Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ A und B, die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks)**.** Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks)**.** Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2} gh$$

Beispiel 1.1.3 (Parkettierung)**.** Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

Bemerkung 1.1.4. Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) := \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \varnothing$ ist. Außerdem soll gelten, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \varnothing$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

[1] σ-Additivität

2 σ-Algebren und Maße

2.1 σ-Algebren

Definition 2.1.1 (σ-Algebra)**.** Sei $E \neq \varnothing$ eine Menge. Eine σ-Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eigenschaften

(Σ_1) $E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \coloneqq E \setminus A \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{A}$ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar ($\mathcal{A}$-messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ-Algebren)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Dann gilt

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ (das heißt $\mathcal{A}$ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)

(iii) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

Beweis.

(i) $E \in \mathcal{A} \overset{(\Sigma_2)}{\Rightarrow} \varnothing = E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(ii) Wir definieren $A_1 \coloneqq A$, $A_2 \coloneqq B$ und $A_i \coloneqq \varnothing$ für $i \geq 3$. Dann gilt gilt (Σ_3)

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = A \cap B^{\mathrm{C}} \cap E \cap E \cap \cdots$. Dann gilt nach (iii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$ □

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ-Algebren

(a) Für eine Mengen E ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ selber nach Definition immer eine σ-Algebra über E.

(b) $\{\varnothing, E\}$ ist die kleinste σ-Algebra in E.

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} \coloneqq \left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ ist die kleinste σ-Algebra, die A enthält.

(d) Sei E überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} \coloneqq \left\{A \subseteq E : A \text{ oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$ eine σ-Algebra.

(e) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in E. Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F \coloneqq \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von F.

(f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \to E'$ eine Funktion und $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in E'. Dann ist auch

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

(Σ_1) $E^{\mathrm{C}} = \varnothing$ ist abzählbar $\Rightarrow E \in \mathcal{A}$

(Σ_2) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder A^{C} ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}$ oder $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(Σ_3) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden 2 Fälle
Fall 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.
Fall 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^{\mathrm{C}}$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \subseteq (A_j)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. □

Notation 2.1.4 (Durchschnitt)**.** Seien I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E. Dann ist

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \coloneqq \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der $\mathcal{A}_j$.

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I}$ eine Familie von σ-Algebren in E. Dann gilt

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ-Algebra.

Beweis.

(Σ_1) $E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(Σ_2) $A \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$. Daraus folgt $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

(Σ_3) Sei $A_n \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. Dann gilt $A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$ □

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein System von Teilmengen von E. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\zeta)$ in E, welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ-Algebra in E und

(b) Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ in E mit $\zeta \subseteq A$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ-Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I \coloneqq \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist σ-Algebra und $\zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ-Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) \coloneqq \bigcap_{\mathcal{A}\in I} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an I. Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. □

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ die von ζ erzeugte σ-Algebra.

Definition 2.1.8. Sei $\mathcal{O}_d$ das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Borel-σ-Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung)**.** Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von A und B.

Definition 2.2.2 (Maß)**.** Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

(M_0) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

(M_1) $\mu(\varnothing) = 0$

(M_2) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Prämaß)**.** Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(PM_1) $\mu(\varnothing) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\varnothing \in \mathcal{A}$)

(PM_2) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.4 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen)**.** Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von X. Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.5.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.6 (Messraum und Maßraum)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar $(X, \mathcal{A})$ einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum.

3. Wir nennen μ endlich und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.7 (Eigenschaften von Maßen)**.** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)

(v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)

(vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)

(vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)

(viii) $\mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ-Subadditivität)

Beweis.

(i) Sei $A_1 \coloneqq A, A_2 \coloneqq B$ und $A_n \coloneqq \varnothing$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

(iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

(iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

(vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 \coloneqq A_1$ und $F_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{n} A_j &= \bigsqcup_{j=1}^{n} F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(F_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} F_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n \coloneqq B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

(viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A \coloneqq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.9 (Dirac-Maß)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac*-Maß bezeichnet.

Beispiel 2.2.10. Sei $\mathcal{A} := \left\{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ nach Beispiel 2.1.3 (d) eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$. Wir definieren ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.11 (Zählmaß)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elemente in A angibt.

Beispiel 2.2.12 (Diskretes W-Maß)**.** Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}\colon\, \omega_n \in A} p_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra)**.** Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(R_1) $\varnothing \in R$

(R_2) $A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$

(R_3) $A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.14 (Eigenschaften von Mengenringen)**.** Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \to R,\ (A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert $(R, \Delta, \cap)$ einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und $\cap$ der „Multiplikation“ entspricht.

3 Dynkinsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkinsystem)**.** Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

(D_1) $X \in \mathcal{D}$

(D_2) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$

(D_3) Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ-Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei X eine $2n$-elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine σ-Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j\in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in X, dann ist $\bigcap_{j\in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches $\mathcal{G}$ enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkinsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \varnothing$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ-Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D}\in I} \mathcal{D}$$ □

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine σ-Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Dann gilt $\mathcal{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^{\mathrm{C}}, B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$“ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3). Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D'_0 := \varnothing$ und $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Dann ist $(D'_n)_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D'_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \text{ falls } (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = \left(D'_n \cap (D'_{n-1})^{\mathrm{C}}\right) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = \left(A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. □

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus $\mathcal{G}$ ist $\cap$-stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil ist.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D \coloneqq \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: $\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkinsystem

(D_1) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

(D_2) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^{\mathrm{C}} \cap D = \left(Q^{\mathrm{C}} \cup D^{\mathrm{C}}\right) \cap D = (Q \cap D)^{\mathrm{C}} \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

(D_3) (Siehe handschriftliches Skript)

Nun können wir folgendermaßen argumentieren: Da $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} &\forall G, D \in \mathcal{G} \colon G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow\ &\forall D \in \mathcal{G} \colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ \Rightarrow\ &\forall D \in \mathcal{G} \colon \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \overset{\text{(Beh.)}}{=} \mathcal{D}_D \\ \Leftrightarrow\ &\forall D \in \mathcal{G}\ \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \colon G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} &\forall G \in \delta(\mathcal{G})\ \forall D \in \mathcal{G} \colon D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow\ &\forall G \in \delta(\mathcal{G}) \colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ \Rightarrow\ &\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ \Leftrightarrow\ &\forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) \colon D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ-stabil. □

Korollar 3.1.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine σ-Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

Beweis. Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine σ-Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{G}$ enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(a) $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil

(b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ $(X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n)$ mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

Beweis. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

$\mathcal{D}_n$ ist ein Dynkinsystem:

(D$_1$) Folgt direkt.

(D$_2$) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu\left(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\right) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\
&= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\
&= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\
&= \nu\left(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\right) \\
\Rightarrow A^{\mathrm{C}} &\in \mathcal{D}_n
\end{aligned}$$

(D$_3$) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\
\Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m &\in \mathrm{D}_n
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\mathcal{D}_n$ gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.
Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.
Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n := A \cap G_n \nearrow A$. Da μ, ν Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap G_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.2 (Ausschöpfende Folgen)**.** Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ σ-endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.3 (Eigenschaften der Borelmengen)**.** In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei $\mathcal{O}$ das System offener Teilmengen im $\mathbb{R}^d$ war. Wir definieren nun

- $\mathcal{A}_d$: System der abgeschlossenen Teilmengen im $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{K}_d$: System der kompakten Teilmengen im $\mathbb{R}^d$

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Beweis. SCHRITT 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da σ-Algebren stabil unter Komplementbildung sind.
SCHRITT 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.
SCHRITT 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\
A &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)
\end{aligned}
$$
□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

Beobachtung 4.1.4. Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine d mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j\ \forall j \in \{1, \ldots, d\}\right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

Definition 4.1.5. Es sei $J^d := \left\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a \leq b\right\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^d$.

Bemerkung 4.1.6 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß)**.** Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion T_c^{-1}. Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$
\begin{aligned}
\lambda^d\left(T_c^{-1}(I)\right) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\
&= \prod_{j=1}^{d} (b_j - c_j - (a_j - c_j))
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf J^d ist λ^d invariant unter Translation.

Lemma 4.1.7. Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c \coloneqq \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. SCHRITT 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d\right\}$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (Übung).
SCHRITT 2: $\mathcal{O}_d$ ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. ☐

[8. Nov] (fehlt)

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T\left(\lambda^d\right) = \lambda^d \quad \forall T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Beweis. Schritt 1: Sei $T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right) : T(0) = 0$. Das heißt T ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &\coloneqq x + a \\ \Rightarrow \ (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) && (b \coloneqq T^{-1}(a)) \\ &= T(x+b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &\coloneqq T\left(\lambda^d\right) && = \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a\left(T\left(\lambda^d\right)\right) = T_a \circ T\left(\lambda^d\right) \\ &= T \circ T_b\left(\lambda^d\right) = T(T_b(\lambda_d)) \\ &= T\left(\lambda^d\right) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist μ invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = \alpha\lambda^d$.
Frage: Warum ist $\alpha = 1$?
Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel $B \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le 1\right\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d\left(T^{-1}(B)\right) = \mu(B) = \alpha\lambda^d(B) \\ \Rightarrow \alpha &= 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T\left(\lambda^d\right) &= \lambda^d \quad \forall T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$ beliebig und wir setzen $c \coloneqq T(0)$ und $S \coloneqq T_{-c} \circ T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S\left(\lambda^d\right) &= \lambda^d \text{ nach Schritt 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T\left(\lambda^d\right) &= T_c(S(\lambda_d)) = T_c\left(\lambda^d\right) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach Schritt 1. □

Beispiel 4.1.9 (Lebesgue-Maß von einem Punkt)**.** Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Was ist dann $\lambda^d(\{x\})$?. Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$J \coloneqq [x, x + \varepsilon)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in J \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \to 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}
$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten $A \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$ null, da

$$
\begin{aligned}
\lambda^d(A) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\
\Rightarrow \lambda^d\left(\mathbb{Q}^d\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.1.10 (Lebesgue-Maß einer Hyperebene)**.** Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und wir definieren eine Hyperebene $H_j \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\right\}$. Was ist dann $\lambda^d(H_j)$? Wir definieren

$$
J_n \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1} 2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n (2n)^{d-1}}\right\}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
H_j &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \\
\lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1} 2^n} \\
&= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \lambda^d(H_j) &= 0
\end{aligned}
$$

Dieses Result gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form H_j abbildet.

5 [*] Existenz von Maßen

Definition 5.1.1 (Halbring)**.** Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring, falls

(S_1) $\varnothing \in \mathcal{S}$

(S_2) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

(S_3) $A, B \in \mathcal{S}$ existieren endlich viele disjunkte Mengen $S_1, \ldots, S_M \in \mathcal{S}$ mit $A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^{M} S_j$

Satz 5.1.2 (Nach Carathéodory)**.** Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{S})$.
Falls μ σ-endlich auf $\mathcal{S}$ ist, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

[25. Nov] **Definition 5.1.3** (Äußere Maße)**.** Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß, falls

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$ (Normierung)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ (σ-Subadditivität)

Konstruktion 5.1.4. Zu einem Prämaß μ auf $\mathcal{S}$ gibt es ein äußeres Maß.
Nehme $A \subseteq X$. Wir bepflastern A mit Mengen aus $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{C}(A) \coloneqq \left\{ (S_n)_{n\in\mathbb{N}} : S_n \in \mathcal{S} \ \forall n \in N \wedge A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \right\} \tag{Cover}$$

$\mathcal{C}(A) = \varnothing$ ist dabei möglich. Gegeben ein Prämaß $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ definieren wir nun

$$\mu^*(A) \coloneqq \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\} & \text{falls } \mathcal{C}(A) \neq \varnothing \\ +\infty & \text{falls } \mathcal{C}(A) = \varnothing \end{cases}$$

Lemma 5.1.5. Das in Konstruktion 5.1.4 definierte μ^* ist ein äußeres Maß.

Beweis.

(i) Wir nehmen $S_n = \varnothing$. Dann gilt $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) Sei $A \subseteq B$. Angenommen $\mathcal{C}(B) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\mu^*(A_n) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $(S_{n,m})_m \in \mathcal{C}(A_n)$ mit

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(S_n, m) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon\Sigma^n) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_m) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$ □

Konstruktion 5.1.6 (Prämaß auf erzeugtem Ring)**.** Sei μ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathcal{S}$. Wir wollen μ zu einem Prämaß auf dem erzeugten Mengenring forsetzen. Dazu gehen wir wie folgt vor.
Wir setzen $\mathcal{S}_\cup := \{S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_n : S_j \in \mathcal{S}\}$ und definieren

$$\overline{\mu}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_j)$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von μ. Angenommen $S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_n$ und $S_j, T_j \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_j = S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} S_k \right) &= S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} T_k \right) \\
&= \bigsqcup_{k=1}^{n} (S_j \cap T_k)
\end{aligned}$$

Analog ist auch

$$\begin{aligned}
T_k &= \bigsqcup_{j=1}^{n} (T_k \cap S_j) \\
\Rightarrow S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M &= \bigsqcup_{j=1}^{M} \bigsqcup_{k=1}^{N} (S_j \cap T_k) \\
\Rightarrow \overline{\mu}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n) &= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{j=1}^{M} \bigsqcup_{k=1}^{M} (S_j \cap T_k) \right) \\
\sum_{n=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \mu(S_j \cap T_k) &= \sum_{k=1}^{N} \mu(T_k) = \overline{\mu}(T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N)
\end{aligned}$$

Das heißt $\overline{\mu}$ ist wohldefiniert.

Frage: Wie verhält sich $\mathcal{S}_\cup$ unter allgemeinen (endlichen) Vereinigungen und Schnitten? Wir betrachten $S, T \in \mathcal{S}_\cup$ mit

$$\begin{aligned}
S \cap T &= (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \cap (T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N) \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{M} \bigsqcup_{k=1}^{N} (S_j \cap T_k) \in \mathcal{S}_\cup
\end{aligned}$$

Das heißt $\mathcal{S}_\cup$ ist stabil unter (endlichen) Schnitten.

$$S \setminus T = (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \setminus (T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow S \cap T^{\mathrm{C}} &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap \bigcap_{n=1}^{N} {T_k}^{\mathrm{C}} \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{M} \left(S_j \cap \bigcap_{k=1}^{N} {T_k}^{\mathrm{C}} \right) \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{M} \bigcap_{k=1}^{N} \left(S_j \cap {T_k}^{\mathrm{C}} \right) \in \mathcal{S}_{\cup}
\end{aligned}
$$

Das heißt für $S, T \in \mathcal{S}_{\cup}$ ist auch $S \setminus T \in \mathcal{S}_{\cup}$. Außerdem können wir schreiben

$$S \cup T = (S \setminus T) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus S) \in \mathcal{S}_{\cup}$$

Das heißt $\mathcal{S}_{\cup}$ ist ein Mengenring und $\overline{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{S}_{\cup}$.

$$\Rightarrow \overline{\mu}(T \cup S) = \overline{\mu}(S \setminus T) + \overline{\mu}(S \cap T) + \overline{\mu}(T \setminus S)$$

Das heißt $\overline{\mu}$ ist definiert für endlich viele Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}_{\cup}$.

Behauptung: $\overline{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\mathcal{S}_{\cup}$. Also ist zu zeigen, dass $\overline{\mu}$ σ-additiv auf $\mathcal{S}_{\cup}$ ist. Wir nehmen $(T_k)_k \subseteq \mathcal{S}_{\cup}$

$$T \coloneqq \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \in \mathcal{S}_{\cup}$$

Zu zeigen:

$$\overline{\mu}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\mu}(T_k)$$

Nach Definition von $\mathcal{S}_{\cup}$ gibt es $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und Indizes $0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$ mit

$$
\begin{aligned}
T_k &= S_{i(k-1)+1} \sqcup \dots \sqcup S_{i(k)} && (k \in \mathbb{N}) \\
T &= U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L \\
U_l &\coloneqq \bigsqcup_{i \in J_l} S_i
\end{aligned}
$$

Indexmengen $J_1, \dots, J_l \subseteq \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und $J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_L = \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}(T) &= \overline{\mu}(U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_L) \\
&= \overline{\mu}(U_1) + \ldots + \overline{\mu}(U_l) \\
&= \mu(U_1) + \ldots + \mu(U_l) \\
&= \sum_{i \in J_1} \mu(S_i) + \ldots + \sum_{i \in J_L} \mu(S_i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(T_k)
\end{aligned}
$$

[29. Nov] **Bemerkung 5.1.7** (Prämaß und äußeres Maß)**.** Wenn wir ein Prämaß μ auf einem Halbring $\mathcal{S}$ haben, dann gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

wobei μ^* das in Konstruktion 5.1.4 definierte äußere Maß ist. Das heißt μ^* ist eine Fortsetzung von μ.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$ und $(S_j)_j \in \mathcal{C}(A)$ Überdeckung von A. Dann gilt

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j\right) \cap A\right)$$

Wegen der σ-Subadditivität von $\overline{\mu}$ gilt

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j)$$

Wir nehmen das Infimum auf beiden Seiten und erhalten

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\mu(A) \geq \mu^*(A)$. Für ein $A \in \mathcal{S}$ nehmen wir $(S_j)_j$ mit $S_1 \coloneqq A$, $S_2 = S_3 = \ldots = \varnothing$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$
$$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

□

Definition 5.1.8 (Zerlegungsbedingung)**.** Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann sagen wir $A \subseteq X$ erfüllt die Zerlegungsbedingung, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X \tag{5.1.1}$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_* \coloneqq \{A \subseteq X : A \text{ erfüllt die Zerlegungsbedingung 5.1.1}\}$$

Bemerkung 5.1.9. Die Bedingung 5.1.1 ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

da die Ungleichung in die andere Richtung bereits durch die σ-Subadditivität von μ^* gegeben ist.

Lemma 5.1.10. Sei μ^* das vom Prämaß μ auf $\mathcal{S}$ erzeugte äußere Maß. Dann gilt

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_*$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

O.B.d.A sei $\mathcal{C}(B) \neq \varnothing$. Sei $(B_n)_n \in \mathcal{C}(B)$, $B_n \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$B_n = (B_n \cap A) \sqcup (B_n \setminus A)$$
$$\Rightarrow \mu(B_n) = \overline{\mu}(B_n) = \overline{\mu}((B_n \cap A)) + \overline{\mu(B_n \setminus A)}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{\mu}(B_n \setminus A))$$

Es gilt $(B_n \cap A)_n \in \mathcal{C}(B \cap A)$ und $(B_n \setminus A)_n \in \mathcal{C}(B \setminus A)$

$$\geq \mu^*(B \cap A) + \overline{\mu}^*(B \setminus A)$$
$$= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$
$$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

□

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz von Carathéodory zu beweisen.

Beweis von Satz 5.1.2. SCHRITT 1: Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_*$ eine Algebra ist. Die Stabilität unter Komplementbildung und $\varnothing \in \mathcal{A}_*$ zeigt sich leicht. Wir wollen also noch zeigen, dass $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$. Das heißt es soll gelten

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &:= (A_1 \cap B) \setminus A_2 \\ B_2 &:= (A_2 \cap B) \setminus A_1 \\ B_3 &:= B \cap A_1 \cap A_2 \\ B_4 &= B \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \\ B \setminus (A_1 \cup A_2) &= B_4 \end{aligned}$$

Das heißt es ist zu zeigen, dass

$$\mu(B) = \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) + \mu(B_4)$$

A_1 erfüllt die Zerlegungsbedingung. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B_1 \cup B_3) + \mu^*(B_2 \cup B_4) \end{aligned}$$

Verwende A_2, um $B_1 \cup B_3$ zu zerlegen

$$\begin{aligned} \mu^*(B_1 \cup B_3) &= \mu^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + \mu^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) \end{aligned}$$

Genauso zerlegen von $B_2 \cup B_4$ mittels A_2

$$\begin{aligned} \mu^*(B_2 \cup B_4) &= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_4) \\ \Rightarrow \mu^*(B) &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3) + \mu^*(B_4) \end{aligned}$$

Machen dasselbe mit $\overline{B} := B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3)$$

Es folgt dann $A_1 \cup A_2$ erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$.

[02. Dez] SCHRITT 2: Wir zeigen, dass μ^* endlich additiv auf $\mathcal{A}_*$ ist. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Wir benutzen A_1, um $A_1 \sqcup A_2$ zu zerlegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \sqcup A_2) &= \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_1) + \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \end{aligned}$$

Schritt 3: Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_*$ eine σ-Algebra und μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}_*$ ist. Sei $(A_j)_j \subseteq \mathcal{A}_*$ und $A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

Dabei reicht $\geq$ zu zeigen, da die andere Ungleichung allgemein erfüllt ist. WIr definieren

$$F_n \coloneqq \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}_*$$

mit $F_n \nearrow A$ und

$$B \setminus A \subseteq B \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also wird B von F_n zerlegt

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)\\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) + \mu^*\Big(B \cap \bigcap {A_j}^{\mathrm{C}}\Big)\end{aligned}$$

Wegen der endlichen Additivität von μ^* gilt

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*\Big(B \cap \bigcap {A_j}^{\mathrm{C}}\Big)$$

$$\begin{aligned}B \cap A = B \cap \left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} (B \cap A_j)\\ \Rightarrow \mu^*(B \cap A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} (B \cap A_j)\right)\\ &\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A))\end{aligned}$$

Aber wir wissen $B \setminus A \subseteq B \setminus F_n$. Damit folgt

$$\begin{aligned}&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus F_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)) = \mu(B)\end{aligned}$$

Das heißt A erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_*$. Das heißt A_* ist ein Dynkinsystem. Wir wollen Satz 3.1.6 anwenden und müssen daher noch zeigen, dass A_* $\cap$-stabil ist. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = \Big({A_1}^{\mathrm{C}} \cup {A_2}^{\mathrm{C}}\Big)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}_*$$

für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$. Damit ist A_* nach Lemma 3.1.6 eine σ-Algebra.

Schritt 4: Wir zeigen, dass μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}_*$ ist. Sei

$$B \coloneqq A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Wir zerlegen B mittels A

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)\\ \Rightarrow \mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)\end{aligned}$$

Durch die σ-Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in die andere Richtung. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)$$ □

Um den Satz von Carathéodory auf λ^d anwenden zu können, brauchen wir noch

- $\mathcal{J}^d \coloneqq$ *Mengensystem der (rechts-)halboffenen Intervalle im* $\mathbb{R}^d$ ist ein Halbring
- $\lambda^d : \mathcal{J}^d \to [0, \infty]$ ist ein Prämaß

Lemma 5.1.11. Seien X_1, X_2 Mengen und $\mathcal{S}_1$ ein Halbring in X_1 sowie $\mathcal{S}_2$ Halbring in X_2. Dann gilt $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Halbring in $X_1 \times X_2$.

Beweis.

(S_1) $\varnothing \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ folgt direkt aus $\varnothing \in \mathcal{S}_1$ und $\varnothing \in \mathcal{S}_2$

(S_2) Seien $J_1^1, J_1^2 \in \mathcal{S}_1$ und $J_2^1, J_2^2 \in \mathcal{S}_2$. Dann gilt

$$\left(J_1^1 \times J_2^1\right) \cap \left(J_1^2 \times J_2^2\right) = \left(J_1^1 \cap J_1^2\right) \times \left(J_2^1 \cap J_2^2\right) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

(S_3) (Übung)

□

Satz 5.1.12.

$$\mathcal{J}^d \coloneqq \left\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$$

ist ein Halbring.

Beweis. Für eine Dimension (das heißt $d = 1$) zeigen sich die Halbring-Eigenschaften von $\mathcal{J}^1$ direkt durch Fallunterscheidungen. Wir wollen also für höhere Dimensionen einfach Lemma 5.1.11 induktiv anwenden. Wir definieren also

$$\mathcal{J}^2 \coloneqq \mathcal{J}^1 \times \mathcal{J}^1$$

Das ist nach dem Lemma ein Halbring

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \mathcal{J}^3 \coloneqq \mathcal{J}^2 \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring}\\ &\quad\vdots\\ &\Rightarrow \mathcal{J}^3 \coloneqq \mathcal{J}^{d-1} \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring}\end{aligned}$$ □

Lemma 5.1.13. Sei μ endlich-additiv auf einem Halbring $\mathcal{S}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen

(a) μ ein Prämaß

(b) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \nearrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

(c) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

(d) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow \varnothing \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = 0$

Dann gilt (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). Gilt ferner $\mu(A) < \infty\ \forall A \in \mathcal{S}$, dann ist auch (c) $\Rightarrow$ (b). In diesem Fall sind also alle Aussagen äquivalent und damit verwendbar, um zu prüfen, ob μ ein Prämaß ist.

Beweis. (Später) □

Satz 5.1.14. Sei λ^d für $A \in \mathcal{J}^d$ mit

$$A = \times_{j=1}^{d} [a_j, b_j) = [a, b)$$

definiert als

$$\lambda^d([a,b)) := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

Dann ist λ^d ein Prämaß auf $\mathcal{J}^d$.

Beweis. Es gilt $\lambda^d(\varnothing) = \lambda^d([a,a)) = 0$. ?? □

[06. Dez] Wir wollen Maße nun einfacher darstellen, als nur als Fortsetzung eines Prämaßes, was auf einem Halbring definiert ist. Dafür sei nun μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Konstruktion 5.1.15 (Maße mit Funktionen identifizieren)**.** Wir betrachten zunächst nur den Fall $d = 1$. Wir wollen μ auf den halboffenen Intervallen durch eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ darstellen. Das heißt es soll gelten

$$\mu([a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Welche Eigenschaften hat dann die Funktion F?

1. F ist monoton wachsend

$$F(b) - F(a) = \mu([a,b)) \geq 0 \quad \forall b \geq a$$

2. F ist ?seitig stetig. Wir betrachten eine Folge $x_n \to b$ $(a < b)$ mit $x_n \leq x_{n+1}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, x_n) = [a, b)$$

Da μ ein Maß ist, ist es von unten stetig. Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(a) = \mu([a, x_n)) \nearrow \mu([a,b)) = F(b) - F(a) \\ \Rightarrow \lim_{x \nearrow b} F(x) = F(b) \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.16 (Dirac-Maß)**.**

Satz 5.1.17. Jede wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die von rechts stetig ist und (von links Grenzwerte hat) erzeugt ein Borelmaß μ_F, sodass

$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

Ferner: Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend und von rechts stetig mit $\mu_G = \mu_F$. Dann folgt

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Der letzte Teil zeigt sich durch nachrechnen direkt. Erster Teil: Siehe Literatur. $\square$

6 [*] Messbare Abbildungen und Bildmaße

6.1 Messbare Abbildungen

Definition 6.1.1. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume und $T : X \to X'$ eine Funktion. Dann heißt T $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Beispiel 6.1.2.

1. Konstante Funktionen sind messbar

2. Wir betrachten $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ mit $\mathcal{O}$ Mengensystem der offenen Mengen. Dann ist eine stetige Funktion T $\mathcal{B}(\mathcal{O}) - \mathcal{B}(\mathcal{O}')$-messbar, da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen sind

Satz 6.1.3. Seien $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ Messräume und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ Erzeuger von $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$. Dann ist T genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'$$

Beweis. $\Sigma' := \{A' \subseteq X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra in X' (Übung) mit $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\Sigma') = \Sigma' \\ \Rightarrow \mathcal{A}' = \Sigma' \end{aligned}$$

□

Satz 6.1.4. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2), (X_3, \mathcal{A}_3)$ Messräume und $T_1 : X_1 \to X_2$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar sowie $T_2 : X_2 \to X_3$ $\mathcal{A}_2$- $\mathcal{A}_3$-messbar. Dann ist $T_2 \circ T_1 : X_1 \to X_3$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbar.

Beweis. Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1}\underbrace{\left(T_2^{-1}(A_3)\right)}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_3$$

□

Bemerkung 6.1.5. Sei I eine Index-Menge und $(X_j, \mathcal{A}_j)$ ein Messraum für $j \in I$. Abbildung $T_j : X \to X_j$. Dann ist $\sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$ die kleinste σ-Algebra, auf X, für die alle Abbildungen T_j messbar (also $\sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$-$\mathcal{A}_j$-messbar) sind.

Satz 6.1.6. $S : X_0 \to X$ ist $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}$-messbar. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$ genau dann, wenn

$$T_j \circ S : X_0 \to X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0\text{-}\mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “ Folgt direkt aus Satz 6.1.4.

„$\Leftarrow$“ Nehmen $E \in \bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Dann ist $E \in T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ für ein $j \in I$. Dann ist $E = T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Es folgt $S^{-1}(E) = S^{-1}\Big(T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big) = (T_j \circ S)^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_0$.
$\mathcal{E} := \bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist Erzeuger von $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Damit folgt die Behauptung. □

6.2 Bildmaße

[09. Dez] **Notation 6.2.1.** Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume. Wir schreiben $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ für eine Funktion $T : X \to X'$, die $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar ist.

Konstruktion 6.2.2. Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ eine Funktion. Wir nehmen $A' \in \mathcal{A}'$ und definieren

$$\mu'(A') \coloneqq \mu\Big(T^{-1}(A')\Big)$$

Dann ist μ' ein Maß auf $(X', \mathcal{A}')$.

Definition 6.2.3 (Bildmaß)**.** Im Sinne von Konstruktion 6.2.2 nennen wir μ' das Bild von μ unter T. Das heißt wir schreiben

$$\mu' \coloneqq T(\mu)$$

Es gilt

$$T(\mu)(A') \coloneqq \mu\Big(T^{-1}(A')\Big)$$

Bemerkung 6.2.4 (Transitivität der Bildmaße)**.** Ist $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2)\,,\ T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \to (X_3, \mathcal{A}_3)$ und μ ein Maß auf $(X_1, \mathcal{A}_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)\,(\mu) &= T_2(T_1(\mu)) \\ (T_2 \circ T_1)^{-1} &= T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \\ \Rightarrow\ (T_2 \circ T_1)^{-1}\,(A_3) &= T_1^{-1}\Big(T_2^{-1}(A_3)\Big) \end{aligned}$$

7 [*] Messbare numerische Funktionen

Definition 7.1.1 ($\overline{\mathbb{R}}$)**.** Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ für die Menge der reellen Zahlen einschließlich $\pm\infty$. Wir definieren die algebraischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} x + \infty &\coloneqq \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x - \infty &\coloneqq -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \infty + \infty &\coloneqq \infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty - \infty &\coloneqq -\infty \\ -\infty < x &< \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x \cdot \infty &\coloneqq \infty \quad \forall x > 0 \\ x \cdot (-\infty) &\coloneqq -\infty \quad \forall x > 0 \\ x \cdot \infty &\coloneqq (-\infty) \quad \forall x < 0 \\ x \cdot (-\infty) &\coloneqq \infty \quad \forall x < 0 \\ 0 \cdot (\pm\infty) &\coloneqq 0 \\ \frac{x}{\pm\infty} &\coloneqq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \infty \cdot \infty &= \infty \\ \infty \cdot (-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

Dabei bleiben Ausdrücke wie $\infty - \infty$ nicht definiert. Wir definieren offene Mengen im $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, wenn

$$\forall x \in U \cap \mathbb{R}\ \exists R > 0\colon\ (x - R, x + R) \subseteq U$$

Außerdem muss für den Fall $\infty \in U$ zu sätzlich gelten

$$\exists R > 0\colon\ (R, \infty] \subseteq U$$

Analog muss für $-\infty \in U$ gelten

$$\exists L > 0\colon\ [-\infty, L) \subseteq U$$

Mit dieser Definition können wir die Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren mit $\overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \overline{\mathcal{B}}$. Dann gilt für die Spur-σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}^1 \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}^1$.

Bemerkung 7.1.2 (Identitätsfunktion)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann definieren wir die Identitätsfunktion (von A) mit

$$\mathbf{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diese ist Borel-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{1}_A &\leq \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_{A^{\mathrm{C}}} &= 1 - \mathbf{1}_A \end{aligned}$$

Definition 7.1.3 (Numerische Funktion)**.** Eine numerische Funktion ist eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X, so heißt f $\mathcal{A}$-messbar, falls es $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar ist. Das heißt

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}}\colon\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Satz 7.1.4. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Dann ist eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis. Wir setzen $\overline{\mathcal{E}} := \{[\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Zu zeigen ist $\sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right) = \overline{\mathcal{B}}^1$

(1) Es gilt $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Das heißt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Sigma := \sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right) \subseteq \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &[\alpha, \beta) = [\alpha, \infty] \setminus [\beta, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 && (\alpha \leq \beta) \\ \Rightarrow\ &[\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \sigma\left(\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1\right) \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \{-\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^{\mathrm{C}} \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \Rightarrow \forall \overline{G} \in \Sigma \colon \overline{G} \cap \mathbb{R} &= \overline{G} \cap \left(\{-\infty, \infty\}^{\mathrm{C}}\right) = \Sigma \\ \Rightarrow \mathbb{R} \cap \Sigma &:= \Sigma \\ \Rightarrow \mathcal{B}^1 &\subseteq \Sigma \\ \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}^1 &= \mathcal{B}^1 \cup \{0, \{-\infty\}, \{\infty\}, [-\infty, \infty)\} \subseteq \Sigma \end{aligned}$$

Also ist $\overline{\mathcal{E}}$ ein Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}^1$ und es genügt die Maßeigenschaften auf dem Erzeuger zu haben.

□

Satz 7.1.5. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Dann ist eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (1) \\ \Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (2) \\ \Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (3) \\ \Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (4) \end{aligned}$$

Beweis. Die Äquivalenz zu (1) folgt direkt aus Satz 7.1.4. Warum sind die anderen Aussagen dazu äquivalent? (Übung). □

Satz 7.1.6. Für messbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum folgt

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$$

Beweis. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Dann ist

$$\{f < g\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{f<r\} \cap \{r<g\} \in \mathcal{A} \\
\{f\le g\} &= \{f>g\}^{\mathrm{C}} \\
\{f=g\} &= \{f\le g\} \cap \{f\ge g\} = \mathcal{A} \\
\{f\ne g\} &= \{f=g\}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

□

[13. Dez] **Satz 7.1.7.** Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann folgt $f \pm g$ (falls definiert) sowie $f \cdot g$ sind messbar.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\{f-g\ge\alpha\} &= \left\{ f \ge \underbrace{g+\alpha}_{=:h} \right\} \\
&= \{f\ge h\}
\end{aligned}
$$

Das heißt es reicht aus zu zeigen, dass $\alpha + g$ (bzw. h) messbare Funktionen für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. g ist messbar, das heißt

$$
\begin{aligned}
&\{g\le\beta\} \in \mathcal{A} \\
&\quad h\ge\beta \Leftrightarrow g+\alpha\ge\beta \Leftrightarrow g\le\beta-\alpha \\
&\{h\ge\beta\} = \{g\le\beta-\alpha\}
\end{aligned}
$$

Das ist messbar, da g messbar ist und wir Satz 7.1.6 anwenden können. Damit ist h und damit $f-g$ messbar.
Um zu zeigen, dass auch $f+g$ messbar ist, können wir einfach zeigen, dass $-g$ messbar ist. Es gilt

$$
\{-g\ge\gamma\} = \{g\ge-\gamma\}
$$

Damit ist $-g$, also auch $f-(-g) = f+g$ messbar.
Wir zeigen noch die Messbarkeit von $f \cdot g$. Annahme: f und g sind reellwertig

$$
\begin{aligned}
(f+g)^2 - (f-g)^2 &= 4fg \\
\Rightarrow fg &= \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)
\end{aligned}
$$

Das heißt es reicht aus, zu zeigen, dass die Messbarkeit einer Funktion h auch die Messbarkeit von h^2 impliziert

$$
\begin{aligned}
\left\{h^2\ge\beta\right\} &= X \qquad \text{falls } \beta\le0 \\
\left\{h^2\ge\beta\right\} &= \left\{h\ge\sqrt{\beta}\right\} \cup \left\{h\le-\sqrt{\beta}\right\} \in \mathcal{A} \qquad \text{falls } \beta>0
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Messbarkeit von h^2 gezeigt. Wir wollen nun noch die Annahme loswerden, dass f und g reellwertig sind. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
X_1 &:= \{fg=+\infty\} \cup (\{f>0\} \cap \{g=\infty\} \sqcup (\{f<0\} \cap \{g=-\infty\})) \\
&\quad \cup (\{f=\infty\} \cap \{g\ge0\} \cup \{f=\infty\} \cap \{g<0\})\,(?) \\
X_2 &:= \{fg=-\infty\} \\
X_3 &:= \{fg=0\} = \{f=0\} \cup \{g=0\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} X_4 &:= (X_1 \cup X_2 \cup X_3)^{\mathrm{C}} \\ \Rightarrow f, g &: X_4 \to \mathbb{R} \text{ sind reellwertig} \\ fg &= fg\mathbf{1}_{X_4} + \infty\mathbf{1}_{X_1} - \infty\mathbf{1}_{X_2} + 0\mathbf{1}_{X_3} \end{aligned}$$

Damit ist fg nach Voraussetzung messbar, da $X_4 \in \mathcal{A}$. □

Satz 7.1.8 (WICHTIG)**.** Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sowie $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar.

Bemerkung 7.1.9. Sei $s := \sup_n f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ist punktweise definiert. Das heißt

$$s(x) = \left(\sup_n f_n\right)(x) := \sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis von Satz 7.1.8. Sei $s(x) := \sup_n f_n(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \{s \le \alpha\} &= \{x : s(x) \le \alpha\} =: A_1 \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \le \alpha\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < \alpha\} = A_2 \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Wir zeigen $A_1 = A_2$. Sei $x \in A_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha \ge s(x) &= \sup f_n(x) \ge f_n(x) \\ \Rightarrow f_m(x) &\le \alpha \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow A_1 &\subseteq A_2 \end{aligned}$$

Sei $x \in A_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &\le \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \sup f_n(x) &\le \alpha \Rightarrow x \in A_1 \end{aligned}$$

Damit ist $A_1 = A_2$. Es gilt

$$\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$$

ist messbar

$$\begin{aligned} \left(\limsup_n f_n\right)(x) &= \inf_n \sup_{\alpha\ge n} f_\alpha(x) \\ \left(\liminf_n f_n\right)(x) &= \sup_n \inf_{\alpha\ge n} f_\alpha(x) \end{aligned}$$ □

Korollar 7.1.10. Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen auf X und $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Angenommen $\forall x \in X$ existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (wir schreiben auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n$). Dann ist f messbar.

Beweis.

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

Damit ist f nach dem vorherigen Satz messbar. □

Korollar 7.1.11. Seien $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann sind

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n \coloneqq \max(f_1, f_2, \dots, f_n) \qquad \text{(punktweise)}$$

sowie

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \coloneqq \min(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

messbar.

Beweis. Nehme die Folge $(\overline{f}_n)_n$ mit $\overline{f}_m = f_m$ für $1 \leq m \leq n$ und $\overline{f}_m = f_n$ für $m > n$. Damit ist

$$f_1 \vee \dots f_n = \sup_n \overline{f}_n$$

messbar nach Satz 7.1.8. Die zweite Behauptung zeigt sich analog. □

Notation 7.1.12. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir definieren

$$f_+ \coloneqq f \vee 0 = \max(f, 0) \geq 0 \qquad \text{(Positivteil)}$$
$$f_- \coloneqq (-f) \vee 0 \geq 0 \qquad \text{(Negativteil)}$$

Damit gilt außerdem

$$f = f_+ - f_-$$
$$|f| = f_+ + f_-$$

Korollar 7.1.13. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind.

Korollar 7.1.14. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Dann ist $|f|$ messbar.

8 [*] Elementarfunktionen und ihr Integral

Definition 8.1.1. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir definieren $E_+ \coloneqq E_+(X, \mathcal{A})$ als die Menge aller nicht-negativen Elementarfunktionen. Das heißt $u \in E_+$, falls $u : X \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-messbar ist und Bild(u) endlich viele Werte annimmt. Das heißt

$$u(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

mit

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_j < \infty \quad \forall j \leq n \\ \alpha_i \neq \alpha_n \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Wir setzen $A_j \coloneqq u^{-1}(\{\alpha_j\}) \in \mathcal{A}$. Damit gilt $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}(x)$. Wir haben den Raum X nun folgendermaßen disjunkt zerlegt: $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$.
Sind umgekehrt nicht-notwendigerweise disjunkte $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha_j} 1_{\tilde{A}_j}$ eine Elementarfunktion.

Bemerkung 8.1.2 (Eigenschaften von E_+)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $u, v \in E_+$. Dann gilt

- $\alpha u \in E_+$
- $u + v \in E_+$
- $u - v \in E_+$
- $u \wedge v \in E_+$
- $u \vee v \in E_+$

Beweis. Folgt direkt aus der Definition und den Messbarkeitseigenschaften aus dem letzten Kapitel. □

Notation 8.1.3 (Normaldarstellung)**.** Sei $u \in E_+$. Dann schreiben wir $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$ als Normaldarstellung mit $\bigsqcup_{j=1}^n = X$.

Lemma 8.1.4. Sei $u \in E_+ = E_+(X, \mathcal{A})$ mit Normaldarstellungen

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{B_k}$$

Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k)$$

Das heißt die Uneindeutigkeit der Normaldarstellung verschwindet bei der Verwendung eines Maßes.

Beweis.

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \\ &= B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_j \cap B_k) \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_j \cap B_k)$$

$$\Rightarrow 1_{A_j} = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_j \cap B_k} \quad 1_{B_k} = \sum_{j=1}^{m} 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \qquad = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j \cap B_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \beta_k 1_{A_j \cap B_k}$$

Jeder Punkt $x \in X$ liegt in genau einer Menge $A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned} u(x) = \alpha_{j_0} 1_{A_{j_0} \cap B_k}(x) &= \beta_{k_0} 1_{A_{j_0} \cap B_{k_0}} \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_j \cap B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(B_k) \end{aligned}$$

□

[16. Dez] **Definition 8.1.5.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und u eine Elementarfunktion. Dann heißt die von der spezifischen Normaldarstellung $\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$ unabhängige Zahl (Lemma 8.1.4)

$$\int u \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

das (μ-)Integral von u (über X). Wir schreiben auch

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \int_X u \,\mathrm{d}\mu = \int_X u(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X u(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

und definieren in diesem Sinne eine Abbildung

$$\begin{aligned} E_+ &\to \overline{\mathbb{R}} \\ u &\mapsto \int u \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Lemma 8.1.6 (Eigenschaften des Integrals)**.** Für $A \subseteq X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E_+$ gilt

(i) $\displaystyle\int 1_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$

(ii) $\displaystyle\int \alpha u \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int u \,\mathrm{d}\mu$

(iii) $\displaystyle\int (u + v) \,\mathrm{d}\mu = \int u \,\mathrm{d}\mu + \int v \,\mathrm{d}\mu$

(iv) $\displaystyle u \leq v \Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu \leq \int v \,\mathrm{d}\mu$

Beweis. (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. Für (iii) sei

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \quad v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$$

$$\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_j \cap B_k \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j \cap B_k$$

$$u = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j \cap B_k} \quad v = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\Rightarrow u + v = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_j + \beta_k)\, 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \quad \int v \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k)$$

$$\begin{aligned}\int (u+v)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (\alpha_j + \beta_k)\,\mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int u \,\mathrm{d}\mu + \int v \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Für (iv) gilt mit der Definition, die wir auch schon bei (iii) verwendet haben, dass $\alpha_j \leq \beta_k$ auf $A_j \cap B_k$

$$\Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_{j}\sum_{k} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int v \,\mathrm{d}\mu \quad \square$$

9 [*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen

Satz 9.1.1. Für jede wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ und jedes $u \in E_+$ gilt

$$u \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Sei $u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$ und $0 < \delta < 1$. Wir definieren $B_n \coloneqq \{x \in X : u_n(x) \geq \delta u(x)\}$. Wir wissen nach Voraussetzung, dass $u_n \leq u_{n+1}$, das heißt $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \geq u(x)\ \forall x \in X$. Sei $x \in X$ fest. Ist $u(x) > 0$, dann gilt $\exists N(x) \in \mathbb{N} : u_n(x) \geq \delta u(x)$ für $n \geq N(x)$.
Aus $u_{n+1} \geq u_n$ folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$. Außerdem ist $\forall x \in X : x \in B_n$ für ein ausreichend großes n. Also haben wir $B_n \nearrow X$. Auch ist $u_n \geq \delta u 1_{B_n}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int u_n \,\mathrm{d}\mu &\geq \int \delta u 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu \\
u &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j} \\
\Rightarrow u 1_{B_n} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} \\
\delta \int u 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu &= \delta \int \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j\cap B_n} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \to \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u \,\mathrm{d}\mu \geq \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lim_{n\to\infty} \mu(A_j \cap B_n) = \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j} = \delta \int u \,\mathrm{d}\mu$$

Das gilt für alle $\delta < 1$. Mit dem Limes für $\delta \to 1$ folgt dann die Behauptung. □

Korollar 9.1.2. Seien $(u_n)_n, (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsende Folgen von Elementarfunktionen. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Nach dem vorherigen Satz und $u_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\int u_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}x &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}x = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu$$

□

Notation 9.1.3. Wir schreiben $E^* = E_+^* = E_+^*(X, \mathcal{A})$ für die Menge aller numerischen meßbaren Funktionen $f \geq 0$ auf X, für die es eine wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ gibt, sodass $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Für $f \in E_+^n$ ist dann

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sup\left\{\int u_n \,\mathrm{d}\mu : u_n \subseteq E_+,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f\right\}$$

Das nennen wir das (μ-)Integral von f.

[20. Dez] **Bemerkung 9.1.4** (Eigenschaften des Integrals)**.** Seien $f, g \in E^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

(i) $\alpha f \in E^*$

(ii) $f \pm g \in E^*$

(iii) $fg \in E^*$

(iv) $f \vee g \coloneqq \max(f, g) \in E^*$

(v) $f \wedge g \coloneqq \min(f, g) \in E^*$

(vi) $\displaystyle\int (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$

(vii) $\displaystyle\int (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$

(viii) $\displaystyle f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$

Beweis.

(i)-(v) Beachte $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ und $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Damit lassen sich entsprechende Folgen finden, um auch Kombinationen von f und g im obigen Sinne zu finden.

(vi) (Übung)

(vii) Es ist $f = \lim_{n\to\infty} u_n$, $g = \lim_{n\to\infty} v_n$. Das heißt

$$\begin{aligned}
\int f \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu \\
\int g \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (u_n + v_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (u_n + v_n) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int u_n \,\mathrm{d}\mu + \int v_n \,\mathrm{d}\mu\right) = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(viii) $f \leq g \Rightarrow u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Wir definieren $(\tilde{u}_n)_n$ mit $\tilde{u}_n \coloneqq u_k$ für ein festes k

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{u}_k = u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \\
&\Rightarrow \int u_k \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \tilde{u}_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int u_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int u_k \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$$

□

Bemerkung 9.1.5 (Interpretation des Integrals)**.** Das Integral bezüglich einem Maß μ ist eine monotone Linearform von E^* nach $[0,\infty]$. Aber was ist E^*?

Notation 9.1.6. Es sei $\mathcal{M}_+ \coloneqq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}) \coloneqq \{f : x \to [0,\infty]\,,\ f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$.

Satz 9.1.7. $E^*(X,\mathcal{A}) = \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$.

Beweis. $E^* \subseteq \mathcal{M}_+$ ist klar. Wir zeigen die Inklusion in die andere Richtung. Wir definieren für ein $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,\dots,n2^n\}$

$$A_{j,n} \coloneqq \begin{cases} \{f \geq j2^{-n}\} \cap \{f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0,\dots,n2^n-1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \{j2^{-n} \leq f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0,\dots,n2^n-1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases}$$

Für ein festes n ist $A_{j,n} \cap A_{k,n} = \varnothing$ für $j \neq k$. Wir setzen

$$u_n \coloneqq \sum_{j=0}^{n2^n} j2^{-n} 1_{A_{j,n}}$$

Behauptung 1: $u_n \leq u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Bew.:

$$A_{2k,n+1} = \left\{2k2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\} = \left\{k2^{-n} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\}$$
$$A_{2k+1,n+1} = \left\{(2k+1)2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\}$$
$$\Rightarrow A_{k,n} = A_{2k,n+1} \sqcup A_{2k+1,n+1}$$
$$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

Damit ist auch $u_n \leq f\ \forall n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt auf $A_{j,n}$ ist $f(x) \leq (j+1)2^{-n} = u_n(x) + 2^{-n}$. Das heißt $\lim_{n\to\infty} u_n = f$ für $x \in A_{j,n}$. Insgesamt gilt damit $\lim_{n\to\infty} u_n = f$. □

Satz 9.1.8 (Monotone Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_n$ eine wachsende Folge in $E^*(X,\mathcal{A})$. Dann folgt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E^*$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. Sei $f \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann reicht es, zu zeigen, dass $\exists (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsend mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = f$ und $v_n \leq f_n$. Denn in diesem Fall ist

$$\int v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Mit Bemerkung 9.1.9 folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Wir brauchen also nur noch die Existenz von $(v_n)_n$. Zu (f_n) existiert ein $(u_{m,n})_n \subseteq E_+$ mit $u_{m,n} \leq u_{m-1,n}$ sowie $f_n = \sup_m u_{m,n}$. Das heißt

$$\begin{aligned} & v_m \leq v_{m+1} \\ \Rightarrow\ & \sup_m v_m \in E_+ \end{aligned}$$

Behauptung: $\sup_m v_m = f = \sup_n f_n$. Da $u_{m,n} \leq f_n \leq f_{n+1}$

$$\Rightarrow \sup_m v_m \leq \sup_m f_m = f$$

Auch ist $v_m = u_{m-1} \vee u_{m-2} \vee \ldots \geq u_{m,n} \to f_n$

$$\begin{aligned} & f_n = \sup_m u_{m,n} = \sup_m v_m \\ \Rightarrow\ & f = \sup_n f_n \leq \sup_m v_m \leq f \\ \Rightarrow\ & f = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m \end{aligned}$$

□

Bemerkung 9.1.9. Im Sinne von Satz 9.1.8 gilt die Ungleichung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$ allgemein. Die Voraussetzung, dass die Folge wächst ist nur für die Ungleichung in die andere Richtung relevant.

Korollar 9.1.10. Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in E^*$ und $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. Wir haben $f_n \geq 0$. Das heißt die Partialsummen von $(f_n)_n$ sind monoton wachsend. Damit ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz 9.1.8. □

10 [*] Integrierbarkeit

Wir haben $f \geq 0$ messbar auf X. Dann ist $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ wohldefiniert. Wir wollen das auch auf Funktionen mit negativen Werten erweitern.

Definition 10.1.1. Eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ-)integrierbar, wenn sie $\mathcal{A}$-messbar ist sowie $\int f_+ \, \mathrm{d}\mu, \int f_- \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. In diesem Fall definieren wir

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu$$

Satz 10.1.2. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) f_+ und f_- sind integrierbar

(ii) Es existieren integrierbare Funktionen $u, v \geq 0$ mit $f = u - v$

(iii) Es existiert eine integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit $|f| \leq g$

(iv) $|f|$ ist integrierbar

Im Fall (ii) ist $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu = \int u \, \mathrm{d}\mu - \int v \, \mathrm{d}\mu$.