

Skript zur Vorlesung  
Analysis II  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2024

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

|           |                                                                                  |           |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>[*] Das eindimensionale Riemann-Integral</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1       | Der Integralbegriff nach Riemann . . . . .                                       | 3         |
| 1.2       | [*] Integrabilitätskriterien . . . . .                                           | 6         |
| 1.3       | [*] Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .                               | 20        |
| <b>2</b>  | <b>[*] Das orientierte Riemann-Integral</b>                                      | <b>22</b> |
| 2.2       | Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen . . . . .                      | 24        |
| <b>3</b>  | <b>[*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung</b>                  | <b>25</b> |
| 3.1       | Hauptsatz der Integralrechnung . . . . .                                         | 25        |
| 3.2       | Integrationstechniken . . . . .                                                  | 27        |
| <b>4</b>  | <b>[*] Uneigentliche Integrale</b>                                               | <b>33</b> |
| 4.1       | Uneigentliche Integrale: Fall I . . . . .                                        | 33        |
| 4.2       | Uneigentliche Integrale: Fall II . . . . .                                       | 36        |
| 4.3       | Uneigentliche Integrale Fall III . . . . .                                       | 36        |
| 4.4       | Uneigentliche Integrale Fall IV . . . . .                                        | 37        |
| <b>5</b>  | <b>[*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz</b>                                 | <b>40</b> |
| <b>6</b>  | <b>[*] Taylors Theorem</b>                                                       | <b>45</b> |
| <b>7</b>  | <b>[*] Die Gamma-Funktion</b>                                                    | <b>55</b> |
| <b>8</b>  | <b>[*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume</b>         | <b>59</b> |
| 8.1       | Metrische Räume . . . . .                                                        | 59        |
| 8.2       | Normierte Vektorräume . . . . .                                                  | 60        |
| 8.3       | [*] Umgebungen und offene Mengen . . . . .                                       | 61        |
| 8.4       | Grundzüge der Topologie . . . . .                                                | 64        |
| 8.5       | [*] Berührungspunkt, Häufungspunkt und Randpunkt . . . . .                       | 65        |
| <b>9</b>  | <b>[*] Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen</b>                        | <b>68</b> |
| <b>10</b> | <b>[*] Kompakte Mengen und metrische Räume</b>                                   | <b>73</b> |
| <b>11</b> | <b>[*] Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^d</math></b>                     | <b>78</b> |
| 11.1      | Die Ableitung . . . . .                                                          | 78        |
| 11.2      | [*] Richtungsableitung und partielle Ableitung . . . . .                         | 80        |
| 11.3      | Kettenregel . . . . .                                                            | 82        |
| 11.4      | Existenz von Ableitungen . . . . .                                               | 84        |
| 11.5      | [*] Symmetrie der zweiten partiellen Ableitung - Der Satz von Schwartz . . . . . | 85        |
| 11.6      | Extrema und lokale Minima/Maxima . . . . .                                       | 88        |
| <b>12</b> | <b>[*] Inverse Funktionen und implizite Funktionen</b>                           | <b>92</b> |

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

[16. Apr] Frage: Was ist die Fläche unter einem Graphen?

## 1.1 Der Integralbegriff nach Riemann

**Definition 1.1.1** (Zerlegung). Eine Zerlegung  $Z$  eines kompakten Intervalls  $I = [a, b]$  in Teilintervalle  $I_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) der Längen  $|I_j|$  ist eine Menge von Punkten  $x_0, x_1, \dots, x_k \in I$  (Teilpunkte von  $Z$ ) mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

und  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Wir setzen  $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$ .

**Definition 1.1.2** (Feinheit einer Zerlegung). Die Feinheit der Zerlegung  $Z$  ist definiert als die Länge des längsten Teilintervalls von  $Z$ :

$$\Delta(Z) := \max(|I_1|, |I_2|, \dots, |I_k|) = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$$

**Notation 1.1.3.** Wir setzen

$$\mathcal{B}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty \right\}$$

als die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf  $I$ .

**Definition 1.1.4** (Riemannsche Zwischensumme). In jedem  $I_j$  wählen wir ein  $\xi_j \in I_j$  als Stützstelle und setzen  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ . Für eine Funktion  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j|$$

**Definition 1.1.5** (Ober- und Untersumme). Für  $f \in \mathcal{B}(I)$  setzen wir außerdem

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &:= \inf_{I_j} f = \inf \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{m}_j &:= \sup_{I_j} f = \sup \{f(x) : x \in I_j\} \\ \overline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \overline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Obersumme)} \\ \underline{S}_Z(f) &:= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \cdot \Delta x_j && \text{(Untersumme)} \end{aligned}$$

Damit gilt für  $x \in I_j$

$$\begin{aligned} \underline{m}_j &\leq f(x) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{m}_j &\leq f(\xi_j) \leq \overline{m}_j \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq S_Z(f, \xi) \leq \overline{S}_Z(f) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Wir wollen die Zerlegung  $Z$  nun systematisch verfeinern.

**Definition 1.1.6** (Verfeinerung einer Zerlegung).

- (a) Eine Zerlegung  $Z^*$  von  $I$  ist eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$ , falls alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$  sind.
- (b) Die gemeinsame Verfeinerung  $Z_1 \vee Z_2$  zweier Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  ist die Zerlegung von  $I$ , deren Teilpunkte gerade die Teilpunkte von  $Z_1$  und  $Z_2$  sind.

**Lemma 1.1.7.** Ist  $Z^*$  eine Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  von  $I$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_{Z^*}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.*  $Z^*$  enthält alle Teilpunkte von  $Z$ , nur mehr.

SCHRITT 1: Wir nehmen an  $Z^*$  enthielte genau einen Teilpunkt ( $y_{l+1}$ ) mehr als  $Z$ . Das heißt

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & \forall 0 \leq j \leq l \\ x_l &< y_{l+1} < x_{l+1} \\ y_{j+1} &= x_j & \forall l+1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^k \underline{m}_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^l \underline{m}_j \Delta x_j + \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} + \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_j^*} f = \underline{m}_j^* & \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = \inf_{I_{j+1}^*} f = \underline{m}_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ I_j &= [x_j, x_{j-1}] = [y_{j+1}, y_j] = I_{j+1}^* & \forall j \geq l+2 \\ \Rightarrow \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_j \Delta x_j &= \sum_{j=l+2}^k \underline{m}_{j+1}^* \Delta y_{j+1} = \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j \\ \underline{m}_{l+1} \Delta x_{l+1} &= \underline{m}_{l+1} (x_{l+1} - x_l) = \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} (y_{l+2} - y_{l+1} + y_{l+1} - y_l) \\ &= \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1} \Delta y_{l+1} \\ &\leq \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{S}_Z(f) \leq \sum_{j=1}^l \underline{m}_j^* \Delta y_j + \underline{m}_{l+1}^* \Delta y_{l+1} + \underline{m}_{l+2}^* \Delta y_{l+2} + \sum_{j=l+3}^{k+1} \underline{m}_j^* \Delta y_j = \underline{S}_{Z^*}(f)$$

ähnlich zeigt man  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 2: Sei  $Z^*$  eine beliebige Verfeinerung von  $Z$ . Wir nehmen eine endliche Folge von Einpunkt-Verfeinerungen  $Z = Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_r = Z^*$ . Dabei hat  $Z_{s+1}$  genau einen Punkt mehr als  $Z_s$ . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass  $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \dots \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$  und  $\overline{S}_Z(f) \geq \overline{S}_{Z_1}(f) \geq \dots \geq \overline{S}_{Z^*}(f)$ .

SCHRITT 3: Sei  $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_l^*)$  der Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z^*$ . Dann gilt nach (1.1.1)

$$\underline{S}_{Z^*}(f) \leq S_{Z^*}(f, \xi^*) \leq \overline{S}_{Z^*}(f)$$

□

**Lemma 1.1.8.** Seien  $Z_1, Z_2$  Zerlegungen von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \forall f \in \mathcal{B}(I)$$

*Beweis.* Es gilt nach Lemma 1.1.7, dass

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1 \vee Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \quad \square$$

**Bemerkung 1.1.9.** Für  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$  gilt immer

$$|I| \cdot \inf_I f \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq |I| \cdot \sup_I f$$

für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$ . Somit sind

$$\left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

und

$$\left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I \right\}$$

beschränkte, nicht-leere Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Das erlaubt uns die folgende Definition, mit der wir nun mithilfe der bereits definierten Summen einem tatsächlichen Integralbegriff nähern wollen.

**Definition 1.1.10** (Ober- und Unterintegral). Es sei  $I = [a, b]$  und  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Wir definieren

$$\overline{J}(f) := \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Oberintegral})$$

$$\underline{J}(f) := \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } I \right\} \quad (\text{Unterintegral})$$

**Lemma 1.1.11.** Es sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$ . Dann gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.1.8 gilt für zwei beliebige Zerlegungen  $Z_1, Z_2$

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

Wir fixieren  $Z_2$  und erhalten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup \left\{ \underline{S}_{Z_1}(f) : Z_1 \text{ Zerlegung von } I \right\} &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_2}(f) \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \inf \left\{ \overline{S}_{Z_2}(f) : Z_2 \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \Rightarrow \underline{J}(f) &\leq \overline{J}(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 1.1.12** (Integral). Es sei  $I = [a, b]$ .  $f \in \mathcal{B}(I)$  heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$$

In diese Fall nennen wir  $J(f) := \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$  das (bestimmte) Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und schreiben

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dx = \int_I f(x) \, dx = \int_I f \, dx =: J(f)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen  $f \in \mathcal{B}(I)$  nennen wir  $\mathcal{R}(I)$ .

[18. Apr] **Beispiel 1.1.13** (Konstante Funktion).  $f(x) := c$  auf  $[a, b]$  für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = c \cdot (b - a)$$

**Beispiel 1.1.14** (Dirichlet-Funktion). Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil  $\overline{J}(f) = 1$  und  $\underline{J}(f) = 0$ .

**Übung 1.1.15.** Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.1.13 und 1.1.14 mittels der formalen Definition von  $\underline{J}(f)$  und  $\overline{J}(f)$ .

## 1.2 [\*] Integrabilitätskriterien

**Satz 1.2.1** (1. Kriterium). Es sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Zerlegung } Z \text{ von } I \text{ mit } \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Nach Lemma 1.1.11 gilt

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{J}(f) \leq \overline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq 0 \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen  $f \in \mathcal{R}(I)$ , das heißt

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \overline{J}(f) &= \inf \left\{ \overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \\ \underline{J}(f) &= \sup \left\{ \underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I \right\} \end{aligned}$$

Das heißt zu  $\varepsilon > 0$  existieren Zerlegungen  $Z_1, Z_2$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} &> \overline{S}_{Z_1}(f) \\ \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}_{Z_2}(f) \end{aligned}$$

Da  $f \in \mathcal{R}(I)$  gilt  $\underline{J}(f) = \overline{J}(f)$ . Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung  $Z := Z_1 \vee Z_2$ . Dann gilt nach Lemma 1.1.7

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &< \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \underbrace{\overline{J}(f) - \underline{J}(f)}_{=0} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 1.2.2** (2. Kriterium). Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \text{Zerlegungen } Z \text{ von } I \text{ mit Feinheit } \Delta(Z) < \delta: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$$

1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ wird von Satz 1.2.1 bereits impliziert.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1, dass eine Zerlegung  $Z' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_l = b)$  von  $I$  mit

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

existiert. Wähle eine andere Zerlegung  $Z$  von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ , wobei  $\delta > 0$  noch später gewählt wird. Setze  $Z^* = Z' \vee Z$ . Nach Lemma 1.1.7 und Satz 1.2.1 gilt

$$\overline{S}_{Z^*}(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir wollen die Ober- und Untersumme von  $Z^*$  mit denen in  $Z$  vergleichen.

$$\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) = \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t \cdot |I_t|$$

wobei  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . Da  $Z^*$  eine Verfeinerung von  $Z$  ist, sind alle Teilpunkte von  $Z$  auch Teilpunkte von  $Z^*$ . Das heißt die Intervalle  $I_j$  (zu  $Z$ ) unterscheiden sich von den Intervallen  $I_j^*$  (zu  $Z^*$ ) sofern Punkte  $x'_\nu$  (Teilpunkte von  $Z^*$ ) im Inneren von  $I_j$  liegen. Also gilt

$$I_Z^* \cap I_j \neq \emptyset \Rightarrow I_Z^* \subseteq I_j$$

Frage: Wie viele Intervalle  $I_j$  existieren maximal, für die  $I_j$  eine Verfeinerung von  $Z$  oder ? hinter reellen  $I_j^*$  ist? Dann muss mindestens ein Punkt von der Zerlegung  $Z'$  unterhalb von  $I_j$  liegen. Wir haben  $l$  Punkte in Zerlegung  $Z'$ . Das heißt die Anzahl solcher Intervalle  $I_j$  ist maximal  $l$ .

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_t \overline{m}_t^* \cdot |I_j^*| \\ &= \sum_j \left( \overline{m}_j \cdot |I_j| - \sum_{t: I_Z^* \subseteq I_j} \overline{m}_t^* \cdot |I_t^*| \right) \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_t^*| \\ \overline{S}_Z(f) - \overline{S}_{Z^*}(f) &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} \left( \underbrace{\overline{m}_j - \overline{m}_t^*}_{=0 \text{ falls } I_t^* = I_j} \right) \cdot |I_t^*| \\ &= \sum_j \sum_{t: I_t^* \subseteq I_j} (\overline{m}_j - \overline{m}_t^*) \cdot |I_Z^*| \\ f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\leq f(y) + \sup_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ f(x) &\leq f(y) + 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

genauso

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + f(x) - f(y) \\ &\geq f(y) + \inf_{s_1, s_2 \in I} \{f(s_1) - f(s_2)\} \\ &\geq f(y) - 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j = \sup_{s \in I_j} f(x) \leq 2 \|f\|_\infty + f(y) \quad \forall y \in I_t^*$$

$$\Rightarrow \overline{m}_j \leq 2 \|f\|_\infty + \sup_{?} f = 2 \|f\|_\infty + \overline{m}_z^*$$

$$\vdots \quad ???$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(f) - \underline{S}_{Z^*}(f) &\geq -2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*} + 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_{Z^*} - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \overline{S}_{Z^*}(f) + 2 \|f\|_\infty l \delta - (\underline{S}_{Z^*}(f) - 2 \|f\|_\infty l \cdot \delta) \\ &=? \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty l \cdot \delta \end{aligned}$$

Jetzt wähle  $\delta = \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l}$

$$\Rightarrow \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4 \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\delta(\|f\|_\infty + 1) \cdot l} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sofern um  $\Delta(z) < \delta$  ist. □

**Anwendung 1.2.3.** Es sei  $(Z_n)_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\xi_n$  seien die Zwischenpunkt von Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n)$ . Die Riemannsumme

$$S_{Z_n}(f, \xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^n) \cdot |I_j^n|$$

konvergiert nach Satz 1.2.2 gegen  $J(f)$  falls  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

[19. Apr] **Bemerkung 1.2.4** (Linearität der Riemannschen Zwischensumme). Seien  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  Zerlegung von  $I = [a, b]$  und  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  Zwischenpunkt zur Zerlegung  $Z$ , sodass

$$x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Dann ist die Riemannsche Zwischensumme

$$S_Z(f) = S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^k f(\xi_j) \cdot |I_j| \quad (I_j = [x_{j-1}, x_j])$$

linear in Bezug zu  $f$ . Wir werden diese Aussage und weitere interessante Vektorraumeigenschaften des  $\mathcal{R}(I)$  später in Satz 1.2.6 noch beweisen.



**Korollar 1.2.5.** Sei  $f \in \mathcal{B}(I)$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  genau dann, wenn für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen  $Z_n$  von  $I$  mit Feinheit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und jede Folge  $(\xi_n)_n$  von Zwischenpunkten  $\xi_n$  zugehörig zu  $Z_n$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert.

Darüber hinaus ist in diesem Fall obiger Grenzwert unabhängig von der Wahl der Zerlegung  $Z_n$  und der Zwischenpunkten  $\xi_n$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) \quad (I = [a, b])$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt nach Satz 1.2.1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad \forall \text{Zerlegungen } Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta$$

Da  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt außerdem

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \Delta(Z_n) < \delta \quad \forall n \geq N$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq \underline{J}(f) = \bar{J}(f) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \underline{S}_{Z_n}(f) &\leq S_{Z_n}(f, \xi_n) \leq \bar{S}_{Z_n}(f) \\ \Rightarrow |J(f) - S_{Z_n}(f, \xi_n)| &< \varepsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) = J(f) = \int_a^b f dx$$

„ $\Leftarrow$ “ SCHRITT 1: Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$  existiert für jede Folge  $(Z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  und jede Wahl von Zwischenpunkten  $(\xi_n)_n$  zu  $Z_n$ .

Seien  $(Z_n^1)_n, (Z_n^2)_n$  zwei solche Folgen von Zerlegungen mit  $(\xi_n^1)_n, (\xi_n^2)_n$  zugehörigen Folgen von Zwischenpunkten. Sei  $(Z_n)_n$  eine neue Folge von Zerlegungen von  $I$ , wobei  $Z_{2k} = Z_k^2$  und  $Z_{2k-1} = Z_k^1$ , außerdem sei  $\xi_{2k} = \xi_k^2$  und  $\xi_{2k-1} = \xi_k^1$ . Dann wissen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n)$$

existiert und gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n}}(f, \xi_{2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_{2n-1}}(f, \xi_{2n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^2}(f, \xi_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n^1}(f, \xi_n^1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2: (Später)

□

**Satz 1.2.6** ( $\mathcal{R}(I)$  als Vektorraum). Der Raum  $\mathcal{R}(I)$  auf einem kompakten Intervall  $I = [a, b]$  ist ein Vektorraum und  $J : \mathcal{R}(I) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto J(f) = \int_a^b f \, dx$  ist eine lineare Abbildung. Für  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  folgt also  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(I)$  und  $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ .

*Beweis.* TEIL 1: Sei  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine zusätzliche Funktion auf dem Intervall und  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit zugehörigen Intervallen  $I_j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) & \underline{m}_j &= \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 \Rightarrow \bar{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &= \sup_{x \in I_j} h(x) + \sup_{y \in I_j} (-h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(x) - h(y)) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (h(y) - h(x)) && \text{(Vertauschen von } x, y) \\
 &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 \Rightarrow \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \tag{1}
 \end{aligned}$$

Wir wählen  $h = \alpha f + \beta g$ , wobei  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(y) &= \alpha \cdot (f(x) - f(y)) + \beta \cdot (g(x) - g(y)) \\
 \Rightarrow |h(x) - h(y)| &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot |g(x) - g(y)| \tag{2} \\
 \bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{x \in I_j} h(x) - \inf_{y \in I_j} h(y) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x, y \in I_j} (|h(x) - h(y)|) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} |\alpha| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| + |\beta| \cdot \sup_{x, y \in I_j} |g(x) - g(y)| \\
 &= |\alpha| \cdot (\bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + |\beta| \cdot (\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\
 \Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\
 &\leq |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| + |\beta| \cdot \sum_{j=1}^k (\bar{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \cdot |I_j| \\
 \Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq |\alpha| \cdot (\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + |\beta| \cdot (\bar{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \tag{3}
 \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.1 und der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  und  $g$  gilt

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z_1 : \bar{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} \\
 \forall \varepsilon > 0 \exists Z_2 : \bar{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}
 \end{aligned}$$

Wähle  $Z = Z_1 \vee Z_2$  und verwende (3)

$$\Rightarrow \bar{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + |\alpha| + |\beta|)}$$

1 [\*] Das eindimensionale Riemann-Integral

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nach Satz 1.2.1 ist  $h = \alpha f + \beta g$  damit Riemann-integrierbar.

TEIL 2: Für Zwischensummen

$$S_Z(h, \xi) = \sum_{j=1}^k h(\xi_j) \cdot |I_j| = \alpha \cdot S_Z(f, \xi) + \beta \cdot S_Z(g, \xi)$$

haben wir bereits Linearität. Für  $h, f, g \in \mathcal{R}(I)$  gilt nach Korollar 1.2.5

$$\begin{aligned} J(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(h, \xi_n) & (\Delta(Z_n) \rightarrow 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot S_{Z_n}(g, \xi_n)) \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f, \xi_n) + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(g, \xi_n) \\ &= \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g) \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 1.2.7** (Kompositionen von integrierbaren Funktionen). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ . Dann gilt

- (i)  $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$
- (ii)  $|f| \in \mathcal{R}(I)$
- (iii) Ist außerdem  $|g| \geq c > 0$  auf  $I$  für ein konstantes  $c > 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.*

- (i) Es sei  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  für  $x \in I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - f(y)) + f(y) \cdot (g(x) - g(y))| \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot |f(x) - f(y)| + \|f\|_\infty \cdot |g(x) - g(y)| \end{aligned} \quad (1)$$

Sei  $Z$  Zerlegung von  $I$  und  $I_j$  die entsprechenden Teilintervalle. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &= \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h)) \cdot |I_j| \\ \overline{m}_j(h) - \underline{m}_j(h) &= \sup_{I_j} h - \inf_{I_j} h = \sup_{x, y \in I_j} |h(x) - h(y)| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \|g\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) &\leq \|g\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)) + \|f\|_\infty \cdot (\overline{S}_Z(g) - \underline{S}_Z(g)) \end{aligned}$$

Für ein  $\varepsilon > 0$  gilt nach Satz 1.2.1

$$\begin{aligned} \exists Z_1: \overline{S}_{Z_1}(f) - \underline{S}_{Z_1}(f) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} \\ \exists Z_2: \overline{S}_{Z_2}(g) - \underline{S}_{Z_2}(g) &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)} \end{aligned}$$

Es sei  $Z := Z_1 \vee Z_2$

$$\Rightarrow \overline{S}_Z(h) - \underline{S}_Z(h) \leq \|g\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|g\|_\infty)} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1 + \|f\|_\infty)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit gilt  $h = f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$  nach Satz 1.2.1.

(ii) Für  $|f|$  verwenden wir  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{m}_j(|f|) - \underline{m}_j(|f|) &= \sup_{x,y \in I_j} (||f(x)| - |f(y)||) \\ &\leq \sup_{x,y \in I_j} (|f(x) - f(y)|) \\ &= \overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f) \end{aligned}$$

wie vorher folgt also  $|f| \in \mathcal{R}(I)$ .

(iii) Für  $\frac{f}{g}$  muss nur  $\frac{1}{g}$  betrachtet und die Multiplikationsregel angewendet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| &= \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x) - g(y)| \\ \Rightarrow \overline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) - \underline{m}_j\left(\frac{1}{g}\right) &\leq \frac{1}{c^2} \cdot (\overline{m}_j(g) - \underline{m}_j(g)) \end{aligned}$$

Damit gilt analog zu (ii) die Behauptung.  $\square$

[23. Apr] **Beispiel 1.2.8** (Exponentialfunktion). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto e^{\alpha x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I = [a, b]$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0$ . Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung  $Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_k^n)$  mit  $x_j^n = a + j \cdot h_n$ , wobei  $h_n = \frac{b-a}{n} = h = |I_j|$ . Da  $f$  streng monoton wachsend ist gilt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = f(x_j) = f(x_j^n) = e^{\alpha x_j} \\ \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) = f(x_{j-1}^n) = e^{\alpha x_{j-1}} \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) &= \overline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \overline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n e^{\alpha x_j} \cdot h \\ &= h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha(a+jh)} = h \cdot \sum_{j=1}^n e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha jh} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} \\ &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot e^{\alpha h} \cdot \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \quad (\text{Geometr. Summe}) \\ &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha h} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha h \cdot n} - 1) \\ &= \frac{h_n}{e^{\alpha h_n} - 1} \cdot e^{\alpha h_n} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) \end{aligned}$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha h_n} - 1}{h_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha h_n} = 1$ . Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

Wir betrachten die Untersumme

$$\underline{S}_Z = \underline{S}_{Z_n} = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = h \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha x_{j-1}})$$

$$\begin{aligned}
 &= h \cdot e^{\alpha a} \cdot \sum_{j=1}^n (e^{\alpha h})^{j-1} = h \cdot e^{\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\alpha h})^j \\
 &= h \cdot e^{\alpha a} \frac{(e^{\alpha h})^n - 1}{e^{\alpha h} - 1} \\
 &= \frac{h}{e^{\alpha h} - 1} \cdot e^{\alpha a} \cdot (e^{\alpha(b-a)} - 1) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})
 \end{aligned}$$

Also gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  sowie

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$

**Beispiel 1.2.9** (Polynome). Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha \neq -1$ ). Dann  $f \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$$

*Beweisansatz.* Wir wählen eine geometrische Zerlegung. Sei  $q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ ,  $Z = Z_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_n^n)$ ,  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ,  $x_j = x_j^n = a \cdot q^j$

$$\begin{aligned}
 |I_j| &= \Delta x_j = x_j - x_{j-1} = a \cdot q^j - a \cdot q^{j-1} \\
 &= a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \leq b \cdot (q_n - 1) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Beobachtung: Ober- und Untersumme lassen sich „leicht“ mittels geometrischer Summen ausrechnen

$$\begin{aligned}
 \overline{m}_j &= \sup_{I_j} f = (x_j)^\alpha = (a \cdot q^j)^\alpha && \text{(Nach Monotonie)} \\
 \underline{m}_j &= \inf_{I_j} f = (x_{j-1})^\alpha = (a \cdot q^{j-1})^\alpha \\
 \underline{S}_Z(f) &= \underline{S}_{Z_n}(f) = \sum_{j=1}^n \underline{m}_j \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n (a \cdot q^{j-1})^\alpha \cdot a \cdot q^{j-1} \cdot (q - 1) \\
 &= (q - 1) \cdot a^{\alpha+1} \cdot \sum_{j=1}^n q^{(\alpha+1) \cdot (j-1)}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine geometrische Summe, dessen Grenzwert sich gut ermitteln lässt. □

**Übung 1.2.10.** Bestimmen Sie den Grenzwert der Ober- und Untersummen aus Beispiel 1.2.9, um die Riemann-Integrierbarkeit der Polynome nachzuweisen.

**Satz 1.2.11** (Monotonie des Integrals). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Dann erfüllt das Integral Monotonieeigenschaften. Das heißt konkret

(i) Wenn  $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq g(x)$ , dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (1.2.1)$$

(ii) Insbesondere gilt für  $f \in \mathcal{R}(I)$  beliebig

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.2.2)$$

(iii) Sowie

$$\left| \int_a^b f \cdot g \, dx \right| \leq \sup_I |f| \cdot \int_a^b |g| \, dx$$

*Beweis.*

(i) Sei  $h = g - f \geq 0$ . Dann gilt nach Satz 1.2.6  $h \in \mathcal{R}(I)$  und  $\int_a^b h \, dx \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \int_a^b h \, dx = \int_a^b g \, dx + \int_a^b (-f) \, dx = \int_a^b g \, dx - \int_a^b f \, dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx \end{aligned}$$

(ii) Es gilt  $\pm f \leq |f|$ . Damit folgt aus (1.2.1)

$$\begin{aligned} \int_a^b (\pm f) \, dx &\leq \int_a^b |f| \, dx \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \max \left( \int_a^b f \, dx, -\int_a^b f \, dx \right) \leq \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

(iii) Nach (1.2.2) gilt

$$\left| \int_a^b fg \, dx \right| \leq \int_a^b |fg| \, dx \leq \int_a^b \left( \sup_I |f| \right) |g| \, dx = \sup_I (|f|) \cdot \int_a^b |g| \, dx \quad \square$$

**Satz 1.2.12** (Cauchy-Schwarz). Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg \, dx \right|^2 &\leq \left( \int_a^b |fg| \, dx \right)^2 \\ &\leq \int_a^b |f|^2 \, dx \cdot \int_a^b |g|^2 \, dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \\ \Rightarrow \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \|f\| \cdot \|g\| \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ \Rightarrow \mp ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$t > 0$

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \left| t\alpha - \frac{\beta}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left( t\alpha^2 + \frac{1}{t}\beta^2 \right) \\ \left| \int_a^b fg \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot \underbrace{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}_A + \frac{1}{t} \underbrace{\int_a^b |g|^2 \, dx}_B \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( t \cdot |f(x)|^2 + \frac{1}{t} |g(x)|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( tA + \frac{1}{t}B \right) \end{aligned}$$

Frage: Welches  $t > 0$  maximiert  $h$ ?

$$\begin{aligned} A = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2t}B \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \\ B = 0 &\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}A \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \end{aligned}$$

Minimum existiert für ein  $t_0 > 0$  und es gilt  $0 = h'(t_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} \left( A - \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ \Rightarrow (t_0)^2 &= \frac{B}{A} \quad t_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} \\ \Rightarrow \inf_{(0, \infty)} h(t) &= \frac{1}{2} t_0 \left( A + \frac{1}{t_0^2}B \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{A}} \left( A + \frac{A}{B}B \right) = \sqrt{AB} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.13.**

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &:= \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \text{ ist eine Norm} \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \|g\|\end{aligned}$$

**Satz 1.2.14.** Sei  $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}([a, b])$  der Raum der stetigen reellen Funktionen auf einem  $I = [a, b]$ . Es gilt  $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .

*Beweis.*  $I = [a, b]$  ist kompakt und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und damit auch gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \delta \quad \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta$$

Sei  $Z$  eine Zerlegung von  $I$  mit  $\Delta(Z) < \delta$ .  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  und  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &= \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{y \in I_j} f(y) \\ &= \sup_{x, y \in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in I_j} (f(x) - f(y))\end{aligned}$$

Da  $|x - y| \leq |I_j| < \delta$  gilt

$$\begin{aligned}\overline{m}_j - \underline{m}_j &\leq \varepsilon \\ \Rightarrow \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &= \sum_{j=1}^n (\overline{m}_j - \underline{m}_j) \cdot |I_j| \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \cdot |I| = \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow 0 &\leq \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \\ &\leq \varepsilon (b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

□

**Definition 1.2.15.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I = [a, b]$  heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung  $Z = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  von  $I$  gibt so, dass  $f$  auf jedem der offenen Intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$  stetig ist und die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}f(a+) &= \lim_{x \rightarrow a+} f(x), f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \\ f(x_j-) &= \lim_{x \rightarrow x_j-} f(x), f(x_j+) = \lim_{x \rightarrow x_j+} f(x)\end{aligned}$$

für  $j = 1, \dots, k - 1$  existieren.

$f((x_{j-1}, x_j))$  können zu stetigen Funktionen auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  fortgesetzt werden. Wir nennen diese Klasse von Funktionen  $\mathcal{PC}(I)$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Piecewise continuous function in  $I$



**Satz 1.2.16.** Es gilt  $PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ .  $I = [a, b]$ . Ist  $Z = (x_0, \dots, x_k)$  eine Zerlegung von  $f \in \mathcal{PC}(I)$  und  $f$  stetig auf  $(x_{j-1}, x_j) \quad \forall j$  und  $f_j$  eine stetige Fortsetzung von  $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$  auf  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ . So gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=1}^k \int_{x_{l-1}}^{x_l} f_l(x) dx$$

*Beweis.* Arbeite auf  $I_l = [x_{l-1}, x_l]$  dann ist  $f_l$  stetig nach Satz 1.2.14 und summiere zusammen. (Details selber machen).  $\square$

**Bemerkung 1.2.17** (Treppenfunktion). Ist  $f$  stückweise konstant auf  $I$ . Das heißt es existiert eine Zerlegung  $Z = (x_0, \dots, x_\nu)$  von  $I$  mit  $f$  ist konstant auf  $(x_{k-1}, x_k) \quad \forall k = 1, \dots, \nu$ . So heißt  $f$  Treppenfunktion. Schreiben  $\mathcal{J}(I)$  für die Klasse der Treppenfunktionen.

[26. Apr] **Satz 1.2.18.** Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften

- (a) In jedem Punkt  $x \in (a, b)$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte.
- (b) In  $a$  existiert der rechtsseitige und in  $b$  der linksseitige Grenzwert.

Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$ .

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst das folgende Approximationslemma 1.2.20.

**Bemerkung 1.2.19.** Insbesondere erfüllt  $PC(I)$  die Bedingungen a) und b) aus Satz 1.2.18.

**Lemma 1.2.20.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die Bedingungen aus Satz 1.2.18 erfüllt. Dann gibt es eine Folge  $(\varphi_n)_n$  von Treppenfunktionen  $\varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = 0$$

Also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Treppenfunktion } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

*Beweis.* (Später)  $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun Satz 1.2.18 beweisen.

*Beweis.* Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.18 verlangt und  $\varepsilon > 0$ , sowie  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktion mit  $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wir definieren  $\Psi_1 := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\Psi_2 = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$  auch als Treppenfunktionen. Dann gilt  $\Psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \leq f$  und  $\Psi_2 \geq f$ . Für alle Zerlegungen  $Z$  von  $I$  mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_Z(\Psi_1) &\leq \underline{S}_Z(f) \\ \Rightarrow \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot |I| = \underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \geq \overline{S}_Z(f)$$

Damit folgt insgesamt

$$\underline{S}_Z(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} (b - a) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f)$$

$$\overline{S}_Z(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \geq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{J}(f)$$

Da  $\varphi$  eine Treppenfunktion ist, ist  $\varphi \in PC(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$ . Also existiert eine Folge  $(z_n)_n$  von Zerlegungen von  $I$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{Z_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

(sofern  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \overline{S}_{Z_n}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}(b-a) - \left( \underline{S}_{Z_n}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \right) \\ &= \overline{S}_{Z_n}(\varphi) - \underline{S}_{Z_n}(\varphi) + \varepsilon(b-a) \\ &\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx + \varepsilon(b-a) \\ &= \varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq \varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) - \underline{J}(f) &\leq 0 \\ \Rightarrow \overline{J}(f) &= \underline{J}(f) \\ \Rightarrow f &\in \mathcal{R}(I) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.21.** Welche  $f \in \mathcal{B}(I)$  sind genau Riemann-integrierbar?

**Definition 1.2.22** (Nullmenge). Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}$  heißt Nullmenge, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  höchstens abzählbar viele Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  existieren mit

$$N \subseteq \bigcup_j I_j \quad (I_j \text{ überdecken } N)$$

und

$$\sum_j |I_j| < \varepsilon$$

**Beispiel 1.2.23.**  $\mathbb{Q}$  ist eine Nullmenge.

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Nehme  $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{Q} = \{q_j | j \in \mathbb{N}\}$$

Zu  $q_j$  nehme  $I_j = [q_j - \frac{\varepsilon}{2}, q_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$$\begin{aligned} q_j \in I_j \quad |I_j| &= \varepsilon 2^{-j} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| &= \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= \varepsilon \cdot \frac{1}{2-1} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Definition 1.2.24.** Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt fast überall stetig auf  $I$ , falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  eine Nullmenge ist.

**1.2.25** (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium).  $\mathcal{R}(I) = \{f \in \mathcal{B}(I) : f \text{ ist fast überall stetig auf } I\}$

**Bemerkung 1.2.26.** Sei  $f$  wie in Satz 1.2.18. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstelle von  $f$  höchstens abzählbar, also eine Nullmenge.

Ist  $f \in PC(I)$  so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen endlich.

*Beweis von Lemma 1.2.20.* Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Aussage stimmt nicht, dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  sowie ein  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  wie in Satz 1.2.18, sodass

$$\forall \text{Treppenfunktionen } \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}: \|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

SCHRITT 1:  $I_1 = [a, b]$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ . Dann weiter mit Divide & Conquer:

$$\sup_{I_1} |f - \varphi| \geq \varepsilon_0$$

Behauptung: Es existiert eine Folge  $(I_n)_n$  von Intervallschachtelungen  $I_{n+1} \subseteq I_n$  mit  $|I_n| = b - a \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  mit

$$\sup_{x \in I_n} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle Treppenfunktionen } \varphi \text{ (auf } I_n) \quad (*)$$

Beweis: Angenommen  $I_n = [a_n, b_n]$  ist gegeben und erfüllt die obige Bedingung

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{b_n + a_n}{2} \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a_n, M_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \text{ oder } \sup_{x \in [M_n, b_n]} |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0 \\ &\quad \text{(Für alle Treppenfunktionen } \varphi) \end{aligned}$$

Im ersten Fall wählen wir die linke Hälfte des Intervalls, also  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = M_n$ . Im zweiten Fall die rechte Hälfte, also  $a_{n+1} = M_n$ ,  $b_{n+1} = b_n$ . Damit gilt im Sinne der Intervallhalbierung

$$\Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$$

sowie

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} (b - a) \rightarrow 0$$

Nehme  $c_n \subseteq I_n$

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\text{ existiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert aufgrund der monotonen Konvergenz} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: \xi && \text{(da } b_n - a_n \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n &\leq \xi \leq b_n \\ \Rightarrow a_n &\leq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &\geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \xi &\in I_n = [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$$

SCHRITT 2: Angenommen  $a < \xi < b$ . Dann ist

$$\begin{aligned} c_l &= f(\xi-) = \lim_{x \rightarrow \xi-} f(x) \\ c_r &= f(\xi+) = \lim_{x \rightarrow \xi+} f(x) \end{aligned}$$

Nehmen  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - c_l| &< \varepsilon_0 & \xi - \delta \leq x \leq \xi \\ |f(x) - c_r| &< \varepsilon_0 & \xi < x \leq \xi + \delta \end{aligned}$$

Wir definieren  $\varphi : [\xi - \delta, \xi + \delta]$  durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_r & \xi < x < \xi + \delta \\ f(x) & x = \xi \\ c_l & \xi - \delta < x < \xi \end{cases}$$

und

$$\sup_{\xi - \delta < x \leq \xi + \delta} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0 \quad (**)$$

Aber  $I_n \subseteq [\xi - \delta, \xi + \delta]$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n$  groß genug ist (\*\*) im Widerspruch zu (\*). Damit folgt die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Satz 1.2.27.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  ???.

**Lemma 1.2.28.** Seien  $f, g \in \mathcal{R}(I)$  und gebe es eine Menge  $G \subseteq I$  welche in  $I$  dicht liegt und für die  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in G$  gilt. Dann folgt  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

### 1.3 [\*] Mittelwertsätze der Integralrechnung

**Definition 1.3.1.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$ ,  $I = [a, b]$ . Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

definiert als der Mittelwert von  $f$  über  $I$ . Wir schreiben auch

$$\bar{f}_I = \int_a^b f(x) dx$$

**Satz 1.3.2.** Es sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann gilt

$$\exists \xi : a < \xi < b \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \sup_I f = \max_I f \\ \underline{m} &= \inf_I f = \min_I f \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.11 gilt

$$\begin{aligned}\underline{m} &\leq f(x) \leq \overline{m} \quad \forall x \in I \\ \Rightarrow \underline{m}(b-a) &= \int_a^b \underline{m} \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \overline{m} \, dx = \overline{m}(b-a) \\ \Rightarrow \underline{m} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{m}\end{aligned}$$

Ist  $\underline{m} = \overline{m} \Rightarrow f$  ist konstant auf  $[a, b]$

$$\Rightarrow \underline{m} = \overline{m} = \int_a^b f(x) \, dx$$

und  $\forall a < \xi < b$  ist  $f(x) = \underline{m}$ . Damit gilt die Behauptung. Sei also  $\underline{m} < \overline{m}$ . Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass  $x_1$  und  $x_2$  in  $I$  existieren, sodass  $f(x_1) = \underline{m}$  und  $f(x_2) = \overline{m}$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Außerdem folgt aus  $\underline{m} < \overline{m}$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$  auch

$$\underline{m} < \int_a^b f(x) \, dx < \overline{m}$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt

$$\Rightarrow \exists \xi \text{ zwischen } x_1, x_2 \text{ mit } f(\xi) = \int_a^b f(x) \, dx \quad \square$$

[30. Apr] **Satz 1.3.3** (Verallgemeinerung des vorherigen Satzes). Es sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ ,  $p \in \mathcal{R}(I)$ . Falls  $p \geq 0$  folgt  $\exists \xi$  mit  $a < \xi < b$  und

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b p(x) \, dx \quad (1.3.1)$$

*Beweis.* Angenommen  $\int_a^b p(x) \, dx = 0$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)p(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in I} \int_a^b |p(x)| \, dx = 0$$

Damit gilt (1.3.1) für alle  $a < \xi < b$ .

Ist  $\int_a^b p(x) \, dx > 0$ , dann definieren wir ein neues Mittel:

$$\text{Mittel}(f) := \frac{1}{\int_a^b p(x) \, dx} \cdot \int_a^b f(x)p(x) \, dx$$

Durch scharfes Hinschauen folgt dann die Aussage aus dem Beweis des vorherigen Satzes.  $\square$

## 2 [\*] Das orientierte Riemann-Integral

Sei  $I = [a, b]$  und  $a', b' \in I$  mit  $a' < b'$  und  $I' = [a', b']$ . Wenn  $f \in \mathcal{R}(I)$ , ist dann auch  $f \in \mathcal{R}(I')$ ? Ist also die Einschränkung  $\varphi := f|_{I'} : I' \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto f(x)$  Riemann-integrierbar?

**Satz 2.1.1.** Ist  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $I' = [a', b'] \subseteq I = [a, b]$ , so ist  $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$ :

*Beweis.* SCHRITT 1: Angenommen  $I' = [a, b']$  (also  $a' = a$ ). Dann folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von  $f$  und Satz 1.2.18, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Zerlegung } Z \text{ von } I: \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \quad (1)$$

Sei  $Z_0 := (a, b', b')$  eine Zerlegung und  $Z_1 = Z_0 \vee Z$  die gemeinsame Verfeinerung mit  $Z_1 = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ . Dann gilt  $x_0 = a$ ,  $x_k = b$  und  $\exists l \in \{1, \dots, k-1\} : x_l = b'$ . Dann ist  $Z' = (x_0, x_1, \dots, x_l)$  eine Zerlegung von  $I'$  mit zugehörigen Intervallen  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  für  $(j = 1, \dots, l)$ . Wir definieren  $\varphi = f|_{I'}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \overline{m}_j(f) &= \sup_I f = \sup_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \underline{m}_j(f) &= \inf_I f = \inf_{I_j} \varphi \quad \forall 1 \leq j \leq l \\ \overline{S}_Z(\varphi) &= \underline{S}_Z(\varphi) = \sum_{j=1}^l (\overline{m}_j(\varphi) - \underline{m}_j(\varphi)) \cdot |I_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k (\overline{m}_j(f) - \underline{m}_j(f)) \cdot |I_j| = \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage für  $I' = [a, b']$ .

SCHRITT 2: Sei  $b' = b$ ,  $a < a' < b$ . Dann kopiere den Beweis von SCHRITT 1.

SCHRITT 3: Sei  $a < a' < b' < b : f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Dann folgt aus SCHRITT 1, dass  $\varphi_1 := f|_{[a, b']} \in \mathcal{R}([a, b'])$ . Außerdem gilt nach SCHRITT 2, dass  $\varphi_2 := \varphi_1|_{[a', b']} \in \mathcal{R}([a', b'])$ . Damit gilt  $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.1.2.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  mit  $I = [a, b]$  und  $I' = [a', b'] \subseteq I$ . Dann folgt  $f|_{I'} \in \mathcal{R}(I)$ . Und wir definieren

$$\int_a^{b'} f(x) \, dx := \int_{a'}^{b'} \varphi(x) \, dx$$

mit  $\varphi := f|_{[a', b']}$ .

**Satz 2.1.3.** Sei  $I = [a, b]$  zerlegt in endlich viele Intervalle  $I_j$   $j = 1, \dots, m$ , die höchstens die Randpunkt gemeinsam haben. Also

$$I = \bigcup_{j=1}^m I_j \quad I_j = [a_j, b_j]$$

also  $\text{Int}(I_j) \cap \text{Int}(I_k) = (a_j, b_j) \cap (a_k, b_k) = \emptyset$  für  $j \neq k$ . Dann gilt

$$\int_I f(x) \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x) \, dx$$

*Beweis.* Sei  $(Z'_n)_n$  eine Folge von Zerlegungen von  $I$  mit  $\Delta(Z'_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $Z_0 = \bigcup_j [a_j, b_j]$ . Wir betrachten die Verfeinerung  $Z_n := Z'_n \vee Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ . Wir haben Zwischenpunkte  $\xi_n$  zu  $Z_n$ .

$Z_n$  lässt sich in Zerlegung  $Z_n^j$  von  $I_j$  aufteilen. Dann gilt auch, dass  $\Delta(Z_n^j) \rightarrow 0 \forall j = 1, \dots, m$ . Die Zwischenpunkte  $\xi_n$  lassen sich aufteilen in  $\xi_n$  von  $Z_n^j$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{Z_n}(f, \xi_n) &= \sum_{j=1}^k f(\xi_n^j) \cdot |I_j^n| \\ &= \sum_{j=1}^m S_{Z_n}(f, \xi_j) \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 2.1.4** (Orientiertes Riemann-Integral). Sei  $\alpha, \beta \in I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx & \varphi &:= f|_{[\alpha, \beta]} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx & \text{falls } \alpha &\neq \beta \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &:= 0 & \text{falls } \alpha &= \beta \end{aligned}$$

**Satz 2.1.5.** Sei  $f \in \mathcal{R}(I)$  und  $\alpha, \beta, \gamma \in I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \quad (2.1.1)$$

*Beweis.* Sind mindestens 2 Punkte  $\alpha, \beta, \gamma$  gleich, so stimmt die Aussage. Also seien o.B.d.A.  $\alpha, \beta, \gamma$  paarweise verschieden. Dann ist (2.1.1) äquivalent zu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

Diese Gleichung ist invariant unter zyklischem Vertauschen von  $\alpha, \beta, \gamma$ . (Also zum Beispiel  $\gamma, \alpha, \beta$  oder  $\beta, \gamma, \alpha$ ).

FALL 1: Sei  $\alpha < \beta < \gamma$ . Dann folgt die Aussage aus Satz 2.1.3.

FALL 2: Sei  $\beta < \alpha < \gamma$ . Dann folgt aus Fall 1, dass

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx &= \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von FALL 1 oder zyklischem Vertauschen von FALL 2. Damit gilt die Gleichung für alle Fälle.  $\square$

## 2.2 Riemann-Integral für vektorraumwertige Funktionen

Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)) \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Komponentenfunktionen})$$

### Definition 2.2.1.

(a) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$   $x \mapsto f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) := \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{B}(I)\} \\ \mathcal{R}(I, \mathbb{C}) &:= \{f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{C}) : \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{R}(I)\} \\ \int_a^b f(x) \, dx &:= \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) \, dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) \, dx \end{aligned}$$

(b) Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$  oder  $\mathbb{C}^d$ . Dann ist eine Funktion  $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}^d)$  Riemann-integrierbar, falls alle Komponentenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_d$  R-integrierbar auf  $I$  sind.

$$\int_a^b f(x) \, dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x) \, dx \\ \int_a^b f_2(x) \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(x) \, dx \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 2.2.2.** Das Konzept lässt sich auch auf Matrizen übertragen. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}$  ist R-integrierbar, falls jede Komponentenfunktion R-integrierbar ist. Das Integral wird analog zu Vektoren definiert.

**Bemerkung 2.2.3.** Außerdem ist auch  $\mathcal{R}(I, \mathbb{R}^d)$  ein reeller Vektorraum und  $\mathcal{R}(I, \mathbb{C}^d)$  ein komplexer Vektorraum und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

alle Rechenregeln und Sätze gelten entsprechend!



### 3 [\*] Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

#### 3.1 Hauptsatz der Integralrechnung

Sei  $I = [a, b]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Wie rechnet man das Integral dann praktisch aus?

Erinnerung:  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  differenzierbar ist und  $F' = f$ .

**Satz 3.1.1** (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Sei  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann ist für jedes  $c \in [a, b]$  die Funktion

$$F(x) := \int_c^x f(t) dt \quad (x \in I)$$

stetig differenzierbar und  $F' = f$ . Das heißt  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ .

*Beweis.* (Später) □

**Korollar 3.1.2.** Sei  $G \in \mathcal{C}^1(I)$  (stetig differenzierbaren Funktionen auf  $I$ ) eine Stammfunktion von  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) =: G|_a^b := [G]_a^b = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

*Beweis.* Wir nehmen  $c = a$  aus Satz 3.1.1 und  $F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$  erfüllt  $F' = f$  auf  $I$  nach Satz 3.1.1.

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t) dt \\ h(t) &:= F(t) - G(t) \\ h' &= F' - G' = f - f = 0 \text{ auf } I \end{aligned}$$

Damit ist  $h$  konstant, d.h.  $h(x) = k$  für alle  $x \in I$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) - G(x) &= k \\ k &= F(a) - G(a) = -G(a) \\ F(x) - G(x) &= -G(a) \\ F(x) &= G(x) - G(a) \\ \Rightarrow F(b) &= G(b) - G(a) \end{aligned} \quad \square$$

[3. Mai] *Beweis von Satz 3.1.1.* Sei  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$  und  $h \neq 0$ . Wir wollen über den Differenzenquotient zeigen, dass  $F' = f$ . Wir berechnen zuerst den Zähler

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Das können wir in den Differenzenquotienten einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) dt \\ \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) \, dt \\
 &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &\leq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h > 0 \\ \frac{1}{-h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt & h < 0 \end{cases} \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| \cdot |h|
 \end{aligned}$$

Wir definieren  $I_h(x) = [x, x+h]$ , falls  $h > 0$  und ansonsten  $I_h(x) = [x+h, x]$

$$\leq \sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)|$$

Da  $f$  stetig in  $x$  ist, folgt

$$\begin{aligned}
 &\sup_{t \in I_h(x)} |f(t) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= f(x) \quad \square
 \end{aligned}$$

**Beispiel 3.1.3.** Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $f(x) = x^p$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann hat  $f$  die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1}$ . Damit folgt

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{1}{p+1} \cdot [b^{p+1} - a^{p+1}] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Beispiel 3.1.4.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  und  $f(x) = x^{-p}$ ,  $x \neq 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{1-p} \cdot x^{1-p}$ . Damit folgt

$$\int_a^b x^{-p} \, dx = \frac{1}{1-p} \cdot [b^{1-p} - a^{1-p}] \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.5.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$ ,  $x > 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$ . Damit gilt

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}] \quad \forall a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.6.** Sei  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Dann ist die Stammfunktion  $F(x) = \ln|x|$ .

*Beweis.* Falls  $x > 0$ . Dann ist  $F(x) = \ln x$  und  $F'(x) = \frac{1}{x}$ .

Falls  $x < 0$ . Dann ist  $F(x) = \ln -x$  und  $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ . □

Damit gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln \left| \frac{b}{a} \right| \quad \forall a, b < 0 \text{ oder } a, b > 0$$

**Beispiel 3.1.7.** Es gilt  $(\sin x)' = \cos x$  und  $(\cos x)' = -\sin x$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos x \, dx &= \sin b - \sin a \\ \int_a^b \sin x \, dx &= [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a\end{aligned}$$

**Beispiel 3.1.8.** Es gilt  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . ( $|x| < \frac{\pi}{2}$ ). Damit folgt  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Das heißt

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^\varphi = \tan(\varphi) \quad \forall |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

**Beispiel 3.1.9.** Wir wollen das Integral  $\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$  berechnen.  $\sqrt{1-x^2}$  hat die Stammfunktion  $\phi(x) = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2})$ , weil

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) \right) \quad ((\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx &= \left[ \frac{1}{2} (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) \right]_a^b \quad -1 \leq a, b \leq 1\end{aligned}$$

Geometrisch gesehen können wir damit auch die Fläche der oberen Hälfte des Einheitskreises berechnen

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\arcsin 1 + 0 - \arcsin -1 - 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

**Bemerkung 3.1.10.** Satz 3.1.1 gilt auch für Funktionen in  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{C}^d$ . Wir nennen

$$\int f(x) \, dx$$

die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu  $f$  oder das unbestimmte Integral. Genauer gilt, wenn  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $f$  ist

$$\int f(x) \, dx = \{\Phi + k : k \text{ Konstante}\}$$

## 3.2 Integrationstechniken

**Satz 3.2.1** (Partielle Integration). Seien  $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$  (oder  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir wenden die Produktregel der Ableitung an. Es gilt  $(fg)' = f'g + fg'$ .

$$\int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b (fg)' dx = [fg]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (2)$$

Wir setzen (1) und (2) gleich

$$\int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \square$$

**Beispiel 3.2.2** (Anwendung von partieller Integration).

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln x - x \\ \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \Rightarrow 2 \int \sqrt{1-x^2} dx &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \\ \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \end{aligned}$$

**Übung 3.2.3.** Beweisen Sie analog zum vorherigen Beispiel mittels partieller Integration, dass  $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x)$  und  $\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arccosh} x)$

**Beispiel 3.2.4.**

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos(bx)\right) - \int \frac{a}{b} e^{ax} \cos(bx) dx$$

Wir wenden nochmal partielle Integration an und erhalten

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \int e^{ax} \cos(bx) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left\{ \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right\} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} e^{ax} \sin(bx) \\ \Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (e^{ax} (a \sin(bx) - b \cos(bx))) + \text{const.} \end{aligned}$$

[07. Mai] **Beispiel 3.2.5.**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(x) \, dx \\
&= [-\cos(x) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(x) \, dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx
\end{aligned}$$

Mit dem trigonometrischen Pythagoras wissen wir außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int \cos^n(x) \, dx &= \int \cos(x) \cos^{n-1}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \int \sin(x) (n-1) \cos^{n-2}(x) \sin(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \sin(x) \cos^{n-1}(x) + (n-1) \int \cos^{n-2}(x) \, dx - (n-1) \int \cos^n(x) \, dx \\
\int \cos^n(x) \, dx &= \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) \, dx \quad (\text{Rekursionsformel})
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass  $\int \sin^n(x) \, dx = \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx$ . Wir nutzen nun die Rekursionsformel, um einen Wert für alle  $n$  zu ermitteln

$$\begin{aligned}
c_n &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx \\
&= \left[ \frac{1}{n} \sin(x) \cos^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx \\
&= \frac{n-1}{n} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx}_{=c_{n-2}} \\
\Rightarrow c_n &= \frac{n-1}{n} c_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
c_0 &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \\
c_n &= \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot c_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-j-1}{n-j} \cdot c_{n-2j-2} \quad \forall j : n-2j-2 \geq 1
\end{aligned}$$

Damit folgt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx \\
&= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
c_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \, dx \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2}{5} \cdot \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**Satz 3.2.7** (Wallisches Produkt). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

*Beweis.* Aus der Definition von  $c_n$  aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich

$$W_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Für  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ist  $0 \leq \cos(x) \leq 1$ . Damit folgt  $\cos^{2n}(x) \leq \cos^{2n-1}(x) \leq \cos^{2n-2}(x)$ . Also gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x) \, dx \\
&\Rightarrow c_{2n} \leq c_{2n-1} \leq c_{2n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Nach Def. gilt

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j} \\
\Rightarrow \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} &= \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j}}{\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{c_{2n}}{c_{2n}} \geq \left| \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \right| \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1
\end{aligned}$$

□

Außerdem

$$\begin{aligned}
 W_n &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{2n+1} \\
 \Rightarrow \sqrt{W_n} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} \cdot \sqrt{2n} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{(2n-1)! \cdot 2n \cdot \sqrt{2n}} \\
 &= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n} \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

**Satz 3.2.8** (Substitutionsregel). Seien  $I = [a, b]$  und  $I^*$  kompakte Intervalle und  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{R})$  sowie  $\varphi(I^*) \subseteq I$ . Dann gilt für  $\alpha, \beta \in I^*$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

*Beweis.* Sei  $F$  die Stammfunktion von  $f$  ( $F'(x) = f(x) \, \forall x \in I$ ). Wir definieren  $h(t) := F(\varphi(t)) \Rightarrow h \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{C})$  (Kettenregel).

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{d}{dt} h(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\
 \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) \, dt &= [h(t)]_{\alpha}^{\beta} = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x) \, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx \quad \square
 \end{aligned}$$

ERSTE LESART:  $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt$  ausrechnen. Annahme: Es existiert eine Substitution  $x = \varphi(t)$  und  $f(x)$ , sodass  $g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  ist.

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx \quad (b = \varphi(\beta), a = \varphi(\alpha))$$

**Beispiel 3.2.9.** Wir betrachten das Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt$ . Wir definieren  $\varphi(t) = t+c$  und  $f(x) = g(x)$ . Dann gilt  $\varphi'(t) = 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(t+c) \, dt &= \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) \, dx \\
 &= \int_{a+c}^{b+c} g(x) \, dx \quad (\text{Translation})
 \end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.10.** Wir betrachten  $\int_a^b g(t) \frac{dt}{t}$  mit  $a, b > 0$  und definieren  $\varphi(t) = \ln(t)$ ,  $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ .

$$\begin{aligned} g(t) \cdot \frac{1}{t} &= g(t) \cdot \varphi'(t) \\ &= g(e^{\varphi(t)}) \cdot \varphi'(t) \\ f'(x) &= g(e^x) \\ \Rightarrow \int_a^b g(t) \frac{dt}{t} &= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) dx \\ &= \int_{\ln a}^{\ln b} g(e^x) dx \end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.11.** Wir betrachten  $\int_0^1 (1+t^2)^n \cdot (t dx. t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (1+t^2). (1+t^2)^n = \frac{1}{2} (1+t^2)^n \frac{d}{dt} (1+t^2).$   
 $\varphi(t) = 1+t^2$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x^n$ .  
 Dann gilt  $(1+t^2)^n = \frac{1}{2}f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ .

[10. Mai] **3.2.12.** Ziel: Berechne  $\int_a^b f(x) dx$ . Wir führen eine Variablentransformation durch:  $x = \varphi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(t) dt & (h(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} h(t) dt \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

Dazu benötigt man  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  ist invertierbar. (Also zum Beispiel  $\varphi' > 0$  oder  $\varphi' < 0$  auf ganz  $[\alpha, \beta]$ )

**Notation 3.2.13** (Leibnitz'sche Schreibweise).  $x = \varphi(t)$   $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$  (informell).  
 $dx$  „=“  $\varphi'(t) dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f(x) dx &\text{„=“} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ \int_0^1 \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt & (\frac{dx}{dt} = r \cdot \cos t) \\ &= r^2 \cdot \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



## 4 [\*] Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir immer nur Integrale auf kompakten Intervalle  $I$  berechnet und dabei waren alle Funktionen  $f \in \mathcal{R}(I)$  insbesondere beschränkt.

Frage: Was ist  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ? Was ist  $\int_0^\infty e^{-t} dt$ ?

$$\int_a^b e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_a^b = e^{-0} - e^{-b} = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b} \rightarrow 1 \text{ für } b \rightarrow \infty$$

### 4.1 Uneigentliche Integrale: Fall I

Es sei  $I = [a, \infty)$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \forall a < b < \infty$  sowie  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Definition 4.1.1** (Fall). Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

sofern der Grenzwert existiert nennen wir das das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, \infty)$ . Wenn der Grenzwert existiert, sagen wir das Integral konvergiert.

Divergiert das Integral und gilt  $F(b) \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow \infty$  (oder  $F(b) \rightarrow -\infty$  für  $b \rightarrow \infty$ ), so nennen wir das Integral bestimmt divergent und schreiben

$$\int_a^\infty f(x) dx = +\infty$$

oder

$$\int_a^\infty f(x) dx = -\infty$$

**Satz 4.1.2.** Das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  existiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |F(b_2) - F(b_1)| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R$$

*Beweis.* Wir wollen die Existenz von  $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$  für  $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ . Dann folgt der Satz aus dem Cauchy-Kriterium für Grenzwerte.  $\square$

**Definition 4.1.3** (Absolut konvergente uneigentliche Integrale). Das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

heißt absolut konvergent, falls

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

konvergiert.

**Satz 4.1.4.** Ist das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  absolut konvergent, so ist es auch konvergent. Das heißt ist  $\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty$ , so konvergiert auch  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

*Beweis.* Wir setzen  $G(b) = \int_a^b |f(x)| \, dx$  und  $F(b) = \int_a^b f(x) \, dx$ . Wir nehmen an, dass  $\lim_{b \rightarrow \infty} G(b)$  existiert, das heißt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists R \geq a: |G(b_2) - G(b_1)| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \geq R \\ \Rightarrow |F(b_2) - F(b_1)| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \, dx = G(b_2) - G(b_1) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.2. □

**Satz 4.1.5.** Sei  $\varphi : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\int_a^\infty \varphi(x) \, dx < \infty$$

und es existiert ein  $R_0 \geq 0$ , sodass

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq R_0$$

Dann ist

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

absolut konvergent.

*Beweis.* Für  $b_2 \geq b_1 \geq R_0$  gilt

$$\begin{aligned} |F(b_2) - F(b_1)| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) \, dx \right| \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| \, dx < \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \, dx \\ &\leq \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{für } b_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

**Beispiel 4.1.6.** Das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Wir definieren

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Damit ist  $f$  stetig auf  $(-\infty, \infty)$  und damit folgt  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Insbesondere existiert

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx &= \int_a^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx \\
\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx &= \left[ -\cos + \frac{1}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Wir definieren  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$  mit

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$$

Außerdem gilt

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Damit ist das Integral nach dem Majorantenkriterium konvergent. Um einzusehen, dass es nicht absolut konvergent ist, betrachten wir für  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \int_{N\pi}^{|N+1|\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \frac{1}{\pi(N+1)} \cdot \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} |\sin x| dx \\
\Rightarrow \int_0^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{n=0}^k \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \sum_{n=0}^k \frac{2}{\pi(n+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n+1} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.1.7.** Analog zu  $[a, \infty)$  wollen wir auch die Integrale in  $(-\infty, b]$  betrachten. Wir setzen

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_a^b f(x) dx \\
\int_{-\infty}^b f(x) dx &:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx
\end{aligned}$$

sofern der Grenzwert existiert. Alle Aussagen für  $[a, \infty)$  gelten analog auch für  $(-\infty, b]$ .

**Definition 4.1.8.** Sei  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Dann nehmen wir  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und definieren, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert, falls

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \text{ und } \int_c^{\infty} f(x) dx$$

beide konvergieren. Und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

**Übung 4.1.9.** Weisen Sie nach, dass sowohl die Konvergenz, als auch der Wert des Integrals in der vorherigen Definition unabhängig von der Wahl von  $c$  ist.

**Bemerkung 4.1.10.** Es ist allerdings zu beachten, dass

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b dx \neq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx$$

Das heißt die Integrale müssen tatsächlich getrennt betrachtet werden. Zum Beispiel bei der Funktion  $f(x) = x$  geht  $\int_{-R}^R x \, dx \rightarrow 0$ , aber ist eigentlich nicht auf  $(-\infty, \infty)$  integrierbar, da sich bei der Trennung in zwei Integrale kein Grenzwert ergibt.

## 4.2 Uneigentliche Integrale: Fall II

Es sei  $I = [a, b)$  (oder  $I = (a, b]$ ) und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  unbeschränkt bei  $x = a$  (oder  $x = b$ ). Außerdem  $f \in \mathcal{R}([a, c]) \, \forall a < c < b$  (oder  $f \in \mathcal{R}([c, b]) \, \forall a < c < b$ )

**Definition 4.2.1.** Existiert

$$\lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left( \text{oder} \quad \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

so setzen wir

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) \, dx \quad \left( \text{oder} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) \, dx \right)$$

und sagen

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

konvergiert.

**Satz 4.2.2.** Ist  $|f(x)| \leq \varphi(x) \, \forall x \in [a, b)$  (oder  $\forall x \in (a, b]$ ) und konvergiert  $\int_a^b \varphi(x) \, dx$ , so konvergiert auch  $\int_a^b f(x) \, dx$

**Beispiel 4.2.3.** Sei  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Dann gilt  $F(x) = 2\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = [2\sqrt{x}]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c} \rightarrow 2$$

## 4.3 Uneigentliche Integrale Fall III

[14. Mai]  $f$  hat eine Singularität in  $\xi$  im Inneren von  $[a, b]$ .

**Beispiel 4.3.1.**  $f(x) = \frac{1}{|\sqrt{x}|}$  auf  $[-1, 0) \cup (0, 1]$ .

**Definition 4.3.2.** Wir sagen, dass

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert/konvergiert, falls die uneigentlichen Integrale

$$\int_{\xi}^b f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^{\xi} f(x) \, dx$$

konvergieren. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^{\xi} f(x) \, dx + \int_{\xi}^b f(x) \, dx \quad (4.3.1)$$

**Bemerkung 4.3.3.** (4.3.1) ist stärker als die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{I_\varepsilon} f(x) \, dx$$

mit  $I = [a, b]$  und  $I_\varepsilon := I \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) = [a, \xi - \varepsilon] \cup [\xi + \varepsilon, b]$ . (Cauchyscher Hauptwert).

**Beispiel 4.3.4.** Sei  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $I = [-1, 1]$ . Dann existiert der Cauchysche Hauptwert, aber nicht (4.3.1).

## 4.4 Uneigentliche Integrale Fall IV

**Definition 4.4.1.** Man hat Singularitäten in  $\mathbb{R}$  für  $f$  oder/und  $b = +\infty$ ,  $a = -\infty$ . Dann zerlege  $[a, \infty)$  oder  $(-\infty, b]$  oder  $(-\infty, \infty)$  in endlich viele Intervalle, wobei die Singularitäten die Randpunkte sind (oder  $-\infty, \infty$ ). Dann existiert das Integral, falls die endlich vielen uneigentlichen Integrale existieren. Dann nehme Summe aller dieser uneigentlichen Integrale

**Satz 4.4.2** (Integralvergleichskriterium). Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) \, dx \text{ existiert}$$

*Beweis.* Siehe Saalübung. □

**Beispiel 4.4.3.** Es sei  $f(x) = x^{-p}$  mit  $p \neq 1$ . Dann ist  $F(x) = \frac{1}{1-p} x^{1-p}$  für  $F' = f$ .

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^R$$

existiert nach Satz 4.4.2 für  $p > 1$ .

**Beispiel 4.4.4.**  $f(x) = \log_2(x) = \log(\log(x))$ ,  $x > 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_2(x) &= \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} (\log_2(x))^{1-s} &= \frac{1-s}{(\log x)^s} \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log^s n)^s} \text{ konvergiert} &\Leftrightarrow s > 1 \end{aligned}$$

**Beispiel 4.4.5** (Gamma-Funktion).

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad (x > 0)$$

(a)

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \quad \forall t > 0$$

(b)

$$\begin{aligned} t^{x-1} e^{-t} &= t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \\ &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall t \geq 1 \end{aligned} \quad (c_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}})$$

$t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}$  ist beschränkt auf  $[1, \infty)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt &\leq \int_0^1 t^{x-1} dt \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} t^x \right]_c^1 \\
 &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 - e^x) \\
 0 &\leq \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &\leq c_x e^{-\frac{t}{2}} \\
 &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} c_x \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} dt < \infty \\
 \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} &= \left[ -2e^{-\frac{t}{2}} \right]_1^b = 2 \left( e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right) \rightarrow 2e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

**Satz 4.4.6** (Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion). Es gilt  $\Gamma(n+1) = n!$  und  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$  für alle  $x > 0$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{(x+1)-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt
 \end{aligned}$$

Wir integrieren partiell. Sei  $0 < a < b < \infty$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b t^x e^{-t} dt &= \left[ -t^x e^{-t} \right]_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= a^x e^{-b} - b^x e^{-b} + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt \\
 \Rightarrow \int_a^\infty t^x e^{-t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^x e^{-t} dt \\
 &= a^x e^{-a} + x \int_a^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\
 \Rightarrow \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dx = x\Gamma(x)
 \end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Wir betrachten außerdem

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) \\
 &= n(n-1)\Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\
 &= n!
 \end{aligned}$$

□

**Anwendung 4.4.7.** Nach Substitution mit  $t^2 = x$  gilt  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int_a^\xi e^{-t^2} dt = \int e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

4 [\*] *Uneigentliche Integrale*

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_?^b s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds
 \end{aligned}$$

für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \searrow 0$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dx &= \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \\
 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Berechnung von  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  später.

## 5 [\*] Integrale und gleichmäßige Konvergenz

Sei  $I = [a, b]$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn die Funktionenfolge  $(f_n)_n$  „irgendwie“ gegen  $f$  konvergiert. Wann gilt dann

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ für } n \rightarrow \infty ?$$

Wir werden in diesem Kapitel einsehen, dass punktweise Konvergenz dafür nicht ausreichend ist, sondern wir gleichmäßige Konvergenz fordern müssen.

**Beispiel 5.1.1** (Punktweise Konvergenz). Sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n)_n$  konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion ( $f_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty \forall x \in [0, 1]$ ). Außerdem gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = \frac{n}{n} = 1$$

Das Integral über die Nullfunktion ist aber 0. Das heißt punktweise Konvergenz ist kein ausreichendes Kriterium, damit die Integrale gleich sind.

**Satz 5.1.2.** Seien  $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}, \dots$ ) und  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem konvergiere  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf  $[a, b]$  und  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{R}(I)$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  groß genug. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \\ \Rightarrow f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} &\leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \quad \forall n \geq N \end{aligned} \quad (1)$$

Halte  $N$  fest und nehme Zerlegung  $Z$  von  $I = [a, b]$  mit  $\bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann gilt jeweils nach (1)

$$\begin{aligned} \bar{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z\left(f_N + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \bar{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} \\ \underline{S}_Z(f) &\geq \underline{S}_Z\left(f_N - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z\left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) = \underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4} \\ \Rightarrow \bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) &\leq \bar{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(\underline{S}_Z(f_N) - \frac{\varepsilon}{4}\right) \\ &= \bar{S}_Z(f_N) - \underline{S}_Z(f_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt  $f \in \mathcal{R}(I)$ . Wir beweisen die Gleichheit der Integrale.



$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &= \int_a^b \left( f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b \left( f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b-a)} \right) \, dx \\
&= \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq N \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx - \frac{\varepsilon}{4} &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx + \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx \quad \square
\end{aligned}$$

[17. Mai] **Beispiel 5.1.3** (Integral von Potenzreihen). Wir betrachten die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit Konvergenzradius  $R > 0$  und

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Wir erhalten also eine Funktion  $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ). Die Stammfunktion zu  $a_n (x - x_0)^n$  ist  $\frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ . Wir definieren also eine Funktion  $F$  analog

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (c_n := \frac{a_{n-1}}{n}) \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} (|c_n|)^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} \right|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left( \frac{|a_{n-1}|}{n} \right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \left( |a_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Das heißt  $F$  hat denselben Konvergenzradius wie  $f$ . Unsere Hoffnung ist also, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist oder

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = F(x)$$

Das gilt tatsächlich und lässt sich folgendermaßen zeigen. Wir definieren eine Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Wir wissen  $\forall \delta > 0$  klein genug (konkret heißt das  $\delta < R$ ) konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf dem Intervall  $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ . Dann gilt nach Satz 5.1.2 für  $x \in [x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$  fest

$$\int_{x_0}^x f(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n(t) \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} dx = F(x) \\
\int_{x_0}^x f_n(t) dt &= \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{x_0}^x (t-x_0)^k dt \\
&= \left[ \frac{1}{k+1} (t-x_0)^{k+1} \right]_{x_0}^x = \frac{1}{k+1} x^{k+1} - \frac{1}{k+1} x_0^{k+1}
\end{aligned}$$

**Satz 5.1.4.** Sei  $I = [a, b]$  sowie  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) und die folgenden Voraussetzungen gelten

- (i)  $\exists x_0 \in I : f_n(x_0)$  konvergiert gegen  $f(x_0)$
- (ii)  $(f'_n)_n$  konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion  $g$
- (iii)  $f'_n$  ist stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in I$  und  $f$  ist stetig differenzierbar mit Ableitung  $f' = g$ .

*Beweis.* Sei  $x \in I$ . Da alle Ableitungen von  $f_n$  stetig sind, können wir den Hauptsatz verwenden und es gilt

$$\begin{aligned}
f_n(x) - f_n(x_0) &= \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \\
\Rightarrow f_n(x) &= \underbrace{f_n(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} + \underbrace{\int_{x_0}^x f'_n(t) dt}_{\rightarrow \int_{x_0}^x g(t) dt} \\
\Rightarrow f(x) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert } \forall x \in I \text{ und} \\
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt, dass  $f$  stetig differenzierbar ist mit  $f' = g$ . □

#### Anwendung 5.1.5.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\
R &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} > 0 \\
f_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \\
\Rightarrow f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \\
f'_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-x_0)^{k-1}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(n+1) a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$$

Nach dem vorherigen Satz gilt damit

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$$

konvergiert auch auf  $(x_0 - R, x_0 + R)$  und gleichmäßig auf  $[x_0 - R + \delta, x_0 + R - \delta]$ . Also konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$$

und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Also ist jede Potenzreihe differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

**Korollar 5.1.6.** Jede Potenzreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  ist unendlich oft differenzierbar auf ihrem Konvergenzintervall.

*Beweis.* Nach Anwendung 5.1.5 ist eine Potenzreihe einmal differenzierbar mit einer Potenzreihe als Ableitung. Damit folgt induktiv die Behauptung. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-k} \\ \Rightarrow f^{(k)}(x_0) &= k! \cdot a_k \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 5.1.7.** Wir wissen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} && (|x| < 1) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{1-x} \\ &= x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{-1}{(1-x)^2} (-1) = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.1.8** (Taylorreihe).

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) \, dt \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0) + f'(x_0)) \, dx \\
&= f(x_0) + \int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt + f'(x_0) \cdot \int_{x_0}^x 1 \, dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^x (f'(t) - f'(x_0)) \, dt}_{=: R_{x_0}(x)}
\end{aligned}$$

Wir können den Fehler abschätzen und erhalten für ein  $\varepsilon(x) := \sup_{t \in (x_0, x)} |f'(t) - f'(x_0)|$

$$\begin{aligned}
|R_{x_0}(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f'(t) - f'(x_0)| \, dt \leq \varepsilon(x) \cdot |x - x_0| \\
\frac{|R_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} &= \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0
\end{aligned}$$

## 6 [\*] Taylors Theorem

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (6.1.1)$$

[28. Mai] **Satz 6.1.1.** Sei  $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}((a, b))$  ( $n+1$  mal stetig differenzierbar auf  $(a, b)$ ). Dann gilt für alle  $x, x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x_0, x)$$

mit

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

*Beweis.* Wir verwenden Induktion. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist gerade der Hauptsatz.

Induktionsschritt: Angenommen  $f \in \mathcal{C}^{(n+2)}$ . Dann gilt nach Induktionsannahme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f, x_0, x) \quad (1)$$

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Wir integrieren partiell

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n!} \left( \left[ -\frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{1}{n+1} (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dt} (x - t)^{n+1} \end{aligned}$$

Nach (1) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt}_{=R_{n+1}(f, x_0, x)} \quad \square$$

**Korollar 6.1.2.** Sei  $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$ . Dann gilt  $\forall x, x_0 \in (a, b)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \bar{R}_n(f, x_0, x)$$

mit

$$\bar{R}_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x)] dt$$

*Beweis.* Nach Satz 6.1.1 gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \bar{R}_{n-1}(f, x_0, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n-1}(f, x_0, x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\
(n-1)! \cdot R_{n-1}(f, x_0, x) &= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt - \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} \cdot [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \quad \square
\end{aligned}$$

**Bemerkung 6.1.3.**

$$\begin{aligned}
n! \cdot \left| \frac{R_n(f, x_0, x)}{(x - x_0)^n} \right| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^n} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x \left| \frac{x-t}{x-x_0} \right|^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| dt \\
&\leq \int_{x_0}^x |f^{(n+1)}(t)| dt \rightarrow 0
\end{aligned}$$

**Definition 6.1.4.** Sei  $f \in \mathcal{C}((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Wir definieren

$$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (n\text{-tes Taylorpolynom})$$

Ist  $f$  unendlich oft differenzierbar, so nennen wir

$$T(f, x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Taylorreihe (von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ ).

**Bemerkung 6.1.5.**

- (i) Die Taylorreihe kann Konvergenzradius  $R > 0$  haben
- (ii) Ist eine Taylorreihe konvergent, so muss sie nicht unbedingt gegen  $f$  konvergieren

**Beispiel 6.1.6.** Wir betrachten  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $x \neq 0$ . Dann existiert  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  ein Polynom  $p_n$ , sodass

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Wir beweisen diese Behauptung mittels Induktion.

I-Anfang Es ist  $n = 0$ . Wir wählen  $p_0(x) = 1$ .

I-Schritt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( f^{(n)}(x) \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= p'_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\
&= \underbrace{\left( -p'_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^2} + 2p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^3} \right)}_{=: p_{n+1} \left( \frac{1}{x} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\
p_{n+1}(t) &:= -p'_n(t) \cdot t^2 + 2t^3 \cdot p_n(t)
\end{aligned}$$

SCHRITT 2:  $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Wir nutzen wieder Induktion. Der Induktionsanfang ist klar.

I-Schritt Angenommen  $f^{(n)}(0) = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot p_n \left( \frac{1}{x} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{|R| \rightarrow \infty} \left( R \cdot p_n(R) \cdot e^{-R^2} \right) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 6.1.7.** Ist  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ , so ist die Taylorreihe von  $f$  gleich dieser Potenzreihe.

*Beweis.* Folgt aus Korollar 5.1.6 und Gleichung ??.

□

**Beispiel 6.1.8.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \cdot x^n \\
\exp(cx) &= \exp(cx_0 + c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \exp(c(x - x_0)) \\
&= \exp(cx_0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} (x - x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(cx_0) c^n}{n!} (x - x_0)^n
\end{aligned}$$

**Satz 6.1.9** (Restglieddarstellung von Schlömilch). Sei  $f \in \mathcal{C}^{n+1}((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$ . Dann gilt

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + R_n(f, x_0, x)$$

mit

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} (x - x_0)^p \quad (8)$$

$\forall 1 \leq p \leq n+1$  und  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$

**Bemerkung 6.1.10.** Ist  $p = n + 1$ , dann haben wir die Lagrangsche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}(\xi)$$

und wenn  $p = 1$ , dann haben wir die Cauchysche Darstellung

$$R_n(f, x_0, x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0)$$

für das Restglied.

**Satz 6.1.11** (Logarithmus). Für die Logarithmusreihe  $f_n : -1 \leq x \leq 1$  gilt

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \\ T_n(f, 0)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

SCHRITT 1: Aus Satz 6.1.9 folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + R_n(f, 0, x) \\ R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{pn!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^p \\ &= n! \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 + \xi)^{-(n+1)} \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{pn!} \cdot n! \cdot (1 + \xi)^{-n-1} \cdot |x - \xi|^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$

Angenommen  $0 \leq x \leq 1$ .  $0 < \xi < x$ , wir wählen  $p = n + 1$

$$[31. \text{ Mai}] \quad \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

Angenommen  $-1 \leq x \leq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi$  zwischen 0 und  $x$ , das heißt  $\xi = \Theta x$  mit  $0 < \Theta < 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{p} \cdot (-1)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (x - \Theta x)^{n+1-p} \cdot x^p \\ \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot |x|^{n+1-p} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^p \end{aligned}$$



## 6 [\*] Taylors Theorem

$$= \frac{1}{p} \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1}$$

Da  $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \Theta x = 1 - \Theta \cdot |x| \geq 1 - \Theta > 0 \\ &\Rightarrow (1 + \Theta x)^{-n} \leq (1 - \Theta)^{-n} \\ &\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq \frac{1}{p} \cdot (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - |x|)^{-1} \cdot (1 - \Theta)^{n+1-p} \cdot |x|^{n+1} \end{aligned}$$

Wähle  $p = 1$

$$\Rightarrow |R_n(f, 0, x)| \leq (1 - \Theta)^{-n} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} \rightarrow 0$$

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die Taylorreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$  für alle  $-1 \leq x \leq 1$  konvergiert. Für  $-1 \leq x \leq 0$  gilt

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \right| \leq \frac{1}{n} \cdot |x|^n \leq |x|^n$$

Damit folgt die Konvergenz aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Das gleiche Prinzip lässt sich für  $0 \leq x < 1$  anwenden. Für  $x = 1$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  eine alternierende monotone Reihe, die damit nach Leibniz konvergiert.

Aus SCHRITT 1 und SCHRITT 2 folgt damit die Behauptung.  $\square$

**Korollar 6.1.12.** Für  $a > 0$  und  $0 < x \leq 2a$  folgt

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot a^n} (x - a)^n$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \log x &= \log(a + (x - a)) = \log\left(a \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right) \\ &= \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 6.1.13.** Es gilt

$$\begin{aligned} \log 2 &= \log(1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} && \text{(konvergiert langsam)} \\ \log(1 + x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \\ \log(1 - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \Rightarrow \log(1 + x) - \log(1 - x) &= \sum_{n \text{ ungerade}} \left( \frac{x^n}{n} + \frac{x^n}{n} \right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Für ein  $y > 1$  mit  $y = \frac{1+x}{1-x}$  gilt

$$(1 - x) \cdot y = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = x \cdot (y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{y + 1}$$

Für  $y = 2$  gilt also  $x = \frac{1}{3}$ . Das heißt

$$\log y = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left( \frac{y-1}{y+1} \right)^{2k+1}$$

$$\Rightarrow \log 2 = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{2k+1} \quad (\text{konvergiert schneller})$$

**Satz 6.1.14** (Abelscher Grenzwertsatz). Angenommen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert. Dann ist die Potenzreihe  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

- (i) konvergent für alle  $-1 < x \leq 1$
- (ii) stetig in  $x = 1$  und
- (iii) Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf allen Intervallen  $[a, 1]$  mit  $-1 < a < 1$ . (Das heißt sie konvergiert lokal gleichmäßig auf  $[-1, 1]$ ). Insbesondere in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung um  $x = 1$ .

*Beweis.* SCHRITT 1: Wir zeigen zunächst (ii) und setzen dafür

$$A_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Insbesondere ist

$$\sup_{n \geq 0} |A_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq k+1} |A_n| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$a_n = A_{n-1} - A_n \quad (\text{Wir setzen } A_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n)$$

Für ein  $L \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n &= \sum_{n=0}^L (A_{n-1} - A_n) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^L A_{n-1} \cdot x^n - \sum_{n=0}^L A_n \cdot x^n \\ &= \sum_{j=-1}^{L-1} A_j \cdot x^{j+1} - \sum_{j=0}^L A_j \cdot x^j \\ &= A_{-1} \cdot x^0 - A_L \cdot x^L + \sum_{n=0}^L A_n \cdot (x^{n+1} - x^n) \\ &= f(1) - A_L \cdot x^L + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{L-1} A_n \cdot x^n \end{aligned}$$

6 [\*] Taylors Theorem

Es gilt  $|A_L \cdot x^L| \leq |A_L|$  und  $|A_n| \leq C$  für eine Konstante  $C$ . Das heißt für  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \text{ hat Limes für } L \rightarrow \infty \\ \Rightarrow f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^L a_n \cdot x^n = f(1) + (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(1) - f(x)| = (1-x) \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot x^n \right| \leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \end{aligned}$$

Sei  $K \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(1) - f(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{n=0}^K |A_n| \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} |A_n| \cdot x^n \\ &\leq \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq 0} (|A_n|) \cdot \sum_{n=0}^K x^n}_{=: I_K(x)} + \underbrace{(1-x) \cdot \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n}_{=: J_K(x)} \end{aligned}$$

Für ein festes  $K \in \mathbb{N}$  geht  $I_K \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 1-$  und es gilt

$$J_K(x) = \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \sum_{n=K+1}^{\infty} x^n$$

Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$\begin{aligned} &= \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \cdot (1-x) \cdot \frac{x^{K+1}}{1-x} \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } L \rightarrow \infty \quad (\text{gleichmäßig in } 0 \leq x < 1) \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &\leq 0 + \limsup_{x \rightarrow 1-} J_K(x) \\ &\leq \sup_{n \geq K+1} (|A_n|) \rightarrow 0 \text{ für } K \rightarrow \infty \quad \forall K \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow 1-} |f(1) - f(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= f(1) \end{aligned}$$

SCHRITT 2:  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) - f_n(x) &= (x-1) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \cdot x^k - A_n \cdot x^n \\ \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| &\leq (1-x) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \cdot x^k + |A_n| \cdot x^n \quad (0 \leq x < 1) \\ &\leq (1-x) \cdot \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k + |A_n| \\ &\leq \sup_{k \geq n+1} (|A_k|) \cdot (1-x) \cdot x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k + |A_n| \end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|)$$

Mit (ii) folgt  $\forall 0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \\ \Rightarrow \sup_{0 \leq x \leq 1} (|f(x) - f_n(x)|) &\leq 2 \cdot \sup_{k \geq n} (|A_k|) \end{aligned}$$

Das heißt  $(A_n)_n$  ist eine Nullfolge. Damit gilt gleichmäßige Konvergenz auf  $[0, 1]$ .

$f(x)$  konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen innerhalb des Konvergenzradius und  $\sum a_n$  konvergiert mit Konvergenzradius  $R \geq 1$ . Das heißt  $f(x)$  konvergiert gleichmäßig auf allen  $[-\delta, \delta]$  für  $0 < \delta < 1$ .  $\square$

**Satz 6.1.15** (Arctan Reihe). Für  $|x| \leq 1$  gilt

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei  $f(x) = \arctan x$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ falls } |x| < 1 \end{aligned}$$

Für  $x = 1$  gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ f(1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ konvergiert nach Leibniz} \end{aligned}$$

Das heißt aus Satz 6.1.14 folgt die gleichmäßige Konvergenz von dieser Reihe für alle  $|x| \leq 1$ .  
Das heißt aus der Stetigkeit von  $\arctan$  bei  $\pm 1$  und dem Satz folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall |x| \leq 1 \quad \square$$

[04. Jun] **Bemerkung 6.1.16** (Reihendarstellung von  $\pi$ ). Es gilt  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  und damit  $1 = \tan \frac{\pi}{4}$ ,  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ . So ergibt sich mit dem Arctan eine Reihendarstellung von  $\pi$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für die tatsächliche Anwendung allerdings zu langsam. Viel schneller ist die Berechnung über die *Machinsche Formel*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

**Satz 6.1.17** (Binomische Reihe). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (2)$$

wobei wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizient verwenden

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &:= \prod_{k=1}^n \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \\ \binom{\alpha}{n} &:= 0 \text{ für } n \geq \alpha + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt der speziellere Binomische Lehrsatz für  $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \cdot x^n$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $f(x) = (1+x)^\alpha$  für  $x > -1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Das heißt die Taylorreihe für  $f$  in 0 ist

$$\begin{aligned} T(f, 0)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Gefunden von Newton 1665

SCHRITT 2: Wir wollen zeigen, dass die obige Taylorreihe konvergiert

$$\begin{aligned}
 a_n &:= \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x| < 1 \\
 \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} \cdot x^n} \right| \\
 &= |x| \cdot \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| < 1 \\
 \Rightarrow \exists x < 1, N_0 \in \mathbb{N}: \quad &\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq x < 1 \quad \forall n \geq N_0 \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ ist absolut konvergent}
 \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Der Restterm soll verschwinden. Sei  $0 < \Theta < 1$  und  $\xi = \Theta x$ , sowie  $1 \leq p \leq n+1$

$$R_n(f, 0, x) = \frac{1}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot x^p \quad (\text{Schl\"omilch})$$

F\"ur  $p = 1$  ergibt sich die Restglieddarstellung von Cauchy

$$\begin{aligned}
 R_n(f, 0, x) &= \frac{1}{n!} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (\alpha - n) \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \cdot (x - \Theta x)^n \cdot x \\
 &= \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-(n+1)} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &= \underbrace{\left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ nach SCHRITT 2}} \cdot (1 - \Theta)^n \cdot (1 + \Theta x)^{-n-1} \\
 (1 + \Theta x)^{-(n+1)} &= \frac{1}{(1 + \Theta x)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \Theta x} \cdot \frac{1}{(1 + \Theta x)^n} \\
 &\leq \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{1}{(1 - \Theta)^n} \\
 \Rightarrow |R_n(f, 0, x)| &\leq \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1 - \Theta^n}{1 - \Theta} \cdot \frac{1}{1 - |x|} \\
 &= \left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1} \right| \cdot \frac{1}{1 - |x|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Das hei\ss t nach dem Satz von Taylor gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

□

## 7 [\*] Die Gamma-Funktion

Erinnerung: Die  $\Gamma$ -Funktion ist für  $x > 0$  definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Das funktioniert bei 0, da  $-x - 1 > -1$  und es funktioniert bei  $\infty$ , da

$$\begin{aligned} t^{x-1} \cdot e^{-t} &= t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \\ &= C_x \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad (C_x := \sup_{t \geq 1} t^{x-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} < \infty) \\ \Rightarrow \Gamma(x) &= \lim_{a \searrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \text{ existiert } \forall x > 0 \end{aligned}$$

Wir hatten außerdem

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x > 0$$

**Definition 7.1.1** (Konvexität<sup>3</sup>). Eine Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  – wobei  $I$  ein Intervall ist ( $I = [0, \infty)$  ist dabei erlaubt) – heißt konvex, falls  $\forall x, y \in I$  und für alle  $0 \leq \Theta \leq 1$  gilt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \leq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y)$$

**Skizze 7.1.2** (Konvexe Funktion). Wähle ein  $\Theta \in (0, 1)$  und formuliere die Interpolation  $\Theta x + (1 - \Theta)y$ .



Abbildung 1: Konvexe Funktion mit eingezeichneter Sekante

**Beispiel 7.1.3.** Die Funktionen  $F(t) = e^t$  und  $F(t) = e^{-t}$  sind konvex auf  $\mathbb{R}$ . (Übung)

**Definition 7.1.4.** Eine Funktion  $F$  heißt konkav, falls  $-F$  konvex ist. Das heißt

$$F(\Theta x + (1 - \Theta)y) \geq \Theta F(x) + (1 - \Theta)F(y) \quad \forall 0 \leq \Theta < 1 \quad \forall x, y \in I$$

**Definition 7.1.5** (Logarithmische Konvexität). Eine Funktion  $F$  heißt logarithmisch konvex, falls  $\log \circ F = \log(F)$  konvex ist. Das heißt

$$\begin{aligned} \log F(\Theta x + (1 - \Theta)y) &\leq \Theta \log F(x) + (1 - \Theta) \cdot \log F(y) \\ &= \log(F(x)^\Theta) + \log(F(y)^{1-\Theta}) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Siehe auch Skript Ana I, Kapitel 19

$$\begin{aligned}
&= \log\left(F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta}\right) \\
&\Leftrightarrow F(\Theta x + (1-\Theta)y) \leq F(x)^\Theta \cdot F(y)^{1-\Theta} \quad \forall x, y \in I \quad \forall 0 \leq \Theta \leq 1
\end{aligned}$$

dann ist  $F$  logarithmisch konvex.

**Satz 7.1.6.** Die  $\Gamma$ -Funktion  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto F(x)$  ist logarithmisch konvex.

*Beweis.* (Übung) □

**Satz 7.1.7** (Bohr, Mollerup). Ist  $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  eine Funktion mit

- (a)  $F(1) = 1$
- (b)  $F(x+1) = x \cdot F(x)$  und
- (c)  $F$  ist logarithmisch konvex

Dann gilt  $F = \Gamma$ , das heißt  $F(x) = \Gamma(x) \quad \forall x > 0$ .

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass die obigen Eigenschaften die Funktion  $F$  eindeutig bestimmen, da wir bereits wissen, dass  $\Gamma$  die Eigenschaften erfüllt.

SCHRITT 1:

$$\begin{aligned}
F(x+n) &\stackrel{(b)}{=} (x+n-1) \cdot F(x+n-1) \\
&= (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \dots \cdot (x-1) \cdot x \cdot F(x) \quad \forall x > 0
\end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}
F(n+1) &= n! \cdot F(1) = n! \\
&\Rightarrow F(n) = \Gamma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Das heißt es reicht zu zeigen, dass  $F(x)$  bei  $0 < x < 1$  eindeutig bestimmt ist.

SCHRITT 2: Sei  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}
s+n &= (1-x) \cdot n + x \cdot (n+1) & (\Theta = 1-x) \\
\stackrel{(c)}{\Rightarrow} F(x+n) &= F((1-x) \cot n + x \cdot (n+1)) \\
&\leq F(n)^{1-x} \cdot F(n+1)^x = F(n)^{1-x} \cdot (n \cdot F(n))^x \\
&= F(n) \cdot n^x = (n-1)! \cdot n^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < x < 1 \\
n+1 &= x \cdot (n+x) + (1-x) \cdot (n+1+x) & (1) \\
\Rightarrow F(n+x) &\leq F(n+x)^x \cdot F(n+1+x)^{1-x} \\
&= F(n+x) \cdot (n+x)^{1-x} & (2)
\end{aligned}$$

Durch die Kombination von (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow n! \cdot (n+x)^{x-1} \leq F(n+x) \leq (n-1)! \cdot n^x \\
&F(n+x) = x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1) \cdot F(x) \\
&\Rightarrow \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \\
&a_n(x) := \frac{n! \cdot (n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
b_n(x) &:= \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x-n-1)} \\
\Rightarrow a_n(x) &\leq F(x) \leq b_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall 0 < x < 1 \\
\Rightarrow \frac{a_n(x)}{b_n(x)} &\leq \frac{F(x)}{b_n(x)} \leq 1 \\
\frac{b_n(x)}{a_n(x)} &= \frac{n^x}{n \cdot (n+x)^{x-1}} = \frac{(n+x) \cdot n^x}{n \cdot (n+x)^x} \\
&= \frac{n+x}{n} \cdot \left( \frac{n}{n+x} \right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\
\rightarrow F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^x}{x \cdot (1+x) \cdot \dots \cdot (x+n-1)} \tag{7.1.1}
\end{aligned}$$

also ist  $F(x)$  eindeutig bestimmt.  $\square$

**Korollar 7.1.8** (Gaußsche Darstellung von  $\Gamma$ ).

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot x^n}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \tag{7.1.2}$$

*Beweis.* Da  $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung für  $0 < x < 1$  direkt aus (7.1.1). Für  $x = 1$  rechnet sich die Formel leicht nach. Also ist noch zu zeigen: Gilt (7.1.2) für ein  $x$ , so gilt die Aussage auch für  $y = x + 1$ .

$$\begin{aligned}
\Gamma(y) &= \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \\
&= x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{y-1}}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1)}
\end{aligned}$$

Multiplikation im Zähler mit  $n$  und im Nenner mit  $y+n$  (was sich für  $n \rightarrow \infty$  entspricht) liefert

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^y}{y \cdot (y+1) \cdot \dots \cdot (y+n-1) \cdot (y+n)} \quad \square$$

**Satz 7.1.9.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)} \\
\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot (n!)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2 - \frac{1}{2}} = \pi
\end{aligned}$$

(Wallisches Produkt)

□

## 8 [\*] Metrische Räume, topologische Räume und normierte Vektorräume

### 8.1 Metrische Räume

[07. Jun] Frage: Wie definiert man Abstand auf allgemeinen Mengen?

**Beispiel 8.1.1** (Abstände zweier reeller Zahlen). Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wir definieren den Abstand über den Betrag. Das heißt  $d(x, y) := |x - y|$ . Der Abstand hat in diesem Fall die Eigenschaften

- (i)  $|x - y| \geq 0$  und  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $|x - y| = |y - x|$
- (iii)  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$  für ein beliebiges  $z \in \mathbb{R}$

**Definition 8.1.2** (Metrik). Sei  $X$  eine Menge und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit den Eigenschaften

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$
- (iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$

In diesem Fall nennen wir  $d$  eine Metrik auf  $X$  und das Paar  $(X, d)$  einen metrischen Raum.

**Beispiel 8.1.3.**

1. Auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  definieren wir  $d(x, y) := |x - y|$
2. Für  $x, y \in \mathbb{R}^2$  definieren wir zum Beispiel die euklidische Metrik  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
3. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und sei  $A \subseteq X$ . Dann definieren wir die *induzierte Metrik*  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$
4. Die diskrete Metrik ist definiert durch  $d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
5. Die französische Eisenbahnmeterik im  $\mathbb{R}^2$  ist definiert durch  $d(x, y) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  falls  $x$  und  $y$  nicht auf einer Geraden durch  $(0, 0)$  liegen und sonst  $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ .
6. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann können wir eine Metrik  $d_1$  definieren durch

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Dass  $d_1$  die Eigenschaften (i) und (ii) im Sinne der Definition erfüllt, rechnet sich leicht nach. Für (iii) gilt für ein  $z \in X$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Außerdem gilt für  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{t+1} \quad (\text{monoton steigend})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d_1(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = d_1(x, z) + d_1(z, y)
\end{aligned}$$

## 8.2 Normierte Vektorräume

**Definition 8.2.1** (Vektorraum). Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist eine Menge auf der es eine Vektoraddition

$$\begin{aligned}
+ : V \times V &\rightarrow V \\
(x, y) &\mapsto x + y
\end{aligned}$$

und eine (skalare) Multiplikation

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\
(\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x
\end{aligned}$$

gibt, welche den üblichen Axiomen aus der Algebra<sup>4</sup> genügen.

**Definition 8.2.2** (Norm). Eine Norm auf einem VR  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  mit den Eigenschaften

- (i)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in V$
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in V$

**Definition 8.2.3** (Normierter Vektorraum). Ein normierter Vektorraum ist ein Paar  $(V, \|\cdot\|)$  aus einem VR  $V$  und einer Norm  $\|\cdot\|$  auf  $V$ .

**Satz 8.2.4.** Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter VR, so wird durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik auf  $V$  definiert.

*Beweis.* Die Axiome der Metrik folgen unmittelbar aus den Axiomen der Norm. □

**Bemerkung 8.2.5** (Halbnorm). Gelten für eine Abbildung die Norm-Eigenschaften (ii) und (iii), aber statt (i) nur  $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$ . Dann heißt  $\|\cdot\|$  eine Halbnorm. Ein Beispiel dafür im  $\mathbb{R}^2$  wäre die Abbildung  $(x_1 \ x_2) \mapsto x_1$ .

### Beispiel 8.2.6.

1. Sei  $V$  ein euklidischer reeller VR mit symmetrischem, positiv-definitem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann ist  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm.
2. Analog funktioniert der Fall, dass  $V$  ein komplexer VR mit positiv-definiten sesquilinearer Bilinearformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist. Das heißt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  hat die Eigenschaften

$$(i) \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ und } \langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x, y \in V \quad (5)$$

<sup>4</sup>Zum Beispiel  $x + y = y + x$ ,  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , etc. Für eine genaue Aufzählung siehe LINEARE ALGEBRA I

<sup>5</sup>Die Forderung  $\langle x, x \rangle \geq 0$  ist wohldefiniert, weil durch die anderen Eigenschaften folgt, dass  $\forall x \in V: \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

- (ii)  $\langle x, u + w \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, w \rangle$  sowie  $\langle u + w, y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle w, y \rangle$   
 (iii)  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  sowie  $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$  <sup>(6)</sup>

Dann definieren wir eine Norm durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

3. Im  $\mathbb{R}^d$  definieren wir für zwei Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_d)$  und  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^d x_j \cdot y_j$$

Und eine Norm durch

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2}$$

4. Wir definieren die Maximums-Norm auf  $\mathbb{R}^d$  durch  $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$ . Daraus folgt auch  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \cdot \|x\|_\infty$ .  
 5. Wir definieren die Manhattan-Norm auf  $\mathbb{R}^d$  durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$$

und es gilt  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d \cdot \|x\|_\infty$ .

6. Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{B}(X)$  der Vektorraum der reellwertigen beschränkten Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definieren wir

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \sup \{|f(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

als eine Norm auf  $\mathcal{B}(X)$ . Das ist eine Verallgemeinerung der Maximumsnorm.

### 8.3 [\*] Umgebungen und offene Mengen

**Definition 8.3.1** (Umgebung). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum

- (a) Für  $a \in X$ ,  $r > 0$  heißt  $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$  die (offene) Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $a$ .  
 (b) Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt *Umgebung* von  $x \in X$ , falls  $\exists \varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ . Insbesondere ist  $B_\varepsilon(x)$  eine Umgebung von  $x$ . Wir nennen  $B_\varepsilon(x)$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ .

**Satz 8.3.2** (Hausdorffsches Trennungsaxiom in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann existieren zu  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$   $\varepsilon$ -Umgebungen mit  $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$ .

*Beweis.* Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot d(x, y) > 0$ . Angenommen  $\exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

<sup>6</sup>Physiker-Konvention, anders herum als in der Vorlesung LINEARE ALGEBRA I/II

[11. Jun] **Definition 8.3.3** (Offene Menge). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt offen, wenn  $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

**Beispiel 8.3.4.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$

1. Dann sind  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  und  $(-\infty, a)$  offen
2. Die Mengen  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$  sind nicht offen, weil für den ersten Fall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subseteq [a, b)$ .
3. In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  ist für beliebige  $a \in X$ ,  $r > 0$  die Menge  $B_r(a)$  offen. Deshalb heißt  $B_r(a)$  die offene Kugel um  $a$  mit Radius  $r$ .
4. In  $\mathbb{R}^d$  gilt  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow U$  ist offen bezüglich  $\|\cdot\|_2$

*Beweis für 3.* Sei  $x \in B_r(a)$  und  $\varepsilon := r - d(a, x) > 0$ . Sei  $z \in B_\varepsilon(x)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(a, z) &\leq d(a, x) + d(x, z) < d(a, x) + r - d(a, x) = r \\ &\Rightarrow d(a, z) < r \\ &\Rightarrow z \in B_r(a) \end{aligned} \quad \square$$

*Beweis für 4.* Sei  $B_\varepsilon^\infty(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_\infty < \varepsilon\}$  und  $B_\varepsilon^{(2)}(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\|_2 < \varepsilon\}$ . Für ein  $y \in B_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}^{(2)}(x)$  gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2} &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2 &< \frac{\varepsilon^2}{d} \\ \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| &< \varepsilon \\ &\Rightarrow y \in B_\varepsilon^\infty(x) \end{aligned}$$

Außerdem lässt sich zeigen, dass daraus auch folgt, dass  $y \in B_\varepsilon^{(2)}(x)$ . Das heißt

$$B_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}^{(2)}(x) \subseteq B_\varepsilon^\infty(x) \subseteq B_\varepsilon^{(2)}(x) \quad \square$$

**Satz 8.3.5.** Für die offenen Mengen eines metrischen Raums  $(X, d)$  gilt

- (i)  $\emptyset$  und  $X$  sind offen
- (ii) Sind  $U$  und  $V$  offen, so ist auch  $U \cap V$  offen
- (iii) Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(U_j)_{j \in I}$  eine Familie offener Teilmengen von  $X$ . So ist  $\bigcup_{j \in I} U_j$  offen.

*Beweis von (ii).* Sei  $x \in U \cap V$ . Da  $U$  und  $V$  offen sind, gibt es  $\varepsilon_1 > 0$  und  $\varepsilon_2 > 0$  mit  $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$ ,  $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$ . Sei  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$ . Damit gilt  $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$ .  $\square$

*Beweis von (iii).* Sei  $x \in \bigcup_{j \in I} U_j \Rightarrow \exists i: x \in U_i$ . Außerdem ist  $U_i$  offen. Das heißt es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U_i \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{j \in I} U_j$ .  $\square$

**Bemerkung 8.3.6.** Seien  $U_1, \dots, U_k$  offen. Dann folgt aus Satz 8.3.5, dass  $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$  offen ist. Das gilt allerdings nur für  $k < \infty$ .

Wir betrachten für einen Schnitt über unendlich viele Mengen das folgende Beispiel:

**Beispiel 8.3.7** (Schnitt über unendlich viele offene Mengen). Sei  $U_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ . Dann ist  $U_n$  offen  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Allerdings ist  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [0, 1]$  nicht offen.

**Definition 8.3.8** (Abgeschlossene Menge). In einem metrischen Raum  $(X, d)$  nennen wir eine Menge  $A \subseteq X$  abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $A^C := X \setminus A = \{y \in X : y \notin A\}$  offen ist.

**Bemerkung 8.3.9.** Eine andere (aber äquivalente) Definition von Abgeschlossenheit wurde 1884 von Cantor gegeben. Diese Definition basiert auf Folgen.

**Definition 8.3.10** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_n \subseteq X$  konvergiert gegen den Punkt  $a \in X$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(a, x_n) < \varepsilon \quad \forall n > N$$

das heißt

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } x_n \in B_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n$$

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

**Definition 8.3.11** (Folgenabgeschlossenheit). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $A \subseteq X$  ist folgenabgeschlossen, falls für jede Folge  $(x_n)_n \subseteq A$ , die gegen einen Punkt  $a \in X$  konvergiert, auch gilt  $a \in A$ .

**Beispiel 8.3.12.** Wir betrachten die Menge  $A = (0, 1]$  und die Folge  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dann liegt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  nicht in  $A$ . Das heißt  $A$  ist nicht folgenabgeschlossen. Die Menge  $[0, 1]$  hingegen schon.

**Satz 8.3.13.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $A \subseteq X$  gilt,  $A$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $A$  folgenabgeschlossen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst noch folgende Lemmata

**Lemma 8.3.14.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ist  $U \subseteq X$  offen, so ist  $U^C$  folgenabgeschlossen.

*Beweis.* Angenommen es gibt eine Folge  $(x_n)_n \subseteq U^C$  mit  $x_n \rightarrow a$ , aber  $a \notin U^C$ . Das heißt  $a \in U$ . Da  $U$  offen ist, existiert eine Kugel  $B_\varepsilon(a) \subseteq U$  (für ein  $\varepsilon > 0$ ). Da  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\begin{aligned} & \exists N \in \mathbb{N} : d(a, x_n) < \varepsilon \quad \forall n > N \\ \Leftrightarrow & \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B_\varepsilon(a) \quad \forall n > N \\ \Rightarrow & x_n \notin U^C \quad \forall n > N \end{aligned} \quad \text{(Widerspruch)} \quad \square$$

**Lemma 8.3.15.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$  folgenabgeschlossen. Dann ist  $A^C$  offen.

*Beweis.* Angenommen  $A^C$  ist nicht offen. Das heißt  $\exists x_0 \in A^C$ , sodass für jedes  $\varepsilon > 0$  die Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  nicht ganz in  $A^C$  enthalten ist. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$$

Wir wählen eine Folge  $(x_n)_n \subseteq A$  mit  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ . Also gilt  $x_n \rightarrow x_0 \in A^C$ . Das heißt  $A$  ist nicht folgenabgeschlossen. Widerspruch.  $\square$

*Beweis von Satz 8.3.13.*

„ $\Rightarrow$ “ Wenn  $A$  abgeschlossen ist, dann gilt nach Definition, dass  $A^C$  offen ist. Mit Lemma 8.3.14 folgt dann, dass  $A$  folgenabgeschlossen ist.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A$  folgenabgeschlossen. Dann folgt direkt aus Lemma 8.3.15, dass  $A$  abgeschlossen ist.  $\square$

[14. Jun] **Beispiel 8.3.16.** Seien  $A_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $A_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  abgeschlossen. Dann ist auch  $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $(x, y) \in (A_1 \times A_2)^C \supseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \cup \mathbb{R}^k \times A_2^C$ .

FALL 1:  $x \in A_1^C$ . Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von  $A_1$

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) &\subseteq A_1^C \\ \Rightarrow B_\varepsilon(x, y) &\subseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Aber  $B_\varepsilon(x, y)$  ist eine offene Menge mit

$$B_\varepsilon(x, y) \subseteq A_1^C \times \mathbb{R}^m \subseteq (A_1 \times A_2)^C$$

FALL 2:  $y \in A_2^C$ . Dann gilt analog zu FALL 1

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x, y) \subseteq (A_1 \times A_2)^C$$

Das heißt  $(A_1 \times A_2)^C$  ist offen und damit ist  $(A_1 \times A_2)$  abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung 8.3.17.**

- (i) In jedem metrischen Raum  $(X, d)$  sind die Mengen  $\emptyset$  und  $X$  sowohl offen als auch abgeschlossen
- (ii) Das Intervall  $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht offen und nicht abgeschlossen

## 8.4 Grundzüge der Topologie

**Definition 8.4.1** (Topologie). Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt ein Mengensystem  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ , falls

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$  und
- (iii) Für eine beliebige Indexmenge  $I$  mit  $\forall j \in I: V_j \in \mathcal{T}$  folgt  $\bigcup_{j \in I} V_j \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ .  $V \subseteq X$  heißt offen, falls  $V \in \mathcal{T}$  und  $A \subseteq X$  heißt abgeschlossen, falls  $A^C \in \mathcal{T}$ .

**Beispiel 8.4.2.**

1. Das System von offenen Mengen eines metrischen Raums  $X$  ist eine Topologie
2.  $\mathbb{R}^d$  ist ein topologischer Raum (mit dem System der offenen Mengen als implizierte Topologie)
3. Auf jeder Menge  $X$  gibt es mindestens 2 Topologien:  $\mathcal{T}_0 := \{\emptyset, X\}$  und die feinste Topologie  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ . Ist  $|X| \geq 2$ , so ist  $\mathcal{T}_0 \neq \mathcal{T}_1$
4. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ . Wir definieren ähnlich zur induzierten Metrik eine *induzierte Topologie* (Relativ-Topologie)

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T} \cap Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

Dann ist  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  ein topologischer Raum.



**Bemerkung 8.4.3.** Ist  $Y$  nicht offen in  $X$ , so ist  $V \in \mathcal{T}_Y$  nicht notwendigerweise offen in  $X$ .

**Definition 8.4.4** (Umgebung). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  (Punkt in  $X$ ). Eine Teilmenge  $V \subseteq X$  heißt Umgebung von  $x$ , falls es eine Menge  $U \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in U \subseteq V$ .

**Satz 8.4.5.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Menge  $V \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $V$  eine Umgebung für jeden Punkt  $x \in V$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $V$  offen. Dann existiert für jedes  $x \in V$  eine offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U \subseteq V$ . Also ist  $V$  eine Umgebung jedes Punktes  $x \in V$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $V$  eine Umgebung für alle Punkte  $x \in V$ . Dann gilt  $\forall x \in V \exists U_x \in \mathcal{T} : x \in U_x \subseteq V$ . Dann ist  $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ . Das heißt  $V$  ist als Vereinigung offener Mengen offen.  $\square$

**Definition 8.4.6** (Hausdorff-Raum). Ein topologischer Raum heißt Hausdorff-Raum, falls das Hausdorffsche Trennungsaxiom gilt. Das heißt zu zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren offene Mengen  $U, V \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .

**Beispiel 8.4.7.**

1. Nach Satz 8.3.2 ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.
2. Sei  $X = \{0, 1\}$  und  $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  eine Topologie. Dann ist  $(X, \mathcal{T})$  kein Hausdorff-Raum. Um das einzusehen, betrachten wir  $x = 0$  und  $y = 1$ . Für diese zwei Elemente finden wir keine entsprechenden Mengen.

## 8.5 [\*] Berührungspunkt, Häufungspunkt und Randpunkt

Für die folgenden Definitionen sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

**Definition 8.5.1** (Berührungspunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Berührungspunkt von  $A$ , wenn in jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x$  mindestens ein Punkt aus  $A$  liegt. Das heißt  $U \cap A \neq \emptyset$  für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$ .

**Definition 8.5.2** (Häufungspunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Häufungspunkt von  $A$ , wenn für jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  ein von  $x$  verschiedener Punkt in  $A$  liegt. Das heißt  $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$  für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$ .

**Definition 8.5.3** (Randpunkt). Ein Punkt  $x \in X$  heißt Randpunkt von  $A$ , falls es in jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x$  mindestens einen Punkt aus  $A$  und einen Punkt aus  $A^C$  gibt. Das heißt für alle offenen Mengen  $U$  mit  $x \in U$  ist  $U \cap A \neq \emptyset$  und  $U \cap A^C \neq \emptyset$ . Wir schreiben  $\partial A$  für die Menge aller Randpunkte von  $A$ .

[18. Jun] **Satz 8.5.4.** Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann gilt

- (i)  $A \setminus \partial A$  ist offen
- (ii)  $A \cup \partial A$  ist abgeschlossen
- (iii)  $\partial A$  ist abgeschlossen

*Beweis.*

- (i) Sei  $x \in A \setminus \partial A$  beliebig. Dann folgt es existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit

$$V \cap A^C = V \cap (X \setminus A) = \emptyset \quad ((1))$$

denn ansonsten wäre  $x \in \partial A$

$$\Rightarrow V \cap \partial A = \emptyset \quad ((2))$$

Denn wäre  $V \cap \partial A \neq \emptyset$ . Dann würde folgen

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists y \in V \cap \partial A \\ &\Rightarrow V \text{ offene Umgebung von } y \in \partial A \\ &\Rightarrow V \cap A^C \neq \emptyset \end{aligned} \quad (\text{Widerspruch zu (1)})$$

Mit (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned} &V \cap (\partial A \cup A^C) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow V \subseteq A \setminus \partial A \\ &\Rightarrow A \setminus \partial A \text{ ist offen} \end{aligned}$$

- (ii)  $A^C = X \setminus A$ . Aus der Definition des Randes folgt  $\partial A = \partial A^C$ . Nach (i) gilt dann

$$\begin{aligned} &A^C \setminus \partial A = A^C \setminus \partial A^C \text{ ist offen} \\ &\Leftrightarrow (A^C \setminus \partial A)^C \text{ ist abgeschlossen} \\ &\Leftrightarrow (A^C \setminus \partial A)^C = X \setminus (A^C \setminus \partial A) \\ &\quad = X \setminus A^C \cup \partial A = A \cup \partial A \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \partial A &= (A \cup \partial A) \cap (A^C \cup \partial A) \\ &= (A \cup \partial A) \cap (A^C \cup \partial A^C) \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

**Definition 8.5.5** (Inneres und Abschluss, abgeschlossene Hülle). Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ .

- (i)  $U(A) := \{U \in \mathcal{T} : U \subseteq A\}$  = alle offenen Teilmengen von  $A$ .  
Das Innere von  $A = A^\circ := \bigcup_{\sigma \in U(A)} \sigma$  = Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $A$
- (ii)  $B(A) := \{B \subseteq X \text{ abgeschlossen} : A \subseteq B\} \neq \emptyset$  (da  $X \in B(A)$ )  
Der Abschluss von  $B$  sei  $\bar{B}$  = abgeschlossene Hülle von  $B := \bigcap_{B \in B(A)} B$  abgeschlossen

Damit gilt  $A \subseteq \bar{A}$ .

**Bemerkung 8.5.6.**  $A^\circ$  = größte offene Teilmenge von  $A$  und  $\bar{A}$  = kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält.

**Satz 8.5.7.**  $A^\circ = A \setminus \partial A$  und  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

*Beweis.* TEIL 1: Nach Satz 8.5.4 ist  $A \setminus \partial A$  offen und  $A \setminus \partial A \subseteq A$ . Damit folgt  $A \setminus \partial A \subseteq A^\circ$ .  
Damit ist noch zu zeigen, dass  $A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$ . Ist  $U \subseteq A$  offen

$$\Rightarrow U \cap A^C = \emptyset$$

$$\Rightarrow U \cap \partial A = \emptyset$$

Falls nicht  $\exists y \in U \cap \partial A$ , dann folgt  $U \cap A^C \neq \emptyset$ . Das ergibt einen Widerspruch.  
Das heißt für jede offene Teilmenge  $U \subseteq A$  gilt  $U \subseteq A \setminus \partial A$ .

$$A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(A)} U \subseteq A \setminus \partial A$$

$$\Rightarrow A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$$

$$\Rightarrow A \setminus \partial A = A^\circ$$

TEIL 2: Behauptung: Aus  $B \subseteq X$  ist abgeschlossen und  $A \subseteq B$  folgt  $\partial A \subseteq B$ . Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann würde gelten  $B^C \cap \partial A \neq \emptyset$ .

$x \in \partial A \cap B^C$ .  $B^C$  ist offene Umgebung von  $x$ . Nach Definition von  $\partial A$  ist  $A \cap B^C \neq \emptyset$ . Das heißt  $A \not\subseteq B$ . (Widerspruch).

Aus der Behauptung folgt jetzt also  $B \supseteq A \cup \partial A \forall B \supseteq A$  und  $B$  ist abgeschlossen

$$\Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}(A)} B = \overline{A}$$

Andererseits ist nach Satz 8.5.4  $A \cup \partial A$  abgeschlossen und sicherlich  $A \subseteq A \cup \partial A$ . Daraus folgt  $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$ . Damit folgt  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .  $\square$

## 9 [\*] Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

**Definition 9.1.1** (Konvergenz in metrischen Räumen). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_n \subseteq M$  konvergiert gegen  $a \in M$ , falls

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ & (\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: x_n \in B_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n) \end{aligned}$$

Wir schreiben  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oder  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
 $(x_n)_n$  heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

**Definition 9.1.2** (Durchmesser). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wir definieren den Durchmesser von einer Menge  $A$  mit

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

$A$  ist beschränkt, falls  $\text{diam}(A) < \infty$ .

**Bemerkung 9.1.3.** Eine Menge  $A \subseteq M$  ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists x \in M, r > 0: A \subseteq B_r(x)$$

In diesem Fall ist  $\text{diam}(A) \leq 2r$ .

**Satz 9.1.4.**

- (i) Konvergiert die Folge  $(x_n)_n$ , so ist sie eine Cauchy-Folge
- (ii) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

*Beweis.*

- (i) Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \\ & \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \\ & \Rightarrow (x_n)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge} \end{aligned}$$

- (ii) Sei  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge. Wir wählen  $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: d(x_n, x_m) < 1 \quad \forall n, m \geq N$$

Wir definieren  $a := x_N$

$$\Rightarrow d(x_n, a) < 1 \quad \forall n \geq N$$

$$r := \max(d(x_1, a), d(x_2, a), \dots, d(x_{N-1}, a)) + 1$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: d(x_n, a) < r \\ & \Rightarrow x_n \in B_r(a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Das heißt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \subseteq B_r(a) \text{ ist eine beschränkte Menge}$$

□

**Definition 9.1.5** (Banachräume). Ein metrischer Raum  $(M, d)$  heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert. Ein vollständiger, normierter Vektorraum heißt Banachraum.

**Beispiel 9.1.6.**  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ ,  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  oder  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$  sind vollständige, normierte Vektorräume. Genauso  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$  etc.

**Satz 9.1.7** (Schachtelungsprinzip). Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $(A_n)_n$  eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen  $(A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots)$  mit  $\text{diam}(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $A_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert genau ein  $x \in M$  sodass  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Das heißt  $x \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* EINDEUTIGKEIT: Angenommen  $x, y \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $d(x, y) \leq \text{diam}(A_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Das heißt  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

EXISTENZ:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A_n$ . Behauptung:  $(x_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge. Sei  $n \geq m$

$$x_n \in A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq A_{n-2} \subseteq \dots \subseteq A_m$$

Das heißt

$$\begin{aligned} x_n &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ \Rightarrow x_n, x_m &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ d(x_n, x_m) &\leq \text{diam}(A_m) \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt  $(x_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge. Nach der Vollständigkeit von  $M$  existiert ein  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Behauptung:  $x \in A_m \forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &\in A_m \quad \forall n \geq m \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &\in A_m \text{ da } A_m \text{ abgeschlossen ist} \\ \Rightarrow x &\in A_m \quad \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

[21. Jun] **Definition 9.1.8** (Stetigkeit in metrischen Räumen). Seien  $(M, d_M), (N, d_N)$  metrische Räume.

(a)  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition von Stetigkeit: Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  ist stetig im Punkt  $a \in M$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta$$

(b) Folgenstetigkeit: Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  ist folgenstetig in  $a \in M$ , falls für jede Folge  $(x_n)_n \subseteq M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  folgt.

**Bemerkung 9.1.9.** Definition 9.1.8 (a) ist dabei äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta^M(a)) \subseteq B_\varepsilon^N(f(a))$$

**Satz 9.1.10.** Für eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  und  $a \in M$  sind äquivalent

- (i)  $f$  ist  $\varepsilon$ - $\delta$ -stetig in  $a$
- (ii)  $f$  ist folgenstetig in  $a$
- (iii) Für jede Umgebung  $U$  von  $f(a)$  ist  $V = f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $a$

Dabei ist (iii) die topologische Definition von Stetigkeit.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $(x_n)_n \subseteq M$  mit  $x_n \rightarrow a$ . Für  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$ , sodass

$$d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta$$

Da  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\forall n > N: d_M(x_n, a) < \delta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n > N: d_N(f(x_n), f(a)) < \varepsilon \\ \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a) \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Kontraposition. Angenommen (i) gilt nicht. Dann  $\exists \varepsilon_0$ , sodass

$$\forall \delta > 0 \exists x \in M: d_M(x, a) < \delta \text{ und } d_N(f(x), f(a)) > \varepsilon_0$$

Wir wählen  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow a$ , da  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ . Aber

$$\begin{aligned} \exists x_1: d_N(f(x_1), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \exists x_2: d_N(f(x_2), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \exists x_n: d_N(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0 \\ \Rightarrow d_N(f(x_n), f(a)) > \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f(x_n) \not\rightarrow f(a) \end{aligned}$$

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Sei  $U \subseteq N$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon^N(f(a)) \subseteq U \\ \stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \\ \Rightarrow \exists \delta > 0: B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(U) \\ \Rightarrow f^{-1}(U) := V \text{ ist eine Umgebung} \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $B_\varepsilon^N(f(a))$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Nach (iii) ist  $V := f^{-1}(B_\varepsilon^N(f(a)))$  eine Umgebung von  $a$ . Das heißt

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0: B_\delta^M(a) \subseteq V \\ \Leftrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(a) \\ \Leftrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, a) < \delta \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 9.1.11.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume und  $f: M \rightarrow N$  eine Funktion.

(a)  $\varepsilon$ - $\delta$ -Version:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls

$$\forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta$$

(b) Folgenversion:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls  $\forall x_0 \in M$  und jede Folge  $(x_n)_n$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

(c) Topologische Version:  $f$  heißt stetig auf  $M$ , falls für jede offene Menge  $U \subseteq N$  das Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$  ist.

**Satz 9.1.12.** Für metrische Räume  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  und eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  sind die Versionen (a), (b) und (c) von Definition 9.1.11 äquivalent.

*Beweis.* Der Beweis von (a)  $\Leftrightarrow$  (b) folgt direkt aus Satz 9.1.10.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $U$  offen in  $N$ . Dann ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$ . Sei  $x_0 \in M$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$B_\varepsilon^N := B_\varepsilon^N(f(x_0)) = \{y \in N : d_N(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$$

offen in  $N$

$$\Rightarrow V = f^{-1}(B_\varepsilon^N) \text{ offen in } M$$

Außerdem ist  $x_0 \in V$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \delta > 0: B_\delta^M \subseteq V \\ &\Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta^M(x_0) \\ &\Rightarrow \forall d_M(x, x_0) < \delta: d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \end{aligned}$$

(a)  $\Rightarrow$  (c): Kontraposition. Angenommen es existiert eine Menge  $U \subseteq N$ , sodass  $V := f^{-1}(U)$  nicht offen ist. Dann existiert ein  $x_0 \in V$ , sodass

$$\forall \delta > 0: B_\delta(x_0) \not\subseteq V$$

Da  $x_0 \in V$  ist  $f(x_0) \in U$ . Da  $U$  offen ist, gilt

$$\exists \varepsilon_0: B_{\varepsilon_0}^N(f(x_0)) \subseteq U$$

Sei  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Da  $B_\delta(x_0)$  keine Teilmenge von  $V$  ist, folgt

$$\begin{aligned} &\exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \\ &\Rightarrow x_n \notin V \\ &\Rightarrow x_n \notin f^{-1}(B_{\varepsilon_0}^N(f(x_0))) \\ &\Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow d_M(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_N(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch zu (a). □

**Bemerkung 9.1.13.** Für  $N = \mathbb{R}^d$  und  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist die Stetigkeit von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  äquivalent dazu, dass jedes  $f_j$  stetig ist.

[25. Jun] **Bemerkung 9.1.14.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Wenn  $g, f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind, dann sind auch  $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$  sowie  $f \cdot g : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$  stetig.

Außerdem ist die Menge  $D_{g \neq 0} := \{x \in M : g(x) \neq 0\}$  für ein stetiges  $g$  offen. Das heißt wenn  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist  $D_{g \neq 0}$  eine Umgebung und wir können eine Funktion  $\frac{f}{g} : D_{g \neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, die stetig in  $x_0$  ist.

*Beweis.* (Übung) □

**Definition 9.1.15** (Homöomorphismus). Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Dann heißt eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  Homöomorphismus, wenn sie bijektiv und stetig ist und  $f^{-1} : N \rightarrow M$  auch stetig ist.

**Beispiel 9.1.16.**

1. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

ist ein Homöomorphismus.

2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$$

ist ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$$

**Definition 9.1.17.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume. Eine Funktionenfolge  $(f_n)_n$  mit  $f_n : M \rightarrow N$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f : M \rightarrow N$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d_N(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in M \quad \forall n \geq N$$

Das heißt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} d_N(f(x), f_n(x)) = 0$$

**Satz 9.1.18.** Seien  $f_n : M \rightarrow N$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$  und konvergiere  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f : M \rightarrow N$ . Dann ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Wir verwenden den  $\frac{\varepsilon}{3}$ -Trick. Angenommen  $\varepsilon > 0$  und  $x_0 \in M$  beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} : d_N(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N$$

$f_N$  ist stetig in  $x_0$ . Das heißt

$$\exists \delta > 0 : d_N(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in M, d_M(x, x_0) < \delta$$

Sei nun  $x \in B_\delta(x_0) = \{y \in M : d_M(y, x_0) < \delta\}$ . Dann folgt durch das Verwenden der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d_N(f(x), f(x_0)) &\leq d_N(f(x), f_N(x)) + d_N(f_N(x), f(x_0)) \\ &\leq d_N(f(x), f_N(x)) + d_N(f_N(x), f_N(x_0)) + d_N(f_N(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$



## 10 [\*] Kompakte Mengen und metrische Räume

**Definition 10.1.1** (Kompaktheit). Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  ist kompakt, falls jede Folge in  $A$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in  $A$  liegt. Das heißt

$$\forall \text{Folge } (x_n)_n \subseteq A \exists \text{Teilfolge } (x_{n_k})_k: x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \text{ existiert und } x \in A$$

**Bemerkung 10.1.2** (Topologische Kompaktheit). Es gibt auch eine topologische Definition, die nicht über Folgen argumentiert und im metrischen Fall äquivalent zur Folgenkompaktheit ist:  $A \subseteq M$  ist topologisch kompakt, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Das heißt für eine beliebige Indexmenge  $I$  und  $U_j$  offen  $\forall j \in I$  mit  $A \subseteq \bigcup_{j \in I} U_j$  muss ein  $N \in \mathbb{N}$  und  $j_1, j_2, \dots, j_N \in I$  existieren, sodass  $A \subseteq U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \dots \cup U_{j_N}$ .

**Definition 10.1.3.** Ein metrischer Raum  $(M, d)$  ist kompakt, falls  $M$  kompakt ist.

**Bemerkung 10.1.4.** Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

*Beweis.* Wir haben gezeigt, dass eine Cauchy-Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat. Damit konvergiert jede Cauchy-Folge in einem kompakten Raum.  $\square$

**Satz 10.1.5.** Wir betrachten  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  mit Maximumsnorm. Dann gilt  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann kompakt, wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt. Sei  $(x_n)_n \subseteq A$  eine Folge in  $A$ , welche gegen  $x \in \mathbb{R}^d$  konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  mit  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \in A$ . Da  $(x_n)_n$  konvergiert, ist  $x = y \in A$ .

Angenommen  $A$  ist nicht beschränkt. Das heißt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A: \|x_n\|_\infty \geq n$$

Dann gilt für jede Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  auch  $\|x_{n_k}\| \geq n_k \geq k$ . Das heißt jede Teilfolge von  $(x_n)_n$  ist unbeschränkt und kann somit nicht konvergieren.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A$  abgeschlossen und beschränkt. Dann wählen wir eine Folge  $(x_n)_n \subseteq A$ . Dann besteht  $x_n$  aus mehreren Koordinaten. Das heißt  $x_n = (x_n^1 \ x_n^2 \ \dots \ x_n^d)$ . Wir definieren  $(x_n^j)_n$  als Folge in  $\mathbb{R}$ . Da  $A$  beschränkt ist, muss auch  $(x_n^j)_n$  beschränkt sein. Das heißt für  $j = 1$  gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k}^1)_k$  von  $(x_n^1)_n$ , die konvergiert. Es gibt also eine Ausdünnung  $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\sigma_1(n+1) > \sigma_1(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ , sodass  $x^1 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\sigma_1(k)}^1$  existiert. Dann konvergiert die erste Koordinate von  $(x_{\sigma_1(n)}^1 \ x_{\sigma_1(n)}^2 \ \dots \ x_{\sigma_1(n)}^d)$ .

Wir führen das Prinzip iterativ fort. Das heißt  $(x_{\sigma(n)}^2)_n$  ist beschränkt in  $\mathbb{R}$ . Damit hat es eine konvergente Teilfolge. Wir wählen eine neue Ausdünnung  $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  analog zu  $\sigma_1$  und setzen  $\kappa_2 := \sigma_2 \circ \sigma_1$ . Dann hat  $x_{\kappa_2(n)}^2$  einen Grenzwert  $x^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\kappa_2(n)}^2$ . Dabei konvergiert  $x_{\kappa_2(n)}^1$  immer noch.

Dieses Prinzip wenden wir für jede Koordinate an. Das heißt wir definieren  $\sigma_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $\kappa_{j+1} := \sigma_{j+1} \circ \kappa_j$ . Damit hören wir bei  $j = d$  auf. Dann haben wir  $x_{\kappa_d(n)}^j$  konvergiert gegen ein  $x^j$  für alle  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Das heißt wir haben einen Grenzwert  $x = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^d)$  von  $(x_{\kappa_d(n)})_n$ . Da  $A$  abgeschlossen ist und  $x_{\kappa(n)} \rightarrow x$  ist auch  $x \in A$ . Damit ist  $A$  kompakt.  $\square$

**Satz 10.1.6.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq M$  kompakt. Sei außerdem  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  sein Maximum und Minimum an. Das heißt

$$\begin{aligned}\exists \underline{x} \in A: f(\underline{x}) &= \inf \{f(x) : x \in A\} \quad \text{und} \\ \exists \bar{x} \in A: f(\bar{x}) &= \sup \{f(x) : x \in A\}\end{aligned}$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $a := \inf \{f(x) : x \in A\}$ . Angenommen  $a = -\infty$ . Dann würde gelten

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_0 \in A: f(x_n) \leq -n$$

Das heißt es existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ , da  $A$  kompakt ist. Wir definieren  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in A$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt dann

$$\mathbb{R} \ni f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = -\infty$$

SCHRITT 2: Sei  $a := \inf \{f(x) : x \in A\}$ . Das heißt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A: f(x_n) &< a + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow a &\leq f(x_n) < a + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Da  $A$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  von  $(x_n)_n$ . Wir definieren

$$\begin{aligned}\underline{x} &:= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq a + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow a &\leq f(\underline{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \\ \Rightarrow f(\underline{x}) &= a\end{aligned}$$

SCHRITT 3: Für das Maximum betrachte  $-f$  und wende SCHRITT 1 und SCHRITT 2 an. □

[28. Jun] **Satz 10.1.7.** Auf endliche-dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent. Das heißt für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $X$  mit zwei Normen  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$  gibt es  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , sodass

$$c_1 \cdot \|h\|_a \leq \|h\|_b \leq c_2 \cdot \|h\|_a \quad \forall h \in X$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $d := \dim(X) < \infty$ . Wir wählen eine geordnete Basis  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  von  $X$ . Dann können wir einen beliebigen Vektor  $h \in X$  schreiben als

$$h = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j$$

Für eindeutige  $t_j \in \mathbb{R}$ . Damit erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned}h : \mathbb{R}^d &\rightarrow X \\ \mathbb{R}^d \ni t &\mapsto h(t) = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \in X\end{aligned}$$

Also reicht es, zu zeigen, dass für beliebige Normen  $\|\cdot\|$  auf  $X$  und gewählte  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$  gilt

$$c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|h(t)\| \leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Setzen wir nämlich voraus, dass (1) gilt, dann gilt für zwei beliebige Normen  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$  auf  $X$

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \|t\|_\infty &\leq \|h(t)\|_a \leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \\ d_1 \cdot \|t\|_\infty &\leq \|h(t)\|_b \leq d_2 \cdot \|t\|_\infty \end{aligned}$$

Sei  $h := h(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|h\|_a &\leq c_2 \cdot \|t\|_\infty \leq \frac{c_2}{d_1} \cdot \|h\|_b \\ &\leq \frac{c_2}{d_1} \cdot d_2 \cdot \|t\|_\infty \\ &\leq \frac{c_2 \cdot d_2}{c_1 \cdot d_1} \cdot \|h\|_a \\ \Rightarrow \frac{d_1}{c_2} \cdot \|h\|_a &\leq \|h\|_b \leq \frac{d_2}{c_1} \cdot \|h\|_a \end{aligned}$$

Damit wäre die Behauptung gezeigt. Das heißt wir müssen nur noch (1) zeigen. SCHRITT 2: Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $X$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto f(h(t)) = \|h(t)\| \end{aligned}$$

Dann existiert ein  $0 < C < \infty$ , sodass

$$|f(t)| = f(t) \leq C \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

und

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq C \cdot \|t_1 - t_2\|_\infty \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d \quad (3)$$

Dabei folgt aus (3) gerade, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Um (2) zu beweisen, betrachten wir

$$\begin{aligned} |f(t)| = \|h(t)\| &= \left\| \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^d \|t_j \cdot e_j\| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq d} |t_j| \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^d \|e_j\|}_{=: C} = C \cdot \|t\|_\infty \end{aligned}$$

Außerdem zeigen wir (3):

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &= |||h(t_1)| - |h(t_2)||| \\ &= |||h_1| - |h_2|| \leq \|h_1 - h_2\| \\ \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| &\leq \|h(t_1) - h(t_2)\| \\ &= \|h(t_1 - t_2)\| \leq C \cdot \|t_1 - t_2\|_\infty \end{aligned}$$

Damit haben wir (3) gezeigt. SCHRITT 3: Nach (3) gilt  $\|h(t)\| \leq C \cdot \|t\|_\infty$ . Also reicht es zu zeigen, dass

$$\exists c_1 > 0 : c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|h(t)\|$$

Sei  $t \neq 0$ . Dann ist auch  $\|t\|_\infty > 0$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= \left\| h\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) \right\| \\
 h\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= \sum_{j=1}^d \frac{t_j}{\|t\|_\infty} \cdot e_j \\
 &= \frac{1}{\|t\|_\infty} \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j \\
 &= \frac{1}{\|t\|_\infty} \cdot f(t) \\
 \Rightarrow \|t\|_\infty \cdot f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) &= f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Wir definieren

$$S := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\|_\infty = 1\}$$

Damit ist  $S$  beschränkt und abgeschlossen. Wir wählen eine Folge  $(t_n)_n \subseteq S$  mit  $t_n \rightarrow t$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \|t\|_\infty &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \right\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n\|_\infty = 1 \\
 &\Rightarrow t \in S
 \end{aligned}$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned}
 c_1 &:= \inf \{f(t) : t \in S\} \\
 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f(t) &= \|t\|_\infty \cdot f\left(\frac{t}{\|t\|_\infty}\right) \geq c_1 \cdot \|t\|_\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^d
 \end{aligned}$$

Frage: Was ist ein guter Grund, dass  $c_1 > 0$ ? SCHRITT 4:  $S$  ist kompakt, da  $\mathbb{R}^d$  endlich-dimensional ist und  $S$  beschränkt und abgeschlossen ist. Außerdem ist  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(t) > 0 \quad \forall t \in S$ . Nach Satz 10.1.6 nimmt  $f$  auf  $S$  sein Minimum ein. Das heißt es existiert ein  $\underline{t} \in S$ , sodass

$$c_1 = \inf \{f(t) : t \in S\} = f(\underline{t}) > 0 \quad \square$$

**Bemerkung 10.1.8.** Sei  $d = \dim(X)$  und  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  eine Basis von  $X$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{R}^d &\rightarrow X \\
 t &\mapsto F(t) = \sum_{j=1}^d t_j \cdot e_j
 \end{aligned}$$

eine lineare Bijektion. Wir haben im vorherigen Beweis gesehen, dass

$$\|F(t)\| \leq C \cdot \|t\|_\infty \quad \text{für } C := \sum_{j=1}^d \|e_j\|$$

Damit ist  $F$  sogar stetig. Frage: Ist  $F^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  auch stetig?

$$c_1 \cdot \|t\|_\infty \leq \|F(t)\|$$

$$\begin{aligned}
t &= F^{-1}(h) & (h &:= F(t)) \\
\Rightarrow c_1 \cdot \|F^{-1}(h)\| &\leq \|h\| \\
\Rightarrow \|F^{-1}(h)\| &\leq \frac{1}{c_1} \cdot \|h\|
\end{aligned}$$

Das heißt  $F^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist auch stetig.

**Satz 10.1.9.** Seien  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume,  $M$  kompakt und  $f : M \rightarrow N$ . Dann gilt  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f$  gleichmäßig stetig ist. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “ Ist klar.

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen  $f$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Das heißt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in M : d_M(x, y) < \delta \text{ aber } d_N(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

Wähle  $\delta = \frac{1}{n}$ . Das heißt es existieren zwei Folgen  $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq M$ , sodass

$$d_N(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da  $M$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(y_{n_k})_k$  von  $(y_n)_n$ , die konvergiert. Sei

$$y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \in M$$

Behauptung:  $x_{n_k} \rightarrow y$ , da

$$d_M(x_{n_k}, y) \leq d_M(x_{n_k}, y_{n_k}) + d_M(y_{n_k}, y) \rightarrow 0$$

Da  $f$  stetig ist folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d_N(f(x_{n_k}), f(y)) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty \\
0 < \varepsilon &\leq d_N(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_N(f(x_{n_k}), f(y)) + d_N(f(y), f(y_{n_k})) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch, da  $\varepsilon$  fest gewählt war. □

## 11 [\*] Differentialrechnung im $\mathbb{R}^d$

### 11.1 Die Ableitung

Bisher haben wir die Ableitung in  $\mathbb{R}$  definiert. Die Idee dahinter war, eine Funktion  $f(x)$  an einer Stelle durch eine affine Funktion zu approximieren. Das heißt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x) \cdot h + \text{Fehler}_x(h) \\ &= b + a \cdot h + \text{Fehler}_x(h) \end{aligned}$$

Dabei galt

$$\begin{aligned} \frac{|\text{Fehler}_x(h)|}{h} &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\text{ existiert} \end{aligned}$$

Wir wollen dieses Prinzip auf den  $\mathbb{R}^d$  übertragen und fragen uns: Gibt es eine affine Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\mapsto g(h) = b + A \cdot [h] = b + A \cdot h \end{aligned}$$

sodass

$$f(x+h) = g(h) + \text{Fehler}_x(h) \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\frac{\|\text{Fehler}_x(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Angenommen wir finden eine solche Funktion  $f : D \rightarrow Y := \mathbb{R}^m$  mit  $D \subseteq X := \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= b + A \cdot [h] + \text{Fehler}_x(h) \\ \frac{\|\text{Fehler}_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} &= \frac{\|\varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X\|}{\|h\|_X} = \|\varepsilon_x(h)\|_Y \rightarrow 0 \\ \varepsilon_x(h) &:= \frac{\text{Fehler}_x(h)}{\|h\|_X} \\ f(x+h) &= g(h) + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X \end{aligned} \quad (*)$$

Behauptung: Angenommen (\*) und  $\varepsilon_x(h) \rightarrow 0$  gilt. Dann folgt, dass  $g$  eindeutig bestimmt ist.

*Beweis.* Angenommen es existieren  $g_1, g_2$  affine Abbildungen, sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= g_1(h) + \varepsilon_x^1(h) \cdot \|h\|_X \\ &= g_2(h) + \varepsilon_x^2(h) \cdot \|h\|_X \end{aligned}$$

Dann ist zu zeigen, dass  $g_1 = g_2$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} g(h) &= g_1(h) - g_2(h) = -\varepsilon_x^1(h) \cdot \|h\|_X + \varepsilon_x^2(h) \cdot \|h\|_X \\ &=: \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \\ \Rightarrow g(0) &= 0 = b_1 - b_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2$$

Damit sind bereits die  $b$  gleich. Also gilt

$$\Rightarrow g(h) = A_2[h] - A_1[h] = (A_2 - A_1)[h]$$

Außerdem gilt  $x + h \in U$ . Wir ersetzen  $h$  durch  $th$ . Dann ist  $x + th \in U$

$$A[h] \Rightarrow g(th) = (\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)) \cdot \|th\|_X$$

Das heißt  $|t| < \delta = \frac{r}{\|h\|_X}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A = A_2 - A_1 \\ \Rightarrow t \cdot A[h] &= A[th] = (\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)) \cdot \|h\|_X \cdot |t| \\ &\Rightarrow \|tA[h]\|_Y = |t| \cdot \|h\|_X \cdot \|\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)\|_Y \\ &\Rightarrow \|A[h]\|_Y = \|h\|_X \cdot \|\varepsilon_1(th) - \varepsilon_2(th)\|_Y \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \|A[h]\|_Y = 0 \quad \forall h \in X \\ &\Rightarrow 0 = A = A_2 - A_1 \\ &\Rightarrow A_1 = A_2 \end{aligned}$$

□

[02. Jul] **Definition 11.1.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$ .  $f$  ist differenzierbar in  $x$ , falls eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert mit

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\| \\ &= f(x) + A[h] + \text{Fehler}_x(h) \end{aligned}$$

$\varepsilon_x(h) \rightarrow 0$  (in  $\mathbb{R}^m$ ) für  $h \rightarrow 0$  ( $\in \mathbb{R}^n$ ). Wir schreiben  $Df(x) := A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ ).

**Definition 11.1.2.** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  beliebige normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen. Dann ist  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $x$ , falls  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  eine stetige lineare Abbildung von  $X$  nach  $Y$  ist, sodass

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \text{Fehler}_x(h) \\ &= f(x) + A[h] + \varepsilon_x(h) \cdot \|h\|_X, \\ \|\varepsilon_x(h)\|_Y &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 11.1.3.** Wir müssen im Allgemeinen verlangen, dass  $A$  eine stetige lineare Abbildung  $\Leftrightarrow A$  ist beschränkte lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} &= \sup_{h \in X, \|h\|_X \leq 1} \|A[h]\|_Y = \sup_{h \in X, \|h\|_X = 1} \|A[h]\|_Y \\ &= \sup_{h \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A[h]\|_Y}{\|h\|_X} = \left\| A \left[ \frac{h}{\|h\|_X} \right] \right\|_Y \\ \|A\|_{X \rightarrow Y} &:= \sup_{h \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A[h]\|_Y}{\|h\|_X} \quad (\text{Operatornorm von } A : X \rightarrow Y) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$  ist ein normierter Vektorraum. Dieser ist vollständig, falls  $Y$  vollständig ist.

**Definition 11.1.4.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U \subseteq X$  offen ist differenzierbar, falls es in jedem Punkt  $x \in U$  differenzierbar ist. Wir definieren also eine Abbildung

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ x &\rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

**Satz 11.1.5.** Für eine lineare Funktion  $A : X \rightarrow Y$  sind äquivalent

- (i)  $A$  ist Lipschitz-stetig
- (ii)  $A$  ist gleichmäßig stetig
- (iii)  $A$  ist stetig
- (iv)  $A$  ist stetig in  $0 \in X$
- (v)  $A$  ist beschränkt, das heißt  $\|A\|_{X \rightarrow Y} < \infty$

**Satz 11.1.6.** Die Ableitung ist linear. Das heißt für  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen sowie  $f, g : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $x \in U$  gilt

$$\begin{aligned} D(\lambda f)(x) &= \lambda Df(x) \\ D(f + g)(x) &= Df(x) + Dg(x) \end{aligned}$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition der Ableitung. □

**Beispiel 11.1.7.** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $X$ . Außerdem definieren wir  $f(x) := \langle x, x \rangle$ .

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \langle x + h, x + h \rangle \\ &= \langle x, x + h \rangle + \langle h, x + h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle \\ &= f(x) + \underbrace{2\langle x, h \rangle}_{\text{linear in } h} + \underbrace{\|h\|^2}_{\text{Fehler}} \\ \frac{\text{Fehler}(h)}{\|h\|} &= \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 11.2 [\*] Richtungsableitung und partielle Ableitung

**Definition 11.2.1** (Richtungsableitung). Sei  $U \subseteq X$  offen und  $f : U \rightarrow Y$  sowie  $h \in X$  beliebig. Die Richtungsableitung von  $f$  (in  $x$ ) in Richtung  $h$  ist gegeben durch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} =: D_h f(x)$$

Also ist

$$D_h f(x) = \frac{d}{dt} f(x + th)$$

**Satz 11.2.2.** Ist  $f : U \rightarrow Y$  in  $x$  differenzierbar, so folgt

$$Df(x)[h] = D_h f(x) \quad \forall h \in X$$

*Beweis.* Sei  $A = Df(x)$

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon(h) \|h\|_X \\ f(x + th) - f(x) - A[th] &= \varepsilon(th) \cdot \|th\|_X \\ &= \varepsilon(th) \cdot |t| \cdot \|h\|_X \\ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - A(h) &= \frac{|t|}{t} \cdot \varepsilon(th) \cdot \|h\|_X \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0 \\ \Rightarrow D_h f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = A[h] = Df(x)[h] \end{aligned} \quad \square$$



Im Folgenden sei  $X = \mathbb{R}^n$  und  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  die Standardbasis.

**Definition 11.2.3** (Partielle Ableitung). Sei  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f$  differenzierbar in  $x \in U$ . Außerdem sei  $A := Df(x)$ . Dann definieren wir die partielle Ableitung  $\partial_{x_j} f(x) = \partial_j f(x)$  bezüglich der Standardbasen durch

$$\begin{aligned}\partial_{x_j} f(x) &= \partial_j f(x) = D_{e_j} f(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot e_j) - f(x)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} f(x + t \cdot e_j)|_{t=0}\end{aligned}$$

[05. Jul] **Bemerkung 11.2.4.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  in  $x \in U$  differenzierbar.  $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$ . Dann gilt

$$Df(x)[h] = Df(x) \cdot h = Df \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

**Warnung:** Die Existenz der partiellen Ableitungen und sogar aller Richtungsableitungen impliziert nicht die Existenz der Ableitung!

**Beispiel 11.2.5.** Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x \neq (0, 0) \\ 0 & x = (0, 0) \end{cases}$$

existiert  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  für  $x_1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \neq 0$ . Außerdem gilt für  $x_1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

Damit existieren die partiellen Ableitungen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}f(th) &= \frac{t^2 h_1 h_2}{\sqrt{t^2 h_1^2 + t^2 h_2^2}} \\ &= \frac{t^2 h_1 h_2}{t \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = t \cdot f(h) \\ \Rightarrow D_n f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tf(h) - 0}{t} = f(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\end{aligned}$$

$f(x)$  ist nicht stetig in  $(0, 0)$ .

**Satz 11.2.6.** Sei  $f : U \rightarrow Y$ ,  $U$  offen,  $x \in U$  und  $f$  sei differenzierbar in  $x$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x$ .

*Beweis.* Sei  $h$  klein genug, dass  $x + h \in U$ . Dann gilt

$$f(x + h) = f(x) + \underbrace{A[h]}_{\rightarrow 0 \text{ für } \|h\| \rightarrow 0} + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \|h\| \rightarrow 0} \cdot \|h\|_X \rightarrow f(x)$$

Damit ist  $f$  in  $x$  stetig. □

### 11.3 Kettenregel

**Satz 11.3.1** (Kettenregel). Seien  $X, Y, Z$  normierte Vektorräume mit  $V \subseteq X$ ,  $U \subseteq Y$  offen und  $f : V \rightarrow U$ ,  $g : U \rightarrow Z$ . Sei außerdem  $f$  differenzierbar in  $x \in V$ ,  $g$  differenzierbar in  $y = f(x)$ . Dann gilt  $g \circ f : V \rightarrow Z$  ist differenzierbar in  $x$  und  $D_{g \circ f}(x) = D_g(f(x)) \circ Df(x)$ . Das heißt

$$D_{f \circ g}(x) [h] = D_g(f(x)) [Df(x) [h]]$$

*Beweis.* Sei  $A = Df(x)$ ,  $B = Dg(y)$ ,  $y = f(x)$ . Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X \quad \forall (x+h) \in V \\ g(y+k) &= g(y) + B[k] + \varepsilon_2(k) \cdot \|k\|_Y \quad \forall (y+k) \in U \\ \Rightarrow (g \circ f)(x+h) &= g(f(x+h)) = g\left(f(x) + \underbrace{A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X}_{=:k}\right) \\ &= g(y+k) = g(f(x)) + B[k] + \varepsilon_2(k) \cdot \|k\|_Y \\ &= g(f(x)) + B[A[h]] + \|h\|_X \cdot B[\varepsilon_1(h)] \\ &\quad + \varepsilon_2(A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X) \cdot \|A[h] + \varepsilon_1(h) \cdot \|h\|_X\| \end{aligned}$$

Durch Analyse der Grenzwerte der einzelnen Summanden, ergibt sich, dass

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = B[A[h]] + \varepsilon(h) \cdot \|h\|_X$$

Damit ist  $g \circ f$  in  $x$  differenzierbar und

$$D_{g \circ f}[h] = B[A[h]] \quad \square$$

[09. Jul] **Bemerkung 11.3.2** (Richtungsableitung aus Ableitung). Sei  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow Y$  und existiere

$$f'(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x+s) - F(x)}{s}$$

Dann gilt

$$D_h f(x) = \frac{df}{dt} f(x+th) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t \cdot h} \cdot h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} \cdot h = f'(x) \cdot h$$

**Bemerkung 11.3.3.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow Y$  differenzierbar. Dann gilt für alle  $x \in (a, b)$

$$\|Df(x)\|_{\mathbb{R} \rightarrow Y} := \sup_{h \neq 0} \frac{\|Df(x)[h]\|_Y}{\|h\|} = \frac{\|f'(x) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{\|h\| \cdot \|f'(x)\|_Y}{\|h\|} = \|f'(x)\|_Y$$

**Satz 11.3.4** (Mittelwertsatz oder Schrankensatz). Sei  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ein vollständiger Vektorraum,  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow Y$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b) =: I^\circ$ . Sei außerdem  $\|Df(s)\|_{\mathbb{R} \rightarrow Y} = \|f'(s)\|_Y \leq M$  für alle  $a < s < b$ . Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_Y \leq M \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Sei  $\eta > 0$  fixiert. Wir definieren

$$A := \{\xi \in [a, b] : \forall s, a \leq s < \xi \text{ gilt } \|f(s) - f(a)\|_Y \leq (M + \eta) \cdot (s - a)\}$$

Dann ist  $a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ . Sei  $c := \sup A \leq b$ . Da  $f$  stetig ist, gilt  $c \in A \Rightarrow [a, c] \subseteq A$ . Zu zeigen ist, dass  $c = b$ . Angenommen  $c < b$ . Dann gilt

$$\exists \delta > 0, c + \delta \leq b, c \leq t < c + \delta : f(t) - f(c) - Df(c)[t - c] = f(t) - f(c) - f'(c) \cdot (t - c) = \varepsilon(t \cdot c)$$

$$\begin{aligned}
\|f(t) - f(c)\|_Y &\leq \|f'(c)\|_Y \cdot (t - c) + \|\varepsilon(t - c)\|_Y \leq M \cdot (t - c) + \|\varepsilon(t - c)\|_Y \cdot (t - c) \\
\|f(t) - f(a)\|_Y &\leq \|f(c) - f(a)\|_Y + \|f(t) - f(c)\|_Y \\
&\leq (M + \eta) \cdot (-a + c) + \left(M + \frac{\eta}{2}\right) (t - c) < (M + \eta) (t - a) \\
&\Rightarrow t \in A \\
&\Rightarrow c = b
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 11.3.5.** Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt konvex, falls  $\forall x, y \in A: [x, y] \subseteq A$ .

**Anwendung 11.3.6.** Sei  $U \subseteq X$  offen und  $x, y \in U$  mit  $[x, y] \subseteq U$ . Dann ist  $[x, y] := \{x + s \cdot (y - x) : 0 \leq s \leq 1\}$ . Das heißt wir definieren  $X(s) = x + s \cdot (y - x)$  und können für eine Funktion  $f$ , die auf  $U$  definiert ist schreiben

$$F(s) := f \circ X(s)$$

Damit haben wir nach Kettenregel für  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
DF(s)[h] &= Df(X(s)) [DX(s)[h]] \\
\frac{d}{ds} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(s+t) - F(s)}{t} = D_1 F(s) = DF(s)[1] = Df(X(s)) [y - x] \\
\|F'(s)\|_Y &= \|Df(X(s)) [y - x]\|_Y \leq \|Df(X(s))\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X
\end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
M &:= \sup_{0 \leq s \leq 1} \|F'(s)\|_Y \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Df(X(s))\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X = \|Df(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X \\
&\quad (\xi = (1 - s) \cdot x + sy)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y = \|F(1) - F(0)\|_Y$$

Nach Satz 11.3.4 können wir abschätzen

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|F'(s)\|_Y \cdot 1$$

**Satz 11.3.7** (Schranksatz II). Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Vektorräume und  $U \subseteq X$  offen,  $x, y \in U, [x, y] \subseteq U$ . Ferner sei  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar auf ganz  $U$ . Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_Y \leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|Df(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X = \sup_{0 \leq s \leq 1} \|Df((1 - s) \cdot x + sy)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X$$

Außerdem  $\forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\|f(y) - f(x) - A[y - x]\|_Y \leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|Df(\xi) - A\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X \quad (11.3.1)$$

*Beweis von (11.3.1).* Seien  $x, y \in U, [x, y] \subseteq U, A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Sei  $f : U \rightarrow Y, x \mapsto F(x) := f(x) - A[x]$ .

$$\begin{aligned}
DF(x)[h] &= Df(x)[h] - A[h] \\
\Rightarrow \|f(x) - f(y) - A[x - y]\|_Y &= \|F(y) - F(x)\|_Y \\
&\leq \sup_{\xi \in [x, y]} \|DF(\xi)\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|y - x\|_X
\end{aligned}$$

□

**Satz 11.3.8.** Sei  $U \subseteq X$ ,  $x, y \in U$ ,  $[x, y] \subseteq U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gibt es ein  $\xi \in [x, y]$  mit

$$f(x) - f(y) = Df(\xi) [y - x]$$

*Beweis.* Setze  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto f((1 - s) \cdot x + sy)$

$$\exists t \in (0, 1) : F(1) - F(0) = F'(t) \cdot (1 - 0) = F'(t)$$

$$F'(s) = \frac{d}{ds} f((1 - s) \cdot x + sy) = \frac{d}{ds} f(x + s \cdot (y - x)) = Df(x + s(y - x)) [y - x]$$

Dann setze  $\xi := (1 - t) \cdot x + ty$ . □

## 11.4 Existenz von Ableitungen

Das Ziel dieses Teilkapitels ist es, ein Differenzierbarkeitskriterium zu finden und in diesem Sinne den folgenden Satz zu beweisen.

[11. Jul] **Satz 11.4.1.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  für einen Banachraum  $Y$  und eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen  $\partial_j f : U \rightarrow Y$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) stetig sind.

**Definition 11.4.2** (Verallgemeinerte partielle Ableitung). Wir können den  $\mathbb{R}^n$  zerlegen, indem wir  $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $n_j \in \mathbb{N}$  finden, sodass  $\sum n_j = n$ . Dann schreiben wir eine Zerlegung als  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Außerdem können wir einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  schreiben als  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , wobei  $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ .

Wir betrachten eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  mit  $U$  offen und  $a = (a_1, \dots, a_k) \in U$ . Die Ableitung von  $f(a_1, \dots, a_j + x_j, a_{j+1}, \dots, a_k)$  nach  $x_j$  an der Stelle  $x_j = 0$  heißt verallgemeinerte partielle Ableitung von  $f$  nach  $j$  an der Stelle  $a$ .

**Lemma 11.4.3.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und haben wir eine Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\sum n_j = n$ . Dann gilt für die verallgemeinerte partielle Ableitung  $D_j f(a)$  mit  $h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$

$$Df(a) = \sum_{j=1}^k D_j f(a) [h_j]$$

*Beweis.* Sei  $I_j : \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I_j(x_j) = (0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} DI_j [h_j] &= I_j(h_j) = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \\ D_j f(a) &= Df(a) \circ I_j \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^k D_j f(a) [h_j] &= \sum_{j=1}^k Df(a) \cdot I(h_j) = \sum_{j=1}^k Df(a) [I_j [h_j]] \\ &= Df(a) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k I_j [h_j]}_h = Df(a) [h] \end{aligned}$$

□

**Satz 11.4.4.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow Y$  für einen Banachraum  $Y$  und eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann stetig differenzierbar, wenn die verallgemeinerten partiellen Ableitungen  $D_j f$  für alle Zerlegungen von  $\mathbb{R}^n$  auf  $U$  stetig differenzierbar sind.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $f$  differenzierbar. Dann gilt nach Lemma 11.4.3, dass

$$D_j f(x) [h_j] = Df(x) [I_j h]$$

Da die rechte Seite in  $x$  stetig differenzierbar ist, muss auch die linke Seite stetig differenzierbar sein.

„ $\Leftarrow$ “ SCHRITT 1: Wir betrachten zunächst den Fall  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  und definieren dafür  $\|h\| := \max(\|h_1\|_1, \|h_2\|_2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2(x_1, x_2) [h_2]_Y \\ &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] + D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] \\ &\quad - D_2 f(x_1, x_2) [h_2] + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2 f(x_1, x_2) [h_2] \end{aligned}$$

Wir wollen die Normen der Terme nacheinander nach oben abschätzen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1]\|_Y \leq \frac{\varepsilon(h_1)}{4} \cdot \|h_1\|_1 \\ (2) \quad & \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1, x_2)\|_{\mathbb{R}^{n_2} \rightarrow Y} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{Stetigkeit}) \\ & \Rightarrow \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2] - D_2 f(x_1, x_2) [h_2]\|_Y < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \|h_2\| \\ (3) \quad & \|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2) [h_2]\|_Y \stackrel{11.3.7}{\leq} \\ & \|h_2\| \cdot \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_2 f(x_1 + h_1, x_2 + s h_2) - D_2 f(x_1 + h_1, x_2)\| < \|h_2\| \cdot \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Das heißt insgesamt folgt

$$\|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - D_1 f(x_1, x_2) [h_1] - D_2(x_1, x_2) [h_2]\|_Y \leq \varepsilon(\|h\|) \cdot \|h\|$$

Damit folgt die Behauptung für diesen speziellen Fall.

SCHRITT 2: Im allgemeinen Fall haben wir  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Dann gilt nach SCHRITT 1, dass wir mit  $D_1 f$ ,  $D_2 f$  auch  $D_{12} f$  erhalten. Wir nehmen eine neue Zerlegung  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \times \mathbb{R}^{n_3} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$ . Dann erhalten wir aus  $D_{12} f$  und  $D_3 f$  auch  $D_{123} f$ . Dieses Vorgehen setzen wir induktiv fort. So ergibt sich nach  $k$  Schritten unsere Behauptung.  $\square$

*Beweis von Satz 11.4.1.* Der Satz folgt dann aus Satz 11.4.4, indem wir als initiale Zerlegung die Zerlegung  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$  wählen.  $\square$

## 11.5 [\*] Symmetrie der zweiten partiellen Ableitung - Der Satz von Schwartz

Für dieses Teilkapitel sei  $Y$  ein Banach-Raum und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

[12. Jul] **Bemerkung 11.5.1.** Wir betrachten eine Abbildung  $f : U \rightarrow Y$ . Dann gilt  $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$  und  $D(Df) = D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$ . Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} Df(x) [h] &= \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) [h] \\ &= (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \langle \nabla f, h \rangle$$

Dabei ist  $\partial_i f(x) : U \rightarrow Y^n$

$$\begin{aligned} D_v Df(x) &= \frac{d}{dt} Df(x + tv)|_{t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \partial_1 f(x + tv), \frac{d}{dt} \partial_2 f(x + tv), \dots, \frac{d}{dt} \partial_n f(x + tv) \right) |_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n v_k \cdot (\partial_k \partial_1 f(x), \dots, \partial_k \partial_n f(x)) \end{aligned}$$

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\begin{aligned} D_v Df(x) [h] &= \frac{d}{dt} \left( \partial_1 f(x + tv), \dots, \partial_n f(x + tv) \right) |_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n v_k \left( \sum_{j=1}^n \partial_k \partial_j f(x) \cdot h_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \partial_k \partial_j f(x) h_j \\ &= \langle v, H_e h \rangle \end{aligned}$$

wobei

$$H_e(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \partial_1 \partial_2 f(x) & \dots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \partial_2 \partial_1 f(x) & \partial_2 \partial_2 f(x) & \dots & \partial_2 \partial_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \dots & \dots & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Hesse-Matrix})$$

**Definition 11.5.2.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt  $Df : U \rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)}_{\text{Banachraum}}$ .

Ist  $Df$  stetig differenzierbar, so heißt  $f$  zweimal differenzierbar auf  $U$ . Wir nennen  $D^2 f(x)$  dann die zweite Ableitung von  $f$ . Dabei ist

$$(i) \quad Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y)$$

$$(ii) \quad D^2 f : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$$

Sei  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$ ,  $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (v, h) \mapsto \langle v, Bh \rangle = \sum_{k=1}^n v_k \cdot \sum_{j=1}^n B_{kj} h_j$ . Definiere  $B(v, h) := (L[h])[h]$ . Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} v &= \sum v_k \cdot e_k \\ h &= \sum h_k \cdot e_k \\ (L[v])[h] &= \left( L \left[ \sum_{k=1}^n v_k \cdot e_k \right] \right) \left[ \sum_{j=1}^n h_j e_j \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{(L[e_k][e_j])}_{B_{kj} = B(e_k, e_j)} \cdot v_k h_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n B_{kj} v_k h_j = \langle v, Bh \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(D^2 f(x)[v]\right)[h] &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \left(D^2 f(x)[e_k]\right)[e_j] h_j \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n v_k \partial_k \partial_j f(x) h_j \\
&= \langle v, H_e h \rangle
\end{aligned}$$

**Satz 11.5.3.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (i) Die 2. Ableitung existiert und ist stetig
- (ii) Alle gemischten partiellen Ableitungen  $\partial_k \partial_j f(x)$ ,  $1 \leq k, j \leq n$  existieren und sind stetig
- (iii) Die Hesse-Matrix  $H_e(x)$  existiert und ist stetig

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 11.4.1 und Satz 11.4.4. □

**Satz 11.5.4.** Sei  $f : U \rightarrow Y$  zwei mal differenzierbar und  $x \in U$ . Dann ist die bilineare Abbildung  $D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  symmetrisch. Das heißt für alle  $v, h \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$D^2 f(x)[v, h] = D^2 f(x)[h, v]$$

oder

$$D_v D_h f(x) = D_h D_v f(x)$$

oder

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_j \partial_k f(x)$$

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass  $D_v D_h f(x) = D_h D_v f(x)$ . Wir betrachten den Fall  $Y = \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Definieren den Differenz-Operator

$$\Delta_h f(x) := f(x + h) - f(x)$$

SCHRITT 1: Für  $f, h \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + h, x + v \in U$  gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_v \Delta_h f(x) &= \Delta_v (f(x + h) - f(x)) = \Delta_v f(x + h) - \Delta_v f(x) \\
&= f(x + h + v) - f(x + h) - f(x + v) + f(x) \\
&= f(x + h + v) - f(x + v) - f(x + h) + f(x) = \Delta_h \Delta_v f(x)
\end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei  $h, v \in \mathbb{R}^n$  beliebig und  $x \in U$ ,  $U$  offen. Dann  $\exists \delta > 0 : B_{2\delta}(x) \subseteq U$

$$\begin{aligned}
|s| &< \frac{\delta}{\min(1, |v|)} \\
|t| &< \frac{\delta}{\min(1, |h|)}
\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass  $\frac{1}{st} \Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) = D_h D_v f(x + s, v + t_1 h)$  für  $s_1 \in (0, s)$ ,  $t_1 \in (0, t)$

$$\begin{aligned}
\Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) &= g(x + sv) - g(x) = k'(s_1) \cdot (s - 0) = k'(s_1) \cdot s = \frac{d}{ds} g(x + sv)|_{s=s_1} \cdot s \\
&= D_v g(x + s_1 v) \cdot s = D_v (\Delta_{th} f)(x + s_1 v) \cdot s \\
&= D_v (f(x + s_1 v + th) - f(x + s_1 v)) \cdot s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D_v f(x + s_1 v + t h) \cdot s - D_v f(x + s_1 v) \cdot s \\
D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h) \cdot s \cdot t \\
&\Rightarrow \frac{1}{st} \Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) = D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h)
\end{aligned}$$

SCHRITT 3: Nach SCHRITT 1 haben wir  $\Delta_{sv} \Delta_{th} f(x) = \Delta_{th} \Delta_{sv} f(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{st} \Delta_{th} \Delta_{sv} f(x) = D_v D_h f(x + s_1 v + t_1 h) = D_h D_v f(x + s_1 v + t_1 h)$$

Für  $s \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  haben wir so die Behauptung.  $\square$

## 11.6 Extrema und lokale Minima/Maxima

[16. Jul] **Definition 11.6.1** (Lokales Minimum und Maximum). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum (oder Maximum), falls ein Ball  $B_\varepsilon(x_0)$  existiert, sodass

$$\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$$

Gilt sogar

$$\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$$

so heißt  $x_0$  striktes (isoliertes) Minimum (oder Maximum).

**Satz 11.6.2.** Hat  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  ein lokales Minimum (oder Maximum) und ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $\nabla f(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $x_0$  ein lokales Minimum. Dann gilt  $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ . Sei  $h \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für  $x_0 + th \in B_\varepsilon(x_0)$  für  $|t|$  klein genug. Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \rightarrow D_h f(x_0) = Df(x_0)[h] = \nabla f(x_0) \cdot h \\
&\Rightarrow 0 \leq \nabla f(x_0) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow 0 \leq \nabla f(x_0) \cdot (-h) = -\nabla f(x_0) \cdot h \leq 0 \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\
&\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Der Beweis für ein lokales Maximum funktioniert analog.

**Notation 11.6.3.** Wir schreiben  $f \in \mathcal{C}^2(U) = \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ , falls alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis Ordnung 2 stetig auf  $U$  sind. Das heißt  $f$ ,  $\partial_j f$  und  $\partial_k \partial_j f$  stetig  $\forall 1 \leq k, j \leq n$ .

**Satz 11.6.4.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . Dann ist die Hesse-Matrix  $H_l(x)$  stetig bezüglich der Operatornorm. (Das heißt jeder Eintrag  $\partial_k \partial_j f$  ist stetig).

*Beweis.* Sei  $g(t) = f(x + tv)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt} f(x + tv) = Df(x + tv)[v] \\
&= \nabla f(x + tv) \cdot v = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x + tv) \cdot v_j
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x+v) &= f(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+tv) dt \\
&= f(x) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
\int_0^1 \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dx &= \int_0^1 \left( -\frac{d}{dt} (1-t) \right) \cdot \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
&= [-(1-t) \partial_j f(x+tv) \cdot v_j]_0^1 + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial}{\partial t} \partial_j f(x+tv) \cdot v_j dt \\
&= \partial_j f(x) \cdot v_j + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_j f(x+tv) \cdot v_k \cdot v_j dt \\
\Rightarrow f(x+tv) &= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_k f(x+tv) \cdot v_k \cdot v_j dt \\
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \int_0^1 (1-t) \langle v, H_l(x+tv) \cdot v \rangle dt
\end{aligned}$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integrale

$$\begin{aligned}
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + k(\Theta) \cdot \int_0^1 (1-t) dt \quad (\Theta \in (0,1)) \\
&= f(x) + \nabla f(x) \cdot v + \frac{1}{2} \underbrace{\langle v, H_l(x+\Theta v) \rangle}_{\text{symmetrische } n \times n\text{-Matrix}} \quad (11.6.1)
\end{aligned}$$

□

**Definition 11.6.5.** Sei  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  (Menge aller  $n \times n$ -Matrizen) symmetrisch. Dann heißt  $A$

- (i) positiv-definit ( $A > 0$ ), falls  $\langle v, Av \rangle > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (ii) positiv-semi-definit ( $A \geq 0$ ), falls  $\langle v, Av \rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$
- (iii) negativ-definit ( $A < 0$ ), falls  $-A > 0$
- (iv) negativ-semi-definit ( $A \leq 0$ ), falls  $-A \geq 0$

**Bemerkung 11.6.6.** ??

**Lemma 11.6.7.** Sei  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann ist  $A$  genau dann positiv definit, wenn

$$\exists \lambda > 0: \langle v, Av \rangle \geq \lambda |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

*Beweis.*  $A$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  mit normierten Eigenvektoren  $e_1, \dots, e_n$ . Dann gilt nach der Definition von EV  $Ae_j = \lambda_j e_j$

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot e_j \\
\Rightarrow \langle v, Av \rangle &= \left\langle v, A \cdot \sum_{j=1}^n \mu_j \cdot e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \mu_j \langle v, A \cdot e_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \mu_j \lambda_j \langle v, e_j \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j e_j \delta_{k_j} \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_j^2 = \lambda_1 \cdot |v|^2
\end{aligned}$$

□

Damit folgt

$$\begin{aligned}
A > 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 > 0 \\
A \geq 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0 \\
A < 0 &\Leftrightarrow \lambda_n < 0 \\
A \leq 0 &\Leftrightarrow \lambda_n \leq 0 \\
A \text{ nicht-definit} &\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_n > 0
\end{aligned}$$

**Lemma 11.6.8.** Sei  $A : U \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \cap \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B \text{ symmetrisch}\}$  stetig bezüglich Operatornorm. Ist  $A(x_0) > 0$  (oder  $A(x_0) < 0$ ) so existiert ein  $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ , sodass  $A(x) > 0$  (oder  $A(x) < 0$ )  $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ .

*Beweis.* Sei  $A(x_0) > 0$ . Das heißt

$$\begin{aligned}
&\exists \lambda > 0: \langle v, A(x_0)v \rangle \geq \lambda |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\
&\langle v, A(x)v \rangle = \langle v, A(x_0)v \rangle + \left\langle v, \underbrace{(A(x) - A(x_0))}_{=B(x)} v \right\rangle
\end{aligned}$$

??

□

**Satz 11.6.9.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . Ist  $x_0 \in U$  ein lokales Minimum (oder Maximum), so ist  $H_l(x_0) \geq 0$  (oder  $H_l(x_0) \leq 0$ ).

*Beweis.* Wir haben  $\nabla f(x_0) = 0$ . Sei  $x_0$  ein lokales Minimum. Das heißt

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$$

Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $|v| < \varepsilon$

$$\Rightarrow x_0 + v \in B_\varepsilon(x_0)$$

Nach (11.6.1) gilt für ein  $\Theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x_0 + v) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot v + \frac{1}{2} \langle v, H_l(x_0 + \Theta v)v \rangle \\
&0 \leq f(x_0 + v) - f(x_0) = \frac{1}{2} \underbrace{\langle v, H_l(x_0 + \Theta v)v \rangle}_{=t^2 \langle h, H_l(x_0 + th)h \rangle}
\end{aligned}$$

Wir setzen  $v = th$

$$\Rightarrow \langle h, H_l(x_0 + \Theta th)h \rangle \geq 0 \quad \forall |t| \text{ klein genug}$$

Wir lassen  $t$  gegen 0 gehen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \langle h, H_l(x_0)h \rangle \geq 0 \quad \forall h \\
&\Rightarrow H_l(x_0) \geq 0
\end{aligned}$$

□

**Satz 11.6.10.** Ist  $x_0 \in U$  ein kritischer Punkt für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U)$  und gilt

$$H_l(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad (1)$$

So ist  $x_0$  ein lokales Minimum. Gilt sogar

$$H_l(x) > 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \quad (2)$$

dann ist  $x_0$  ein isoliertes Minimum von  $f$ .

*Beweis.* Es gilt  $\nabla f(x_0) = 0$ . Wir haben für  $h \in \mathbb{R}^n$  und  $|h| < \varepsilon$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle h, H_l(x_0 + \Theta h)h \rangle \geq 0$$

Gilt sogar (2), dann gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle h, H_l(x_0 + \Theta h)h \rangle > 0$$

Damit ist  $x_0$  ein isoliertes Minimum. □

**Bemerkung 11.6.11.** Die Aussage aus Satz 11.6.10 gilt auch für lokale Maxima.

## 12 [\*] Inverse Funktionen und implizite Funktionen

[18. Jul] Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto F(x, y)$ . Seien  $(x_0, y_0) \in D$  und  $c = F(x_0, y_0)$ . Gilt dann  $F(x, y) = c$  für  $(x, y)$  nahe  $(x_0, y_0)$ ?

**Satz 12.1.1** (Inverse Funktion). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar (schreiben  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ ). Außerdem sei  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung. Wir nennen  $x_0$  einen regulären Punkt von  $f$  (weil die Ableitung an dieser Stelle invertierbar ist). Dann gilt es existieren offene Umgebungen  $U \subseteq D$  von  $x_0$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $y_0 = f(x_0)$ , sodass

(i)  $f : U \rightarrow V$  ist bijektiv

(ii)  $g = f^{-1} : V \rightarrow U$  ist in  $\mathcal{C}(U, V)$  (stetig differenzierbar)

(iii)  $\forall x \in U : Df(x)$  ist invertierbar

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1} = (Df(g(y)))^{-1}$$

$$x = f^{-1}(y) = g(y)$$

**Satz 12.1.2** (Implizite Funktion). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $(x_0, y_0) \in D$ . Wir definieren  $c := F(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$  und schreiben  $DF = (D_x F, D_y F) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $D_x F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D_y F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ferner sei  $D_y F(x_0, y_0)$  invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$  mit  $U \times V \subseteq D$  und eine  $\mathcal{C}^1$  Funktion  $g : U \rightarrow V$ , sodass

$$c = F(x, g(x)) \quad \forall x \in U$$

Außerdem gilt: Ist  $c = F(x, y)$  für  $x \in U$  und ein  $y \in V$ , dann folgt  $y = g(x)$ . Und  $g$  ist  $\mathcal{C}^1$ .  $Dg(x) = -(D_y F(x, g(x)))^{-1} \circ D_x F(x, g(x))$ .

**Beispiel 12.1.3.**  $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$  in einer Umgebung von  $(0, 0, -2)$ . Wir lösen nach  $z$  auf.  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$  mit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $z \in \mathbb{R}$ .

$$\partial_z F(x, y, z) = 3z^2 + 4z - 3xy$$

$$\partial_z F(0, 0, -2) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 0 = 4 \neq 0$$

Ist invertierbar. Somit greift Satz 12.1.2.

**Satz 12.1.4.** Satz 12.1.1 und Satz 12.1.2 sind äquivalent.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Vertauschen Variablen  $x, y$  in Satz 12.1.1. Gegeben  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in \mathcal{C}^1$ . Wir definieren  $F(x, y) := f(y) - x$ .  $F : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $k = n$ ). Dann gilt  $D_x F = -\text{Id}_n$  und  $D_y F(x, y) = Df(y)$ .

$D_y F(x_0, y_0) = Df(y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist invertierbar nach Voraussetzung. Damit gilt nach Satz 12.1.2, dass es Umgebungen  $V$  von  $y_0$  und  $U$  von  $x_0$  gibt. Sowie  $g : U \rightarrow V$  in  $\mathcal{C}^1$ , sodass

$$f(y) - x = F(x, g(x)) = F(x_0, y_0) = f(y_0) - x_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$$

$$f(g(x)) = x \quad \forall x \in U$$

„ $\Leftarrow$ “ Gegeben  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$  offen.  $(x_0, y_0) \in D$ .  $D_y F(x_0, y_0)$  sei invertierbar und  $c := F(x_0, y_0)$ . Wir konstruieren eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}$$

Angenommen  $f : U \rightarrow V$  ist invertierbar.  $\begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} W \\ u \end{pmatrix}$  hat eindeutige Lösung. Außerdem haben wir damit  $x = w$  und  $F(x, y) = u$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y(w, u) = \begin{pmatrix} g_1(w, u) \\ g_2(w, u) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y = g_2(x, u)$$

setzen wir  $c := F(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow F(x, g_2(x, c)) = c.$$

Frage: Was ist  $Df(x, y)$ ?

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= (D_x f(x, y), D_y f(x, y)) \\ &= \left( D_x \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix}, D_y \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ D_x F(x, y) & D_y F(x, y) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Id} \cdot u + 0 \\ Bu + Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ & \quad (\alpha \in \mathbb{R}^k, \beta \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \alpha \quad Bu + Av = \beta$$

$$Av = \beta - Bu = \beta - B\alpha$$

□

[19. Jul] **Lemma 12.1.5.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume, wobei  $Y$  vollständig ist. Dann ist  $\mathcal{L}(X, Y)$  mit Operatornorm

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$$

ein vollständiger Vektorraum.

*Beweis.* Wir müssen nur noch die Vollständigkeit zeigen. Sei  $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  eine Cauchyfolge. Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\|_{\text{op}} = 0$$

Wir definieren für ein festes  $x \in X$

$$\begin{aligned} y_n &:= T_n \cdot x \\ \|y_m - y_n\|_Y &= \|T_m x - T_n x\|_Y = \|(T_m - T_n) \cdot x\|_Y \\ &\leq \underbrace{\|T_m - T_n\|_{\text{op}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow \infty} \cdot \|x\|_X \end{aligned}$$

Damit ist  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $Y$ . Damit existiert ein Grenzwert und wir definieren

$$\begin{aligned} y &:= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x =: Tx \\ T(x_1 + x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_1 + x_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = Tx_1 + Tx_2 \end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass  $T(\alpha x) = \alpha Tx$ . Also ist die Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  linear

$$\begin{aligned} Tx - T_n x &= \lim_{m \rightarrow \infty} T_m x - T_n x \\ \Rightarrow \|Tx - T_n x\|_Y &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m x - T_n x\|_Y \\ &= \|(T_m - T_n)x\|_Y \\ &\leq \|T_m - T_n\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|(T - T_n)x\|_Y &\leq \sup_{m \geq n} \underbrace{\|T_m - T_n\|_{\text{op}}}_{\rightarrow 0} \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|T - T_n\|_{\text{op}} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(T - T_n)x\|_Y \\ &\leq \sup_{m \geq n} \|T_m - T_n\|_{\text{op}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Wir haben also  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und wollen noch zeigen, dass  $\|T\|_{\text{op}} < \infty$

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \|Tx - T_n x + T_n x\|_Y \\ &\leq \|Tx - T_n x\|_Y + \|T_n x\|_Y \\ &\leq (\|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}}) \cdot \|x\|_X \\ \Rightarrow \|T\|_{\text{op}} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\ &\leq \|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}} \\ \Rightarrow \|T\|_{\text{op}} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|T - T_n\|_{\text{op}} + \|T_n\|_{\text{op}}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\text{op}} < \infty \end{aligned}$$

□

**Lemma 12.1.6.** Sei  $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$  ein vollständiger normierter Vektorraum. Dann ist die Menge der invertierbaren Abbildungen  $A \in \mathcal{L}(X)$  offen. Genauer: Ist  $A : X \rightarrow X$  invertierbar mit  $\|A\|_{\text{op}} < \infty$  und  $B \in \mathcal{L}(X)$  mit

$$\underbrace{\|A^{-1}(A - B)\|_{\text{op}}}_{=\|\mathbf{1} - A^{-1}B\|_{\text{op}}} < 1$$

dann ist  $B$  invertierbar und

$$\|B^{-1}\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{1} - A^{-1}B\|_{\text{op}}}$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $A \in \mathcal{L}(X)$  und  $\|A\|_{\text{op}} < 1$ . Wir wollen zeigen, dass  $\mathbf{1} - A$  invertierbar ist. Wir wollen dieses Inverse über die geometrische Reihe herleiten, weil wir wissen, dass die geometrische Reihe mit  $|q| < 1$  gerade gegen  $\frac{1}{1-q}$  konvergiert und wir damit ein Inverses zu  $1 - q$  gefunden haben. Dieses Konzept wollen wir auf Matrizen übertragen<sup>7</sup>. Dafür definieren wir

$$A^0 = \text{Id}_X = \mathbf{1}$$

<sup>7</sup>Entwicklung nach John von Neumann, für konkrete Anwendung siehe auch Musterlösung zu LINEARE ALGEBRA II, Übungsblatt 1, Aufgabe 4e

Wir definieren außerdem induktiv

$$A^{n+1} = A \circ A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seien  $A, B \in \mathcal{L}(X)$ . Dann gilt

$$\|AB\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}}$$

weil

$$\begin{aligned} \|ABx\|_X &\leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|Bx\|_X \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}} \cdot \|x\|_Y \\ \Rightarrow \|A^n\|_{\text{op}} &= \|AA^{n-1}\|_{\text{op}} \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|A^{n-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \|A\|_{\text{op}}^2 \cdot \|A^{n-2}\|_{\text{op}} \leq \dots \leq \|A\|_{\text{op}}^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \\ S_m - s_n &= \sum_{k=n+1}^m A^k \quad (m \geq n) \\ \|S_m - s_n\|_{\text{op}} &\leq \sum_{k=n+1}^m \|A^k\|_{\text{op}} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \|A\|_{\text{op}}^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^k \\ &= \|A\|_{\text{op}}^{n+1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^j \\ &= \frac{\|A\|_{\text{op}}^{n+1}}{1 - \|A\|_{\text{op}}} \\ \Rightarrow \sup_{m \geq n} \|S_m - s_n\|_{\text{op}} &\leq \frac{\|A\|_{\text{op}}^{n+1}}{1 - \|A\|_{\text{op}}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Das heißt  $(S_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}(X)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ existiert} \\ (\mathbf{1} - A) \cdot S_n &= S_n - AS_n = \sum_{k=0}^n A^k - \sum_{k=0}^n A^{k+1} \\ &= \mathbf{1} - A^{n+1} \end{aligned}$$

Genauso lässt sich für Linksinverse auch zeigen, dass  $S_n \cdot (\mathbf{1} - A) = \mathbf{1} - A^{n+1}$ . Für  $x \in X$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - A) \cdot S_n x &= x - A^{n+1}x \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (\mathbf{1} - A) \cdot Sx &= x \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{1} - A)S = \mathbf{1} \\ S(\mathbf{1} - A) = \mathbf{1} \end{cases} \end{aligned}$$

Das heißt  $S$  ist die Inverse zu  $\mathbf{1} - A$  und es gilt

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{1} - A)^{-1}\|_{\text{op}} &= \|S\|_{\text{op}} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\|_{\text{op}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|_{\text{op}}^k = \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{op}}}\end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei  $A \in \mathcal{L}(X)$  invertierbar. Dann gilt

$$B = A - (A - B) = A \cdot (\mathbf{1} - A^{-1} \cdot (A - B))$$

ist invertierbar nach SCHRITT 1, falls  $\|A^{-1} \cdot (A - B)\|_{\text{op}} < 1$

?

□

**Satz 12.1.7** (Banachscher Fixpunktsatz). Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : M \rightarrow M$  eine Kontraktion - das heißt  $\exists k \in (0, 1) : d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in M$  - dann hat  $T$  einen eindeutigen Fixpunkt. Das heißt es existiert genau ein  $x^* \in M$ , sodass  $T(x^*) = x^*$ .

*Beweis. Eindeutigkeit.* Seien  $x^*, y^*$  Fixpunkte. Dann gilt

$$\begin{aligned}d(x^*, y^*) &= d(T(x^*), T(y^*)) \leq k \cdot d(x^*, y^*) \\ \Rightarrow \underbrace{(1 - k)}_{>0} \cdot d(x^*, y^*) &\leq 0 \\ \Rightarrow d(x^*, y^*) &= 0 \\ \Rightarrow x^* &= y^*\end{aligned}$$

*Existenz.* SCHRITT 1: Sei  $x_0 \in M$  beliebig. Wir definieren

$$\begin{aligned}x_1 &= T(x_0) \\ x_2 &= T(T(x_0)) = T^2(x_0) \\ x_{n+1} &= T(T^n(x_0)) = T^{n+1}(x_0) = T(x_n) \quad (\text{induktiv, } n \in \mathbb{N}_0)\end{aligned}$$

Wir betrachten den Abstand zwischen  $x_{n+1}$  und  $x_n$

$$\begin{aligned}d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq k \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \leq k^n \cdot d(x_1, x_0)\end{aligned}$$

SCHRITT 2:

$$\begin{aligned}d(x_{n+l}, x_n) &\leq d(x_{n+l}, x_{n+l-1}) + d(x_{n+l-1}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+l-1}, x_{n+l-2}) + d(x_{n+l-2}, x_n) \\ &\leq \dots \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j})\end{aligned}$$



$$\leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=0}^{l-1} k^{n+j}$$

Nach der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} &\leq d(x_1, x_0) \cdot \frac{k^n}{1-k} \\ \Rightarrow \sup_{m \geq n} d(x_m, x_n) &\leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit ist  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge und ein Grenzwert existiert. Wir definieren

$$x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

SCHRITT 3: Wir zeigen, dass dann  $x^*$  ein Fixpunkt sein muss

$$\begin{aligned} d(T(x^*), x^*) &\leq d(T(x^*), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq \underbrace{k \cdot d(x^*, x_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(x_{n+1}, x^*)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow d(T(x^*), x^*) &= 0 \end{aligned}$$

□