

Skript zur Vorlesung  
Analysis III  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung: Motivation für Maßtheorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b><math>\sigma</math>-Algebren und Maße</b>	<b>4</b>
2.1	$\sigma$ -Algebren . . . . .	4
2.2	Maße und Prämaße . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Dynkinsysteme</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>[*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>[*] Existenz von Maßen</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>[*] Messbare Abbildungen und Bildmaße</b>	<b>26</b>
6.1	Messbare Abbildungen . . . . .	26
6.2	Bildmaße . . . . .	27
<b>7</b>	<b>[*] Messbare numerische Funktionen</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>[*] Elementarfunktionen und ihr Integral</b>	<b>33</b>
<b>9</b>	<b>[*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen</b>	<b>36</b>

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$   $A$  und  $B$ , die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

**Beispiel 1.1.1** (Messen eines Rechtecks). Im Fall eines Rechtecks  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

**Beispiel 1.1.2** (Messen eines Dreiecks). Auch für ein Dreieck  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  mit Grundfläche  $g$  und Höhe  $h$  kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

**Beispiel 1.1.3** (Parkettierung). Wir können auch eine komplexere Form  $F \subseteq \mathbb{R}^2$  mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke  $(\Delta_n)_n$ , sodass  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$ . Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

**Bemerkung 1.1.4.** Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ , wobei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) := \{U : U \subseteq E\}$  eine Familie von Teilmengen von  $E \neq \emptyset$  ist. Außerdem soll gelten, dass

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für  $A, B \in \mathcal{F}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  ist  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (iii) Für eine Folge  $A_n \in \mathcal{F}$  mit  $A_n \cap A_m = \emptyset$  für  $n \neq m$  ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

---

<sup>1</sup> $\sigma$ -Additivität

## 2 $\sigma$ -Algebren und Maße

### 2.1 $\sigma$ -Algebren

**Definition 2.1.1** ( $\sigma$ -Algebra). Sei  $E \neq \emptyset$  eine Menge. Eine  $\sigma$ -Algebra in  $E$  ist ein System von Teilmengen  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$  von  $E$  mit folgenden Eigenschaften

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C := E \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \text{ Das heißt } \mathcal{A} \text{ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen}$$

Eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  heißt messbar ( $\mathcal{A}$ -messbar).

**Lemma 2.1.2** (Eigenschaften von  $\sigma$ -Algebren). Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $E$ . Dann gilt

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \text{ (das heißt } \mathcal{A} \text{ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)}$$

$$(iii) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$$

*Beweis.*

$$(i) \quad E \in \mathcal{A} \xrightarrow{(\Sigma_2)} \emptyset = E^C \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \text{Wir definieren } A_1 := A, A_2 := B \text{ und } A_i := \emptyset \text{ für } i \geq 3. \text{ Dann gilt } (\Sigma_3)$$

$$A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C \right)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A \setminus B = A \cap B^C = A \cap B^C \cap E \cap E \cap \dots. \text{ Dann gilt nach (iii), dass } A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \square$$

**Beispiel 2.1.3.** Wir betrachten einige Beispiele für  $\sigma$ -Algebren

$$(a) \quad \text{Für eine Mengen } E \text{ ist die Potenzmenge } \mathcal{P}(E) \text{ selber nach Definition immer eine } \sigma\text{-Algebra über } E.$$

$$(b) \quad \{\emptyset, E\} \text{ ist die kleinste } \sigma\text{-Algebra in } E.$$

$$(c) \quad \text{Für } A \subseteq E \text{ gilt } \mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^C, E\} \text{ ist die kleinste } \sigma\text{-Algebra, die } A \text{ enthält.}$$

$$(d) \quad \text{Sei } E \text{ überabzählbar. Dann ist } \mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar}\} \text{ eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

$$(e) \quad \text{Sei } \mathcal{A} \text{ eine } \sigma\text{-Algebra in } E. \text{ Für } F \subseteq E \text{ beliebig ist } \mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\} \text{ die Spur-}\sigma\text{-Algebra von } F.$$

- (f) Seien  $E, E'$  nicht-leere Mengen,  $f : E \rightarrow E'$  eine Funktion und  $\mathcal{A}'$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $E'$ . Dann ist auch

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis von (d).* Wir prüfen die Kriterien

$$(\Sigma_1) \quad E^C = \emptyset \text{ ist abzählbar} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \text{ oder } (A^C)^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \mathcal{A} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \text{ Wir unterscheiden 2 Fälle}$$

FALL 1: Alle  $A_n$  sind abzählbar. Dann ist auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  abzählbar.

FALL 2: Ein  $A_j$  ist überabzählbar. Dann ist aber  $(A_j)^C$  abzählbar  $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \subseteq (A_j)^C$  ist abzählbar. Dann ist  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C$  abzählbar. Das heißt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Notation 2.1.4** (Durchschnitt). Seien  $I$  eine beliebige Menge und  $(\mathcal{A}_j)_{j \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$  eine beliebige Familie von Mengensystemen in  $E$ . Dann ist

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j := \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der  $\mathcal{A}_j$ .

**Satz 2.1.5.** Sei  $I$  eine beliebige Menge und  $(\mathcal{A}_j)_{j \in I}$  eine Familie von  $\sigma$ -Algebren in  $E$ . Dann gilt

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine  $\sigma$ -Algebra.

*Beweis.*

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \forall j \in I. \text{ Daraus folgt } A^C \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow A^C \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j. \text{ Dann gilt } A_n \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \quad \square$$

**Satz 2.1.6.** Sei  $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$  für  $E$  nicht-leer ein System von Teilmengen von  $E$ . Dann existiert eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(E)$  in  $E$ , welche  $\zeta$  enthält. Das heißt

(a)  $\sigma(\zeta)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra in  $E$  und

(b) Für eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  in  $E$  mit  $\zeta \subseteq \mathcal{A}$  folgt  $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen  $\sigma(\zeta)$  in diesem Fall die von  $\zeta$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra und  $\zeta$  den Erzeuger von  $\sigma(\zeta)$ .

*Beweis.* Wir definieren  $I := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$  die Menge aller  $\sigma$ -Algebren, die  $\zeta$  enthalten. Dabei gilt  $I$  nicht-leer, da  $\mathcal{P}(E) \in I$ . Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine  $\sigma$ -Algebra ist. Dabei ist  $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$  nach Forderung an  $I$ . Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt.  $\square$

**Beispiel 2.1.7.** Sei  $\zeta := \{A\}$ . Dann ist  $\{\emptyset, A, A^C, E\}$  die von  $\zeta$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Definition 2.1.8.** Sei  $\mathcal{O}_d$  das System der offenen Mengen im  $\mathbb{R}^d$ . Dann definieren wir die *Borel- $\sigma$ -Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

## 2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets  $X$  eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung). Seien  $A, B$  Mengen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann schreiben wir  $A \sqcup B := A \cup B$  als disjunkte Vereinigung von  $A$  und  $B$ .

**Definition 2.2.2** (Maß). Ein (positives) Maß  $\mu$  auf  $X$  ist eine Funktion  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit

(M<sub>0</sub>)  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

(M<sub>1</sub>)  $\mu(\emptyset) = 0$

(M<sub>2</sub>) Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Definition 2.2.3** (Prämaß). Ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  nicht unbedingt eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  eine Funktion, so heißt  $\mu$  Prämaß, falls

(PM<sub>1</sub>)  $\mu(\emptyset) = 0$  (das setzt also auch voraus, dass  $\emptyset \in \mathcal{A}$ )

(PM<sub>2</sub>) Sind  $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$  paarweise disjunkt und  $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$ , dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Definition 2.2.4** (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen). Sei  $(A_n)_n$  eine Folge von Teilmengen von  $X$ . Dann nennen wir  $(A_n)_n$

- wachsend, falls  $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls  $A_{n+1} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

**Notation 2.2.5.**

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge  $(A_n)_n$  schreiben wir  $A_n \nearrow A$ , falls  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ .
2. Für eine fallende Teilmengenfolge  $(A_n)_n$  schreiben wir  $A_n \searrow A$ , falls  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ .

**Definition 2.2.6** (Messraum und Maßraum). Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß.

1. Wir nennen das Paar  $(X, \mathcal{A})$  einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  einen Maßraum.

## 2 $\sigma$ -Algebren und Maße

3. Wir nennen  $\mu$  endlich und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  einen endlichen Maßraum, falls  $\mu(X) < \infty$ .
4. Wir nennen  $\mu$  Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls  $\mu(X) = 1$ .
5. Wir nennen  $\mu$   $\sigma$ -endlich, falls es eine Folge  $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$  gibt mit  $A_n \nearrow X$  und  $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall heißt  $(A_n)_n$  eine ausschöpfende Folge.

**Satz 2.2.7** (Eigenschaften von Maßen). Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum sowie  $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$ . Dann gilt

- (i)  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$  (Additivität)
- (ii)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$  (Monotonie)
- (iii)  $A \subseteq B$  und  $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iv)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$  (Starke Additivität)
- (v)  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$  (Subadditivität)
- (vi)  $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  (Stetigkeit von unten)
- (vii)  $(B_n)_n \searrow B$  und  $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$  (Stetigkeit von oben)
- (viii)  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$  ( $\sigma$ -Subadditivität)

*Beweis.*

- (i) Sei  $A_1 := A, A_2 := B$  und  $A_n := \emptyset$  für  $n \geq 3$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (ii) Sei  $A \subseteq B$ , dann folgt  $B = A \sqcup (B \setminus A)$ . Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- (iii)  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ . Dann folgt  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ , falls  $\mu(A) < \infty$ .

- (iv) Es gilt  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (v) Aus (iv) folgt  $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

- (vi) Sei  $(A_n)_n$  wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen  $(F_n)_n$  mit  $F_1 := A_1$  und  $F_n := A_n \setminus A_{n-1}$  für  $n \geq 2$ . Dann sind  $F_j$  paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^n A_j &= \bigsqcup_{j=1}^n F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(F_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n F_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- (vii) Sei  $(B_n)_n \searrow B$  mit  $\mu(B_1) < \infty$ . Wir definieren  $A_n := B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$  wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

- (viii) Sei  $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ . Dann ist  $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Wir definieren  $\hat{A}_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$  wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^k A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\hat{A}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned} \quad \square$$

### Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern  $\mathcal{A}$  stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern  $\mathcal{A}$  stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

**Beispiel 2.2.9** (Dirac-Maß). Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$  und  $x_0 \in X$ . Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist  $\delta_{x_0}$  ein Maß in  $X$  und wird als *Dirac-Maß* bezeichnet.



**Beispiel 2.2.10.** Sei  $\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar} \right\}$ . Dann ist  $\mathcal{A}$  nach Beispiel 2.1.3 (d) eine  $\sigma$ -Algebra in  $\mathbb{R}$ . Wir definieren ein Maß auf  $\mathcal{A}$  mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

**Beispiel 2.2.11** (Zählmaß). Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei  $\#A$  die Anzahl an Elemente in  $A$  angibt.

**Beispiel 2.2.12** (Diskretes W-Maß). Sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  eine abzählbare Menge,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$  mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$ . Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}: \omega_n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra). Ein Mengensystem  $R \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

$$(R_1) \quad \emptyset \in R$$

$$(R_2) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$$

$$(R_3) \quad A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$$

Ist ferner  $X \in R$ , dann heißt  $R$  Algebra.

**Bemerkung 2.2.14** (Eigenschaften von Mengenringen). Es sei  $R$  ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$  enthält  $R$  auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz  $\Delta : R \times R \rightarrow R$ ,  $(A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Dann definiert  $(R, \Delta, \cap)$  einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei  $\Delta$  der „Addition“ und  $\cap$  der „Multiplikation“ entspricht.

### 3 Dynkinsysteme

**Definition 3.1.1** (Dynkinsystem). Ein Mengensystem  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt Dynkinsystem, falls

$$(D_1) \quad X \in \mathcal{D}$$

$$(D_2) \quad D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^C \in \mathcal{D}$$

$$(D_3) \quad \text{Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge } (D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$$

**Beispiel 3.1.2.**

1. Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei  $X$  eine  $2n$ -elementige Menge. Dann ist  $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$  ein Dynkinsystem, aber keine  $\sigma$ -Algebra.

**Lemma 3.1.3.** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(\mathcal{D}_j)_{j \in I}$  eine Familie von Dynkinsystemen in  $X$ , dann ist  $\bigcap_{j \in I} \mathcal{D}_j$  wieder ein Dynkinsystem.

*Beweis.* (Übung) □

**Satz 3.1.4.** Sei  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann existiert das kleinste Dynkinsystem  $\delta(\mathcal{G})$ , welches  $\mathcal{G}$  enthält. Wir nennen  $\delta(\mathcal{G})$  das von  $\mathcal{G}$  erzeugte Dynkinsystem.

*Beweis.*  $\mathcal{P}(X)$  ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \emptyset$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über  $\sigma$ -Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in I} \mathcal{D} \quad \square$$

**Definition 3.1.5.** Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Wir nennen  $\mathcal{D}$   $\cap$ -stabil, falls  $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$ . Analog dazu nennen wir  $\mathcal{D}$   $\cup$ -stabil, falls  $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$ .

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine  $\sigma$ -Algebra?

**Lemma 3.1.6.** Sei  $\mathcal{D}$  ein Dynkinsystem. Dann gilt  $\mathcal{D}$  ist genau dann eine  $\sigma$ -Algebra, wenn  $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Dann ist  $\mathcal{D}$  ein Dynkinsystem. Seien  $A, B \in \mathcal{D}$ . Dann folgt  $A^C, B^C \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{D}$ .

„ $\Leftarrow$ “ Zu zeigen ist Eigenschaft  $(\Sigma_3)$ . Sei  $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$  eine Mengenfolge. Wir definieren  $D'_0 := \emptyset$  und  $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ . Dann ist  $(D'_n)_n$  eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \text{ falls } (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 3 Dynkinsysteme

Und es gilt  $D'_n \setminus D'_{n-1} = (D'_n \cap (D'_{n-1})^c) \in \mathcal{D}$ , falls  $D'_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass  $\mathcal{D}$   $\cup$ -stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$$

Damit ist  $(\Sigma_3)$  gezeigt. □

**Satz 3.1.7.** Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann folgt aus  $\mathcal{G}$  ist  $\cap$ -stabil, dass  $\delta(\mathcal{G})$   $\cap$ -stabil ist.

*Beweis.* Wir nehmen ein beliebiges  $D \in \delta(\mathcal{G})$  und definieren

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung:  $\mathcal{D}_D$  ist ein Dynkinsystem

(D<sub>1</sub>) Da  $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$  folgt  $X \in \mathcal{D}_D$ .

(D<sub>2</sub>) Sei  $Q \in \mathcal{D}_D$ . Dann ist auch  $Q^c \in \mathcal{D}_D$ , denn  $Q^c \cap D = (Q^c \cup D^c) \cap D = (Q \cap D)^c \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$ .

(D<sub>3</sub>) (Siehe handschriftliches Skript)

Nun können wir folgendermaßen argumentieren: Da  $\mathcal{G}$   $\cap$ -stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} & \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ & \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \stackrel{(\text{Beh.})}{=} \mathcal{D}_D \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} & \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ & \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt  $\delta(\mathcal{G})$  ist  $\sigma$ -stabil. □

**Korollar 3.1.8.** Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Wenn  $\mathcal{G}$   $\cap$ -stabil ist, dann ist  $\delta(\mathcal{G})$  eine  $\sigma$ -Algebra und es gilt  $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$ .

*Beweis.* Nach Satz 3.1.7 ist  $\delta(\mathcal{G})$   $\cap$ -stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine  $\sigma$ -Algebra. Damit gilt dann  $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$ , da  $\sigma(\mathcal{G})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra ist, die  $\mathcal{G}$  enthält. Außerdem ist  $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$ . □

## 4 [\*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz). Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein beliebiger Messraum und  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$  für  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Ferner seien  $\mu, \nu$  Maße auf  $\mathcal{A}$  mit

- (a)  $\mathcal{E}$  ist  $\cap$ -stabil
- (b) Es gibt Mengen  $G_n \in \mathcal{E}$  mit  $G_n \nearrow X$  ( $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ ) mit  $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus  $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{E}$  folgt  $\mu = \nu$  auf  $\mathcal{A}$ . Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

*Beweis.* Da  $\mathcal{E}$   $\cap$ -stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass  $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ . Wir halten  $n \in \mathbb{N}$  fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

$\mathcal{D}_n$  ist ein Dynkinsystem:

(D<sub>1</sub>) Folgt direkt.

(D<sub>2</sub>) Sei  $A \in \mathcal{D}_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(G_n \cap A^c) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\ &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n \cap A^c) \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

(D<sub>3</sub>) Sei  $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\ &\Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von  $\mathcal{D}_n$  gilt  $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$ . Andererseits ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$ . Sei  $A \in \mathcal{E}$  und  $A \cap G_n \in \mathcal{E}$ , da  $\mathcal{E}$   $\cap$ -stabil. Nach Voraussetzung gilt  $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$ , also folgt  $A \in \mathcal{D}_n$ .

Da  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$ . Damit gilt  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$ . Das heißt  $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$  folgt  $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$ .

Für  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  definieren wir eine aufsteigende Folge  $A_n := A \cap G_n \nearrow A$ . Da  $\mu, \nu$  Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.1.2** (Ausschöpfende Folgen). Wir nennen  $(G_n)_n$  im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -endlich, wenn es eine Folge  $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$  gibt mit  $G_n \nearrow X$  und  $\mu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 4.1.3** (Eigenschaften der Borelmengen). In Definition 2.1.8 hatten wir  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$ , wobei  $\mathcal{O}$  das System offener Teilmengen im  $\mathbb{R}^d$  war. Wir definieren nun

- $\mathcal{A}_d$ : System der abgeschlossenen Teilmengen im  $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{K}_d$ : System der kompakten Teilmengen im  $\mathbb{R}^d$

Dann gilt  $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

*Beweis.* SCHRITT 1:  $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$  ist klar, da  $\sigma$ -Algebren stabil unter Komplementbildung sind.

SCHRITT 2: Es gilt  $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$ .

SCHRITT 3: Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $K_n := \{|x| < n\}$ . Sei  $A \in \mathcal{A}_d$ , dann ist  $A \cap K_n$  kompakt und

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_d \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) \end{aligned}$$

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß  $\lambda^d$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

**Beobachtung 4.1.4.** Wir betrachten den Fall  $d = 1$  und ein halboffenes Intervall  $I := [a, b)$ . Dann muss gelten  $\lambda^1(I) = b - a$ . Wir betrachten allgemeine  $d$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^d$  wobei  $a \leq b$  (das heißt  $a_j \leq b_j$ ). Dann sei

$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

**Definition 4.1.5.** Es sei  $J^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$  das Mengensystem der halboffenen Intervalle im  $\mathbb{R}^d$ .

**Bemerkung 4.1.6** (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß). Es sei  $c \in \mathbb{R}^d$  und wir definieren eine Translation  $T_c(x) := x + c$  mit inverser Funktion  $T_c^{-1}$ . Dann gilt für ein halboffenes Intervall  $I := [a, b)$

$$\begin{aligned} \lambda^d(T_c^{-1}(I)) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\ &= \prod_{j=1}^d (b_j - c_j - (a_j - c_j)) \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf  $J^d$  ist  $\lambda^d$  invariant unter Translation.

**Lemma 4.1.7.** Sei  $B \in \mathcal{B}^d$  eine Borelmenge und  $c \in \mathbb{R}^d$ . Dann ist  $B + c := \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$ .

*Beweis.* Sei  $c \in \mathbb{R}^d$  fest. SCHRITT 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d\}$$

Dann ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra (Übung).

SCHRITT 2:  $\mathcal{O}_d$  ist translationsinvariant. Das heißt  $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . Das heißt  $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$ . Damit sind die Borelmengen translationsinvariant.  $\square$

[8. Nov]      (fehlt)

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T(\lambda^d) = \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$$

*Beweis.* SCHRITT 1: Sei  $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0$ . Das heißt  $T$  ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &:= x + a \\ \Rightarrow (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) & (b := T^{-1}(a)) \\ &= T(x + b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= T(\lambda^d) & = \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a(T(\lambda^d)) = T_a \circ T(\lambda^d) \\ &= T \circ T_b(\lambda^d) = T(T_b(\lambda^d)) \\ &= T(\lambda^d) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist  $\mu$  invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass  $\mu = \alpha \lambda^d$ .

Frage: Warum ist  $\alpha = 1$ ?

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel  $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d(T^{-1}(B)) = \mu(B) = \alpha \lambda^d(B) \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei  $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$  beliebig und wir setzen  $c := T(0)$  und  $S := T_{-c} \circ T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S(\lambda^d) &= \lambda^d \text{ nach SCHRITT 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= T_c(S(\lambda^d)) = T_c(\lambda^d) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach SCHRITT 1. □

**Beispiel 4.1.9** (Lebesgue-Maß von einem Punkt). Sei  $x \in \mathbb{R}^d$ . Was ist dann  $\lambda^d(\{x\})$ ? Wir definieren für  $\varepsilon > 0$

$$J := [x, x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in J \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \rightarrow 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten  $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$  null, da

$$\begin{aligned}
\lambda^d(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(\mathbb{Q}^d) = 0
\end{aligned}$$

**Beispiel 4.1.10** (Lebesgue-Maß einer Hyperebene). Es sei  $j \in \{1, \dots, d\}$  und wir definieren eine Hyperebene  $H_j := \{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\}$ . Was ist dann  $\lambda^d(H_j)$ ? Wir definieren

$$J_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1}2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n(2n)^{d-1}} \right\}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
H_j &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \\
\lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1}2^n} \\
&= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \lambda^d(H_j) = 0
\end{aligned}$$

Dieses Resultat gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form  $H_j$  abbildet.



## 5 [\*] Existenz von Maßen

**Definition 5.1.1** (Halbring). Eine Familie  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt Halbring, falls

$$(S_1) \quad \emptyset \in \mathcal{S}$$

$$(S_2) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$$

$$(S_3) \quad A, B \in \mathcal{S} \text{ existieren endlich viele disjunkte Mengen } S_1, \dots, S_M \in \mathcal{S} \text{ mit } A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

**Satz 5.1.2** (Nach Carathéodory). Sei  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Halbring und  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß  $\mu$  auf  $\sigma(\mathcal{S})$ .

Falls  $\mu$   $\sigma$ -endlich auf  $\mathcal{S}$  ist, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

[25. Nov] **Definition 5.1.3** (Äußere Maße). Eine Abbildung  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  ist ein äußeres Maß, falls

$$(i) \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \quad (\text{Normierung})$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad (\text{Monotonie})$$

$$(iii) \quad \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

**Konstruktion 5.1.4.** Zu einem Prämaß  $\mu$  auf  $\mathcal{S}$  gibt es ein äußeres Maß.

Nehme  $A \subseteq X$ . Wir bepflastern  $A$  mit Mengen aus  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{C}(A) := \left\{ (S_n)_{n \in \mathbb{N}} : S_n \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right\} \quad (\text{Cover})$$

$\mathcal{C}(A) = \emptyset$  ist dabei möglich. Gegeben ein Prämaß  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir nun

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \} & \text{falls } \mathcal{C}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{falls } \mathcal{C}(A) = \emptyset \end{cases}$$

**Lemma 5.1.5.** Das in Konstruktion 5.1.4 definierte  $\mu^*$  ist ein äußeres Maß.

*Beweis.*

$$(i) \quad \text{Wir nehmen } S_n = \emptyset. \text{ Dann gilt } \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Sei } A \subseteq B. \text{ Angenommen } \mathcal{C}(B) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$$

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\} \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \text{Es gilt } \mu^*(A_n) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \}. \text{ Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } (S_{n,m})_m \in \mathcal{C}(A_n) \text{ mit}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \sum_{m \in \mathbb{N}} 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \right) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu^*(A_m) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

□

**Konstruktion 5.1.6** (Prämaß auf erzeugtem Ring). Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einem Halbring  $\mathcal{S}$ . Wir wollen  $\mu$  zu einem Prämaß auf dem erzeugten Mengenring forsetzen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Wir setzen  $\mathcal{S}_\cup := \{S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_n : S_j \in \mathcal{S}\}$  und definieren

$$\bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) = \sum_{j=1}^n \mu(S_j)$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von  $\bar{\mu}$ . Angenommen  $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$  und  $S_j, T_j \in \mathcal{S}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_j &= S_j \cap \left( \bigsqcup_{k=1}^n S_k \right) = S_j \cap \left( \bigsqcup_{k=1}^n T_k \right) \\
&= \bigsqcup_{k=1}^n (S_j \cap T_k)
\end{aligned}$$

Analog ist auch

$$\begin{aligned}
T_k &= \bigsqcup_{j=1}^n (T_k \cap S_j) \\
\Rightarrow S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \\
\Rightarrow \bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) &= \bar{\mu} \left( \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \right) \\
\sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N \mu(S_j \cap T_k) &= \sum_{k=1}^N \mu(T_k) = \bar{\mu}(T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)
\end{aligned}$$

Das heißt  $\bar{\mu}$  ist wohldefiniert.

Frage: Wie verhält sich  $\mathcal{S}_\cup$  unter allgemeinen (endlichen) Vereinigungen und Schnitten? Wir betrachten  $S, T \in \mathcal{S}_\cup$  mit

$$\begin{aligned}
S \cap T &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N) \\
&= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \in \mathcal{S}_\cup
\end{aligned}$$

Das heißt  $\mathcal{S}_\cup$  ist stabil unter (endlichen) Schnitten.

$$S \setminus T = (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \setminus (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S \cap T^C &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap \bigcap_{n=1}^N T_k^C \\
&= \bigcup_{j=1}^M \left( S_j \cap \bigcap_{k=1}^N T_k^C \right) \\
&= \bigcup_{j=1}^M \bigcap_{k=1}^N (S_j \cap T_k^C) \in \mathcal{S}_U
\end{aligned}$$

Das heißt für  $S, T \in \mathcal{S}_U$  ist auch  $S \setminus T \in \mathcal{S}_U$ . Außerdem können wir schreiben

$$S \cup T = (S \setminus T) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus S) \in \mathcal{S}_U$$

Das heißt  $\mathcal{S}_U$  ist ein Mengenring und  $\bar{\mu}$  ist eine Fortsetzung von  $\mu$  auf  $\mathcal{S}_U$ .

$$\Rightarrow \bar{\mu}(T \cup S) = \bar{\mu}(S \setminus T) + \bar{\mu}(S \cap T) + \bar{\mu}(T \setminus S)$$

Das heißt  $\bar{\mu}$  ist definiert für endlich viele Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{S}_U$ .

Behauptung:  $\bar{\mu}$  ist ein Prämaß auf  $\mathcal{S}_U$ . Also ist zu zeigen, dass  $\bar{\mu}$   $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{S}_U$  ist. Wir nehmen  $(T_k)_k \subseteq \mathcal{S}_U$

$$T := \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \in \mathcal{S}_U$$

Zu zeigen:

$$\bar{\mu}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(T_k)$$

Nach Definition von  $\mathcal{S}_U$  gibt es  $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$  und Indizes  $0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$  mit

$$\begin{aligned}
T_k &= S_{i(k-1)+1} \sqcup \dots \sqcup S_{i(k)} \\
T &= U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L \\
U_l &:= \bigsqcup_{i \in J_l} S_i
\end{aligned} \tag{k \in \mathbb{N}}$$

Indexmengen  $J_1, \dots, J_L \subseteq \mathbb{N}$  paarweise disjunkt und  $J_1 \sqcup \dots \sqcup J_L = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(T) &= \bar{\mu}(U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L) \\
&= \bar{\mu}(U_1) + \dots + \bar{\mu}(U_L) \\
&= \mu(U_1) + \dots + \mu(U_L) \\
&= \sum_{i \in J_1} \mu(S_i) + \dots + \sum_{i \in J_L} \mu(S_i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(T_k)
\end{aligned}$$

[29. Nov] **Bemerkung 5.1.7** (Prämaß und äußeres Maß). Wenn wir ein Prämaß  $\mu$  auf einem Halbring  $\mathcal{S}$  haben, dann gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

wobei  $\mu^*$  das in Konstruktion 5.1.4 definierte äußere Maß ist. Das heißt  $\mu^*$  ist eine Fortsetzung von  $\mu$ .

*Beweis.* Sei  $A \in \mathcal{S}$  und  $(S_j)_j \in \mathcal{C}(A)$  Überdeckung von  $A$ . Dann gilt

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j\right) \cap A\right)$$

Wegen der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\bar{\mu}$  gilt

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_j \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_j)$$

Wir nehmen das Infimum auf beiden Seiten und erhalten

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Wir wollen noch zeigen, dass  $\mu(A) \geq \mu^*(A)$ . Für ein  $A \in \mathcal{S}$  nehmen wir  $(S_j)_j$  mit  $S_1 := A$ ,  $S_2 = S_3 = \dots = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \square$$

**Definition 5.1.8** (Zerlegungsbedingung). Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $\mathcal{P}(X)$ . Dann sagen wir  $A \subseteq X$  erfüllt die Zerlegungsbedingung, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X \quad (5.1.1)$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_* := \{A \subseteq X : A \text{ erfüllt die Zerlegungsbedingung 5.1.1}\}$$

**Bemerkung 5.1.9.** Die Bedingung 5.1.1 ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

da die Ungleichung in die andere Richtung bereits durch die  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu^*$  gegeben ist.

**Lemma 5.1.10.** Sei  $\mu^*$  das vom Prämaß  $\mu$  auf  $\mathcal{S}$  erzeugte äußere Maß. Dann gilt

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_*$$

*Beweis.* Sei  $A \in \mathcal{S}$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

O.B.d.A sei  $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset$ . Sei  $(B_n)_n \in \mathcal{C}(B)$ ,  $B_n \in \mathcal{S}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} B_n &= (B_n \cap A) \sqcup (B_n \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B_n) &= \bar{\mu}(B_n) = \bar{\mu}((B_n \cap A)) + \overline{\mu(B_n \setminus A)} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mu}(B_n \setminus A)) \end{aligned}$$

Es gilt  $(B_n \cap A)_n \in \mathcal{C}(B \cap A)$  und  $(B_n \setminus A)_n \in \mathcal{C}(B \setminus A)$

$$\begin{aligned} &\geq \mu^*(B \cap A) + \bar{\mu}^*(B \setminus A) \\ &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B) &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \square \end{aligned}$$

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz von Carathéodory zu beweisen.

*Beweis von Satz 5.1.2.* SCHRITT 1: Wir zeigen, dass  $\mathcal{A}_*$  eine Algebra ist. Die Stabilität unter Komplementbildung und  $\emptyset \in \mathcal{A}_*$  zeigt sich leicht. Wir wollen also noch zeigen, dass  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$ . Das heißt es soll gelten

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &:= (A_1 \cap B) \setminus A_2 \\ B_2 &:= (A_2 \cap B) \setminus A_1 \\ B_3 &:= B \cap A_1 \cap A_2 \\ B_4 &:= B \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \\ B \setminus (A_1 \cup A_2) &= B_4 \end{aligned}$$

Das heißt es ist zu zeigen, dass

$$\mu(B) = \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) + \mu(B_4)$$

$A_1$  erfüllt die Zerlegungsbedingung. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B_1 \cup B_3) + \mu^*(B_2 \cup B_4) \end{aligned}$$

Verwende  $A_2$ , um  $B_1 \cup B_3$  zu zerlegen

$$\begin{aligned} \mu^*(B_1 \cup B_3) &= \mu^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + \mu^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) \end{aligned}$$

Genauso zerlegen von  $B_2 \cup B_4$  mittels  $A_2$

$$\begin{aligned} \mu^*(B_2 \cup B_4) &= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_4) \\ \Rightarrow \mu^*(B) &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3) + \mu^*(B_4) \end{aligned}$$

Machen dasselbe mit  $\overline{B} := B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3)$$

Es folgt dann  $A_1 \cup A_2$  erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$ .

[02. Dez] SCHRITT 2: Wir zeigen, dass  $\mu^*$  endlich additiv auf  $\mathcal{A}_*$  ist. Seien  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Wir benutzen  $A_1$ , um  $A_1 \sqcup A_2$  zu zerlegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \sqcup A_2) &= \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_1) + \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \cap A_1) \\ &= \mu^*(A_2) + \mu^*(A_1) \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Wir zeigen, dass  $\mathcal{A}_*$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_*$  ist. Sei  $(A_j)_j \subseteq \mathcal{A}_*$  und  $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ . Zu zeigen ist

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

Dabei reicht  $\geq$  zu zeigen, da die andere Ungleichung allgemein erfüllt ist. Wir definieren

$$F_n := \bigsqcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_*$$

mit  $F_n \nearrow A$  und

$$B \setminus A \subseteq B \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also wird  $B$  von  $F_n$  zerlegt

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n) \\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^n A_j\right)\right) + \mu^*(B \cap \bigcap_{j=1}^n A_j^c) \end{aligned}$$

Wegen der endlichen Additivität von  $\mu^*$  gilt

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \cap \bigcap_{j=1}^n A_j^c) \\ B \cap A &= B \cap \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j) \\ \Rightarrow \mu^*(B \cap A) &= \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j)\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)) \end{aligned}$$

Aber wir wissen  $B \setminus A \subseteq B \setminus F_n$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus F_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)) = \mu(B) \end{aligned}$$

Das heißt  $A$  erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit  $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_*$ . Das heißt  $\mathcal{A}_*$  ist ein Dynkinsystem. Wir wollen Satz 3.1.6 anwenden und müssen daher noch zeigen, dass  $\mathcal{A}_*$   $\cap$ -stabil ist. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = \left(A_1^c \cup A_2^c\right)^c \in \mathcal{A}_*$$

## 5 [\*] Existenz von Maßen

für  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$ . Damit ist  $\mathcal{A}_*$  nach Lemma 3.1.6 eine  $\sigma$ -Algebra.

SCHRITT 4: Wir zeigen, dass  $\mu^*$  ein Maß auf  $\mathcal{A}_*$  ist. Sei

$$B := A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Wir zerlegen  $B$  mittels  $A$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j) \end{aligned}$$

Durch die  $\sigma$ -Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in die andere Richtung. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(A_j) \quad \square$$

Um den Satz von Carathéodory auf  $\lambda^d$  anwenden zu können, brauchen wir noch

- $\mathcal{J}^d :=$  Mengensystem der (rechts-)halboffenen Intervalle im  $\mathbb{R}^d$  ist ein Halbring
- $\lambda^d : \mathcal{J}^d \rightarrow [0, \infty]$  ist ein Prämaß

**Lemma 5.1.11.** Seien  $X_1, X_2$  Mengen und  $\mathcal{S}_1$  ein Halbring in  $X_1$  sowie  $\mathcal{S}_2$  Halbring in  $X_2$ . Dann gilt  $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$  ist ein Halbring in  $X_1 \times X_2$ .

*Beweis.*

(S<sub>1</sub>)  $\emptyset \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$  folgt direkt aus  $\emptyset \in \mathcal{S}_1$  und  $\emptyset \in \mathcal{S}_2$

(S<sub>2</sub>) Seien  $J_1^1, J_1^2 \in \mathcal{S}_1$  und  $J_2^1, J_2^2 \in \mathcal{S}_2$ . Dann gilt

$$(J_1^1 \times J_2^1) \cap (J_1^2 \times J_2^2) = (J_1^1 \cap J_1^2) \times (J_2^1 \cap J_2^2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

(S<sub>3</sub>) (Übung)

□

**Satz 5.1.12.**

$$\mathcal{J}^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\}$$

ist ein Halbring.

*Beweis.* Für eine Dimension (das heißt  $d = 1$ ) zeigen sich die Halbring-Eigenschaften von  $\mathcal{J}^1$  direkt durch Fallunterscheidungen. Wir wollen also für höhere Dimensionen einfach Lemma 5.1.11 induktiv anwenden. Wir definieren also

$$\mathcal{J}^2 := \mathcal{J}^1 \times \mathcal{J}^1$$

Das ist nach dem Lemma ein Halbring

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{J}^3 &:= \mathcal{J}^2 \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \\ &\vdots \\ \Rightarrow \mathcal{J}^d &:= \mathcal{J}^{d-1} \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 5.1.13.** Sei  $\mu$  endlich-additiv auf einem Halbring  $\mathcal{S}$ . Wir betrachten die folgenden Aussagen

- (a)  $\mu$  ein Prämaß
- (b)  $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \nearrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (c)  $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (d)  $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow \emptyset \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$

Dann gilt (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d). Gilt ferner  $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{S}$ , dann ist auch (c)  $\Rightarrow$  (b). In diesem Fall sind also alle Aussagen äquivalent und damit verwendbar, um zu prüfen, ob  $\mu$  ein Prämaß ist.

*Beweis.* (Später) □

**Satz 5.1.14.** Sei  $\lambda^d$  für  $A \in \mathcal{J}^d$  mit

$$A = \times_{j=1}^d [a_j, b_j) = [a, b)$$

definiert als

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Dann ist  $\lambda^d$  ein Prämaß auf  $\mathcal{J}^d$ .

*Beweis.* Es gilt  $\lambda^d(\emptyset) = \lambda^d([a, a)) = 0$ . ?? □

[06. Dez] Wir wollen Maße nun einfacher darstellen, als nur als Fortsetzung eines Prämaßes, was auf einem Halbring definiert ist. Dafür sei nun  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $\mu(K) < \infty$  für alle kompakten Mengen  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Konstruktion 5.1.15** (Maße mit Funktionen identifizieren). Wir betrachten zunächst nur den Fall  $d = 1$ . Wir wollen  $\mu$  auf den halboffenen Intervallen durch eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  darstellen. Das heißt es soll gelten

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Welche Eigenschaften hat dann die Funktion  $F$ ?

1.  $F$  ist monoton wachsend

$$F(b) - F(a) = \mu([a, b)) \geq 0 \quad \forall b \geq a$$

2.  $F$  ist ?seitig stetig. Wir betrachten eine Folge  $x_n \rightarrow b$  ( $a < b$ ) mit  $x_n \leq x_{n+1}$ . Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n) = [a, b)$$

Da  $\mu$  ein Maß ist, ist es von unten stetig. Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(a) &= \mu([a, x_n)) \nearrow \mu([a, b)) = F(b) - F(a) \\ \Rightarrow \lim_{x \nearrow b} F(x) &= F(b) \end{aligned}$$



**Beispiel 5.1.16** (Dirac-Maß).

**Satz 5.1.17.** Jede wachsende Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die von rechts stetig ist und (von links Grenzwerte hat) erzeugt ein Borelmaß  $\mu_F$ , sodass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

Ferner: Sei  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wachsend und von rechts stetig mit  $\mu_G = \mu_F$ . Dann folgt

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Der letzte Teil zeigt sich durch nachrechnen direkt. Erster Teil: Siehe Literatur. □

## 6 [\*] Messbare Abbildungen und Bildmaße

### 6.1 Messbare Abbildungen

**Definition 6.1.1.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(X', \mathcal{A}')$  Messräume und  $T : X \rightarrow X'$  eine Funktion. Dann heißt  $T$   $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

#### Beispiel 6.1.2.

1. Konstante Funktionen sind messbar
2. Wir betrachten  $(X, \mathcal{O})$ ,  $(X', \mathcal{O}')$  mit  $\mathcal{O}$  Mengensystem der offenen Mengen. Dann ist eine stetige Funktion  $T : \mathcal{B}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{O}')$ -messbar, da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen sind

**Satz 6.1.3.** Seien  $(X, \mathcal{A})$ ,  $(X', \mathcal{A}')$  Messräume und  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X')$  Erzeuger von  $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$ . Dann ist  $T$  genau dann  $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'$$

*Beweis.*  $\Sigma' := \{A' \subseteq X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra in  $X'$  (Übung) mit  $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}' &= \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\Sigma') = \Sigma' \\ \Rightarrow \mathcal{A}' &= \Sigma' \end{aligned}$$

□

**Satz 6.1.4.** Seien  $(X_1, \mathcal{A}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{A}_2)$ ,  $(X_3, \mathcal{A}_3)$  Messräume und  $T_1 : X_1 \rightarrow X_2$   $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ -messbar sowie  $T_2 : X_2 \rightarrow X_3$   $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$ -messbar. Dann ist  $T_2 \circ T_1 : X_1 \rightarrow X_3$   $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$ -messbar.

*Beweis.* Sei  $A_3 \in \mathcal{A}_3$ . Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1} \left( \underbrace{T_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2} \right) \in \mathcal{A}_1$$

□

**Bemerkung 6.1.5.** Sei  $I$  eine Index-Menge und  $(X_j, \mathcal{A}_j)$  ein Messraum für  $j \in I$ . Abbildung  $T_j : X \rightarrow X_j$ . Dann ist  $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, auf  $X$ , für die alle Abbildungen  $T_j$  messbar (also  $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right) - \mathcal{A}_j$ -messbar) sind.

**Satz 6.1.6.**  $S : X_0 \rightarrow X$  ist  $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}$ -messbar. Dann ist  $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$  genau dann, wenn

$$T_j \circ S : X_0 \rightarrow X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Folgt direkt aus Satz 6.1.4.

„ $\Leftarrow$ “ Nehmen  $E \in \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ . Dann ist  $E \in T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$  für ein  $j \in I$ . Dann ist  $E = T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ . Es folgt  $S^{-1}(E) = S^{-1}\left(T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right) = (T_j \circ S)^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_0$ .

$\mathcal{E} := \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$  ist Erzeuger von  $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$ . Damit folgt die Behauptung.

□

## 6.2 Bildmaße

[09. Dez] **Notation 6.2.1.** Seien  $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$  Messräume. Wir schreiben  $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$  für eine Funktion  $T : X \rightarrow X'$ , die  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar ist.

**Konstruktion 6.2.2.** Sei  $\mu$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$  und  $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$  eine Funktion. Wir nehmen  $A' \in \mathcal{A}'$  und definieren

$$\mu'(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

Dann ist  $\mu'$  ein Maß auf  $(X', \mathcal{A}')$ .

**Definition 6.2.3** (Bildmaß). Im Sinne von Konstruktion 6.2.2 nennen wir  $\mu'$  das Bild von  $\mu$  unter  $T$ . Das heißt wir schreiben

$$\mu' := T(\mu)$$

Es gilt

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

**Bemerkung 6.2.4** (Transitivität der Bildmaße). Ist  $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$ ,  $T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{A}_3)$  und  $\mu$  ein Maß auf  $(X_1, \mathcal{A}_1)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\mu) &= T_2(T_1(\mu)) \\ (T_2 \circ T_1)^{-1} &= T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \\ \Rightarrow (T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) &= T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_3)) \end{aligned}$$

## 7 [\*] Messbare numerische Funktionen

**Definition 7.1.1** ( $\overline{\mathbb{R}}$ ). Wir schreiben  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  für die Menge der reellen Zahlen einschließlich  $\pm\infty$ . Wir definieren die algebraischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 x + \infty &:= \infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 x - \infty &:= -\infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 \infty + \infty &:= \infty \\
 -\infty + (-\infty) &= -\infty - \infty := -\infty \\
 -\infty < x < \infty & \forall x \in \mathbb{R} \\
 x \cdot \infty &:= \infty & \forall x > 0 \\
 x \cdot (-\infty) &:= -\infty & \forall x > 0 \\
 x \cdot \infty &:= (-\infty) & \forall x < 0 \\
 x \cdot (-\infty) &:= \infty & \forall x < 0 \\
 0 \cdot (\pm\infty) &:= 0 \\
 \frac{x}{\pm\infty} &:= 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\
 \infty \cdot \infty &= \infty \\
 \infty \cdot (-\infty) &= -\infty
 \end{aligned}$$

Dabei bleiben Ausdrücke wie  $\infty - \infty$  nicht definiert. Wir definieren offene Mengen im  $\overline{\mathbb{R}}$  wie folgt:  $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  ist offen, wenn

$$\forall x \in U \cap \mathbb{R} \exists R > 0: (x - R, x + R) \subseteq U$$

Außerdem muss für den Fall  $\infty \in U$  zu sätzlich gelten

$$\exists R > 0: (R, \infty] \subseteq U$$

Analog muss für  $-\infty \in U$  gelten

$$\exists L > 0: [-\infty, L) \subseteq U$$

Mit dieser Definition können wir die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$  definieren mit  $\overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathcal{B}}$ .

Dann gilt für die Spur- $\sigma$ -Algebra  $\overline{\mathcal{B}}^1 \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}^1$ .

**Bemerkung 7.1.2** (Identitätsfunktion). Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $A \in \mathcal{A}$ . Dann definieren wir die Identitätsfunktion (von  $A$ ) mit

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diese ist Borel-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 A \subseteq B &\Rightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B \\
 \mathbf{1}_{A^c} &= 1 - \mathbf{1}_A
 \end{aligned}$$

**Definition 7.1.3** (Numerische Funktion). Eine numerische Funktion ist eine Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $X$ , so heißt  $f$   $\mathcal{A}$ -messbar, falls es  $\mathcal{A}$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist. Das heißt

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}}: f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

**Satz 7.1.4.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Dann ist eine numerische Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  genau dann  $\mathcal{A}$ -messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Wir setzen  $\overline{\mathcal{E}} := \{[\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Zu zeigen ist  $\sigma(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{\mathcal{B}}^1$

(1) Es gilt  $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Das heißt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Sigma := \sigma(\overline{\mathcal{E}}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &[\alpha, \beta) = [\alpha, \infty] \setminus [\beta, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \quad (\alpha \leq \beta) \\ &\Rightarrow [\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 \\ &\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \sigma(\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1) \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \{-\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^C \in \sigma(\mathcal{E}) \\ &\Rightarrow \forall G \in \Sigma: \overline{G} \cap \mathbb{R} = \overline{G} \cap (\{-\infty, \infty\}^C) = \Sigma \\ &\Rightarrow \mathbb{R} \cap \Sigma := \Sigma \\ &\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \Sigma \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1 \cup \{0, \{-\infty\}, \{\infty\}, [-\infty, \infty)\} \subseteq \Sigma \end{aligned}$$

Also ist  $\overline{\mathcal{E}}$  ein Erzeuger von  $\overline{\mathcal{B}}^1$  und es genügt die Maßeigenschaften auf dem Erzeuger zu haben. □

**Satz 7.1.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Dann ist eine numerische Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  genau dann  $\mathcal{A}$ -messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} &\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (1) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (2) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (3) \\ &\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Äquivalenz zu (1) folgt direkt aus Satz 7.1.4. Warum sind die anderen Aussagen dazu äquivalent? (Übung). □

**Satz 7.1.6.** Für messbare Funktionen  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum folgt

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$$

*Beweis.*  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Dann ist

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{q < g\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{A} \\
 \{f \leq g\} &= \{f > g\}^c \\
 \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} = \mathcal{A} \\
 \{f \neq g\} &= \{f = g\}^c \in \mathcal{A}
 \end{aligned}$$

□

[13. Dez] **Satz 7.1.7.** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -messbar. Dann folgt  $f \pm g$  (falls definiert) sowie  $f \cdot g$  sind messbar.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \{f - g \geq \alpha\} &= \left\{ f \geq \underbrace{g + \alpha}_{=: h} \right\} \\
 &= \{f \geq h\}
 \end{aligned}$$

Das heißt es reicht aus zu zeigen, dass  $\alpha + g$  (bzw.  $h$ ) messbare Funktionen für ein festes  $\alpha \in \mathbb{R}$  sind.  $g$  ist messbar, das heißt

$$\begin{aligned}
 \{g \leq \beta\} &\in \mathcal{A} \\
 h \geq \beta &\Leftrightarrow g + \alpha \geq \beta \Leftrightarrow g \leq \beta - \alpha \\
 \{h \geq \beta\} &= \{g \leq \beta - \alpha\}
 \end{aligned}$$

Das ist messbar, da  $g$  messbar ist und wir Satz 7.1.6 anwenden können. Damit ist  $h$  und damit  $f - g$  messbar.

Um zu zeigen, dass auch  $f + g$  messbar ist, können wir einfach zeigen, dass  $-g$  messbar ist. Es gilt

$$\{-g \geq \gamma\} = \{g \leq -\gamma\}$$

Damit ist  $-g$ , also auch  $f - (-g) = f + g$  messbar.

Wir zeigen noch die Messbarkeit von  $f \cdot g$ . Annahme:  $f$  und  $g$  sind reellwertig

$$\begin{aligned}
 (f + g)^2 - (f - g)^2 &= 4fg \\
 \Rightarrow fg &= \frac{1}{4} \left( (f + g)^2 - (f - g)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Das heißt es reicht aus, zu zeigen, dass die Messbarkeit einer Funktion  $h$  auch die Messbarkeit von  $h^2$  impliziert

$$\begin{aligned}
 \{h^2 \geq \beta\} &= X \quad \text{falls } \beta \leq 0 \\
 \{h^2 \geq \beta\} &= \{h \geq \sqrt{\beta}\} \cup \{h \leq -\sqrt{\beta}\} \in \mathcal{A} \quad \text{falls } \beta > 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Messbarkeit von  $h^2$  gezeigt. Wir wollen nun noch die Annahme loswerden, dass  $f$  und  $g$  reellwertig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned}
 X_1 &:= \{fg = +\infty\} \cup (\{f > 0\} \cap \{g = \infty\} \sqcup (\{f < 0\} \cap \{g = -\infty\})) \\
 &\quad \cup (\{f = \infty\} \cap \{g \geq 0\} \cup \{f = \infty\} \cap \{g < 0\}) (?) \\
 X_2 &:= \{fg = -\infty\} \\
 X_3 &:= \{fg = 0\} = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4 &:= (X_1 \cup X_2 \cup X_3)^C \\
\Rightarrow f, g : X_4 &\rightarrow \mathbb{R} \text{ sind reellwertig} \\
fg &= fg \mathbf{1}_{X_4} + \infty \mathbf{1}_{X_1} - \infty \mathbf{1}_{X_2} + 0 \mathbf{1}_{X_3}
\end{aligned}$$

Damit ist  $fg$  nach Voraussetzung messbar, da  $X_4 \in \mathcal{A}$ . □

**Satz 7.1.8 (WICHTIG).** Sei  $(f_n)_n$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind  $\sup_n f_n$ ,  $\inf_n f_n$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  sowie  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  messbar.

**Bemerkung 7.1.9.** Sei  $s := \sup_n f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  ist punktweise definiert. Das heißt

$$s(x) = \left( \sup_n f_n \right) (x) := \sup_n f_n(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

*Beweis von Satz 7.1.8.* Sei  $s(x) := \sup_n f_n(x)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\{s \leq \alpha\} &= \{x : s(x) \leq \alpha\} =: A_1 \\
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < \alpha\} = A_2 \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Wir zeigen  $A_1 = A_2$ . Sei  $x \in A_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq s(x) = \sup f_n(x) \geq f_n(x) \\
\Rightarrow f_m(x) &\leq \alpha \quad \forall m \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow A_1 &\subseteq A_2
\end{aligned}$$

Sei  $x \in A_2$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \sup f_n(x) &\leq \alpha \Rightarrow x \in A_1
\end{aligned}$$

Damit ist  $A_1 = A_2$ . Es gilt

$$\inf_n f_n = - \sup_n (-f_n)$$

ist messbar

$$\begin{aligned}
\left( \limsup_n f_n \right) (x) &= \inf_n \sup_{\alpha \geq n} f_\alpha(x) \\
\left( \liminf_n f_n \right) (x) &= \sup_n \inf_{\alpha \geq n} f_\alpha(x)
\end{aligned}$$

□

**Korollar 7.1.10.** Sei  $(f_n)_n$  eine Folge messbarer Funktionen auf  $X$  und  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum. Angenommen  $\forall x \in X$  existiert der Grenzwert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (wir schreiben auch  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ). Dann ist  $f$  messbar.

*Beweis.*

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Damit ist  $f$  nach dem vorherigen Satz messbar. □

**Korollar 7.1.11.** Seien  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbare Funktionen. Dann sind

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n := \max(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (\text{punktweise})$$

sowie

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n := \min(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

messbar.

*Beweis.* Nehme die Folge  $(\bar{f}_n)_n$  mit  $\bar{f}_m = f_m$  für  $1 \leq m \leq n$  und  $\bar{f}_m = f_n$  für  $m > n$ . Damit ist

$$f_1 \vee \dots \vee f_n = \sup_n \bar{f}_n$$

messbar nach Satz 7.1.8. Die zweite Behauptung zeigt sich analog.  $\square$

**Notation 7.1.12.** Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Wir definieren

$$f_+ := f \vee 0 = \max(f, 0) \geq 0 \quad (\text{Positivteil})$$

$$f_- := (-f) \vee 0 \geq 0 \quad (\text{Negativteil})$$

Damit gilt außerdem

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

**Korollar 7.1.13.** Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  genau dann  $\mathcal{A}$ -messbar, wenn  $f_+$  und  $f_-$  messbar sind.

**Korollar 7.1.14.** Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine  $\mathcal{A}$ -messbare Funktion. Dann ist  $|f|$  messbar.



## 8 [\*] Elementarfunktionen und ihr Integral

**Definition 8.1.1.** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum. Wir definieren  $E_+ := E_+(X, \mathcal{A})$  als die Menge aller nicht-negativen Elementarfunktionen. Das heißt  $u \in E_+$ , falls  $u : X \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$   $\mathcal{A}$ -messbar ist und  $\text{Bild}(u)$  endlich viele Werte annimmt. Das heißt

$$u(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_j < \infty \quad \forall j \leq n \\ \alpha_i &\neq \alpha_n \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Wir setzen  $A_j := u^{-1}(\{\alpha_j\}) \in \mathcal{A}$ . Damit gilt  $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ . Wir haben den Raum  $X$  nun folgendermaßen disjunkt zerlegt:  $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ .

Sind umgekehrt nicht-notwendigerweise disjunkte  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \mathbb{1}_{\tilde{A}_j}$  eine Elementarfunktion.

**Bemerkung 8.1.2** (Eigenschaften von  $E_+$ ). Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und  $u, v \in E_+$ . Dann gilt

- $\alpha u \in E_+$
- $u + v \in E_+$
- $u - v \in E_+$
- $u \wedge v \in E_+$
- $u \vee v \in E_+$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition und den Messbarkeitseigenschaften aus dem letzten Kapitel.  $\square$

**Notation 8.1.3** (Normaldarstellung). Sei  $u \in E_+$ . Dann schreiben wir  $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$  als Normaldarstellung mit  $\bigsqcup_{j=1}^n A_j = X$ .

**Lemma 8.1.4.** Sei  $u \in E_+ = E_+(X, \mathcal{A})$  mit Normaldarstellungen

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

Sei  $\mu$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ . Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k)$$

Das heißt die Uneindeutigkeit der Normaldarstellung verschwindet bei der Verwendung eines Maßes.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \\ &= B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A_j &= \bigcup_{k=1}^n (A_j \cap B_k) & B_k &= \bigcup_{j=1}^m (A_j \cap B_k) \\
\Rightarrow \mathbb{1}_{A_j} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} & \mathbb{1}_{B_k} &= \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
\Rightarrow u &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} & &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_k \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}
\end{aligned}$$

Jeder Punkt  $x \in X$  liegt in genau einer Menge  $A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \alpha_{j_0} \mathbb{1}_{A_{j_0} \cap B_{k_0}}(x) = \beta_{k_0} \mathbb{1}_{A_{j_0} \cap B_{k_0}}(x) \\
\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_j \cap B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k)
\end{aligned} \quad \square$$

[16. Dez] **Definition 8.1.5.** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $u$  eine Elementarfunktion. Dann heißt die von der spezifischen Normaldarstellung  $\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$  unabhängige Zahl (Lemma 8.1.4)

$$\int u \, d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

das  $(\mu)$ -Integral von  $u$  (über  $X$ ). Wir schreiben auch

$$\int u \, d\mu = \int_X u \, d\mu = \int_X u(x) \, d\mu(x) = \int_X u(x) \mu(dx)$$

und definieren in diesem Sinne eine Abbildung

$$\begin{aligned}
E_+ &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
u &\mapsto \int u \, d\mu
\end{aligned}$$

**Lemma 8.1.6** (Eigenschaften des Integrals). Für  $A \subseteq X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $u, v \in E_+$  gilt

- (i)  $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$
- (ii)  $\int \alpha u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu$
- (iii)  $\int (u + v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$
- (iv)  $u \leq v \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$

*Beweis.* (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. Für (iii) sei

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \quad v = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^n A_j \cap B_k \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^m A_j \cap B_k \\
u &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \quad v = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
&\Rightarrow u + v = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\alpha_j + \beta_k) \mathbb{1}_{A_j \cap B_k} \\
\int u \, d\mu &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \quad \int v \, d\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (u + v) \, d\mu &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\alpha_j + \beta_k) \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu
\end{aligned}$$

Für (iv) gilt mit der Definition, die wir auch schon bei (iii) verwendet haben, dass  $\alpha_j \leq \beta_k$  auf  $A_j \cap B_k$

$$\Rightarrow \int u \, d\mu = \sum_j^k \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_j \sum_k \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int v \, d\mu$$

## 9 [\*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen

**Satz 9.1.1.** Für jede wachsende Folge  $(u_n)_n \subseteq E_+$  und jedes  $u \in E_+$  gilt

$$u \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$$

*Beweis.* Sei  $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$  und  $0 < \delta < 1$ . Wir definieren  $B_n := \{x \in X : u_n(x) \geq \delta u(x)\}$ . Wir wissen nach Voraussetzung, dass  $u_n \leq u_{n+1}$ , das heißt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) \geq u(x) \, \forall x \in X$ . Sei  $x \in X$  fest. Ist  $u(x) > 0$ , dann gilt  $\exists N(x) \in \mathbb{N} : u_n(x) \geq \delta u(x)$  für  $n \geq N(x)$ .

Aus  $u_{n+1} \geq u_n$  folgt  $B_n \subseteq B_{n+1}$ . Außerdem ist  $\forall x \in X : x \in B_n$  für ein ausreichend großes  $n$ . Also haben wir  $B_n \nearrow X$ . Auch ist  $u_n \geq \delta u \mathbb{1}_{B_n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int u_n \, d\mu &\geq \int \delta u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \\ u &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \\ \Rightarrow u \mathbb{1}_{B_n} &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n} \\ \delta \int u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu &= \delta \int \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n} \, d\mu \\ &= \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \rightarrow \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \\ \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int u \, d\mu \geq \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_j \cap B_n) = \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \delta \int u \, d\mu \end{aligned}$$

Das gilt für alle  $\delta < 1$ . Mit dem Limes für  $\delta \rightarrow 1$  folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Korollar 9.1.2.** Seien  $(u_n)_n, (v_n)_n \subseteq E_+$  wachsende Folgen von Elementarfunktionen. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v \, d\mu$$

*Beweis.* Nach dem vorherigen Satz und  $u_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$  gilt

$$\begin{aligned} \int u_n \, d\mu &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \\ \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, dx &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu$$

$\square$

**Notation 9.1.3.** Wir schreiben  $E^n = E_+^n = E_+^n(X, \mathcal{A})$  für die Menge aller numerischen meßbaren Funktionen  $f \geq 0$  auf  $X$ , für die es eine wachsende Folge  $(u_n)_n \subseteq E_+$  gibt, sodass  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = f$ . Für  $f \in E_+^n$  ist dann

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int u_n \, d\mu : u_n \subseteq E_+, \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = f \right\}$$

Das nennen wir das  $(\mu\text{-})$ Integral von  $f$ .