

Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Motivation für Maßtheorie	3
2	σ-Algebren und Maße	4
2.1	σ -Algebren	4
2.2	Maße und Prämaße	6
3	Dynkinsysteme	10
4	[*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes	12
5	[*] Existenz von Maßen	17
6	[*] Messbare Abbildungen und Bildmaße	26
6.1	Messbare Abbildungen	26
6.2	Bildmaße	27
7	[*] Messbare numerische Funktionen	28
8	[*] Elementarfunktionen und ihr Integral	33
9	[*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen	36
10	[*] Integrierbarkeit	40

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des \mathbb{R}^n messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des \mathbb{R}^2 A und B , die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des \mathbb{R}^2 haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks). Im Fall eines Rechtecks $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks). Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

Beispiel 1.1.3 (Parkettierung). Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

Bemerkung 1.1.4. Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) := \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \emptyset$ ist. Außerdem soll gelten, dass

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

¹ σ -Additivität

2 σ -Algebren und Maße

2.1 σ -Algebren

Definition 2.1.1 (σ -Algebra). Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Eine σ -Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eigenschaften

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C := E \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \text{ Das heißt } \mathcal{A} \text{ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen}$$

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar (\mathcal{A} -messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ -Algebren). Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in E . Dann gilt

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \text{ (das heißt } \mathcal{A} \text{ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)}$$

$$(iii) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$$

Beweis.

$$(i) \quad E \in \mathcal{A} \xrightarrow{(\Sigma_2)} \emptyset = E^C \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \text{Wir definieren } A_1 := A, A_2 := B \text{ und } A_i := \emptyset \text{ für } i \geq 3. \text{ Dann gilt } (\Sigma_3)$$

$$A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C \right)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A \setminus B = A \cap B^C = A \cap B^C \cap E \cap E \cap \dots. \text{ Dann gilt nach (iii), dass } A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \square$$

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ -Algebren

$$(a) \quad \text{Für eine Mengen } E \text{ ist die Potenzmenge } \mathcal{P}(E) \text{ selber nach Definition immer eine } \sigma\text{-Algebra über } E.$$

$$(b) \quad \{\emptyset, E\} \text{ ist die kleinste } \sigma\text{-Algebra in } E.$$

$$(c) \quad \text{Für } A \subseteq E \text{ gilt } \mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^C, E\} \text{ ist die kleinste } \sigma\text{-Algebra, die } A \text{ enthält.}$$

$$(d) \quad \text{Sei } E \text{ überabzählbar. Dann ist } \mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar}\} \text{ eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

$$(e) \quad \text{Sei } \mathcal{A} \text{ eine } \sigma\text{-Algebra in } E. \text{ Für } F \subseteq E \text{ beliebig ist } \mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\} \text{ die Spur-}\sigma\text{-Algebra von } F.$$

- (f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \rightarrow E'$ eine Funktion und \mathcal{A}' eine σ -Algebra in E' . Dann ist auch

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine σ -Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

$$(\Sigma_1) \quad E^C = \emptyset \text{ ist abzählbar} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \text{ oder } (A^C)^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \mathcal{A} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \text{ Wir unterscheiden 2 Fälle}$$

FALL 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

FALL 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^C$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \subseteq (A_j)^C$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. \square

Notation 2.1.4 (Durchschnitt). Seien I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E . Dann ist

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j := \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der \mathcal{A}_j .

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I}$ eine Familie von σ -Algebren in E . Dann gilt

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ -Algebra.

Beweis.

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I. \text{ Daraus folgt } A^C \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A^C \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j. \text{ Dann gilt } A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \quad \square$$

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein System von Teilmengen von E . Dann existiert eine kleinste σ -Algebra $\sigma(\zeta)$ in E , welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ -Algebra in E und

(b) Für eine σ -Algebra \mathcal{A} in E mit $\zeta \subseteq \mathcal{A}$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ -Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ -Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine σ -Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an I . Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. \square

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\{\emptyset, A, A^C, E\}$ die von ζ erzeugte σ -Algebra.

Definition 2.1.8. Sei \mathcal{O}_d das System der offenen Mengen im \mathbb{R}^d . Dann definieren wir die *Borel- σ -Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung). Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von A und B .

Definition 2.2.2 (Maß). Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit

(M₀) \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.

(M₁) $\mu(\emptyset) = 0$

(M₂) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Prämaß). Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(PM₁) $\mu(\emptyset) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\emptyset \in \mathcal{A}$)

(PM₂) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.4 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen). Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von X . Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.5.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.6 (Messraum und Maßraum). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar (X, \mathcal{A}) einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) einen Maßraum.

2 σ -Algebren und Maße

3. Wir nennen μ endlich und (X, \mathcal{A}, μ) einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und (X, \mathcal{A}, μ) einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ -endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.7 (Eigenschaften von Maßen). Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- (i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- (iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)
- (v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)
- (vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- (vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)
- (viii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ -Subadditivität)

Beweis.

- (i) Sei $A_1 := A, A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- (iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

- (iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

- (vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 := A_1$ und $F_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^n A_j &= \bigsqcup_{j=1}^n F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(F_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n F_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- (vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n := B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

- (viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^k A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\hat{A}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern \mathcal{A} stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern \mathcal{A} stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.9 (Dirac-Maß). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac-Maß* bezeichnet.

Beispiel 2.2.10. Sei $\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar} \right\}$. Dann ist \mathcal{A} nach Beispiel 2.1.3 (d) eine σ -Algebra in \mathbb{R} . Wir definieren ein Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.11 (Zählmaß). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elemente in A angibt.

Beispiel 2.2.12 (Diskretes W-Maß). Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}: \omega_n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra). Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

$$(R_1) \quad \emptyset \in R$$

$$(R_2) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$$

$$(R_3) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.14 (Eigenschaften von Mengenringen). Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \rightarrow R$, $(A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert (R, Δ, \cap) einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und \cap der „Multiplikation“ entspricht.

3 Dynkinsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkinsystem). Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

$$(D_1) \quad X \in \mathcal{D}$$

$$(D_2) \quad D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^C \in \mathcal{D}$$

$$(D_3) \quad \text{Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge } (D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ -Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei X eine $2n$ -elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine σ -Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j \in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in X , dann ist $\bigcap_{j \in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches \mathcal{G} enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von \mathcal{G} erzeugte Dynkinsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \emptyset$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ -Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in I} \mathcal{D} \quad \square$$

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen \mathcal{D} \cap -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir \mathcal{D} \cup -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine σ -Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei \mathcal{D} ein Dynkinsystem. Dann gilt \mathcal{D} ist genau dann eine σ -Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei \mathcal{D} eine σ -Algebra. Dann ist \mathcal{D} ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^C, B^C \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{D}$.

„ \Leftarrow “ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3) . Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D'_0 := \emptyset$ und $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Dann ist $(D'_n)_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \text{ falls } (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3 Dynkinsysteme

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = (D'_n \cap (D'_{n-1})^c) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass \mathcal{D} \cup -stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. □

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus \mathcal{G} ist \cap -stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil ist.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: \mathcal{D}_D ist ein Dynkinsystem

(D₁) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

(D₂) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^c \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^c \cap D = (Q^c \cup D^c) \cap D = (Q \cap D)^c \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

(D₃) (Siehe handschriftliches Skript)

Nun können wir folgendermaßen argumentieren: Da \mathcal{G} \cap -stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} & \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ & \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \stackrel{(\text{Beh.})}{=} \mathcal{D}_D \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} & \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ & \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ -stabil. □

Korollar 3.1.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn \mathcal{G} \cap -stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine σ -Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

Beweis. Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine σ -Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ -Algebra ist, die \mathcal{G} enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz). Sei (X, \mathcal{A}) ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien μ, ν Maße auf \mathcal{A} mit

- (a) \mathcal{E} ist \cap -stabil
- (b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ ($X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$) mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

Beweis. Da \mathcal{E} \cap -stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

\mathcal{D}_n ist ein Dynkinsystem:

(D₁) Folgt direkt.

(D₂) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(G_n \cap A^c) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\ &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n \cap A^c) \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

(D₃) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\ &\Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von \mathcal{D}_n gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da \mathcal{E} \cap -stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.

Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.

Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n := A \cap G_n \nearrow A$. Da μ, ν Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.2 (Ausschöpfende Folgen). Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß μ auf \mathcal{A} σ -endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.3 (Eigenschaften der Borelmengen). In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei \mathcal{O} das System offener Teilmengen im \mathbb{R}^d war. Wir definieren nun

- \mathcal{A}_d : System der abgeschlossenen Teilmengen im \mathbb{R}^d
- \mathcal{K}_d : System der kompakten Teilmengen im \mathbb{R}^d

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. SCHRITT 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da σ -Algebren stabil unter Komplementbildung sind.

SCHRITT 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.

SCHRITT 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) \end{aligned}$$

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

Beobachtung 4.1.4. Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine d mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Definition 4.1.5. Es sei $J^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^d .

Bemerkung 4.1.6 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß). Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion T_c^{-1} . Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$\begin{aligned} \lambda^d(T_c^{-1}(I)) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\ &= \prod_{j=1}^d (b_j - c_j - (a_j - c_j)) \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf J^d ist λ^d invariant unter Translation.

Lemma 4.1.7. Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c := \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. SCHRITT 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d\}$$

Dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra (Übung).

SCHRITT 2: \mathcal{O}_d ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. \square

[8. Nov] (fehlt)

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T(\lambda^d) = \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis. SCHRITT 1: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0$. Das heißt T ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &:= x + a \\ \Rightarrow (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) & (b := T^{-1}(a)) \\ &= T(x + b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= T(\lambda^d) & = \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a(T(\lambda^d)) = T_a \circ T(\lambda^d) \\ &= T \circ T_b(\lambda^d) = T(T_b(\lambda^d)) \\ &= T(\lambda^d) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist μ invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = \alpha \lambda^d$.

Frage: Warum ist $\alpha = 1$?

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d(T^{-1}(B)) = \mu(B) = \alpha \lambda^d(B) \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$ beliebig und wir setzen $c := T(0)$ und $S := T_{-c} \circ T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S(\lambda^d) &= \lambda^d \text{ nach SCHRITT 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= T_c(S(\lambda^d)) = T_c(\lambda^d) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach SCHRITT 1. □

Beispiel 4.1.9 (Lebesgue-Maß von einem Punkt). Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Was ist dann $\lambda^d(\{x\})$? Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$J := [x, x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in J \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \rightarrow 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ null, da

$$\begin{aligned}
\lambda^d(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\mathbb{Q}^d) = 0
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.10 (Lebesgue-Maß einer Hyperebene). Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und wir definieren eine Hyperebene $H_j := \{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\}$. Was ist dann $\lambda^d(H_j)$? Wir definieren

$$J_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1}2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n(2n)^{d-1}} \right\}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
H_j &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \\
\lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1}2^n} \\
&= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(H_j) = 0
\end{aligned}$$

Dieses Resultat gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form H_j abbildet.

5 [*] Existenz von Maßen

Definition 5.1.1 (Halbring). Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring, falls

$$(S_1) \quad \emptyset \in \mathcal{S}$$

$$(S_2) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$$

$$(S_3) \quad A, B \in \mathcal{S} \text{ existieren endlich viele disjunkte Mengen } S_1, \dots, S_M \in \mathcal{S} \text{ mit } A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

Satz 5.1.2 (Nach Carathéodory). Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{S})$.

Falls μ σ -endlich auf \mathcal{S} ist, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

[25. Nov] **Definition 5.1.3** (Äußere Maße). Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß, falls

$$(i) \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \quad \text{(Normierung)}$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{(Monotonie)}$$

$$(iii) \quad \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

Konstruktion 5.1.4. Zu einem Prämaß μ auf \mathcal{S} gibt es ein äußeres Maß.

Nehme $A \subseteq X$. Wir bepflastern A mit Mengen aus \mathcal{S} :

$$\mathcal{C}(A) := \left\{ (S_n)_{n \in \mathbb{N}} : S_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right\} \quad \text{(Cover)}$$

$\mathcal{C}(A) = \emptyset$ ist dabei möglich. Gegeben ein Prämaß $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir nun

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \} & \text{falls } \mathcal{C}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{falls } \mathcal{C}(A) = \emptyset \end{cases}$$

Lemma 5.1.5. Das in Konstruktion 5.1.4 definierte μ^* ist ein äußeres Maß.

Beweis.

$$(i) \quad \text{Wir nehmen } S_n = \emptyset. \text{ Dann gilt } \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Sei } A \subseteq B. \text{ Angenommen } \mathcal{C}(B) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$$

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\} \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \text{Es gilt } \mu^*(A_n) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \}. \text{ Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } (S_{n,m})_m \in \mathcal{C}(A_n) \text{ mit}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{m \in \mathbb{N}} 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \right) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu^*(A_m) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

□

Konstruktion 5.1.6 (Prämaß auf erzeugtem Ring). Sei μ ein Prämaß auf einem Halbring \mathcal{S} . Wir wollen μ zu einem Prämaß auf dem erzeugten Mengenring forsetzen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Wir setzen $\mathcal{S}_\cup := \{S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_n : S_j \in \mathcal{S}\}$ und definieren

$$\bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) = \sum_{j=1}^n \mu(S_j)$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von $\bar{\mu}$. Angenommen $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ und $S_j, T_j \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_j &= S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n S_k \right) = S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n T_k \right) \\
&= \bigsqcup_{k=1}^n (S_j \cap T_k)
\end{aligned}$$

Analog ist auch

$$\begin{aligned}
T_k &= \bigsqcup_{j=1}^n (T_k \cap S_j) \\
\Rightarrow S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \\
\Rightarrow \bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) &= \bar{\mu} \left(\bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \right) \\
\sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N \mu(S_j \cap T_k) &= \sum_{k=1}^N \mu(T_k) = \bar{\mu}(T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)
\end{aligned}$$

Das heißt $\bar{\mu}$ ist wohldefiniert.

Frage: Wie verhält sich \mathcal{S}_\cup unter allgemeinen (endlichen) Vereinigungen und Schnitten? Wir betrachten $S, T \in \mathcal{S}_\cup$ mit

$$\begin{aligned}
S \cap T &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N) \\
&= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \in \mathcal{S}_\cup
\end{aligned}$$

Das heißt \mathcal{S}_\cup ist stabil unter (endlichen) Schnitten.

$$S \setminus T = (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \setminus (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S \cap T^C &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap \bigcap_{n=1}^N T_k^C \\
&= \bigcup_{j=1}^M \left(S_j \cap \bigcap_{k=1}^N T_k^C \right) \\
&= \bigcup_{j=1}^M \bigcap_{k=1}^N (S_j \cap T_k^C) \in \mathcal{S}_U
\end{aligned}$$

Das heißt für $S, T \in \mathcal{S}_U$ ist auch $S \setminus T \in \mathcal{S}_U$. Außerdem können wir schreiben

$$S \cup T = (S \setminus T) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus S) \in \mathcal{S}_U$$

Das heißt \mathcal{S}_U ist ein Mengenring und $\bar{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ auf \mathcal{S}_U .

$$\Rightarrow \bar{\mu}(T \cup S) = \bar{\mu}(S \setminus T) + \bar{\mu}(S \cap T) + \bar{\mu}(T \setminus S)$$

Das heißt $\bar{\mu}$ ist definiert für endlich viele Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{S}_U .

Behauptung: $\bar{\mu}$ ist ein Prämaß auf \mathcal{S}_U . Also ist zu zeigen, dass $\bar{\mu}$ σ -additiv auf \mathcal{S}_U ist. Wir nehmen $(T_k)_k \subseteq \mathcal{S}_U$

$$T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \in \mathcal{S}_U$$

Zu zeigen:

$$\bar{\mu}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(T_k)$$

Nach Definition von \mathcal{S}_U gibt es $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und Indizes $0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$ mit

$$\begin{aligned}
T_k &= S_{i(k-1)+1} \sqcup \dots \sqcup S_{i(k)} \\
T &= U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L \\
U_l &:= \bigcup_{i \in J_l} S_i
\end{aligned} \tag{k \in \mathbb{N}}$$

Indexmengen $J_1, \dots, J_L \subseteq \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und $J_1 \sqcup \dots \sqcup J_L = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(T) &= \bar{\mu}(U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L) \\
&= \bar{\mu}(U_1) + \dots + \bar{\mu}(U_L) \\
&= \mu(U_1) + \dots + \mu(U_L) \\
&= \sum_{i \in J_1} \mu(S_i) + \dots + \sum_{i \in J_L} \mu(S_i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(T_k)
\end{aligned}$$

[29. Nov] **Bemerkung 5.1.7** (Prämaß und äußeres Maß). Wenn wir ein Prämaß μ auf einem Halbring \mathcal{S} haben, dann gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

wobei μ^* das in Konstruktion 5.1.4 definierte äußere Maß ist. Das heißt μ^* ist eine Fortsetzung von μ .

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$ und $(S_j)_j \in \mathcal{C}(A)$ Überdeckung von A . Dann gilt

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j\right) \cap A\right)$$

Wegen der σ -Subadditivität von $\bar{\mu}$ gilt

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_j \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_j)$$

Wir nehmen das Infimum auf beiden Seiten und erhalten

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\mu(A) \geq \mu^*(A)$. Für ein $A \in \mathcal{S}$ nehmen wir $(S_j)_j$ mit $S_1 := A$, $S_2 = S_3 = \dots = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \square$$

Definition 5.1.8 (Zerlegungsbedingung). Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann sagen wir $A \subseteq X$ erfüllt die Zerlegungsbedingung, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X \quad (5.1.1)$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_* := \{A \subseteq X : A \text{ erfüllt die Zerlegungsbedingung 5.1.1}\}$$

Bemerkung 5.1.9. Die Bedingung 5.1.1 ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

da die Ungleichung in die andere Richtung bereits durch die σ -Subadditivität von μ^* gegeben ist.

Lemma 5.1.10. Sei μ^* das vom Prämaß μ auf \mathcal{S} erzeugte äußere Maß. Dann gilt

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_*$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

O.B.d.A sei $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset$. Sei $(B_n)_n \in \mathcal{C}(B)$, $B_n \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B_n &= (B_n \cap A) \sqcup (B_n \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B_n) &= \bar{\mu}(B_n) = \bar{\mu}((B_n \cap A)) + \overline{\mu(B_n \setminus A)} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mu}(B_n \setminus A)) \end{aligned}$$

Es gilt $(B_n \cap A)_n \in \mathcal{C}(B \cap A)$ und $(B_n \setminus A)_n \in \mathcal{C}(B \setminus A)$

$$\begin{aligned} &\geq \mu^*(B \cap A) + \bar{\mu}^*(B \setminus A) \\ &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B) &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \square \end{aligned}$$

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz von Carathéodory zu beweisen.

Beweis von Satz 5.1.2. SCHRITT 1: Wir zeigen, dass \mathcal{A}_* eine Algebra ist. Die Stabilität unter Komplementbildung und $\emptyset \in \mathcal{A}_*$ zeigt sich leicht. Wir wollen also noch zeigen, dass $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$. Das heißt es soll gelten

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &:= (A_1 \cap B) \setminus A_2 \\ B_2 &:= (A_2 \cap B) \setminus A_1 \\ B_3 &:= B \cap A_1 \cap A_2 \\ B_4 &:= B \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \\ B \setminus (A_1 \cup A_2) &= B_4 \end{aligned}$$

Das heißt es ist zu zeigen, dass

$$\mu(B) = \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) + \mu(B_4)$$

A_1 erfüllt die Zerlegungsbedingung. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B_1 \cup B_3) + \mu^*(B_2 \cup B_4) \end{aligned}$$

Verwende A_2 , um $B_1 \cup B_3$ zu zerlegen

$$\begin{aligned} \mu^*(B_1 \cup B_3) &= \mu^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + \mu^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) \end{aligned}$$

Genauso zerlegen von $B_2 \cup B_4$ mittels A_2

$$\begin{aligned} \mu^*(B_2 \cup B_4) &= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_4) \\ \Rightarrow \mu^*(B) &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3) + \mu^*(B_4) \end{aligned}$$

Machen dasselbe mit $\overline{B} := B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3)$$

Es folgt dann $A_1 \cup A_2$ erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$.

[02. Dez] SCHRITT 2: Wir zeigen, dass μ^* endlich additiv auf \mathcal{A}_* ist. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Wir benutzen A_1 , um $A_1 \sqcup A_2$ zu zerlegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \sqcup A_2) &= \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_1) + \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \cap A_1) \\ &= \mu^*(A_2) + \mu^*(A_1) \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Wir zeigen, dass \mathcal{A}_* eine σ -Algebra und μ^* ein Maß auf \mathcal{A}_* ist. Sei $(A_j)_j \subseteq \mathcal{A}_*$ und $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

Dabei reicht \geq zu zeigen, da die andere Ungleichung allgemein erfüllt ist. Wir definieren

$$F_n := \bigsqcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_*$$

mit $F_n \nearrow A$ und

$$B \setminus A \subseteq B \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also wird B von F_n zerlegt

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n) \\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^n A_j\right)\right) + \mu^*(B \cap \bigcap_{j=1}^n A_j^c) \end{aligned}$$

Wegen der endlichen Additivität von μ^* gilt

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \cap \bigcap_{j=1}^n A_j^c) \\ B \cap A &= B \cap \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j) \\ \Rightarrow \mu^*(B \cap A) &= \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j)\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)) \end{aligned}$$

Aber wir wissen $B \setminus A \subseteq B \setminus F_n$. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus F_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)) = \mu(B) \end{aligned}$$

Das heißt A erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_*$. Das heißt \mathcal{A}_* ist ein Dynkinsystem. Wir wollen Satz 3.1.6 anwenden und müssen daher noch zeigen, dass \mathcal{A}_* \cap -stabil ist. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = \left(A_1^c \cup A_2^c\right)^c \in \mathcal{A}_*$$

für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$. Damit ist \mathcal{A}_* nach Lemma 3.1.6 eine σ -Algebra.

SCHRITT 4: Wir zeigen, dass μ^* ein Maß auf \mathcal{A}_* ist. Sei

$$B := A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Wir zerlegen B mittels A

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j) \end{aligned}$$

Durch die σ -Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in die andere Richtung. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(A_j) \quad \square$$

Um den Satz von Carathéodory auf λ^d anwenden zu können, brauchen wir noch

- $\mathcal{J}^d :=$ Mengensystem der (rechts-)halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^d ist ein Halbring
- $\lambda^d : \mathcal{J}^d \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Prämaß

Lemma 5.1.11. Seien X_1, X_2 Mengen und \mathcal{S}_1 ein Halbring in X_1 sowie \mathcal{S}_2 Halbring in X_2 . Dann gilt $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Halbring in $X_1 \times X_2$.

Beweis.

(S₁) $\emptyset \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ folgt direkt aus $\emptyset \in \mathcal{S}_1$ und $\emptyset \in \mathcal{S}_2$

(S₂) Seien $J_1^1, J_1^2 \in \mathcal{S}_1$ und $J_2^1, J_2^2 \in \mathcal{S}_2$. Dann gilt

$$(J_1^1 \times J_2^1) \cap (J_1^2 \times J_2^2) = (J_1^1 \cap J_1^2) \times (J_2^1 \cap J_2^2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

(S₃) (Übung)

\square

Satz 5.1.12.

$$\mathcal{J}^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\}$$

ist ein Halbring.

Beweis. Für eine Dimension (das heißt $d = 1$) zeigen sich die Halbring-Eigenschaften von \mathcal{J}^1 direkt durch Fallunterscheidungen. Wir wollen also für höhere Dimensionen einfach Lemma 5.1.11 induktiv anwenden. Wir definieren also

$$\mathcal{J}^2 := \mathcal{J}^1 \times \mathcal{J}^1$$

Das ist nach dem Lemma ein Halbring

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{J}^3 &:= \mathcal{J}^2 \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \\ &\vdots \\ \Rightarrow \mathcal{J}^d &:= \mathcal{J}^{d-1} \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 5.1.13. Sei μ endlich-additiv auf einem Halbring \mathcal{S} . Wir betrachten die folgenden Aussagen

- (a) μ ein Prämaß
- (b) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \nearrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (c) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (d) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow \emptyset \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$

Dann gilt (a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d). Gilt ferner $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{S}$, dann ist auch (c) \Rightarrow (b). In diesem Fall sind also alle Aussagen äquivalent und damit verwendbar, um zu prüfen, ob μ ein Prämaß ist.

Beweis. (Später) □

Satz 5.1.14. Sei λ^d für $A \in \mathcal{J}^d$ mit

$$A = \times_{j=1}^d [a_j, b_j) = [a, b)$$

definiert als

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Dann ist λ^d ein Prämaß auf \mathcal{J}^d .

Beweis. Es gilt $\lambda^d(\emptyset) = \lambda^d([a, a)) = 0$. ?? □

[06. Dez] Wir wollen Maße nun einfacher darstellen, als nur als Fortsetzung eines Prämaßes, was auf einem Halbring definiert ist. Dafür sei nun μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^d mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Konstruktion 5.1.15 (Maße mit Funktionen identifizieren). Wir betrachten zunächst nur den Fall $d = 1$. Wir wollen μ auf den halboffenen Intervallen durch eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen. Das heißt es soll gelten

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Welche Eigenschaften hat dann die Funktion F ?

1. F ist monoton wachsend

$$F(b) - F(a) = \mu([a, b)) \geq 0 \quad \forall b \geq a$$

2. F ist ?seitig stetig. Wir betrachten eine Folge $x_n \rightarrow b$ ($a < b$) mit $x_n \leq x_{n+1}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n) = [a, b)$$

Da μ ein Maß ist, ist es von unten stetig. Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(a) &= \mu([a, x_n)) \nearrow \mu([a, b)) = F(b) - F(a) \\ \Rightarrow \lim_{x \nearrow b} F(x) &= F(b) \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.16 (Dirac-Maß).

Satz 5.1.17. Jede wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die von rechts stetig ist und (von links Grenzwerte hat) erzeugt ein Borelmaß μ_F , sodass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

Ferner: Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend und von rechts stetig mit $\mu_G = \mu_F$. Dann folgt

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Der letzte Teil zeigt sich durch nachrechnen direkt. Erster Teil: Siehe Literatur. □

6 [*] Messbare Abbildungen und Bildmaße

6.1 Messbare Abbildungen

Definition 6.1.1. Seien (X, \mathcal{A}) und (X', \mathcal{A}') Messräume und $T : X \rightarrow X'$ eine Funktion. Dann heißt T $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Beispiel 6.1.2.

1. Konstante Funktionen sind messbar
2. Wir betrachten (X, \mathcal{O}) , (X', \mathcal{O}') mit \mathcal{O} Mengensystem der offenen Mengen. Dann ist eine stetige Funktion $T : \mathcal{B}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{O}')$ -messbar, da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen sind

Satz 6.1.3. Seien (X, \mathcal{A}) , (X', \mathcal{A}') Messräume und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ Erzeuger von $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$. Dann ist T genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'$$

Beweis. $\Sigma' := \{A' \subseteq X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ -Algebra in X' (Übung) mit $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}' &= \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\Sigma') = \Sigma' \\ \Rightarrow \mathcal{A}' &= \Sigma' \end{aligned}$$

□

Satz 6.1.4. Seien (X_1, \mathcal{A}_1) , (X_2, \mathcal{A}_2) , (X_3, \mathcal{A}_3) Messräume und $T_1 : X_1 \rightarrow X_2$ $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ -messbar sowie $T_2 : X_2 \rightarrow X_3$ $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$ -messbar. Dann ist $T_2 \circ T_1 : X_1 \rightarrow X_3$ $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ -messbar.

Beweis. Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1} \left(\underbrace{T_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2} \right) \in \mathcal{A}_1$$

□

Bemerkung 6.1.5. Sei I eine Index-Menge und (X_j, \mathcal{A}_j) ein Messraum für $j \in I$. Abbildung $T_j : X \rightarrow X_j$. Dann ist $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ die kleinste σ -Algebra, auf X , für die alle Abbildungen T_j messbar (also $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right) - \mathcal{A}_j$ -messbar) sind.

Satz 6.1.6. $S : X_0 \rightarrow X$ ist $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}$ -messbar. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ genau dann, wenn

$$T_j \circ S : X_0 \rightarrow X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Folgt direkt aus Satz 6.1.4.

„ \Leftarrow “ Nehmen $E \in \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Dann ist $E \in T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ für ein $j \in I$. Dann ist $E = T_j^{-1}(A_j)$. Es folgt $S^{-1}(E) = S^{-1}(T_j^{-1}(A_j)) = (T_j \circ S)^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}_0$.

$\mathcal{E} := \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist Erzeuger von $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Damit folgt die Behauptung.

□

6.2 Bildmaße

[09. Dez] **Notation 6.2.1.** Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume. Wir schreiben $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$ für eine Funktion $T : X \rightarrow X'$, die \mathcal{A} - \mathcal{A}' -messbar ist.

Konstruktion 6.2.2. Sei μ ein Maß auf (X, \mathcal{A}) und $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$ eine Funktion. Wir nehmen $A' \in \mathcal{A}'$ und definieren

$$\mu'(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

Dann ist μ' ein Maß auf (X', \mathcal{A}') .

Definition 6.2.3 (Bildmaß). Im Sinne von Konstruktion 6.2.2 nennen wir μ' das Bild von μ unter T . Das heißt wir schreiben

$$\mu' := T(\mu)$$

Es gilt

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

Bemerkung 6.2.4 (Transitivität der Bildmaße). Ist $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$, $T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{A}_3)$ und μ ein Maß auf (X_1, \mathcal{A}_1) . Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\mu) &= T_2(T_1(\mu)) \\ (T_2 \circ T_1)^{-1} &= T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \\ \Rightarrow (T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) &= T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_3)) \end{aligned}$$

7 [*] Messbare numerische Funktionen

Definition 7.1.1 ($\overline{\mathbb{R}}$). Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ für die Menge der reellen Zahlen einschließlich $\pm\infty$. Wir definieren die algebraischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 x + \infty &:= \infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 x - \infty &:= -\infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 \infty + \infty &:= \infty \\
 -\infty + (-\infty) &= -\infty - \infty := -\infty \\
 -\infty < x < \infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 x \cdot \infty &:= \infty & \forall x > 0 \\
 x \cdot (-\infty) &:= -\infty & \forall x > 0 \\
 x \cdot \infty &:= (-\infty) & \forall x < 0 \\
 x \cdot (-\infty) &:= \infty & \forall x < 0 \\
 0 \cdot (\pm\infty) &:= 0 \\
 \frac{x}{\pm\infty} &:= 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\
 \infty \cdot \infty &= \infty \\
 \infty \cdot (-\infty) &= -\infty
 \end{aligned}$$

Dabei bleiben Ausdrücke wie $\infty - \infty$ nicht definiert. Wir definieren offene Mengen im $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, wenn

$$\forall x \in U \cap \mathbb{R} \exists R > 0: (x - R, x + R) \subseteq U$$

Außerdem muss für den Fall $\infty \in U$ zu sätzlich gelten

$$\exists R > 0: (R, \infty] \subseteq U$$

Analog muss für $-\infty \in U$ gelten

$$\exists L > 0: [-\infty, L) \subseteq U$$

Mit dieser Definition können wir die Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren mit $\overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathcal{B}}$.

Dann gilt für die Spur- σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}^1 \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}^1$.

Bemerkung 7.1.2 (Identitätsfunktion). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann definieren wir die Identitätsfunktion (von A) mit

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diese ist Borel-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 A \subseteq B &\Rightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B \\
 \mathbf{1}_{A^c} &= 1 - \mathbf{1}_A
 \end{aligned}$$

Definition 7.1.3 (Numerische Funktion). Eine numerische Funktion ist eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Ist \mathcal{A} eine σ -Algebra in X , so heißt f \mathcal{A} -messbar, falls es \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist. Das heißt

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}}: f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Satz 7.1.4. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Dann ist eine numerische Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis. Wir setzen $\overline{\mathcal{E}} := \{[\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Zu zeigen ist $\sigma(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{\mathcal{B}}^1$

(1) Es gilt $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Das heißt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Sigma := \sigma(\overline{\mathcal{E}}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &[\alpha, \beta) = [\alpha, \infty] \setminus [\beta, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \quad (\alpha \leq \beta) \\ &\Rightarrow [\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \sigma(\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1) \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \{-\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^C \in \sigma(\mathcal{E}) \\ &\Rightarrow \forall G \in \Sigma: \overline{G} \cap \mathbb{R} = \overline{G} \cap (\{-\infty, \infty\}^C) = \Sigma \\ &\Rightarrow \mathbb{R} \cap \Sigma := \Sigma \\ &\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \Sigma \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1 \cup \{0, \{-\infty\}, \{\infty\}, [-\infty, \infty)\} \subseteq \Sigma \end{aligned}$$

Also ist $\overline{\mathcal{E}}$ ein Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}^1$ und es genügt die Maßeigenschaften auf dem Erzeuger zu haben. □

Satz 7.1.5. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Dann ist eine numerische Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (1) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (2) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (3) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

Beweis. Die Äquivalenz zu (1) folgt direkt aus Satz 7.1.4. Warum sind die anderen Aussagen dazu äquivalent? (Übung). □

Satz 7.1.6. Für messbare Funktionen $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und (X, \mathcal{A}) ein Messraum folgt

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$$

Beweis. \mathbb{Q} ist abzählbar. Dann ist

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{q < g\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{A} \\
 \{f \leq g\} &= \{f > g\}^c \\
 \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} = \mathcal{A} \\
 \{f \neq g\} &= \{f = g\}^c \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

□

[13. Dez] **Satz 7.1.7.** Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -messbar. Dann folgt $f \pm g$ (falls definiert) sowie $f \cdot g$ sind messbar.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \{f - g \geq \alpha\} &= \left\{ f \geq \underbrace{g + \alpha}_{=: h} \right\} \\
 &= \{f \geq h\}
 \end{aligned}$$

Das heißt es reicht aus zu zeigen, dass $\alpha + g$ (bzw. h) messbare Funktionen für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. g ist messbar, das heißt

$$\begin{aligned}
 \{g \leq \beta\} &\in \mathcal{A} \\
 h \geq \beta &\Leftrightarrow g + \alpha \geq \beta \Leftrightarrow g \leq \beta - \alpha \\
 \{h \geq \beta\} &= \{g \leq \beta - \alpha\}
 \end{aligned}$$

Das ist messbar, da g messbar ist und wir Satz 7.1.6 anwenden können. Damit ist h und damit $f - g$ messbar.

Um zu zeigen, dass auch $f + g$ messbar ist, können wir einfach zeigen, dass $-g$ messbar ist. Es gilt

$$\{-g \geq \gamma\} = \{g \leq -\gamma\}$$

Damit ist $-g$, also auch $f - (-g) = f + g$ messbar.

Wir zeigen noch die Messbarkeit von $f \cdot g$. Annahme: f und g sind reellwertig

$$\begin{aligned}
 (f + g)^2 - (f - g)^2 &= 4fg \\
 \Rightarrow fg &= \frac{1}{4} \left((f + g)^2 - (f - g)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Das heißt es reicht aus, zu zeigen, dass die Messbarkeit einer Funktion h auch die Messbarkeit von h^2 impliziert

$$\begin{aligned}
 \{h^2 \geq \beta\} &= X \quad \text{falls } \beta \leq 0 \\
 \{h^2 \geq \beta\} &= \{h \geq \sqrt{\beta}\} \cup \{h \leq -\sqrt{\beta}\} \in \mathcal{A} \quad \text{falls } \beta > 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Messbarkeit von h^2 gezeigt. Wir wollen nun noch die Annahme loswerden, dass f und g reellwertig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned}
 X_1 &:= \{fg = +\infty\} \cup (\{f > 0\} \cap \{g = \infty\} \sqcup (\{f < 0\} \cap \{g = -\infty\})) \\
 &\quad \cup (\{f = \infty\} \cap \{g \geq 0\} \cup \{f = \infty\} \cap \{g < 0\}) (?) \\
 X_2 &:= \{fg = -\infty\} \\
 X_3 &:= \{fg = 0\} = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4 &:= (X_1 \cup X_2 \cup X_3)^C \\
\Rightarrow f, g : X_4 &\rightarrow \mathbb{R} \text{ sind reellwertig} \\
fg &= fg \mathbf{1}_{X_4} + \infty \mathbf{1}_{X_1} - \infty \mathbf{1}_{X_2} + 0 \mathbf{1}_{X_3}
\end{aligned}$$

Damit ist fg nach Voraussetzung messbar, da $X_4 \in \mathcal{A}$. □

Satz 7.1.8 (WICHTIG). Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ sowie $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar.

Bemerkung 7.1.9. Sei $s := \sup_n f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist punktweise definiert. Das heißt

$$s(x) = \left(\sup_n f_n \right) (x) := \sup_n f_n(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis von Satz 7.1.8. Sei $s(x) := \sup_n f_n(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\{s \leq \alpha\} &= \{x : s(x) \leq \alpha\} =: A_1 \\
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < \alpha\} = A_2 \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Wir zeigen $A_1 = A_2$. Sei $x \in A_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq s(x) = \sup f_n(x) \geq f_n(x) \\
\Rightarrow f_m(x) &\leq \alpha \quad \forall m \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow A_1 &\subseteq A_2
\end{aligned}$$

Sei $x \in A_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \sup f_n(x) &\leq \alpha \Rightarrow x \in A_1
\end{aligned}$$

Damit ist $A_1 = A_2$. Es gilt

$$\inf_n f_n = - \sup_n (-f_n)$$

ist messbar

$$\begin{aligned}
\left(\limsup_n f_n \right) (x) &= \inf_n \sup_{\alpha \geq n} f_\alpha(x) \\
\left(\liminf_n f_n \right) (x) &= \sup_n \inf_{\alpha \geq n} f_\alpha(x)
\end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.10. Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen auf X und (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Angenommen $\forall x \in X$ existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (wir schreiben auch $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$). Dann ist f messbar.

Beweis.

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Damit ist f nach dem vorherigen Satz messbar. □

Korollar 7.1.11. Seien $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann sind

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n := \max(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (\text{punktweise})$$

sowie

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n := \min(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

messbar.

Beweis. Nehme die Folge $(\bar{f}_n)_n$ mit $\bar{f}_m = f_m$ für $1 \leq m \leq n$ und $\bar{f}_m = f_n$ für $m > n$. Damit ist

$$f_1 \vee \dots \vee f_n = \sup_n \bar{f}_n$$

messbar nach Satz 7.1.8. Die zweite Behauptung zeigt sich analog. \square

Notation 7.1.12. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir definieren

$$\begin{aligned} f_+ &:= f \vee 0 = \max(f, 0) \geq 0 & (\text{Positivteil}) \\ f_- &:= (-f) \vee 0 \geq 0 & (\text{Negativteil}) \end{aligned}$$

Damit gilt außerdem

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

Korollar 7.1.13. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind.

Korollar 7.1.14. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann ist $|f|$ messbar.

8 [*] Elementarfunktionen und ihr Integral

Definition 8.1.1. Es sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Wir definieren $E_+ := E_+(X, \mathcal{A})$ als die Menge aller nicht-negativen Elementarfunktionen. Das heißt $u \in E_+$, falls $u : X \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ \mathcal{A} -messbar ist und $\text{Bild}(u)$ endlich viele Werte annimmt. Das heißt

$$u(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_j < \infty \quad \forall j \leq n \\ \alpha_i &\neq \alpha_n \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Wir setzen $A_j := u^{-1}(\{\alpha_j\}) \in \mathcal{A}$. Damit gilt $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$. Wir haben den Raum X nun folgendermaßen disjunkt zerlegt: $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$.

Sind umgekehrt nicht-notwendigerweise disjunkte $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}$ eine Elementarfunktion.

Bemerkung 8.1.2 (Eigenschaften von E_+). Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $u, v \in E_+$. Dann gilt

- $\alpha u \in E_+$
- $u + v \in E_+$
- $u - v \in E_+$
- $u \wedge v \in E_+$
- $u \vee v \in E_+$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition und den Messbarkeitseigenschaften aus dem letzten Kapitel. \square

Notation 8.1.3 (Normaldarstellung). Sei $u \in E_+$. Dann schreiben wir $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ als Normaldarstellung mit $\bigsqcup_{j=1}^n A_j = X$.

Lemma 8.1.4. Sei $u \in E_+ = E_+(X, \mathcal{A})$ mit Normaldarstellungen

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

Sei μ ein Maß auf (X, \mathcal{A}) . Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k)$$

Das heißt die Uneindeutigkeit der Normaldarstellung verschwindet bei der Verwendung eines Maßes.

Beweis.

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \\ &= B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A_j &= \bigcup_{k=1}^n (A_j \cap B_k) & B_k &= \bigcup_{j=1}^m (A_j \cap B_k) \\
\Rightarrow \mathbb{1}_{A_j} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} & \mathbb{1}_{B_k} &= \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
\Rightarrow u &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} & &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_k \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}
\end{aligned}$$

Jeder Punkt $x \in X$ liegt in genau einer Menge $A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \alpha_{j_0} \mathbb{1}_{A_{j_0} \cap B_{k_0}}(x) = \beta_{k_0} \mathbb{1}_{A_{j_0} \cap B_{k_0}}(x) \\
\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_j \cap B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k)
\end{aligned} \quad \square$$

[16. Dez] **Definition 8.1.5.** Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und u eine Elementarfunktion. Dann heißt die von der spezifischen Normaldarstellung $\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ unabhängige Zahl (Lemma 8.1.4)

$$\int u \, d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

das (μ) -Integral von u (über X). Wir schreiben auch

$$\int u \, d\mu = \int_X u \, d\mu = \int_X u(x) \, d\mu(x) = \int_X u(x) \mu(dx)$$

und definieren in diesem Sinne eine Abbildung

$$\begin{aligned}
E_+ &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
u &\mapsto \int u \, d\mu
\end{aligned}$$

Lemma 8.1.6 (Eigenschaften des Integrals). Für $A \subseteq X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E_+$ gilt

- (i) $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$
- (ii) $\int \alpha u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu$
- (iii) $\int (u + v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$
- (iv) $u \leq v \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$

Beweis. (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. Für (iii) sei

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \quad v = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^n A_j \cap B_k \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^m A_j \cap B_k \\
&u = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \quad v = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
&\Rightarrow u + v = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\alpha_j + \beta_k) \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
&\int u \, d\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \quad \int v \, d\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (u + v) \, d\mu &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\alpha_j + \beta_k) \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu
\end{aligned}$$

Für (iv) gilt mit der Definition, die wir auch schon bei (iii) verwendet haben, dass $\alpha_j \leq \beta_k$ auf $A_j \cap B_k$

$$\Rightarrow \int u \, d\mu = \sum_j^k \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_j \sum_k \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int v \, d\mu$$

9 [*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen

Satz 9.1.1. Für jede wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ und jedes $u \in E_+$ gilt

$$u \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$$

Beweis. Sei $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ und $0 < \delta < 1$. Wir definieren $B_n := \{x \in X : u_n(x) \geq \delta u(x)\}$. Wir wissen nach Voraussetzung, dass $u_n \leq u_{n+1}$, das heißt $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) \geq u(x) \, \forall x \in X$. Sei $x \in X$ fest. Ist $u(x) > 0$, dann gilt $\exists N(x) \in \mathbb{N} : u_n(x) \geq \delta u(x)$ für $n \geq N(x)$.

Aus $u_{n+1} \geq u_n$ folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$. Außerdem ist $\forall x \in X : x \in B_n$ für ein ausreichend großes n . Also haben wir $B_n \nearrow X$. Auch ist $u_n \geq \delta u \mathbb{1}_{B_n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int u_n \, d\mu &\geq \int \delta u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \\ u &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \\ \Rightarrow u \mathbb{1}_{B_n} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n} \\ \delta \int u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu &= \delta \int \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n} \, d\mu \\ &= \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \rightarrow \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \\ \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int u \, d\mu \geq \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_j \cap B_n) = \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \delta \int u \, d\mu \end{aligned}$$

Das gilt für alle $\delta < 1$. Mit dem Limes für $\delta \rightarrow 1$ folgt dann die Behauptung. \square

Korollar 9.1.2. Seien $(u_n)_n, (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsende Folgen von Elementarfunktionen. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu$$

Beweis. Nach dem vorherigen Satz und $u_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ gilt

$$\begin{aligned} \int u_n \, d\mu &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \\ \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu$$

\square

Notation 9.1.3. Wir schreiben $E^* = E_+^* = E_+^*(X, \mathcal{A})$ für die Menge aller numerischen meßbaren Funktionen $f \geq 0$ auf X , für die es eine wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ gibt, sodass $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = f$. Für $f \in E_+^*$ ist dann

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int u_n \, d\mu : u_n \subseteq E_+, \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = f \right\}$$

Das nennen wir das (μ) -Integral von f .

[20. Dez] **Bemerkung 9.1.4** (Eigenschaften des Integrals). Seien $f, g \in E^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

- (i) $\alpha f \in E^*$
- (ii) $f \pm g \in E^*$
- (iii) $fg \in E^*$
- (iv) $f \vee g := \max(f, g) \in E^*$
- (v) $f \wedge g := \min(f, g) \in E^*$
- (vi) $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$
- (vii) $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$
- (viii) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Beweis.

(i)-(v) Beachte $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ und $g = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Damit lassen sich entsprechende Folgen finden, um auch Kombinationen von f und g im obigen Sinne zu finden.

(vi) (Übung)

(vii) Es ist $f = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, $g = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Das heißt

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu \\ \int g \, d\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, d\mu \\ \int f + g \, d\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int (u_n + v_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (u_n + v_n) \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int u_n \, d\mu + \int v_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \end{aligned}$$

(viii) $f \leq g \Rightarrow u_k \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Wir definieren $(\tilde{u}_n)_n$ mit $\tilde{u}_n := u_k$ für ein festes k

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{u}_k = u_k \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \\ &\Rightarrow \int u_k \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \tilde{u}_k \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu = \int g \, d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int u_k \, d\mu &\leq \int g \, d\mu \\ \Rightarrow \int f \, d\mu &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \int u_k \, d\mu = \int g \, d\mu \end{aligned}$$

□

Bemerkung 9.1.5 (Interpretation des Integrals). Das Integral bezüglich einem Maß μ ist eine monotone Linearform von E^* nach $[0, \infty]$. Aber was ist E^* ?

Notation 9.1.6. Es sei $\mathcal{M}_+ := \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}) := \{f : x \rightarrow [0, \infty], f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$.

Satz 9.1.7. $E^*(X, \mathcal{A}) = \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$.

Beweis. $E^* \subseteq \mathcal{M}_+$ ist klar. Wir zeigen die Inklusion in die andere Richtung. Wir definieren für ein $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, n2^n\}$

$$\begin{aligned} A_{j,n} &:= \begin{cases} \{f \geq j2^{-n}\} \cap \{f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{j2^{-n} \leq f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für ein festes n ist $A_{j,n} \cap A_{k,n} = \emptyset$ für $j \neq k$. Wir setzen

$$u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} j2^{-n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$$

Behauptung 1: $u_n \leq u_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$. Bew.:

$$\begin{aligned} A_{2k,n+1} &= \{2k2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\} = \{k2^{-n} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\} \\ A_{2k+1,n+1} &= \{(2k+1)2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+2)2^{-(n+1)}\} \\ \Rightarrow A_{k,n} &= A_{2k,n+1} \sqcup A_{2k+1,n+1} \\ \Rightarrow u_n &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Damit ist auch $u_n \leq f \, \forall n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt auf $A_{j,n}$ ist $f(x) \leq (j+1)2^{-n} = u_n(x) + 2^{-n}$. Das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$ für $x \in A_{j,n}$. Insgesamt gilt damit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f$. □

Satz 9.1.8 (Monotone Konvergenz). Sei $(f_n)_n$ eine wachsende Folge in $E^*(X, \mathcal{A})$. Dann folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in E^*$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu$.

Beweis. Sei $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Dann reicht es, zu zeigen, dass $\exists (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsend mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = f$ und $v_n \leq f_n$. Denn in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \int v_n \, d\mu &\leq \int f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \\ \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 9.1.9 folgt dann

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu$$

Wir brauchen also nur noch die Existenz von $(v_n)_n$. Zu (f_n) existiert ein $(u_{m,n})_n \subseteq E_+$ mit $u_{m,n} \leq u_{m-1,n}$ sowie $f_n = \sup_m u_{m,n}$. Das heißt

$$\begin{aligned} v_m &\leq v_{m+1} \\ \Rightarrow \sup_m v_m &\in E_+ \end{aligned}$$

Behauptung: $\sup_m v_m = f = \sup_n f_n$. Da $u_{m,n} \leq f_n \leq f_{n+1}$

$$\Rightarrow \sup_m v_m \leq \sup_m f_m = f$$

Auch ist $v_m = u_{m-1} \vee u_{m-2} \vee \dots \geq u_{m,n} \rightarrow f_n$

$$\begin{aligned} f_n &= \sup_m u_{m,n} = \sup_m v_m \\ \Rightarrow f &= \sup_n f_n \leq \sup_m v_m \leq f \\ \Rightarrow f &= \sup_{m \in \mathbb{N}} v_m \end{aligned}$$

□

Bemerkung 9.1.9. Im Sinne von Satz 9.1.8 gilt die Ungleichung $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f d\mu$ allgemein. Die Voraussetzung, dass die Folge wächst ist nur für die Ungleichung in die andere Richtung relevant.

Korollar 9.1.10. Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in E^*$ und $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.

Beweis. Wir haben $f_n \geq 0$. Das heißt die Partialsummen von $(f_n)_n$ sind monoton wachsend. Damit ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz 9.1.8. □

10 [*] Integrierbarkeit

Wir haben $f \geq 0$ messbar auf X . Dann ist $\int_X f \, d\mu$ wohldefiniert. Wir wollen das auch auf Funktionen mit negativen Werten erweitern.

Definition 10.1.1. Eine numerische Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ) -integrierbar, wenn sie \mathcal{A} -messbar ist sowie $\int f_+ \, d\mu, \int f_- \, d\mu \in \mathbb{R}$. In diesem Fall definieren wir

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$$

Satz 10.1.2. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar und μ ein Maß auf \mathcal{A} . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- (i) f_+ und f_- sind integrierbar
- (ii) Es existieren integrierbare Funktionen $u, v \geq 0$ mit $f = u - v$
- (iii) Es existiert eine integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit $|f| \leq g$
- (iv) $|f|$ ist integrierbar

Im Fall (ii) ist $\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$.