) gilt für ein  $z \in X$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Außerdem gilt für  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{t+1} \quad (\text{monoton steigend})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d_1(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = d_1(x, z) + d_1(z, y)
\end{aligned}$$

## 8.2 Normierte Vektorräume

**Definition 8.2.1** (Vektorraum). Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist eine Menge auf der es eine Vektoraddition

$$\begin{aligned}
+ : V \times V &\rightarrow V \\
(x, y) &\mapsto x + y
\end{aligned}$$

und eine (skalare) Multiplikation

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\
(\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x
\end{aligned}$$

gibt, welche den üblichen Axiomen aus der Algebra<sup>4</sup> genügen.

**Definition 8.2.2** (Norm). Eine Norm auf einem VR  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  mit den Eigenschaften

- (i)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in V$
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

**Definition 8.2.3** (Normierter Vektorraum). Ein normierter Vektorraum ist ein Paar  $(V, \|\cdot\|)$  aus einem VR  $V$  und einer Norm  $\|\cdot\|$  auf  $V$ .

**Satz 8.2.4.** Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter VR, so wird durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik auf  $V$  definiert.

*Beweis.* Die Axiome der Metrik folgen unmittelbar aus den Axiomen der Norm. □

**Bemerkung 8.2.5** (Halbnorm). Gelten für eine Abbildung die Norm-Eigenschaften (ii) und (iii), aber statt (i) nur  $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$ . Dann heißt  $\|\cdot\|$  eine Halbnorm. Ein Beispiel dafür im  $\mathbb{R}^2$  wäre die Abbildung  $(x_1 \ x_2) \mapsto x_1$ .

### Beispiel 8.2.6.

1. Sei  $V$  ein euklidischer reeller VR mit symmetrischem, positiv-definitem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann ist  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm.
2. Analog funktioniert der Fall, dass  $V$  ein komplexer VR mit positiv-definiten sesquilinearer Bilinearformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist. Das heißt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  hat die Eigenschaften

$$(i) \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ und } \langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x, y \in V \quad (5)$$

<sup>4</sup>Zum Beispiel  $x + y = y + x$ ,  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , etc. Für eine genaue Aufzählung siehe LINEARE ALGEBRA I

<sup>5</sup>Die Forderung  $\langle x, x \rangle \geq 0$  ist wohldefiniert, weil durch die anderen Eigenschaften folgt, dass  $\forall x \in V: \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

- (ii)  $\langle x, u + w \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, w \rangle$  sowie  $\langle u + w, y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle w, y \rangle$   
 (iii)  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  sowie  $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$  <sup>(6)</sup>

Dann definieren wir eine Norm durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

3. Im  $\mathbb{R}^d$  definieren wir für zwei Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_d)$  und  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^d x_j \cdot y_j$$

Und eine Norm durch

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$$

4. Wir definieren die Maximums-Norm auf  $\mathbb{R}^d$  durch  $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$ . Daraus folgt auch  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \cdot \|x\|_\infty$ .  
 5. Wir definieren die Manhattan-Norm auf  $\mathbb{R}^d$  durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$$

und es gilt  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \cdot \|x\|_\infty$ .

6. Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{B}(X)$  der Vektorraum der reellwertigen beschränkten Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definieren wir

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \sup \{|f(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

als eine Norm auf  $\mathcal{B}(X)$ . Das ist eine Verallgemeinerung der Maximumsnorm.

### 8.3 [\*] Umgebungen und offene Mengen

**Definition 8.3.1** (Umgebung). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum

- (a) Für  $a \in X$ ,  $r > 0$  heißt  $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$  die (offene) Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $a$ .  
 (b) Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt *Umgebung* von  $x \in X$ , falls  $\exists \varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Insbesondere ist  $B_\varepsilon(x)$  eine Umgebung von  $x$ . Wir nennen  $B_\varepsilon(x)$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ .

**Satz 8.3.2** (Hausdorffsches Trennungsaxiom in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann existieren zu  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$   $\varepsilon$ -Umgebungen mit  $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$ .

*Beweis.* Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) > 0$ . Angenommen  $\exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

<sup>6</sup>Physiker-Konvention, anders herum als in der Vorlesung LINEARE ALGEBRA I/II

**Definition 8.3.3** (Offene Menge). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt offen, wenn  $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

**Beispiel 8.3.4.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$

1. Dann sind  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  und  $(-\infty, a)$  offen
2. Die Mengen  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$  sind nicht offen, weil für den ersten Fall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subseteq [a, b)$ .
3. In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  ist für beliebige  $a \in X$ ,  $r > 0$  die Menge  $B_r(a)$  offen. Deshalb heißt  $B_r(a)$  die offene Kugel um  $a$  mit Radius  $r$ .
4. In  $\mathbb{R}^d$  gilt  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow U$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_2$

*Beweis für 3.* Sei  $x \in B_r(a)$  und  $\varepsilon := r - d(a, x) > 0$ . Sei  $z \in B_\varepsilon(x)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(a, z) &\leq d(a, x) + d(x, z) < d(a, x) + r - d(a, x) = r \\ &\Rightarrow d(a, z) < r \\ &\Rightarrow z \in B_r(a) \end{aligned} \quad \square$$

*Beweis für 4.* Sei  $B_\varepsilon^\infty(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_\infty < \varepsilon\}$  und  $B_\varepsilon^{(2)}(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_2 < \varepsilon\}$ . Für ein  $y \in B_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}^{(2)}(x)$  gilt

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2 < \frac{\varepsilon^2}{d} \\ &\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| < \varepsilon \\ &\Rightarrow y \in B_\varepsilon^\infty(x) \end{aligned}$$

Außerdem lässt sich zeigen, dass daraus auch folgt, dass  $y \in B_\varepsilon^{(2)}(x)$ . Das heißt

$$B_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}^{(2)}(x) \subseteq B_\varepsilon^\infty(x) \subseteq B_\varepsilon^{(2)}(x) \quad \square$$

**Satz 8.3.5.** Für die offenen Mengen eines metrischen Raums  $(X, d)$  gilt

- (i)  $\emptyset$  und  $X$  sind offen
- (ii) Sind  $U$  und  $V$  offen, so ist auch  $U \cap V$  offen
- (iii) Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(U_j)_{j \in I}$  eine Familie offener Teilmengen von  $X$ . So ist  $\bigcup_{j \in I} U_j$  offen.

*Beweis von (ii).* Sei  $x \in U \cap V$ . Da  $U$  und  $V$  offen sind, gibt es  $\varepsilon_1 > 0$  und  $\varepsilon_2 > 0$  mit  $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$ ,  $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$ . Sei  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$ . Damit gilt  $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$ .  $\square$

*Beweis von (iii).* Sei  $x \in \bigcup_{j \in I} U_j \Rightarrow \exists i: x \in U_i$ . Außerdem ist  $U_i$  offen. Das heißt es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{j \in I} U_j$ .  $\square$

**Bemerkung 8.3.6.** Seien  $U_1, \dots, U_k$  offen. Dann folgt aus Satz 8.3.5, dass  $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$  offen ist. Das gilt allerdings nur für  $k < \infty$ .

Wir betrachten für einen Schnitt über unendlich viele Mengen das folgende Beispiel:



**Beispiel 8.3.7** (Schnitt über unendlich viele offene Mengen). Sei  $U_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ . Dann ist  $U_n$  offen  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Allerdings ist  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0, 1]$  nicht offen.

**Definition 8.3.8** (Abgeschlossene Menge). In einem metrischen Raum  $(X, d)$  nennen wir eine Menge  $A \subseteq X$  abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $A^C := X \setminus A = \{y \in X : y \notin A\}$  offen ist.

**Bemerkung 8.3.9.** Eine andere (aber äquivalente) Definition von Abgeschlossenheit wurde 1884 von Cantor gegeben. Diese Definition basiert auf Folgen.

**Definition 8.3.10** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_n \subseteq X$  konvergiert gegen den Punkt  $a \in X$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(a, x_n) < \varepsilon \quad \forall n > N$$

das heißt

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } x_n \in B_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n$$

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Definition 8.3.11** (Folgenabgeschlossenheit). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $A \subseteq X$  ist folgenabgeschlossen, falls für jede Folge  $(x_n)_n \subseteq A$ , die gegen einen Punkt  $a \in X$  konvergiert, auch gilt  $a \in A$ .

**Beispiel 8.3.12.** Wir betrachten die Menge  $A = (0, 1]$  und die Folge  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dann liegt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nicht in  $A$ . Das heißt  $A$  ist nicht folgenabgeschlossen. Die Menge  $[0, 1]$  hingegen schon.

**Satz 8.3.13.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $A \subseteq X$  gilt,  $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $A$  folgenabgeschlossen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst noch folgende Lemmata

**Lemma 8.3.14.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ist  $U \subseteq X$  offen, so ist  $U^C$  folgenabgeschlossen.

*Beweis.* Angenommen es gibt eine Folge  $(x_n)_n \subseteq U^C$  mit  $x_n \rightarrow a$ , aber  $a \notin U^C$ . Das heißt  $a \in U$ . Da  $U$  offen ist, existiert eine Kugel  $B_\varepsilon(a) \subseteq U$  (für ein  $\varepsilon > 0$ ). Da  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N} : d(a, x_n) < \varepsilon \quad \forall n > N \\ \Leftrightarrow & \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N \\ \Rightarrow & x_n \notin U^C \quad \forall n > N \end{aligned} \quad \text{(Widerspruch)} \quad \square$$

**Lemma 8.3.15.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  folgenabgeschlossen. Dann ist  $A^C$  offen.

*Beweis.* Angenommen  $A^C$  ist nicht offen. Das heißt  $\exists x_0 \in A^C$ , sodass für jedes  $\varepsilon > 0$  die Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  nicht ganz in  $A^C$  enthalten ist. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$$

Wir wählen eine Folge  $(x_n)_n \subseteq A$  mit  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ . Also gilt  $x_n \rightarrow x_0 \in A^C$ . Das heißt  $A$  ist nicht folgenabgeschlossen. Widerspruch.  $\square$

*Beweis von Satz 8.3.13.*

„ $\Rightarrow$ “ Wenn  $A$  abgeschlossen ist, dann gilt nach Definition, dass  $A^C$  offen ist. Mit Lemma 8.3.14 folgt dann, dass  $A$  folgenabgeschlossen ist.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A$  folgenabgeschlossen. Dann folgt direkt aus Lemma 8.3.15, dass  $A$  abgeschlossen.  $\square$

**Beispiel 8.3.16.** Sei  $[1, 4] \cup ]\frac{1}{2}, 1] \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $A_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  abgeschlossen. Dann ist auch  $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $(x, y) \in (A_1 \times A_2)^C \supseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \cup \mathbb{R}^k \times A_2^C$ .

FALL 1:  $x \in A_1^C$ . Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von  $A_1$

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) &\subseteq A_1^C \\ \Rightarrow B_\varepsilon(x, y) &\subseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Aber  $B_\varepsilon(x, y)$  ist eine offene Menge mit

$$B_\varepsilon(x, y) \subseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \subseteq (A_1 \times A_2)^C$$

FALL 2:  $y \in A_2^C$ . Dann gilt analog zu FALL 1

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x, y) \subseteq (A_1 \times A_2)^C$$

Das heißt  $(A_1 \times A_2)^C$  ist offen und damit ist  $(A_1 \times A_2)$  abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung 8.3.17.**

- (i) In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  sind die Mengen  $\emptyset$  und  $X$  sowohl offen als auch abgeschlossen
- (ii) Das Intervall  $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht offen und nicht abgeschlossen

## 8.4 Grundzüge der Topologie

**Definition 8.4.1** (Topologie). Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt ein Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ , falls

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$  und
- (iii) Für eine beliebige Indexmenge  $I$  mit  $\forall j \in I: V_j \in \mathcal{T}$  folgt  $\bigcup_{j \in I} V_j \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ .  $V \subseteq X$  heißt offen, falls  $V \in \mathcal{T}$  und  $A \subseteq X$  heißt abgeschlossen, falls  $A^C \in \mathcal{T}$ .

**Beispiel 8.4.2.**

1. Das System von offenen Mengen eines metrischen Raums  $X$  ist eine Topologie
2.  $\mathbb{R}^d$  ist ein topologischer Raum (mit dem System der offenen Mengen als implizierte Topologie)
3. Auf jeder Menge  $X$  gibt es mindestens 2 Topologien:  $\mathcal{T}_0 := \{\emptyset, X\}$  und die feinste Topologie  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ . Ist  $|X| \geq 2$ , so ist  $\mathcal{T}_0 \neq \mathcal{T}_1$
4. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ . Wir definieren ähnlich zur induzierten Metrik eine *induzierte Topologie* (Relativ-Topologie)

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T} \cap Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

Dann ist  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  ein topologischer Raum.

**Bemerkung 8.4.3.** Ist  $Y$  nicht offen in  $X$ , so ist  $V \in \mathcal{T}_Y$  nicht notwendigerweise offen in  $X$ .

**Definition 8.4.4** (Umgebung). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  (Punkt in  $X$ ). Eine Teilmenge  $V \subseteq X$  heißt Umgebung von  $x$ , falls es eine Menge  $U \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in U \subseteq V$ .

**Satz 8.4.5.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Menge  $V \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $V$  eine Umgebung für jeden Punkt  $x \in V$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $V$  offen. Dann existiert für jedes  $x \in V$  eine offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U \subseteq V$ . Also ist  $V$  eine Umgebung jedes Punktes  $x \in V$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $V$  eine Umgebung für alle Punkte  $x \in V$ . Dann gilt  $\forall x \in V \exists U_x \in \mathcal{T} : x \in U_x \subseteq V$ . Dann ist  $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ . Das heißt  $V$  ist als Vereinigung offener Mengen offen.  $\square$

**Definition 8.4.6** (Hausdorff-Raum). Ein topologischer Raum heißt Hausdorff-Raum, falls das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt. Das heißt zu zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren offene Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

**Beispiel 8.4.7.**

1. Nach Satz 8.3.2 ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.
2. Sei  $X = \{0, 1\}$  und  $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  eine Topologie. Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  kein Hausdorff-Raum. Um das einzusehen, betrachten wir  $x = 0$  und  $y = 1$ . Für diese zwei Elemente finden wir keine entsprechenden Mengen.

## 8.5 [\*] Berührungspunkt, Häufungspunkt und Randpunkt

Für die folgenden Definitionen sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

**Definition 8.5.1** (Berührungspunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Berührungspunkt von  $A$ , wenn in jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x$  mindestens ein Punkt aus  $A$  liegt. Das heißt  $U \cap A \neq \emptyset$  für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$ .

**Definition 8.5.2** (Häufungspunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Häufungspunkt von  $A$ , wenn für jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  ein von  $x$  verschiedener Punkt in  $A$  liegt. Das heißt  $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$  für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$ .

**Definition 8.5.3** (Randpunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Randpunkt von  $A$ , falls es in jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x$  mindestens einen Punkt aus  $A$  und einen Punkt aus  $A^C$  gibt. Das heißt für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$  ist  $U \cap A \neq \emptyset$  und  $U \cap A^C \neq \emptyset$ . Wir schreiben  $\partial A$  für die Menge aller Randpunkte von  $A$ .

8. Jun]

**Satz 8.5.4.** Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann gilt

- (i)  $A \setminus \partial A$  ist offen
- (ii)  $A \cup \partial A$  ist abgeschlossen
- (iii)  $\partial A$  ist abgeschlossen

*Beweis.*

- (i) Sei  $x \in A \setminus \partial A$  beliebig. Dann folgt es existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit

$$V \cap A^C = V \cap (X \setminus A) = \emptyset \quad ((1))$$

denn ansonsten wäre  $x \in \partial A$

$$\Rightarrow V \cap \partial A = \emptyset \quad ((2))$$

Denn wäre  $V \cap \partial A \neq \emptyset$ . Dann würde folgen

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists y \in V \cap \partial A \\ &\Rightarrow V \text{ offene Umgebung von } y \in \partial A \\ &\Rightarrow V \cap A^C \neq \emptyset \end{aligned} \quad (\text{Widerspruch zu (1)})$$

Mit (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} &V \cap (\partial A \cup A^C) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V \subseteq A \setminus \partial A \\ &\Rightarrow A \setminus \partial A \text{ ist offen} \end{aligned}$$

- (ii)  $A^C = X \setminus A$ . Aus der Definition des Randes folgt  $\partial A = \partial A^C$ . Nach (i) gilt dann

$$\begin{aligned} &A^C \setminus \partial A = A^C \setminus \partial A^C \text{ ist offen} \\ &\Leftrightarrow (A^C \setminus \partial A)^C \text{ ist abgeschlossen} \\ &\Leftrightarrow (A^C \setminus \partial A)^C = X \setminus (A^C \setminus \partial A) \\ &\quad = X \setminus A^C \cup \partial A = A \cup \partial A \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \partial A &= (A \cup \partial A) \cap (A^C \cup \partial A) \\ &= (A \cup \partial A) \cap (A^C \cup \partial A^C) \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

**Definition 8.5.5** (Inneres und Abschluss, abgeschlossene Hülle). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

- (i)  $U(A) := \{U \in \mathcal{T} : U \subseteq A\}$  = alle offenen Teilmengen von  $A$ .  
Das Innere von  $A = A^\circ := \bigcup_{\sigma \in U(A)} \sigma$  = Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $A$
- (ii)  $B(A) := \{B \subseteq X \text{ abgeschlossen} : A \subseteq B\} \neq \emptyset$  (da  $X \in B(A)$ )  
Der Abschluss von  $B$  sei  $\bar{B}$  = abgeschlossene Hülle von  $B := \bigcap_{B \in B(A)} B$  abgeschlossen

Damit gilt  $A \subseteq \bar{A}$ .

**Bemerkung 8.5.6.**  $A^\circ$  = größte offene Teilmenge von  $A$  und  $\bar{A}$  = kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.

**Satz 8.5.7.**  $A^\circ = A \setminus \partial A$  und  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

*Beweis.* TEIL 1: Nach Satz 8.5.4 ist  $A \setminus \partial A$  offen und  $A \setminus \partial A \subseteq A$ . Damit folgt  $A \setminus \partial A \subseteq A^\circ$ .  
Damit ist noch zu zeigen, dass  $A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$ . Ist  $U \subseteq A$  offen

$$\begin{aligned}\Rightarrow U \cap A^C &= \emptyset \\ \Rightarrow U \cap \partial A &= \emptyset\end{aligned}$$

Falls nicht  $\exists y \in U \cap \partial A$ , dann folgt  $U \cap A^C \neq \emptyset$ . Das ergibt einen Widerspruch.  
Das heißt für jede offene Teilmenge  $U \subseteq A$  gilt  $U \subseteq A \setminus \partial A$ .

$$\begin{aligned}A &= \bigcup_{U \in \mathcal{U}(A)} U \subseteq A \setminus \partial A \\ \Rightarrow A^\circ &\subseteq A \setminus \partial A \\ \Rightarrow A \setminus \partial A &= A^\circ\end{aligned}$$

TEIL 2: Behauptung: Aus  $B \subseteq X$  ist abgeschlossen und  $A \subseteq B$  folgt  $\partial A \subseteq B$ . Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann würde gelten  $B^C \cap \partial A \neq \emptyset$ .

$x \in \partial A \cap B^C$ .  $B^C$  ist offene Umgebung von  $x$ . Nach Definition von  $\partial A$  ist  $A \cap B^C \neq \emptyset$ . Das heißt  $A \not\subseteq B$ . (Widerspruch).

Aus der Behauptung folgt jetzt also  $B \supseteq A \cup \partial A \forall B \supseteq A$  und  $B$  ist abgeschlossen

$$\Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}(A)} B = \overline{A}$$

Andererseits ist nach Satz 8.5.4  $A \cup \partial A$  abgeschlossen und sicherlich  $A \subseteq A \cup \partial A$ . Daraus folgt  $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$ . Damit folgt  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .  $\square$

## 9 [\*] Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

**Definition 9.1.1** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_n \subseteq M$  konvergiert gegen  $a \in M$ , falls

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ & (\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: x_n \in B_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n) \end{aligned}$$

Wir schreiben  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oder  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

$(x_n)_n$  heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

**Definition 9.1.2** (Durchmesser). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren den Durchmesser von einer Menge  $A$  mit

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

$A$  ist beschränkt, falls  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Bemerkung 9.1.3.** Eine Menge  $A \subseteq M$  ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists x \in M, r > 0: A \subseteq B_r(x)$$

In diesem Fall ist  $\text{diam}(A) \leq 2r$ .

**Satz 9.1.4.**

- (i) Konvergiert die Folge  $(x_n)_n$ , so ist sie eine Cauchy-Folge
- (ii) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

*Beweis.*

- (i) Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \\ & \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \\ & \Rightarrow (x_n)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge} \end{aligned}$$

- (ii) Sei  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge. Wir wählen  $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x_m) < 1 \quad \forall n, m \geq N$$

Wir definieren  $a := x_N$

$$\Rightarrow d(x_n, a) < 1 \quad \forall n \geq N$$

$$r := \max(d(x_1, a), d(x_2, a), \dots, d(x_{N-1}, a)) + 1$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < r \\ & \Rightarrow x_n \in B_r(a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Das heißt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \subseteq B_r(a) \text{ ist eine beschränkte Menge}$$

□

**Definition 9.1.5** (Banachräume). Ein metrischer Raum  $(M, d)$  heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert. Ein vollständiger, normierter Vektorraum heißt Banachraum.

**Beispiel 9.1.6.**  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ ,  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  oder  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$  sind vollständige, normierte Vektorräume. Genauso  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$  etc.

**Satz 9.1.7** (Schachtelungsprinzip). Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $(A_n)_n$  eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen  $(A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots)$  mit  $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $A_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert genau ein  $x \in M$  sodass  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Das heißt  $x \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* EINDEUTIGKEIT: Angenommen  $x, y \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $d(x, y) \leq \text{diam}(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das heißt  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

EXISTENZ:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A_n$ . Behauptung:  $(x_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge. Sei  $n \geq m$

$$x_n \in A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq A_{n-2} \subseteq \dots \subseteq A_m$$

Das heißt

$$\begin{aligned} x_n &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ \Rightarrow x_n, x_m &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ d(x_n, x_m) &\leq \text{diam}(A_m) \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt  $(x_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge. Nach der Vollständigkeit von  $M$  existiert ein  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Behauptung:  $x \in A_m \forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &\in A_m \text{ da } A_m \text{ abgeschlossen ist} \\ \Rightarrow x &\in A_m \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

**Definition 9.1.8** (Stetigkeit in metrischen Räumen). Sei  $(M, d_M)$ ,  $(N, d_N)$  metrische Räume.

(a)  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition von Stetigkeit: Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  ist stetig im Punkt  $a \in M$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta$$

(b) Folgenstetigkeit: Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  ist folgenstetig in  $a \in M$ , falls für jede Folge  $(x_n)_n \subseteq M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  folgt.

**Bemerkung 9.1.9.** Definition 9.1.8 (a) ist dabei äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta^M(a)) \subseteq B_\varepsilon^N(f(a))$$

**Satz 9.1.10.** Für eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  und  $a \in M$  sind äquivalent

- (i)  $f$  ist  $\varepsilon$ - $\delta$ -stetig in  $a$
- (ii)  $f$  ist folgenstetig in  $a$
- (iii) Für jede Umgebung  $U$  von  $f(a)$  ist  $V = f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $a$

Dabei ist (iii) die topologische Definition von Stetigkeit.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $(x_n)_n \subseteq M$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Für  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$ , sodass

$$d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta$$

Da  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\forall n > N: d_M(x_n, a) < \delta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n > N: d_N(f(x_n), f(a)) < \varepsilon \\ \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Kontraposition. Angenommen (i) gilt nicht. Dann  $\exists \varepsilon_0$ , sodass

$$\forall \delta > 0 \exists x \in M: d_M(x, a) < \delta \text{ und } d_N(f(x), f(a)) > \varepsilon_0$$

Wir wählen  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow a$ , da  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ . Aber

$$\begin{aligned} \exists x_1: d_N(f(x_1), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \exists x_2: d_N(f(x_2), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \exists x_n: d_N(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \Rightarrow d_N(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f(x_n) \not\rightarrow f(a) \end{aligned}$$

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Sei  $U \subseteq N$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon^N(f(a)) \subseteq U \\ \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \\ \Rightarrow \exists \delta > 0: B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(U) \\ \Rightarrow f^{-1}(U) := V \text{ ist eine Umgebung} \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $B_\varepsilon^N(f(a))$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Nach (iii) ist  $V := f^{-1}(B_\varepsilon^N(f(a)))$  eine Umgebung von  $a$ . Das heißt

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0: B_\delta^M(a) \subseteq V \\ \Leftrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(a) \\ \Leftrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 9.1.11.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume und  $f: M \rightarrow N$  eine Funktion.

(a)  $\varepsilon$ - $\delta$ -Version:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls

$$\forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta$$

(b) Folgenversion:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls  $\forall x_0 \in M$  und jede Folge  $(x_n)_n$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

(c) Topologische Version:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls für jede offene Menge  $U \subseteq N$  das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$  ist.



**Satz 9.1.12.** Für metrische Räume  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  und eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  sind die Versionen (a), (b) und (c) von Definition 9.1.11 äquivalent.

*Beweis.* Der Beweis von (a)  $\Leftrightarrow$  (b) folgt direkt aus Satz 9.1.10.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $U$  offen in  $N$ . Dann ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$ . Sei  $x_0 \in M$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$B_\varepsilon^N := B_\varepsilon^N(f(x_0)) = \{y \in N : d_N(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$$

offen in  $N$

$$\Rightarrow V = f^{-1}(B_\varepsilon^N) \text{ offen in } M$$

Außerdem ist  $x_0 \in V$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \delta > 0: B_\delta^M \subseteq V \\ &\Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta^M(x_0) \\ &\Rightarrow \forall d_M(x, x_0) < \delta: d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \end{aligned}$$

(a)  $\Rightarrow$  (c): Kontraposition. Angenommen es existiert eine Menge  $U \subseteq N$ , sodass  $V := f^{-1}(U)$  nicht offen ist. Dann existiert ein  $x_0 \in V$ , sodass

$$\forall \delta > 0: B_\delta(x_0) \not\subseteq V$$

Da  $x_0 \in V$  ist  $f(x_0) \in U$ . Da  $U$  offen ist, gilt

$$\exists \varepsilon_0: B_{\varepsilon_0}^N(f(x_0)) \subseteq U$$

Sei  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Da  $B_{\delta_n}(x_0)$  keine Teilmenge von  $V$  ist, folgt

$$\begin{aligned} &\exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \\ &\Rightarrow x_n \notin V \\ &\Rightarrow x_n \notin f^{-1}(B_{\varepsilon_0}^N(f(x_0))) \\ &\Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow d_M(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_N(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch zu (a). □

**Bemerkung 9.1.13.** Für  $N = \mathbb{R}^d$  und  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist die Stetigkeit von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  äquivalent dazu, dass jedes  $f_j$  stetig ist.

**Bemerkung 9.1.14.** Sei  $(M, d_M)$  metrischer Raum. Wenn  $g, f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind, dann sind auch  $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$  sowie  $f \cdot g : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$  stetig.

Außerdem ist die Menge  $D_{g \neq 0} := \{x \in M : g(x) \neq 0\}$  für ein stetiges  $g$  offen. Das heißt wenn  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist  $D_{g \neq 0}$  eine Umgebung und wir können eine Funktion  $\frac{f}{g} : D_{g \neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, die stetig in  $x_0$  ist.

*Beweis.* (Übung) □

**Definition 9.1.15** (Homöomorphismus). Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Dann heißt eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  Homöomorphismus, wenn sie bijektiv und stetig ist und  $f^{-1} : N \rightarrow M$  auch stetig ist.

**Beispiel 9.1.16.**

1. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

ist ein Homöomorphismus.

2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$$

ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$$

**Definition 9.1.17.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Eine Funktionenfolge  $(f_n)_n$  mit  $f_n : M \rightarrow N$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f : M \rightarrow N$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d_N(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \quad \forall n \geq N$$

Das heißt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} d_N(f(x), f_n(x)) = 0$$

**Satz 9.1.18.** Seien  $f_n : M \rightarrow N$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$  und konvergiere  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f : M \rightarrow N$ . Dann ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Wir verwenden den  $\frac{\varepsilon}{3}$ -Trick. Angenommen  $\varepsilon > 0$  und  $x_0 \in M$  beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} : d_N(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

$f_N$  ist stetig in  $x_0$ . Das heißt

$$\exists \delta > 0 : d_N(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in M, d_M(x, x_0) < \delta$$

Sei nun  $x \in B_\delta(x_0) = \{y \in M : d_M(y, x_0) < \delta\}$ . Dann folgt durch das Verwenden der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(x_0)) &\leq d_N(f(x), f_N(x)) + d_N(f_N(x), f(x_0)) \\ &\leq d_N(f(x), f_N(x)) + d_N(f_N(x), f_N(x_0)) + d_N(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

## 10 [\*] Kompakte Mengen und metrische Räume

**Definition 10.1.1** (Kompaktheit). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  ist kompakt, falls jede Folge in  $A$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in  $A$  liegt. Das heißt

$$\forall \text{Folge } (x_n)_n \subseteq A \exists \text{Teilfolge } (x_{n_k})_k: x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \text{ existiert und } x \in A$$

**Bemerkung 10.1.2** (Topologische Kompaktheit). Es gibt auch eine topologische Definition, die nicht über Folgen argumentiert und im metrischen Fall äquivalent zur Folgenkompaktheit ist:  $A \subseteq M$  ist topologisch kompakt, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Das heißt für eine beliebige Indexmenge  $I$  und  $U_j$  offen  $\forall j \in I$  mit  $A \subseteq \bigcup_{j \in I} U_j$  muss ein  $N \in \mathbb{N}$  und  $j_1, j_2, \dots, j_N \in I$  existieren, sodass  $A \subseteq U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \dots \cup U_{j_N}$ .

**Definition 10.1.3.** Ein metrischer Raum  $(M, d)$  ist kompakt, falls  $M$  kompakt ist.

**Bemerkung 10.1.4.** Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

*Beweis.* Wir haben gezeigt, dass eine Cauchy-Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat. Damit konvergiert jede Cauchy-Folge in einem kompakten Raum.  $\square$

**Satz 10.1.5.** Wir betrachten  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  mit Maximumsnorm. Dann gilt  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann kompakt, wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt. Sei  $(x_n)_n \subseteq A$  eine Folge in  $A$ , welche gegen  $x \in \mathbb{R}^d$  konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  mit  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \in A$ . Da  $(x_n)_n$  konvergiert, ist  $x = y \in A$ .

Angenommen  $A$  ist nicht beschränkt. Das heißt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A: \|x_n\|_\infty \geq n$$

Dann gilt für jede Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  auch  $\|x_{n_k}\| \geq n_k \geq k$ . Das heißt jede Teilfolge von  $(x_n)_n$  ist unbeschränkt und kann somit nicht konvergieren.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A$  abgeschlossen und beschränkt. Dann wählen wir eine Folge  $(x_n)_n \subseteq A$ . Dann besteht  $x_n$  aus mehreren Koordinaten. Das heißt  $x_n = (x_n^1 \ x_n^2 \ \dots \ x_n^d)$ . Wir definieren  $(x_n^j)_n$  als Folge in  $\mathbb{R}$ . Da  $A$  beschränkt ist, muss auch  $(x_n^j)_n$  beschränkt sein. Das heißt für  $j = 1$  gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k}^1)_k$  von  $(x_n^1)_n$ , die konvergiert. Es gibt also eine Ausdünnung  $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\sigma_1(n+1) > \sigma_1(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ , sodass  $x^1 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\sigma_1(k)}^1$  existiert. Dann konvergiert die erste Koordinate von  $(x_{\sigma_1(n)}^1 \ x_{\sigma_1(n)}^2 \ \dots \ x_{\sigma_1(n)}^d)$ .

Wir führen das Prinzip iterativ fort. Das heißt  $(x_{\sigma(n)}^2)_n$  ist beschränkt in  $\mathbb{R}$ . Damit hat es eine konvergente Teilfolge. Wir wählen eine neue Ausdünnung  $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  analog zu  $\sigma_1$  und setzen  $\kappa_2 := \sigma_2 \circ \sigma_1$ . Dann hat  $x_{\kappa_2(n)}^2$  einen Grenzwert  $x^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\kappa_2(n)}^2$ . Dabei konvergiert  $x_{\kappa_2(n)}^1$  immer noch.

Dieses Prinzip wenden wir für jede Koordinate an. Das heißt wir definieren  $\sigma_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $\kappa_{j+1} := \sigma_{j+1} \circ \kappa_j$ . Damit hören wir bei  $j = d$  auf. Dann haben wir  $x_{\kappa_d(n)}^j$  konvergiert gegen ein  $x^j$  für alle  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Das heißt wir haben einen Grenzwert  $x = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^d)$  von  $(x_{\kappa_d(n)})_n$ . Da  $A$  abgeschlossen ist und  $x_{\kappa(n)} \rightarrow x$  ist auch  $x \in A$ . Damit ist  $A$  kompakt.  $\square$

**Satz 10.1.6.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq M$  kompakt. Sei außerdem  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  sein Maximum und Minimum an. Das heißt

$$\begin{aligned}\exists \underline{x} \in A: f(\underline{x}) &= \inf \{f(x) : x \in A\} \quad \text{und} \\ \exists \bar{x} \in A: f(\bar{x}) &= \sup \{f(x) : x \in A\}\end{aligned}$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $a := \inf \{f(x) : x \in A\}$ . Angenommen  $a = -\infty$ . Dann würde gelten

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_0 \in A: f(x_0) \leq -n$$

Das heißt es existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ , da  $A$  kompakt ist. Wir definieren  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in A$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt dann

$$\mathbb{R} \ni f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = -\infty$$

SCHRITT 2: Sei  $a := \inf \{f(x) : x \in A\}$ . Das heißt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A: f(x_n) &< a + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow a &\leq f(x_n) < a + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Da  $A$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  von  $(x_n)_n$ . Wir definieren

$$\begin{aligned}\underline{x} &:= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq a + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow a &\leq f(\underline{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = a \\ \Rightarrow f(\underline{x}) &= a\end{aligned}$$

SCHRITT 3: Für das Maximum betrachte  $-f$  und wende SCHRITT 1 und SCHRITT 2 an. □

**Satz 10.1.7.** Auf  $\mathbb{R}^d$  sind alle Normen äquivalent. Das heißt für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $X$  mit zwei Normen  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$  gibt es  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , sodass

$$c_1 \cdot \|h\|_a \leq \|h\|_b \leq c_2 \cdot \|h\|_a \quad \forall h \in X$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $d := \dim(X) < \infty$ . Wir wählen eine geordnete Basis  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  von  $X$ . Dann können wir einen beliebigen Vektor  $h \in X$  schreiben als

$$h = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j$$

Für eindeutige  $t_j \in \mathbb{R}$ . Damit erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^d &\rightarrow X \\ \mathbb{R}^d \ni t &\mapsto h(t) = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \in X\end{aligned}$$

Also reicht es, zu zeigen, dass für beliebige Normen  $\|\cdot\|$  auf  $X$  und gewählte  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$  gilt

$$c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|h(t)\| \leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Setzen wir nämlich voraus, dass (1) gilt, dann gilt für zwei beliebige Normen  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$  auf  $X$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \|t\|_\infty &\leq \|h(t)\|_a \leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \\ d_1 \cdot \|t\|_\infty &\leq \|h(t)\|_b \leq d_2 \cdot \|t\|_\infty \end{aligned}$$

Sei  $h := h(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|h\|_a &\leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \leq \frac{c_2}{d_1} \cdot \|h\|_b \\ &\leq \frac{c_2}{d_1} \cdot d_2 \cdot \|t\|_\infty \\ &\leq \frac{c_2 \cdot d_2}{c_1 \cdot d_1} \cdot \|h\|_a \\ \Rightarrow \frac{d_1}{c_2} \cdot \|h\|_a &\leq \|h\|_b \leq \frac{d_2}{c_1} \cdot \|h\|_a \end{aligned}$$

Damit wäre die Behauptung gezeigt. Das heißt wir müssen nur noch (1) zeigen. SCHRITT 2: Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $X$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto f(h(t)) = \|h(t)\| \end{aligned}$$

Dann existiert ein  $0 < C < \infty$ , sodass

$$|f(t)| = f(t) \leq C \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

und

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq C \cdot \|t_1 - t_2\|_\infty \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d \quad (3)$$

Dabei folgt aus (3) gerade, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Um (2) zu beweisen, betrachten wir

$$\begin{aligned} |f(t)| = \|h(t)\| &= \left\| \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^d \|t_j \cdot e_j\| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq d} |t_j| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^d \|e_j\|}_{=: C} = C \cdot \|t\|_\infty \end{aligned}$$

Außerdem zeigen wir (3):

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &= ||h(t_1)| - |h(t_2)|| \\ &= ||h_1| - |h_2|| \leq \|h_1 - h_2\| \\ \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| &\leq \|h(t_1) - h(t_2)\| \\ &= \|h(t_1 - t_2)\| \leq C \cdot \|t_1 - t_2\|_\infty \end{aligned}$$

Damit haben wir (3) gezeigt. SCHRITT 3: Nach (3) gilt  $\|h(t)\| \leq C \cdot \|t\|_\infty$ . Also reicht es zu zeigen, dass

$$\exists c_1 > 0 : c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|h(t)\|$$

Sei  $t \neq 0$ . Dann ist auch  $\|t\|_\infty > 0$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= \left\| h\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) \right\| \\
 h\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= \sum_{j=1}^d \frac{t_j}{\|t\|_\infty} \cdot e_j \\
 &= \frac{1}{\|t\|_\infty} \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \\
 &= \frac{1}{\|t\|_\infty} \cdot f(t) \\
 \Rightarrow \|t\|_\infty \cdot f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Wir definieren

$$S := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\|_\infty = 1\}$$

Damit ist  $S$  beschränkt und abgeschlossen. Wir wählen eine Folge  $(t_n)_n \subseteq S$  mit  $t_n \rightarrow t$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \|t\|_\infty &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \right\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n\|_\infty = 1 \\
 &\Rightarrow t \in S
 \end{aligned}$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned}
 c_1 &:= \inf \{f(t) : t \in S\} \\
 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f(t) &= \|t\|_\infty \cdot f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) \geq c_1 \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d
 \end{aligned}$$

Frage: Was ist ein guter Grund, dass  $c_1 > 0$ ? SCHRITT 4:  $S$  ist kompakt, da  $\mathbb{R}^d$  endlich-dimensional ist und  $S$  beschränkt und abgeschlossen ist. Außerdem ist  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(t) > 0 \quad \forall t \in S$ . Nach Satz 10.1.6 nimmt  $f$  auf  $S$  sein Minimum ein. Das heißt es existiert ein  $\underline{t} \in S$ , sodass

$$c_1 = \inf \{f(t) : t \in S\} = f(\underline{t}) > 0 \quad \square$$

**Bemerkung 10.1.8.** Sei  $d = \dim(X)$  und  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  eine Basis von  $X$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{R}^d &\rightarrow X \\
 t &\mapsto F(t) = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j
 \end{aligned}$$

eine lineare Bijektion. Wir haben im vorherigen Beweis gesehen, dass

$$\|F(t)\| \leq C \cdot \|t\|_\infty \quad \text{für } C := \sum_{j=1}^d \|e_j\|$$

Damit ist  $F$  sogar stetig. Frage: Ist  $F^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  auch stetig?

$$c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|F(t)\|$$

$$\begin{aligned}
t &= F^{-1}(h) & (h &:= F(t)) \\
\Rightarrow c_1 \cdot \|F^{-1}(h)\| &\leq \|h\| \\
\Rightarrow \|F^{-1}(h)\| &\leq \frac{1}{c_1} \cdot \|h\|
\end{aligned}$$

Das heißt  $F^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist auch stetig.

**Satz 10.1.9.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume,  $M$  kompakt und  $f : M \rightarrow N$ . Dann gilt  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f$  gleichmäßig stetig ist. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Ist klar.

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen  $f$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in M : d_M(x, y) < \delta \text{ aber } d_N(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

Wähle  $\delta = \frac{1}{n}$ . Das heißt es existieren zwei Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq M$ , sodass

$$d_N(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da  $M$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(y_{n_k})_k$  von  $(y_n)_n$ , die konvergiert. Sei

$$y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \in M$$

Behauptung:  $x_{n_k} \rightarrow y$ , da

$$d_M(x_{n_k}, y) \leq d_M(x_{n_k}, y_{n_k}) + d_M(y_{n_k}, y) \rightarrow 0$$

Da  $f$  stetig ist folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d_N(f(x_{n_k}), f(y)) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \\
0 < \varepsilon &\leq d_N(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_N(f(x_{n_k}), f(y)) + d_N(f(y), f(y_{n_k})) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch, da  $\varepsilon$  fest gewählt war. □

## 11 [\*] Differentialrechnung im $\mathbb{R}^d$

### 11.1 Die Ableitung

Bisher haben wir die Ableitung in  $\mathbb{R}$  definiert. Die Idee dahinter war, eine Funktion  $f(x)$  an einer Stelle durch eine affine Funktion zu approximieren. Das heißt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x) \cdot h + \text{Fehler}_x(h) \\ &= b + a \cdot h + \text{Fehler}_x(h) \end{aligned}$$

Dabei galt

$$\begin{aligned} \frac{|\text{Fehler}_x(h)|}{h} &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\text{ existiert} \end{aligned}$$

Wir wollen dieses Prinzip auf den  $\mathbb{R}^d$  übertragen und fragen uns: Gibt es eine affine Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\mapsto g(h) = b + A \cdot [h] = b + A \cdot h \end{aligned}$$

sodass

$$f(x+h) = g(h) + \text{Fehler}_x(h) \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\frac{\|\text{Fehler}_x(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Angenommen wir finden eine solche Funktion  $f : D \rightarrow Y := \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq X := \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= b + A \cdot [h] + \text{Fehler}_x(h) \\ \frac{\|\text{Fehler}_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} &= \frac{\|\varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X\|}{\|h\|_X} = \|\varepsilon_x(h)\|_Y \rightarrow 0 \\ \varepsilon_x(h) &:= \frac{\text{Fehler}_x(h)}{\|h\|_X} \\ f(x+h) &= g(h) + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X \end{aligned} \quad (*)$$

Behauptung: Angenommen (\*) und  $\varepsilon_x(h) \rightarrow 0$  gilt. Dann folgt, dass  $g$  eindeutig bestimmt ist.

*Beweis.* Angenommen es existieren  $g_1, g_2$  affine Abbildungen, sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= g_1(h) + \varepsilon_x^1(h) \cdot \|h\|_X \\ &= g_2(h) + \varepsilon_x^2(h) \cdot \|h\|_X \end{aligned}$$

Dann ist zu zeigen, dass  $g_1 = g_2$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} g(h) &= g_1(h) - g_2(h) = -\varepsilon_x^1(h) \cdot \|h\|_X + \varepsilon_x^2(h) \cdot \|h\|_X \\ &=: \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ \Rightarrow g(0) &= 0 = b_1 - b_2 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow b_1 = b_2$$

Damit sind bereits die  $b$  gleich. Also gilt

$$\Rightarrow g(h) = A_2[h] - A_1[h] = (A_2 - A_1)[h]$$

Außerdem gilt  $x + h \in U$ . Wir ersetzen  $h$  durch  $th$ . Dann ist  $x + th \in U$

$$A[h] \Rightarrow g(th) = (\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)) \cdot \|th\|_X$$

Das heißt  $|t| < \delta = \frac{r}{\|h\|_X}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A = A_2 - A_1 \\ \Rightarrow t \cdot A[h] &= A[th] = (\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)) \cdot \|h\|_X \cdot |t| \\ &\Rightarrow \|tA[h]\|_Y = |t| \cdot \|h\|_X \cdot \|\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)\|_Y \\ &\Rightarrow \|A[h]\|_Y = \|h\|_X \cdot \|\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)\|_Y \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \|A[h]\|_Y = 0 \quad \forall h \in X \\ &\Rightarrow 0 = A = A_2 - A_1 \\ &\Rightarrow A_1 = A_2 \end{aligned}$$

□

**Definition 11.1.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$ .  $f$  ist differenzierbar in  $x$ , falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert mit

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\| \\ &= f(x) + A[h] + \text{Fehler}_x(h) \end{aligned}$$

$\varepsilon_x(h) \rightarrow 0$  (in  $\mathbb{R}^m$ ) für  $h \rightarrow 0$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Wir schreiben  $Df(x) := A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ ).

**Definition 11.1.2.** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  beliebige normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen. Dann ist  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $x$ , falls  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  eine stetige lineare Abbildung von  $X$  nach  $Y$  ist, sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \text{Fehler}_x(h) \\ &= f(x) + A[h] + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X, \\ \|\varepsilon_x(h)\|_Y &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 11.1.3.** Wir müssen im Allgemeinen verlangen, dass  $A$  eine stetige lineare Abbildung  $\Leftrightarrow A$  ist beschränkte lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} &= \sup_{h \in X, \|h\|_X \leq 1} \|A[h]\|_Y = \sup_{h \in X, \|h\|_X = 1} \|A[h]\|_Y \\ &= \sup_{h \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A[h]\|_Y}{\|h\|_X} = \left\| A \left[ \frac{h}{\|h\|_X} \right] \right\|_Y \\ \|A\|_{X \rightarrow Y} &:= \sup_{h \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A[h]\|_Y}{\|h\|_X} \quad (\text{Operatornorm von } A : X \rightarrow Y) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$  ist ein normierter Vektorraum. Dieser ist vollständig, falls  $Y$  vollständig ist.

**Definition 11.1.4.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U \subseteq X$  offen ist differenzierbar, falls es in jedem Punkt  $x \in U$  differenzierbar ist. Wir definieren also eine Abbildung

$$\begin{aligned} Df &: U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ x &\rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

**Satz 11.1.5.** Für eine lineare Funktion  $A : X \rightarrow Y$  sind äquivalent

- (i)  $A$  ist Lipschitz-stetig
- (ii)  $A$  ist gleichmäßig stetig
- (iii)  $A$  ist stetig
- (iv)  $A$  ist stetig in  $0 \in X$
- (v)  $A$  ist beschränkt, das heißt  $\|A\|_{X \rightarrow Y} < \infty$

**Satz 11.1.6.** Die Ableitung ist linear. Das heißt für  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen sowie  $f, g : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $x \in U$  gilt

$$\begin{aligned} D(\lambda f)(x) &= \lambda Df(x) \\ D(f + g)(x) &= Df(x) + Dg(x) \end{aligned}$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition der Ableitung. □

**Beispiel 11.1.7.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $X$ . Außerdem definieren wir  $f(x) := \langle x, x \rangle$ .

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \langle x + h, x + h \rangle \\ &= \langle x, x + h \rangle + \langle h, x + h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle \\ &= f(x) + \underbrace{2\langle x, h \rangle}_{\text{linear in } h} + \underbrace{\|h\|^2}_{\text{Fehler}} \\ \frac{\text{Fehler}(h)}{\|h\|} &= \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 11.2 [\*] Richtungsableitung und partielle Ableitung

**Definition 11.2.1** (Richtungsableitung). Sei  $U \subseteq X$  offen und  $f : U \rightarrow Y$  sowie  $h \in X$  beliebig. Die Richtungsableitung von  $f$  (in  $x$ ) in Richtung  $h$  ist gegeben durch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} =: D_h f(x)$$

Also ist

$$D_h f(x) = \frac{d}{dt} f(x + th)$$

**Satz 11.2.2.** Ist  $f : U \rightarrow Y$  in  $x$  differenzierbar, so folgt

$$Df(x)[h] = D_h f(x) \quad \forall h \in X$$

*Beweis.* Sei  $A = Df(x)$

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon(h) \|h\|_X \\ f(x + th) - f(x) - A[th] &= \varepsilon(th) \cdot \|th\|_X \\ &= \varepsilon(th) \cdot |t| \cdot \|h\|_X \\ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - A(h) &= \frac{|t|}{t} \cdot \varepsilon(th) \cdot \|h\|_X \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow D_h f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = A[h] = Df(x)[h] \end{aligned} \quad \square$$

Im Folgenden sei  $X = \mathbb{R}^n$  und  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  die Standardbasis.

**Definition 11.2.3** (Partielle Ableitung). Sei  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f$  differenzierbar in  $x \in U$ . Außerdem sei  $A := Df(x)$ . Dann definieren wir die partielle Ableitung  $\partial_{x_j} f(x) = \partial_j f(x)$  bezüglich der Standardbasen durch

$$\begin{aligned}\partial_{x_j} f(x) &= \partial_j f(x) = D_{e_j} f(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} f(x + t \cdot e_j)|_{t=0}\end{aligned}$$

**Bemerkung 11.2.4.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  in  $x \in U$  differenzierbar.  $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ . Dann gilt

$$Df(x)[h] = Df(x) \cdot h = Df \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

**Warnung:** Die Existenz der partiellen Ableitungen und sogar aller Richtungsableitungen impliziert nicht die Existenz der Ableitung!

**Beispiel 11.2.5.** Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x \neq (0, 0) \\ 0 & x = (0, 0) \end{cases}$$

existiert  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  für  $x_1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \neq 0$ . Außerdem gilt für  $x_1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

Damit existieren die partiellen Ableitungen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}f(th) &= \frac{t^2 h_1 h_2}{\sqrt{t^2 h_1^2 + t^2 h_2^2}} \\ &= \frac{t^2 h_1 h_2}{t \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = t \cdot f(h) \\ \Rightarrow D_n f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tf(h) - 0}{t} = f(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\end{aligned}$$

$f(x)$  ist nicht stetig in  $(0, 0)$ .

**Satz 11.2.6.** Sei  $f : U \rightarrow Y$ ,  $U$  offen,  $x \in U$  und  $f$  sei differenzierbar in  $x$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x$ .

*Beweis.* Sei  $h$  klein genug, dass  $x + h \in U$ . Dann gilt

$$f(x + h) = f(x) + \underbrace{A[h]}_{\rightarrow 0 \text{ für } \|h\| \rightarrow 0} + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \|h\| \rightarrow 0} \cdot \|h\|_X \rightarrow f(x)$$

Damit ist  $f$  in  $x$  stetig. □

### 11.3 Kettenregel

**Satz 11.3.1** (Kettenregel). Seien  $X, Y, Z$  normierte Vektorräume mit  $V \subseteq X$ ,  $U \subseteq Y$  offen und  $f : V \rightarrow U$ ,  $g : U \rightarrow Z$ . Sei außerdem  $f$  differenzierbar in  $x \in V$ ,  $g$  differenzierbar in  $y = f(x)$ . Dann gilt  $g \circ f : V \rightarrow Z$  ist differenzierbar in  $x$  und  $D_{g \circ f}(x) = D_g(f(x)) \circ Df(x)$ . Das heißt

$$D_{f \circ g}(x) [h] = D_g(f(x)) [Df(x) [h]]$$

*Beweis.* Sei  $A = Df(x)$ ,  $B = Dg(y)$ ,  $y = f(x)$ . Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X \quad \forall (x+h) \in V \\ g(y+k) &= g(y) + B[k] + \varepsilon_2(k) \cdot \|k\|_Y \quad \forall (y+k) \in U \\ \Rightarrow (g \circ f)(x+h) &= g(f(x+h)) = g\left(f(x) + \underbrace{A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X}_{=:k}\right) \\ &= g(y+k) = g(f(x)) + B[k] + \varepsilon_2(k) \cdot \|k\|_Y \\ &= g(f(x)) + B[A[h]] + \|h\|_X \cdot B[\varepsilon_1(h)] \\ &\quad + \varepsilon_2(A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X) \cdot \|A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X\| \end{aligned}$$

Durch Analyse der Grenzwerte der einzelnen Summanden, ergibt sich, dass

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = B[A[h]] + \varepsilon(h) \cdot \|h\|_X$$

Damit ist  $g \circ f$  in  $x$  differenzierbar und

$$D_{g \circ f}[h] = B[A[h]]$$

□

**Bemerkung 11.3.2** (Richtungsableitung aus Ableitung). Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow Y$  und existiere

$$f'(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s}$$

Dann gilt

$$D_h f(x) = \frac{df}{dt} f(x+th) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t \cdot h} \cdot h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} \cdot h = f'(x) \cdot h$$

**Bemerkung 11.3.3.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow Y$  differenzierbar. Dann gilt für alle  $x \in (a, b)$

$$\|Df(x)\|_{\mathbb{R} \rightarrow Y} := \sup_{h \neq 0} \frac{\|Df(x)[h]\|_Y}{\|h\|} = \frac{\|f'(x) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{|h| \cdot \|f'(x)\|_Y}{|h|} = \|f'(x)\|_Y$$

**Satz 11.3.4** (Mittelwertsatz oder Schrankensatz). Sei  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ein vollständiger Vektorraum,  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow Y$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b) =: I^\circ$ . Sei außerdem  $\|Df(s)\|_{\mathbb{R} \rightarrow Y} = \|f'(s)\|_Y \leq M$  für alle  $a < s < b$ . Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq M \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Sei  $\eta > 0$  fixiert. Wir definieren

$$A := \{\xi \in [a, b] : \forall s, a \leq s < \xi \text{ gilt } \|f(s) - f(a)\|_Y \leq (M + \eta) \cdot (s - a)\}$$

Dann ist  $a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ . Sei  $c := \sup A \leq b$ . Da  $f$  stetig ist, gilt  $c \in A \Rightarrow [a, c] \subseteq A$ . Zu zeigen ist, dass  $c = b$ . Angenommen  $c < b$ . Dann gilt

$$\exists \delta > 0, c + \delta \leq b, c \leq t < c + \delta : f(t) - f(c) - Df(c)[t - c] = f(t) - f(c) - f'(c) \cdot (t - c) = \varepsilon(t \cdot c)$$

$$\begin{aligned}
\|f(t) - f(c)\|_Y &\leq \|f'(c)\|_Y \cdot (t - c) + \|\varepsilon(t - c)\|_Y \leq M \cdot (t - c) + \|\varepsilon(t - c)\|_Y \cdot (t - c) \\
\|f(t) - f(a)\|_Y &\leq \|f(c) - f(a)\|_Y + \|f(t) - f(c)\|_Y \\
&\leq (M + \eta) \cdot (-a + c) + \left(M + \frac{\eta}{2}\right) (t - c) < (M + \eta) (t - a) \\
&\Rightarrow t \in A \\
&\Rightarrow c = b
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 11.3.5.** Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt konvex, falls  $\forall x, y \in A: [x, y] \subseteq A$ .

**Anwendung 11.3.6.** Sei  $U \subseteq X$  offen und  $x, y \in U$  mit  $[x, y] \subseteq U$ . Dann ist  $[x, y] := \{x + s \cdot (y - x) : 0 \leq s \leq 1\}$ . Das heißt wir definieren  $X(s) = x + s \cdot (y - x)$  und können für eine Funktion  $f$ , die auf  $U$  definiert ist schreiben

$$F(s) := f \circ X(s)$$

Damit haben wir nach Kettenregel für  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
DF(s)[h] &= Df(X(s)) [DX(s)[h]] \\
\frac{d}{ds} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(s+t) - F(s)}{t} = D_1 F(s) = DF(s)[1] = Df(X(s)) [y - x] \\
\|F'(s)\|_Y &= \|Df(X(s)) [y - x]\|_Y \leq \|Df(X(s))\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X
\end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
M &:= \sup_{0 \leq s \leq 1} \|F'(s)\|_Y \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Df(X(s))\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X = \|Df(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X \\
&\quad (\xi = (1 - s) \cdot x + sy)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y = \|F(1) - F(0)\|_Y$$

Nach Satz 11.3.4 können wir abschätzen

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|F'(s)\|_Y \cdot 1$$

**Satz 11.3.7** (Schränkensatz II). Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen,  $x, y \in U, [x, y] \subseteq U$ . Ferner sei  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar auf ganz  $U$ . Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_Y \leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|Df(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X = \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Df((1 - s) \cdot x + sy)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X$$

Außerdem  $\forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\|f(y) - f(x) - A[y - x]\|_Y \leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|Df(\xi) - A\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X \quad (11.3.1)$$

*Beweis von (11.3.1).* Seien  $x, y \in U, [x, y] \subseteq U, A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Sei  $f : U \rightarrow Y, x \mapsto F(x) := f(x) - A[x]$ .

$$\begin{aligned}
DF(x)[h] &= Df(x)[h] - A[h] \\
\Rightarrow \|f(x) - f(y) - A[x - y]\|_Y &= \|F(y) - F(x)\|_Y \\
&\leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|DF(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X
\end{aligned}$$

□

**Satz 11.3.8.** Sei  $U \subseteq X$ ,  $x, y \in U$ ,  $[x, y] \subseteq U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gibt es ein  $\xi \in [x, y]$  mit

$$f(x) - f(y) = Df(\xi) [y - x]$$

*Beweis.* Setze  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto f((1 - s) \cdot x + sy)$

$$\exists t \in (0, 1) : F(1) - F(0) = F'(t) \cdot (1 - 0) = F'(t)$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds} f((1 - s) \cdot x + sy) = \frac{d}{ds} f(x + s \cdot (y - x)) = Df(x + s(y - x)) [y - x]$$

Dann setze  $\xi := (1 - t) \cdot x + ty$ . □

## 11.4 Existenz von Ableitungen

Das Ziel dieses Teilkapitels ist es, ein Differenzierbarkeitskriterium zu finden und in diesem Sinne den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 11.4.1.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  für einen Banachraum  $Y$  und eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen  $\partial_j f : U \rightarrow Y$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) stetig sind.

**Definition 11.4.2** (Verallgemeinerte partielle Ableitung). Wir können den  $\mathbb{R}^n$  zerlegen, indem wir  $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $n_j \in \mathbb{N}$  finden, sodass  $\sum n_j = n$ . Dann schreiben wir eine Zerlegung als  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Außerdem können wir einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  schreiben als  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , wobei  $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ .

Wir betrachten eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U$  offen und  $a = (a_1, \dots, a_k) \in U$ . Die Ableitung von  $f(a_1, \dots, a_j + x_j, a_{j+1}, \dots, a_k)$  nach  $x_j$  an der Stelle  $x_j = 0$  heißt verallgemeinerte partielle Ableitung von  $f$  nach  $j$  an der Stelle  $a$ .

**Lemma 11.4.3.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und haben wir eine Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\sum n_j = n$ . Dann gilt für die verallgemeinerte partielle Ableitung  $D_j f(a)$  mit  $h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$

$$Df(a) = \sum_{j=1}^k D_j f(a) [h_j]$$

*Beweis.* Sei  $I_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I_j(x_j) = (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} DI_j [h_j] &= I_j(h_j) = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \\ D_j f(a) &= Df(a) \circ I_j \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^k D_j f(a) [h_j] &= \sum_{j=1}^k Df(a) \cdot I_j(h_j) = \sum_{j=1}^k Df(a) [I_j [h_j]] \\ &= Df(a) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k I_j [h_j]}_h = Df(a) [h] \end{aligned}$$

□

**Satz 11.4.4.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  für einen Banachraum  $Y$  und eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig differenzierbar, wenn die verallgemeinerten partiellen Ableitungen  $D_j f$  für alle Zerlegungen von  $\mathbb{R}^n$  auf  $U$  stetig differenzierbar sind.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f$  differenzierbar. Dann gilt nach Lemma 11.4.3, dass

$$D_j f(x) [h_j] = Df(x) [I_j h]$$

Da die rechte Seite in  $x$  stetig differenzierbar ist, muss auch die linke Seite stetig differenzierbar sein.

„ $\Leftarrow$ “ **SCHRITT 1:** Wir betrachten zunächst den Fall  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  und definieren dafür  $\|h\| := \max(\|h_1\|_1, \|h_2\|_2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2(x_1, x_2) [h_2]_Y \\ &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] + D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] \\ &\quad - D_2 f(x_1, x_2) [h_2] + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2 f(x_1, x_2) [h_2] \end{aligned}$$

Wir wollen die Normen der Terme nacheinander nach oben abschätzen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1]\|_Y \leq \frac{\varepsilon(h_1)}{4} \cdot \|h_1\|_1 \\ (2) \quad & \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1, x_2)\|_{\mathbb{R}^{n_2} \rightarrow Y} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{Stetigkeit}) \\ & \Rightarrow \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] - D_2 f(x_1, x_2) [h_2]\|_Y < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \|h_2\| \\ (3) \quad & \|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2]\|_Y \stackrel{11.3.7}{\leq} \\ & \|h_2\| \cdot \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2 + s h_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2)\| < \|h_2\| \cdot \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Das heißt insgesamt folgt

$$\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2(x_1, x_2) [h_2]\|_Y \leq \varepsilon(\|h\|) \cdot \|h\|$$

Damit folgt die Behauptung für diesen speziellen Fall.

**SCHRITT 2:** Im allgemeinen Fall haben wir  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass wir mit  $D_1 f$ ,  $D_2 f$  auch  $D_{12} f$  erhalten. Wir nehmen eine neue Zerlegung  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \times \mathbb{R}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Dann erhalten wir aus  $D_{12} f$  und  $D_3 f$  auch  $D_{123} f$ . Dieses Vorgehen setzen wir induktiv fort. So ergibt sich nach  $k$  Schritten unsere Behauptung.  $\square$

*Beweis von Satz 11.4.1.* Der Satz folgt dann aus Satz 11.4.4, indem wir als initiale Zerlegung die Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$  wählen.  $\square$

## 11.5 [\*] Symmetrie der zweiten partiellen Ableitung - Der Satz von Schwartz

Für dieses Teilkapitel sei  $Y$  ein Banach-Raum und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

**Bemerkung 11.5.1.** Wir betrachten eine Abbildung  $f : U \rightarrow Y$ . Dann gilt  $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$  und  $D(Df) = D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$ . Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} Df(x) [h] &= \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) [h] \\ &= (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \langle \nabla f, h \rangle$$

Dabei ist  $\partial_i f(x) : U \rightarrow Y^n$

$$\begin{aligned} D_v Df(x) &= \frac{d}{dt} Df(x + tv)|_{t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \partial_1 f(x + tv), \frac{d}{dt} \partial_2 f(x + tv), \dots, \frac{d}{dt} \partial_n f(x + tv) \right) |_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n v_k \cdot (\partial_k \partial_1 f(x), \dots, \partial_k \partial_n f(x)) \end{aligned}$$

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\begin{aligned} D_v Df(x) [h] &= \frac{d}{dt} \left( \partial_1 f(x + tv), \dots, \partial_n f(x + tv) \right) |_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n v_k \left( \sum_{j=1}^n \partial_k \partial_j f(x) \cdot h_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \partial_k \partial_j f(x) h_j \\ &= \langle v, H_e h \rangle \end{aligned}$$

wobei

$$H_e(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \partial_1 \partial_2 f(x) & \dots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \partial_2 \partial_1 f(x) & \partial_2 \partial_2 f(x) & \dots & \partial_2 \partial_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \dots & \dots & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Hesse-Matrix})$$

**Definition 11.5.2.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt  $Df : U \rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)}_{\text{Banachraum}}$ .

Ist  $Df$  stetig differenzierbar, so heißt  $f$  zweimal differenzierbar auf  $U$ . Wir nennen  $D^2 f(x)$  dann die zweite Ableitung von  $f$ . Dabei ist

$$(i) \quad Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$$

$$(ii) \quad D^2 f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$$

Sei  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$ ,  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (v, h) \mapsto \langle v, Bh \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \cdot \sum_{j=1}^n B_{kj} h_j$ . Definiere  $B(v, h) := (L[h])[h]$ . Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} v &= \sum v_k \cdot e_k \\ h &= \sum h_k \cdot e_k \\ (L[v])[h] &= \left( L \left[ \sum_{k=1}^n v_k \cdot e_k \right] \right) \left[ \sum_{j=1}^n h_j e_j \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{(L[e_k][e_j])}_{B_{kj} = B(e_k, e_j)} \cdot v_k h_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n B_{kj} v_k h_j = \langle v, Bh \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\left(D^2 f(x)[v]\right)[h] &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \left(D^2 f(x)[e_k]\right)[e_j] h_j \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \partial_k \partial_j f(x) h_j \\
&= \langle v, H_e h \rangle
\end{aligned}$$

**Satz 11.5.3.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (i) Die 2. Ableitung existiert und ist stetig
- (ii) Alle gemischten partiellen Ableitungen  $\partial_k \partial_j f(x)$ ,  $1 \leq k, j \leq n$  existieren und sind stetig
- (iii) Die Hesse-Matrix  $H_e(x)$  existiert und ist stetig

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 11.4.1 und Satz 11.4.4. □

**Satz 11.5.4.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  zwei mal differenzierbar und  $x \in U$ . Dann ist die bilineare Abbildung  $D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  symmetrisch. Das heißt für alle  $v, h \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$D^2 f(x)[v, h] = D^2 f(x)[h, v]$$

oder

$$D_v D_h f(x) = D_h D_v f(x)$$

oder

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_j \partial_k f(x)$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass  $D_v D_h f(x) = D_h D_v f(x)$ . Wir betrachten den Fall  $Y = \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Definieren den Differenz-Operator

$$\Delta_h f(x) := f(x + h) - f(x)$$

SCHRITT 1: Für  $f, h \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + h, x + v \in U$  gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_v \Delta_h f(x) &= \Delta_v (f(x + h) - f(x)) = \Delta_v f(x + h) - \Delta_v f(x) \\
&= f(x + h + v) - f(x + h) - f(x + v) + f(x) \\
&= f(x + h + v) - f(x + v) - f(x + h) + f(x) = \Delta_h \Delta_v f(x)
\end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei  $h, v \in \mathbb{R}^n$  beliebig und  $x \in U$ ,  $U$  offen. Dann  $\exists \delta > 0 : B_{2\delta}(x) \subseteq U$

$$\begin{aligned}
|s| &< \frac{\delta}{\min(1, |v|)} \\
|t| &< \frac{\delta}{\min(1, |h|)}
\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass  $\frac{1}{st} \Delta_{sv} \Delta_{th} = D_h D_v f(x + s, v + t_1 h)$  für  $s_1 \in (0, s)$ ,  $t_1 \in (0, t)$

$$\begin{aligned}
\Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) &= g(x + sv) - g(x) = k'(s_1) \cdot (s - 0) = k'(s_1) \cdot s = \frac{d}{ds} g(x + sv)|_{s=s_1} \cdot s \\
&= D_v g(x + s_1 v) \cdot s = D_v (\Delta_{th} f)(x + s_1 v) \cdot s \\
&= D_v (f(x + s_1 v + th) - f(x + s_1 v)) \cdot s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D_v f(x + s_1 v + t h) \cdot s - D_v f(x + s_1 v) \cdot s \\
D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h) \cdot s \cdot t \\
&\Rightarrow \frac{1}{st} \Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) = D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h)
\end{aligned}$$

SCHRITT 3: Nach SCHRITT 1 haben wir  $\Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) = \Delta_{th} \Delta_{sv} f(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{st} \Delta_{th} \Delta_{sv} f(x) = D_v D_h f(x + s_1 v + t_1 h) = D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h)$$

Für  $s \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  haben wir so die Behauptung.  $\square$

## 11.6 Extrema und lokale Minima/Maxima

**Definition 11.6.1** (Lokales Minimum und Maximum). Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum (oder Maximum), falls ein Ball  $B_\varepsilon(x_0)$  existiert, sodass

$$\forall x \in B_\varepsilon(x_0): f(x) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$$

Gilt sogar

$$\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}: f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$$

so heißt  $x_0$  striktes (isoliertes) Minimum (oder Maximum).

**Satz 11.6.2.** Hat  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  ein lokales Minimum (oder Maximum) und ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $\nabla f(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $x_0$  ein lokales Minimum. Dann gilt  $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ . Sei  $h \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für  $x_0 + th \in B_\varepsilon(x_0)$  für  $|t|$  klein genug. Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \rightarrow D_h f(x_0) = Df(x_0)[h] = \nabla f(x_0) \cdot h \\
&\Rightarrow 0 \leq \nabla f(x_0) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow 0 \leq \nabla f(x_0) \cdot (-h) = -\nabla f(x_0) \cdot h \leq 0 \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Der Beweis für ein lokales Maximum funktioniert analog.

**Notation 11.6.3.** Wir schreiben  $f \in \mathcal{C}^2(U) = \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ , falls alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis Ordnung 2 stetig auf  $U$  sind. Das heißt  $f$ ,  $\partial_j f$  und  $\partial_k \partial_j f$  stetig  $\forall 1 \leq k, j \leq n$ .

**Satz 11.6.4.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . Dann ist die Hesse-Matrix  $H_l(x)$  stetig bezüglich der Operatornorm. (Das heißt jeder Eintrag  $\partial_k \partial_j f$  ist stetig).

*Beweis.* Sei  $g(t) = f(x + tv)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt} f(x + tv) = Df(x + tv)[v] \\
&= \nabla f(x + tv) \cdot v = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x + tv) \cdot v_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x+v) &= f(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+tv) dt \\
&= f(x) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
\int_0^1 \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dx &= \int_0^1 \left( -\frac{d}{dt} (1-t) \right) \cdot \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
&= [-(1-t) \partial_j f(x+tv) \cdot v_j]_0^1 + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial}{\partial t} \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
&= \partial_j f(x) \cdot v_j + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_j f(x+tv) \cdot v_k \cdot v_j dt \\
\Rightarrow f(x+tv) &= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_k f(x+tv) \cdot v_k \cdot v_j dt \\
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \int_0^1 (1-t) \langle v, H_l(x+tv) \cdot v \rangle dt
\end{aligned}$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integrale

$$\begin{aligned}
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + k(\Theta) \cdot \int_0^1 (1-t) dt \quad (\Theta \in (0,1)) \\
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \frac{1}{2} \underbrace{\langle v, H_l(x+\Theta v) \rangle}_{\text{symmetrische } n \times n\text{-Matrix}} \quad (11.6.1)
\end{aligned}$$

□

**Definition 11.6.5.** Sei  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  (Menge aller  $n \times n$ -Matrizen) symmetrisch. Dann heißt  $A$

- (i) positiv-definit ( $A > 0$ ), falls  $\langle v, Av \rangle > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (ii) positiv-semi-definit ( $A \geq 0$ ), falls  $\langle v, Av \rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
- (iii) negativ-definit ( $A < 0$ ), falls  $-A > 0$
- (iv) negativ-semi-definit ( $A \leq 0$ ), falls  $-A \geq 0$

**Bemerkung 11.6.6.** ??

**Lemma 11.6.7.** Sei  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann ist  $A$  genau dann positiv definit, wenn

$$\exists \lambda > 0: \langle v, Av \rangle \geq \lambda |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

*Beweis.*  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  mit normierten Eigenvektoren  $e_1, \dots, e_n$ . Dann gilt nach der Definition von EV  $Ae_j = \lambda_j e_j$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot e_j \\
\Rightarrow \langle v, Av \rangle &= \left\langle v, A \cdot \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \mu_j \langle v, A \cdot e_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j \langle v, e_j \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j e_j \delta_{k_j} \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_j^2 = \lambda_1 \cdot |v|^2
\end{aligned}
\quad \square$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
A > 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 > 0 \\
A \geq 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0 \\
A < 0 &\Leftrightarrow \lambda_n < 0 \\
A \leq 0 &\Leftrightarrow \lambda_n \leq 0 \\
A \text{ nicht-definit} &\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_n > 0
\end{aligned}$$

**Lemma 11.6.8.** Sei  $A : U \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \cap \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B \text{ symmetrisch}\}$  stetig bezüglich Operatornorm. Ist  $A(x_0) > 0$  (oder  $A(x_0) < 0$ ) so existiert ein  $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ , sodass  $A(x) > 0$  (oder  $A(x) < 0$ )  $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ .

*Beweis.* Sei  $A(x_0) > 0$ . Das heißt

$$\begin{aligned}
&\exists \lambda > 0: \langle v, A(x_0)v \rangle \geq \lambda |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\
&\langle v, A(x)v \rangle = \langle v, A(x_0)v \rangle + \left\langle v, \underbrace{(A(x) - A(x_0))}_{=B(x)} v \right\rangle
\end{aligned}$$

??

□

**Satz 11.6.9.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . Ist  $x_0 \in U$  ein lokales Minimum (oder Maximum), so ist  $H_l(x_0) \geq 0$  (oder  $H_l(x_0) \leq 0$ ).

*Beweis.* Wir haben  $\nabla f(x_0) = 0$ . Sei  $x_0$  ein lokales Minimum. Das heißt

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$$

Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $|v| < \varepsilon$

$$\Rightarrow x_0 + v \in B_\varepsilon(x_0)$$

Nach (11.6.1) gilt für ein  $\Theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x_0 + v) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot v + \frac{1}{2} \langle v, H_l(x_0 + \Theta v)v \rangle \\
&0 \leq f(x_0 + v) - f(x_0) = \frac{1}{2} \underbrace{\langle v, H_l(x_0 + \Theta v)v \rangle}_{=t^2 \langle h, H_l(x_0 + th)h \rangle}
\end{aligned}$$

Wir setzen  $v = th$

$$\Rightarrow \langle h, H_l(x_0 + \Theta th)h \rangle \geq 0 \quad \forall |t| \text{ klein genug}$$

Wir lassen  $t$  gegen 0 gehen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \langle h, H_l(x_0)h \rangle \geq 0 \quad \forall h \\
&\Rightarrow H_l(x_0) \geq 0
\end{aligned}$$

□

**Satz 11.6.10.** Ist  $x_0 \in U$  ein kritischer Punkt für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U)$  und gilt

$$H_l(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad (1)$$

So ist  $x_0$  ein lokales Minimum. Gilt sogar

$$H_l(x) > 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad (2)$$

dann ist  $x_0$  ein isoliertes Minimum von  $f$ .

*Beweis.* Es gilt  $\nabla f(x_0) = 0$ . Wir haben für  $h \in \mathbb{R}^n$  und  $|h| < \varepsilon$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle h, H_l(x_0 + \Theta h)h \rangle \geq 0$$

Gilt sogar (2), dann gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle h, H_l(x_0 + \Theta h)h \rangle > 0$$

Damit ist  $x_0$  ein isoliertes Minimum. □

**Bemerkung 11.6.11.** Die Aussage aus Satz 11.6.10 gilt auch für lokale Maxima.

## 12 [\*] Inverse Funktionen und implizite Funktionen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto F(x, y)$ . Seien  $(x_0, y_0) \in D$  und  $c = F(x_0, y_0)$ . Gilt dann  $F(x, y) = c$  für  $(x, y)$  nahe  $(x_0, y_0)$ ?

**Satz 12.1.1** (Inverse Funktion). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar (schreiben  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ ). Außerdem sei  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung. Wir nennen  $x_0$  einen regulären Punkt von  $f$  (weil die Ableitung an dieser Stelle invertierbar ist). Dann gilt es existieren offene Umgebungen  $U \subseteq D$  von  $x_0$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $y_0 = f(x_0)$ , sodass

(i)  $f : U \rightarrow V$  ist bijektiv

(ii)  $g = f^{-1} : V \rightarrow U$  ist in  $\mathcal{C}(U, V)$  (stetig differenzierbar)

(iii)  $\forall x \in U : Df(x)$  ist invertierbar

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1} = (Df(g(y)))^{-1}$$

$$x = f^{-1}(y) = g(y)$$

**Satz 12.1.2** (Implizite Funktion). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Wir definieren  $c := F(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$  und schreiben  $DF = (D_x F, D_y F) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $D_x F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D_y F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ferner sei  $D_y F(x_0, y_0)$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$  mit  $U \times V \subseteq D$  und eine  $\mathcal{C}^1$  Funktion  $g : U \rightarrow V$ , sodass

$$c = F(x, g(x)) \quad \forall x \in U$$

Außerdem gilt: Ist  $c = F(x, y)$  für  $x \in U$  und ein  $y \in V$ , dann folgt  $y = g(x)$ . Und  $g$  ist  $\mathcal{C}^1$ .  $Dg(x) = -(D_y F(x, g(x)))^{-1} \circ D_x F(x, g(x))$ .

**Beispiel 12.1.3.**  $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$  in einer Umgebung von  $(0, 0, -2)$ . Wir lösen nach  $z$  auf.  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$  mit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $z \in \mathbb{R}$ .

$$\partial_z F(x, y, z) = 3z^2 + 4z - 3xy$$

$$\partial_z F(0, 0, -2) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 0 = 4 \neq 0$$

Ist invertierbar. Somit greift Satz 12.1.2.

**Satz 12.1.4.** Satz 12.1.1 und Satz 12.1.2 sind äquivalent.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Vertauschen Variablen  $x, y$  in Satz 12.1.1. Gegeben  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in \mathcal{C}^1$ . Wir definieren  $F(x, y) := f(y) - x$ .  $F : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $k = n$ ). Dann gilt  $D_x F = -\text{Id}_n$  und  $D_y F(x, y) = Df(y)$ .

$D_y F(x_0, y_0) = Df(y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist invertierbar nach Voraussetzung. Damit gilt nach Satz 12.1.2, dass es Umgebungen  $V$  von  $y_0$  und  $U$  von  $x_0$  gibt. Sowie  $g : U \rightarrow V$  in  $\mathcal{C}^1$ , sodass

$$f(y) - x = F(x, g(x)) = F(x_0, y_0) = f(y_0) - x_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$

$$f(g(x)) = x \quad \forall x \in U$$

„ $\Leftarrow$ “ Gegeben  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  offen.  $(x_0, y_0) \in D$ .  $D_y F(x_0, y_0)$  sei invertierbar und  $c := F(x_0, y_0)$ . Wir konstruieren eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}$$

Angenommen  $f : U \rightarrow V$  ist invertierbar.  $\begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} W \\ u \end{pmatrix}$  hat eindeutige Lösung. Außerdem haben wir damit  $x = w$  und  $F(x, y) = u$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y(w, u) = \begin{pmatrix} g_1(w, u) \\ g_2(w, u) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y = g_2(x, u)$$

setzen wir  $c := F(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow F(x, g_2(x, c)) = c.$$

Frage: Was ist  $Df(x, y)$ ?

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= (D_x f(x, y), D_y f(x, y)) \\ &= \left( D_x \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}, D_y \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ D_x F(x, y) & D_y F(x, y) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Id} \cdot u + 0 \\ Bu + Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ & \quad (\alpha \in \mathbb{R}^k, \beta \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \alpha \quad Bu + Av = \beta$$

$$Av = \beta - Bu = \beta - B\alpha$$

□

**Lemma 12.11.5.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume, wobei  $Y$  vollständig ist. Dann ist  $\mathcal{L}(X, Y)$  mit Operatornorm

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$$

ein vollständiger Vektorraum.

*Beweis.* Wir müssen nur noch die Vollständigkeit zeigen. Sei  $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  eine Cauchyfolge. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\|_{\text{op}} = 0$$

Wir definieren für ein festes  $x \in X$

$$\begin{aligned} y_n &:= T_n \cdot x \\ \|y_m - y_n\|_Y &= \|T_m x - T_n x\|_Y = \|(T_m - T_n) \cdot x\|_Y \\ &\leq \underbrace{\|T_m - T_n\|_{\text{op}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow \infty} \cdot \|x\|_X \end{aligned}$$

Damit ist  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $Y$ . Damit existiert ein Grenzwert und wir definieren

$$\begin{aligned} y &:= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x =: Tx \\ T(x_1 + x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1 + x_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = Tx_1 + Tx_2 \end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass  $T(\alpha x) = \alpha Tx$ . Also ist die Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  linear

$$\begin{aligned} Tx - T_n x &= \lim_{m \rightarrow \infty} T_m x - T_n x \\ \Rightarrow \|Tx - T_n x\|_Y &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m x - T_n x\|_Y \\ &= \|(T_m - T_n)x\|_Y \\ &\leq \|T_m - T_n\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|(T - T_n)x\|_Y &\leq \sup_{m \geq n} \underbrace{\|T_m - T_n\|_{\text{op}}}_{\rightarrow 0} \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|T - T_n\|_{\text{op}} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(T - T_n)x\|_Y \\ &\leq \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\|_{\text{op}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Wir haben also  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und wollen noch zeigen, dass  $\|T\|_{\text{op}} < \infty$

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \|Tx - T_n x + T_n x\|_Y \\ &\leq \|Tx - T_n x\|_Y + \|T_n x\|_Y \\ &\leq (\|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}}) \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|T\|_{\text{op}} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\ &\leq \|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}} \\ \Rightarrow \|T\|_{\text{op}} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\text{op}} < \infty \end{aligned}$$

□

**Lemma 12.1.6.** Sei  $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$  ein vollständiger normierter Vektorraum. Dann ist die Menge der invertierbaren Abbildungen  $A \in \mathcal{L}(X)$  offen. Genauer: Ist  $A : X \rightarrow X$  invertierbar mit  $\|A\|_{\text{op}} < \infty$  und  $B \in \mathcal{L}(X)$  mit

$$\underbrace{\|A^{-1}(A - B)\|_{\text{op}}}_{= \|\mathbf{1} - A^{-1}B\|_{\text{op}}} < 1$$

dann ist  $B$  invertierbar und

$$\|B^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{1} - A^{-1}B\|_{\text{op}}}$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $A \in \mathcal{L}(X)$  und  $\|A\|_{\text{op}} < 1$ . Wir wollen zeigen, dass  $\mathbf{1} - A$  invertierbar ist. Wir wollen dieses Inverse über die geometrische Reihe herleiten, weil wir wissen, dass die geometrische Reihe mit  $|q| < 1$  gerade gegen  $\frac{1}{1-q}$  konvergiert und wir damit ein Inverses zu  $1 - q$  gefunden haben. Dieses Konzept wollen wir auf Matrizen übertragen<sup>7</sup>. Dafür definieren wir

$$A^0 = \text{Id}_X = \mathbf{1}$$

<sup>7</sup>Entwicklung nach John von Neumann, für konkrete Anwendung siehe auch Musterlösung zu LINEARE ALGEBRA II, Übungsblatt 1, Aufgabe 4e



Wir definieren außerdem induktiv

$$A^{n+1} = A \circ A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seien  $A, B \in \mathcal{L}(X)$ . Dann gilt

$$\|AB\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}}$$

weil

$$\begin{aligned} \|ABx\|_X &\leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|Bx\|_X \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_Y \\ \Rightarrow \|A^n\|_{\text{op}} &= \|AA^{n-1}\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|A^{n-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \|A\|_{\text{op}}^2 \cdot \|A^{n-2}\|_{\text{op}} \leq \dots \leq \|A\|_{\text{op}}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \\ S_m - s_n &= \sum_{k=n+1}^m A^k \quad (m \geq n) \\ \|S_m - s_n\|_{\text{op}} &\leq \sum_{k=n+1}^m \|A^k\|_{\text{op}} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \|A\|_{\text{op}}^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^k \\ &= \|A\|_{\text{op}}^{n+1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^j \\ &= \frac{\|A\|_{\text{op}}^{n+1}}{1 - \|A\|_{\text{op}}} \\ \Rightarrow \sup_{m \geq n} \|S_m - s_n\|_{\text{op}} &\leq \frac{\|A\|_{\text{op}}^{n+1}}{1 - \|A\|_{\text{op}}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt  $(S_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}(X)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ existiert} \\ (\mathbf{1} - A) \cdot S_n &= S_n - AS_n = \sum_{k=0}^n A^k - \sum_{k=0}^n A^{k+1} \\ &= \mathbf{1} - A^{n+1} \end{aligned}$$

Genauso lässt sich für Linksinverse auch zeigen, dass  $S_n \cdot (\mathbf{1} - A) = \mathbf{1} - A^{n+1}$ . Für  $x \in X$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - A) \cdot S_n x &= x - A^{n+1}x \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (\mathbf{1} - A) \cdot Sx &= x \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{1} - A)S = \mathbf{1} \\ S(\mathbf{1} - A) = \mathbf{1} \end{cases} \end{aligned}$$

Das heißt  $S$  ist die Inverse zu  $\mathbf{1} - A$  und es gilt

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{1} - A)^{-1}\|_{\text{op}} &= \|S\|_{\text{op}} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\|_{\text{op}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^k = \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{op}}}\end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei  $A \in \mathcal{L}(X)$  invertierbar. Dann gilt

$$B = A - (A - B) = A \cdot (\mathbf{1} - A^{-1} \cdot (A - B))$$

ist invertierbar nach SCHRITT 1, falls  $\|A^{-1} \cdot (A - B)\|_{\text{op}} < 1$

?

□

**Satz 12.1.7** (Banachscher Fixpunktsatz). Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : M \rightarrow M$  eine Kontraktion - das heißt  $\exists k \in (0, 1) : d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in M$  - dann hat  $T$  einen eindeutigen Fixpunkt. Das heißt es existiert genau ein  $x^* \in M$ , sodass  $T(x^*) = x^*$ .

*Beweis. Eindeutigkeit.* Seien  $x^*, y^*$  Fixpunkte. Dann gilt

$$\begin{aligned}d(x^*, y^*) &= d(T(x^*), T(y^*)) \leq k \cdot d(x^*, y^*) \\ \Rightarrow \underbrace{(1 - k) \cdot d(x^*, y^*)}_{>0} &\leq 0 \\ \Rightarrow d(x^*, y^*) &= 0 \\ \Rightarrow x^* &= y^*\end{aligned}$$

*Existenz.* SCHRITT 1: Sei  $x_0 \in M$  beliebig. Wir definieren

$$\begin{aligned}x_1 &= T(x_0) \\ x_2 &= T(T(x_0)) = T^2(x_0) \\ x_{n+1} &= T(T^n(x_0)) = T^{n+1}(x_0) = T(x_n) \quad (\text{induktiv, } n \in \mathbb{N}_0)\end{aligned}$$

Wir betrachten den Abstand zwischen  $x_{n+1}$  und  $x_n$

$$\begin{aligned}d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq k \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \leq k^n \cdot d(x_1, x_0)\end{aligned}$$

SCHRITT 2:

$$\begin{aligned}d(x_{n+l}, x_n) &\leq d(x_{n+l}, x_{n+l-1}) + d(x_{n+l-1}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+l-1}, x_{n+l-2}) + d(x_{n+l-2}, x_n) \\ &\leq \dots \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j})\end{aligned}$$

$$\leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{l-1} k^{n+j}$$

Nach der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} &\leq d(x_1, x_0) \cdot \frac{k^n}{1-k} \\ \Rightarrow \sup_{m \geq n} d(x_m, x_n) &\leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit ist  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge und ein Grenzwert existiert. Wir definieren

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

SCHRITT 3: Wir zeigen, dass dann  $x^*$  ein Fixpunkt sein muss

$$\begin{aligned} d(T(x^*), x^*) &\leq d(T(x^*), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq \underbrace{k \cdot d(x^*, x_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(x_{n+1}, x^*)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow d(T(x^*), x^*) &= 0 \end{aligned}$$

□

*Beweis von Satz 12.1.1.* Sei  $\mathcal{C}^1 \ni f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in U$ ,  $y_0 := f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ . Dann soll  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  invertierbar sein. Das heißt es soll eine Umgebung  $\bar{U} \subseteq U$  von  $x_0$  geben, sodass  $f : \bar{U} \rightarrow f(\bar{U}) =: \bar{V}$  injektiv ist und die Umkehrfunktion  $g := f^{-1}|_{\bar{U}} : \bar{V} \rightarrow V$  ist auch in  $\mathcal{C}^1$ .

SCHRITT 1: O.B.d.A sei  $x_0 = 0$ . Sonst definieren wir eine Funktion  $f_1(x) = f(x - x_0)$  auf verschobener Menge  $U_{x_0} = U + x_0$ . Genauso soll o.B.d.A. gelten, dass  $y_0 = 0$ , sonst definieren wir

$$f_2(x) = f(x - x_0) - y_0$$

$$x_0 = 0, y_0 = f(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} A &= Df(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ invertierbar} \\ h(x) &:= A^{-1}f(x) = Df(0)^{-1}f(x) \\ \Rightarrow Dh(0) &= \text{Id} \\ Dh(x) &= D(A^{-1}f(x)) \\ &= A^{-1}Df(x) \\ &= Df(0)^{-1}Df(x) = \text{Id} \\ h(x) &= y \\ \Leftrightarrow A^{-1}f(x) &= y \\ f(x) &= \underbrace{Ay}_{\bar{y}} \\ y &= h^{-1}(x) \\ \bar{y} &= f^{-1}(x) = Ah^{-1}(y) \end{aligned}$$

Dann folgt o.B.d.A.

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad Df(x_0) = \text{Id}$$

SCHRITT 2: Behauptung 1: Es existieren Umgebungen  $U, V$  von 0; sodass  $f(x) = y$  für jedes  $y \in V$  eine eindeutige Lösung  $x \in U$  hat.

Das ist äquivalent zu Behauptung 2: Die Abbildung  $h_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto h_y(x) := x - f(x) + y$  hat genau einen Fixpunkt.

Diese Äquivalenz folgt aus der genauen Betrachtung der Aussagen. Das heißt es reicht aus, Behauptung 2 zu zeigen

$$\begin{aligned} h &:= h_0 \\ Dh(x) &= D(x - f(x)) \\ &= \text{Id} - \underbrace{Df(x)}_{\text{stetig in } x} \rightarrow \text{Id} - Df(0) \text{ für } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$Df$  ist stetig

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists r > 0: \|Dh(x)\|_{\text{op}} &= \|\text{Id} - Df(x)\|_{\text{op}} \\ &\leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \overline{B_{2r}(0)} \end{aligned}$$

$$h(0) = 0 \quad (f(0) = 0)$$

$$\Rightarrow \|h(x)\| = \|h(x) - h(0)\|$$

Nach Satz 11.3.7 können wir abschätzen

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\xi \in [0, x]} \|Dh(\xi)\| \cdot \|x - 0\| \\ &\leq \frac{\|x\|}{2} \quad \forall x \in \overline{B_{2r}(0)} \end{aligned}$$

$$y \in \overline{B_r(0)}$$

$$\begin{aligned} \|h_y(x)\| &= \|x - f(x) + y\| \\ &= \|h(x) + y\| \\ &\leq \underbrace{\|y\|}_{\leq r} + \|h(x)\| \leq 2r \quad \forall y \in \overline{B_r(0)}, x \in \overline{B_{2r}(0)} \\ \Rightarrow h_y : \overline{B_{2r}(0)} &\rightarrow \overline{B_{2r}(0)} \end{aligned}$$

Wir haben jetzt eine Selbstabbildung, um Satz 12.1.7 anwenden zu können. Wir müssen noch die Kontraktion prüfen. Sei  $x_1, x_2 \in \overline{B_{2r}(0)}$

$$\begin{aligned} \|h_y(x_1) - h_y(x_2)\| &= \|h(x_1) - h(x_2)\| \\ &\leq \sup_{\xi \in [x_1, x_2]} \|Dh(\xi)\|_{\text{op}} \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Damit ist  $h_y$  eine Kontraktion mit  $k = \frac{1}{2}$ . Damit gilt nach Satz 12.1.7

$$\forall \|y\| < r \exists! x \in \overline{B_{2r}(0)}: h_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

SCHRITT 3: Wir definieren  $v := B_r(0)$

$$U := B_{2r}(0) \cap f^{-1}(V) \text{ offen}$$

Da  $f^{-1}(V) \subseteq B_{2r}(0)$

$$\Rightarrow U = f^{-1}(V)$$

Nach SCHRITT 2 gilt

$$\forall y \in V \exists! x: f(x) = y$$

$$\Rightarrow f|_U : U \rightarrow V \text{ ist bijektiv}$$

$$\Rightarrow \text{Existenz der Inversen } g := f^{-1}|_U : V \rightarrow U$$

SCHRITT 4: Wir wollen zeigen, dass  $g : V \rightarrow U$  stetig ist

$$\begin{aligned} x &= x - f(x) + f(x) = h(x) + f(x) \quad \forall x \in U \\ \|x_1 - x_2\| &= \|h(x_1) - h(x_2) + f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\leq \|h(x_1) - h(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \\ \Rightarrow \|x_1 - x_2\| &\leq 2 \|f(x_1) - f(x_2)\| \quad \forall x_1, x_2 \in U \\ \Leftrightarrow \|g(y_1) - g(y_2)\| &\leq 2 \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in V \\ \Rightarrow g : V &\rightarrow U \text{ ist Lipschitz-stetig} \end{aligned}$$

SCHRITT 5: Wir wollen zeigen, dass  $g$  differenzierbar ist und dass  $Dg(y) = (Df(x))^{-1}$  mit  $x = g(y)$ . Sei  $x \in U \subseteq B_{2r}(0)$

$$\begin{aligned} h(x) &= x - f(x) \\ f(x) &= x - h(x) \\ \Rightarrow Df(x) &= \text{Id} - Dh(x) \end{aligned} \quad (\|Dh(x)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2})$$

Damit ist  $Df(x)$  invertierbar  $\forall x \in U$  nach der Von-Neumann-Reihe.  $y_1, y_2 \in V$

$$\begin{aligned} x_1 &= g(y_1) = f^{-1}|_U(y_1) \\ x_2 &= g(y_2) \end{aligned}$$

$f$  ist differenzierbar

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + Df(x_1)[x_2 - x_1] + \underbrace{\varepsilon(x_2 - x_1) \cdot \|x_2 - x_1\|}_{R(x_2 - x_1)} \\ Df(x_1)[x_2 - x_1] &= f(x_2) - f(x_1) - R(x_2 - x_1) \\ \Rightarrow x_2 - x_1 &= Df(x_1)^{-1}[f(x_2) - f(x_1) - R(x_2 - x_1)] \\ g(y_2) - g(y_1) &= Df(x_1)^{-1}[y_2 - y_1 - R(g(y_2) - g(y_1))] \\ &= (Df(g(y_1)))^{-1}[y_2 - y_1] - \underbrace{Df(g(y_1))^{-1}[R(g(y_2) - g(y_1))]}_{\bar{R}(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

$$A := Df(x_1)^{-1}$$

$$\|\bar{R}(y_2 - y_1)\| = \|A^{-1}R(g(y_2) - g(y_1))\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\|A^{-1}\|_{\text{op}}}_{<0} \|R(g(y_2) - g(y_1))\| \\
&= \varepsilon(g(y_2) - g(y_1)) \cdot \|g(y_2) - g(y_1)\| \\
&\leq 2 \|A_{\text{op}}^{-1} \cdot \varepsilon(g(y_2) - g(y_1))\| \cdot \|y_2 - y_1\| \\
&\Rightarrow \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{\|\bar{R}(y_2 - y_1)\|}{\|y_2 - y_1\|} = 0 \\
&\Rightarrow g \text{ ist differenzierbar}
\end{aligned}$$

und  $Dg(y_1) = Df(x_1)^{-1}$ ,  $x_1 = g(y_1) \forall y_1 \in V \Rightarrow g \in \mathcal{C}^1$ .

□

## 13 [\*] Mannigfaltigkeiten

**Definition 13.1.1** (Immersion). Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \varphi(x)$  heißt Immersion, falls

$$D\varphi(t) = (\partial_{t_1}\varphi, \partial_{t_2}\varphi, \dots, \partial_{t_k}\varphi) \quad (n \times k\text{-Matrix})$$

den Rang  $k$  hat. Das heißt

$$\text{rk } D\varphi(t) = k \quad \forall t \in T$$

In diesem Fall sind also alle  $\partial_{t_1}\varphi, \dots, \partial_{t_k}\varphi$  linear unabhängig. Das heißt außerdem, dass  $n \geq k$ .

**Satz 13.1.2.** Sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  Immersion. Dann existiert zu  $t \in T$  eine offene Umgebung von  $U \subseteq T$  von  $t$ , sodass

$$\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

injektiv ist und stetig invertierbar ist (Homöomorphismus)

*Beweis.* Für  $k = n$  folgt der Satz direkt aus Satz 12.1.1. Sei also  $k < n$ . Aus  $D\varphi(t_0)$  hat Rang  $k$  folgt

$$\exists 1 < i_1 < \dots < i_k \leq n : \det \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_{i_1}(t) & \dots & \partial_k \varphi_{i_k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_{i_1}(t) & \dots & \partial_k \varphi_{i_k}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in U$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

o.B.d.A. (Analogon des ? der Koordinaten in  $\mathbb{R}^n$ )

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varphi} := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

$$\hat{\varphi} := \begin{pmatrix} \varphi_{k+1} \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

$D\tilde{\varphi}(t)$  hat Rang  $k$ , weil

$$D\tilde{\varphi} = (\partial_1 \tilde{\varphi}, \dots, \partial_k \tilde{\varphi})$$

Wegen Stetigkeit hat  $D\tilde{\varphi}(t)$  Rang  $k$  für alle  $t$  nahe  $t_0$ . Damit ist  $D\tilde{\varphi}(t_0)$  invertierbar. Das heißt

$$\exists \text{ offene Umgebung } U \subseteq T \text{ von } t_0 : \tilde{\varphi} : U \rightarrow \tilde{\varphi}(U) =: V \text{ ist invertierbar}$$

Inverse  $\tilde{\psi} : V \rightarrow U$  ist auch in  $\mathcal{C}^1$

$$\varphi : U \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-k}, t \mapsto \varphi(t)$$

$\varphi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$  ist auch injektiv

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow \tilde{\varphi}(t_1) = \tilde{\varphi}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

$\Rightarrow \varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  ist bijektiv Inverse:  $\tilde{\phi} : \varphi(V) \rightarrow U$

$$x \mapsto \tilde{\phi}(x) := \tilde{\phi}(x_1, \dots, x_k)$$

□

**Definition 13.1.3** (Untermannigfaltigkeit). Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  $k$ -dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , wenn zu jedem  $a \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  sowie Immersion  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $T$  homöomorph von  $\varphi$  auf  $\varphi(T) = M \cap U$  abbildet, existieren.

**Satz 13.1.4.**  $M$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es eine der 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt

- (i) (Darstellung durch Gleichung) Zu  $a \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $n - k$  stetig differenzierbare Funktionen  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j \in \{1, \dots, n - k\}$ ) gibt, sodass

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

und  $\text{rk}(Df(x)) = n - k$  für alle  $x \in U$

- (ii) (Darstellung als Graph) Zu  $a \in M$  gibt es - eventuell nach Umnummerierung der Koordinaten - offene Umgebungen  $U' \subseteq \mathbb{R}^k$  von  $a' = (a_1, \dots, a_k)^T$ ,  $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  von  $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)^T$  und  $\mathcal{C}^1 \ni g : U' \rightarrow U''$ , sodass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}$$

- (iii) (Platten) Zu  $a \in M$  gibt es offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{C}^1 \ni \phi : U \rightarrow V$  invertierbar mit

$$\phi(M \cap U) = E_k \cap V$$

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$$

**Definition 13.1.5** (Tangentialvektoren). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit und  $a \in M$ . Dann heißt  $v \in \mathbb{R}^n$  Tangentialvektor, falls es eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  ( $\varepsilon > 0$ ) gibt, sodass

$$\gamma(0) = a$$

$$v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt} \gamma(t)|_{t=0}$$

Wir schreiben  $T_a M$  für den Vektorraum aller Tangentialvektoren von  $M$  in  $a$  und  $N_a M$  für das orthogonale Komplement von  $T_a M$  in  $\mathbb{R}^n$ . Das ist also der Raum der normalen Vektoren an  $M$  in  $a$ . Es gilt

$$\mathbb{R}^n = T_a M \oplus N_a M$$

Wie berechnet man  $T_a M$  und  $N_a M$ ?



**Bemerkung 23.16** („Berechnen“ von  $T_a M$  und  $N_a M$ ). Wir nehmen ein lokales Koordinatensystem. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $\varphi : U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $\varphi$  Immersion, das heißt  $\varphi \in \mathcal{C}^1$  und  $\text{rk}(D\varphi(t)) = k$ ,  $\forall t \in U$ . Behauptung:

$$\begin{aligned} T_a M &= \text{Spann}(\partial_1 \varphi(t_0), \dots, \partial_k \varphi(t_0)) \\ &= \text{Menge aller Linearkombinationen der Vektoren } \partial_j \varphi(t_0) \\ \varphi(t_0) &= a \end{aligned}$$

Zur Berechnung von  $N_a M$  schreiben wir  $M$  lokal als

$$\begin{aligned} M \cap U &= \{x \in U : f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-k}(x)\} \\ \text{rk}(Df(x)) &= n - k \end{aligned}$$

$\nabla f_j(a)$ ,  $j \in \{1, \dots, n - k\}$  bilden Basen von  $N_a M$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} V &:= \text{Spann}(\partial_1 \varphi(t_0), \dots, \partial_k \varphi(t_0)) \subseteq T_a M \\ W &:= \text{Spann}(\nabla f_j(a)) \\ v &= \sum_{j=1}^k c_j \partial_j \varphi(t_0) \quad (c_j \in \mathbb{R}) \\ \gamma &: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \\ \gamma(s) &= \gamma(t_0 + s) \\ \frac{d}{ds} \gamma(x)|_{s=0} &= D\varphi(t_1 + cs) [c] |_{s=c} \\ &= D\varphi(t_0) [c] = (\partial_1 \varphi(t_0), \dots, \partial_k \varphi(t_0)) \\ V &\subseteq T_a M \\ W &\subseteq N_a M \end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, dass  $\nabla f_j(a) \perp T_a M$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= M \quad \forall |s| < \varepsilon \\ \Rightarrow f_j(\gamma(s)) &= 0 \quad \forall |s| < \varepsilon \quad (j \in \{1, \dots, n - k\}) \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} f_j(\gamma(x)) &= 0 \\ Df_j(\gamma(x)) [g(s)] &= 0 \quad \forall \\ r &:= \gamma'(0) \subseteq T_0 M \\ Df_j(a) &= (\partial_1 f_j(a), \dots, \partial_n f_j(a)) \\ Df_j(a) [v] &= \begin{pmatrix} \partial_1 f_j(a) \\ \vdots \\ \partial_n f_j(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \nabla f_j(a) \cdot v = 0 \\ \Rightarrow \nabla f_j(a) &\perp V \quad \forall v \in T_a M \\ &\Rightarrow W \subseteq N_a M \\ v &\subseteq T_a M \perp N_a M \supseteq W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V \perp W &\Rightarrow W = V^\perp \\
\mathbb{R}^n &= V \oplus W \\
&\Rightarrow T_a M \oplus N_a M \\
&\Rightarrow V = T_a M \quad W = N_a M
\end{aligned}
\quad \square$$

### 13.2 Extrema und Nebenbedingungen

**Satz 13.2.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subseteq U$  eine  $r$ -codimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\begin{aligned}
M &= \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\} \\
\mathcal{C}^1 \ni g &= \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} \\
\text{rk}(Dg(x)) &= r \quad \forall x \in M
\end{aligned}$$

und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{C}$  mit lokalem Minimum (Maximum) in  $a \in M$ . Dann gilt

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \nabla F(a) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla g_j(a)$$

Wir nennen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  in diesem Fall die Lagrange-Multiplikatoren und  $a$  heißt lokales Minimum (Maximum) unter der Nebenbedingung  $g_1, \dots, g_r = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$  durch  $a$ . Dann existiert ein lokales Minimum in  $a$ . Das heißt  $k(s) := F(\gamma(s))$  hat ein lokales Minimum in  $s = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{ds} k(s)|_{s=0} = 0 \\
&\quad \frac{d}{ds} k(s) = DF(\gamma(s)) [\gamma'(s)] = \langle \nabla F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \\
&\quad \Rightarrow 0 = k'(0) = \langle \nabla F(\gamma(a)), \gamma'(a) \rangle = \langle \nabla F(a), v \rangle \quad (v = \gamma'(a) \in T_a M) \\
&\quad \Rightarrow \nabla F(a) \in N_a M \\
&\Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j \nabla g_j(a) \in N_a M
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 13.2.2.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^n$  und  $F(x) = \langle x, Ax \rangle$ , wobei  $A$  eine symmetrische  $n \times n$  Matrix ist. Nebenbedingung:  $g(x) = |x|^2 - 1 = 0 = \langle x, x \rangle - 1$ .  $r = 1$ . Dann gilt  $g(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$

$$\begin{aligned}
M &= \{g(x) = 0\} = \mathcal{S}^{d-1} = \{|x| = 1\} \\
DF : F(x+h) - F(x) &= \langle x+h, A(x+h) \rangle - \langle x, Ax \rangle \\
&= \langle x, Ax \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle - \langle x, Ax \rangle \\
&= 2 \langle Ax, h \rangle + F(h) \\
|F(h)| &= |\langle h, Ah \rangle| \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|h\|^2 \\
DF(x) [h] &= 2 \langle Ax, h \rangle \\
&\Rightarrow \nabla F(x) = 2Ax
\end{aligned}$$

Um die Ableitung von  $g$  zu bestimmen, können wir das gleiche Prinzip mit  $A$  als Einheitsmatrix anwenden. Dann gilt

$$Dg(x)[h] = \langle x, h \rangle$$

$$\nabla g(x) = x$$

$\Rightarrow$  lokales Max oder Min bei  $x \in \mathcal{S}^{d-1} : \nabla F(x) = \lambda \nabla g(x)$

$$2Ax = 2\lambda x$$

$$Ax = \lambda x$$

$\Rightarrow x \in \mathcal{S}^{d-1}$  ist Eigenvektor von  $A$