

Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Motivation für Maßtheorie	3
2	σ-Algebren und Maße	4
2.1	σ -Algebren	4
2.2	Maße und Prämaße	6
3	[*] Dynkinsysteme	10
4	[*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes	12
5	[*] Existenz von Maßen	17

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des \mathbb{R}^n messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des \mathbb{R}^2 A und B , die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des \mathbb{R}^2 haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks). Im Fall eines Rechtecks $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks). Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

Beispiel 1.1.3 (Parkettierung). Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

Bemerkung 1.1.4. Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) := \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \emptyset$ ist. Außerdem soll gelten, dass

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

¹ σ -Additivität

2 σ -Algebren und Maße

2.1 σ -Algebren

Definition 2.1.1 (σ -Algebra). Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Eine σ -Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eigenschaften

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C := E \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \text{ Das heißt } \mathcal{A} \text{ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen}$$

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar (\mathcal{A} -messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ -Algebren). Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in E . Dann gilt

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \text{ (das heißt } \mathcal{A} \text{ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)}$$

$$(iii) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$$

Beweis.

$$(i) \quad E \in \mathcal{A} \xrightarrow{(\Sigma_2)} \emptyset = E^C \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \text{Wir definieren } A_1 := A, A_2 := B \text{ und } A_i := \emptyset \text{ für } i \geq 3. \text{ Dann gilt } (\Sigma_3)$$

$$A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C \right)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A \setminus B = A \cap B^C = A \cap B^C \cap E \cap E \cap \dots. \text{ Dann gilt nach (iii), dass } A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \square$$

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ -Algebren

(a) Für eine Mengen E ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ selber nach Definition immer eine σ -Algebra über E .

(b) $\{\emptyset, E\}$ ist die kleinste σ -Algebra in E .

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^C, E\}$ ist die kleinste σ -Algebra, die A enthält.

(d) Sei E überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ -Algebra.

(e) Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in E . Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur- σ -Algebra von F .

- (f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \rightarrow E'$ eine Funktion und \mathcal{A}' eine σ -Algebra in E' . Dann ist auch

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine σ -Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

$$(\Sigma_1) \quad E^C = \emptyset \text{ ist abzählbar} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \text{ oder } (A^C)^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \mathcal{A} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \text{ Wir unterscheiden 2 Fälle}$$

FALL 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

FALL 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^C$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \subseteq (A_j)^C$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. \square

Notation 2.1.4 (Durchschnitt). Seien I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E . Dann ist

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j := \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der \mathcal{A}_j .

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I}$ eine Familie von σ -Algebren in E . Dann gilt

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ -Algebra.

Beweis.

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I. \text{ Daraus folgt } A^C \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A^C \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j. \text{ Dann gilt } A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \quad \square$$

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein System von Teilmengen von E . Dann existiert eine kleinste σ -Algebra $\sigma(E)$ in E , welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ -Algebra in E und

(b) Für eine σ -Algebra \mathcal{A} in E mit $\zeta \subseteq \mathcal{A}$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ -Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ -Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine σ -Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an I . Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. \square

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\{\emptyset, A, A^C, E\}$ die von ζ erzeugte σ -Algebra.

Definition 2.1.8. Sei \mathcal{O}_d das System der offenen Mengen im \mathbb{R}^d . Dann definieren wir die *Borel- σ -Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung). Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von A und B .

Definition 2.2.2 (Maß). Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit

(M₀) \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.

(M₁) $\mu(\emptyset) = 0$

(M₂) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Prämaß). Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(PM₁) $\mu(\emptyset) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\emptyset \in \mathcal{A}$)

(PM₂) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.4 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen). Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von X . Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.5.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.6 (Messraum und Maßraum). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar (X, \mathcal{A}) einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) einen Maßraum.

2 σ -Algebren und Maße

3. Wir nennen μ endlich und (X, \mathcal{A}, μ) einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und (X, \mathcal{A}, μ) einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ -endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.7 (Eigenschaften von Maßen). Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- (i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- (iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)
- (v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)
- (vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- (vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)
- (viii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ -Subadditivität)

Beweis.

- (i) Sei $A_1 := A, A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- (iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

- (iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

- (vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 := A_1$ und $F_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^n A_j &= \bigsqcup_{j=1}^n F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(F_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n F_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- (vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n := B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

- (viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^k A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\hat{A}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern \mathcal{A} stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern \mathcal{A} stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.9 (Dirac-Maß). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac-Maß* bezeichnet.

Beispiel 2.2.10. Sei $\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar} \right\}$. Dann ist \mathcal{A} nach Beispiel 2.1.3 (d) eine σ -Algebra in \mathbb{R} . Wir definieren ein Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.11 (Zählmaß). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elemente in A angibt.

Beispiel 2.2.12 (Diskretes W-Maß). Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}: \omega_n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra). Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

$$(R_1) \quad \emptyset \in R$$

$$(R_2) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$$

$$(R_3) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.14 (Eigenschaften von Mengenringen). Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \rightarrow R$, $(A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert (R, Δ, \cap) einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und \cap der „Multiplikation“ entspricht.

3 [*] Dynkingsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkingsystem). Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkingsystem, falls

$$(D_1) \quad X \in \mathcal{D}$$

$$(D_2) \quad D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^C \in \mathcal{D}$$

$$(D_3) \quad \text{Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge } (D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ -Algebra ist ein Dynkingsystem.
2. Sei X eine $2n$ -elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkingsystem, aber keine σ -Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j \in I}$ eine Familie von Dynkingsystemen in X , dann ist $\bigcap_{j \in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkingsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkingsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches \mathcal{G} enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von \mathcal{G} erzeugte Dynkingsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkingsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkingsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \emptyset$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ -Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in I} \mathcal{D} \quad \square$$

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen \mathcal{D} \cap -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir \mathcal{D} \cup -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkingsystem eine σ -Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei \mathcal{D} ein Dynkingsystem. Dann gilt \mathcal{D} ist genau dann eine σ -Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei \mathcal{D} eine σ -Algebra. Dann ist \mathcal{D} ein Dynkingsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^C, B^C \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{D}$.

„ \Leftarrow “ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3) . Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D'_0 := \emptyset$ und $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Dann ist $(D'_n)_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \text{ falls } (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = (D'_n \cap (D'_{n-1})^c) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass \mathcal{D} \cup -stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. □

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus \mathcal{G} ist \cap -stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil ist.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: \mathcal{D}_D ist ein Dynkinsystem. Stimmt diese Behauptung, dann können wir folgendermaßen argumentieren: Da \mathcal{G} \cap -stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} &\subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} &\subseteq \mathcal{D}_D \\ \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) &\subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \stackrel{(\text{Beh.})}{=} \mathcal{D}_D \\ \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D &\in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G &= G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} &\subseteq \mathcal{D}_G \\ \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) &\subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G &\in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ -stabil.

Wir zeigen noch die Behauptung:

(D₁) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

(D₂) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^c \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^c \cap D = (Q^c \cup D^c) \cap D = (Q \cap D)^c \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

(D₃) (Fehlt, siehe handschriftliches Skript) □

Korollar 3.1.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn \mathcal{G} \cap -stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine σ -Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

Beweis. Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine σ -Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ -Algebra ist, die \mathcal{G} enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz). Sei (X, \mathcal{A}) ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien μ, ν Maße auf \mathcal{A} mit

- (a) \mathcal{E} ist \cap -stabil
- (b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ ($X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$) mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

Beweis. Da \mathcal{E} \cap -stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

\mathcal{D}_n ist ein Dynkinsystem:

(D₁) Folgt direkt.

(D₂) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(G_n \cap A^c) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\ &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n \cap A^c) \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

(D₃) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\ &\Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von \mathcal{D}_n gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da \mathcal{E} \cap -stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.

Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.

Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n := A \cap G_n \nearrow A$. Da μ, ν Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.2 (Ausschöpfende Folgen). Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß μ auf \mathcal{A} σ -endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.3 (Eigenschaften der Borelmengen). In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei \mathcal{O} das System offener Teilmengen im \mathbb{R}^d war. Wir definieren nun

- \mathcal{A}_d : System der abgeschlossenen Teilmengen im \mathbb{R}^d
- \mathcal{K}_d : System der kompakten Teilmengen im \mathbb{R}^d

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. SCHRITT 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da σ -Algebren stabil unter Komplementbildung sind.

SCHRITT 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.

SCHRITT 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) \end{aligned}$$

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

Beobachtung 4.1.4. Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine d mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Definition 4.1.5. Es sei $J^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^d .

Bemerkung 4.1.6 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß). Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion T_c^{-1} . Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$\begin{aligned} \lambda^d(T_c^{-1}(I)) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\ &= \prod_{j=1}^d (b_j - c_j - (a_j - c_j)) \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf J^d ist λ^d invariant unter Translation.

Lemma 4.1.7. Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c := \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. SCHRITT 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d\}$$

Dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra (Übung).

SCHRITT 2: \mathcal{O}_d ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. \square

[8. Nov] (fehlt)

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T(\lambda^d) = \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis. SCHRITT 1: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0$. Das heißt T ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &:= x + a \\ \Rightarrow (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) & (b := T^{-1}(a)) \\ &= T(x + b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= T(\lambda^d) & = \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a(T(\lambda^d)) = T_a \circ T(\lambda^d) \\ &= T \circ T_b(\lambda^d) = T(T_b(\lambda^d)) \\ &= T(\lambda^d) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist μ invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = \alpha \lambda^d$.

Frage: Warum ist $\alpha = 1$?

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d(T^{-1}(B)) = \mu(B) = \alpha \lambda^d(B) \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$ beliebig und wir setzen $c := T(0)$ und $S := T_{-c} \circ T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S(\lambda^d) &= \lambda^d \text{ nach SCHRITT 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= T_c(S(\lambda^d)) = T_c(\lambda^d) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach SCHRITT 1. □

Beispiel 4.1.9 (Lebesgue-Maß von einem Punkt). Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Was ist dann $\lambda^d(\{x\})$? Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$J := [x, x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in J \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \rightarrow 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ null, da

$$\begin{aligned}
\lambda^d(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\mathbb{Q}^d) = 0
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.10 (Lebesgue-Maß einer Hyperebene). Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und wir definieren eine Hyperebene $H_j := \{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\}$. Was ist dann $\lambda^d(H_j)$? Wir definieren

$$J_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1}2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n(2n)^{d-1}} \right\}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
H_j &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \\
\lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1}2^n} \\
&= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(H_j) = 0
\end{aligned}$$

Dieses Resultat gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form H_j abbildet.

5 [*] Existenz von Maßen

Definition 5.1.1 (Halbring). Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring, falls

$$(S_1) \quad \emptyset \in \mathcal{S}$$

$$(S_2) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$$

$$(S_3) \quad A, B \in \mathcal{S} \text{ existieren endlich viele disjunkte Mengen } S_1, \dots, S_M \in \mathcal{S} \text{ mit } A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

Satz 5.1.2 (Nach Carathéodory). Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Erweiterung von μ zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{S})$. Falls μ σ -endlich auf \mathcal{S} ist, dann ist die Erweiterung eindeutig.