

Skript zur Vorlesung
Analysis III
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie	3
2 σ-Algebren und Maße	4
2.1 σ -Algebren	4
2.2 Maße und Prämaße	6
3 Dynkinsysteme	10
4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes	12
5 [*] Existenz von Maßen	17
6 [*] Messbare Abbildungen und Bildmaße	26
6.1 Messbare Abbildungen	26
6.2 Bildmaße	27
7 [*] Messbare numerische Funktionen	28

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des \mathbb{R}^n messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des \mathbb{R}^2 A und B , die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des \mathbb{R}^2 haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

Beispiel 1.1.1 (Messen eines Rechtecks). Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

Beispiel 1.1.2 (Messen eines Dreiecks). Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche g und Höhe h kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2}gh$$

Beispiel 1.1.3 (Parkettierung). Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

Bemerkung 1.1.4. Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) := \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \emptyset$ ist. Außerdem soll gelten, dass

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- (iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

¹ σ -Additivität

2 σ -Algebren und Maße

2.1 σ -Algebren

Definition 2.1.1 (σ -Algebra). Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Eine σ -Algebra in E ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von E mit folgenden Eigenschaften

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C := E \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \text{ Das heißt } \mathcal{A} \text{ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen}$$

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar (\mathcal{A} -messbar).

Lemma 2.1.2 (Eigenschaften von σ -Algebren). Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in E . Dann gilt

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A} \text{ (das heißt } \mathcal{A} \text{ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)}$$

$$(iii) \quad \text{Für } (A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \text{ gilt } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}$$

Beweis.

$$(i) \quad E \in \mathcal{A} \xrightarrow{(\Sigma_2)} \emptyset = E^C \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \text{Wir definieren } A_1 := A, A_2 := B \text{ und } A_i := \emptyset \text{ für } i \geq 3. \text{ Dann gilt gilt } (\Sigma_3)$$

$$A \cup B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^C \right)^C \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$(iv) \quad A \setminus B = A \cap B^C = A \cap B^C \cap E \cap E \cap \dots \text{ Dann gilt nach (iii), dass } A \setminus B \in \mathcal{A}$$

□

Beispiel 2.1.3. Wir betrachten einige Beispiele für σ -Algebren

- (a) Für eine Mengen E ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ selber nach Definition immer eine σ -Algebra über E .
- (b) $\{\emptyset, E\}$ ist die kleinste σ -Algebra in E .
- (c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^C, E\}$ ist die kleinste σ -Algebra, die A enthält.
- (d) Sei E überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} := \{A \subseteq E : A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ -Algebra.
- (e) Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra in E . Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur- σ -Algebra von F .

2 σ -Algebren und Maße

- (f) Seien E, E' nicht-leere Mengen, $f : E \rightarrow E'$ eine Funktion und \mathcal{A}' eine σ -Algebra in E' . Dann ist auch

$$\mathcal{A} := \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine σ -Algebra.

Beweis von (d). Wir prüfen die Kriterien

$$(\Sigma_1) \quad E^C = \emptyset \text{ ist abzählbar} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \text{ oder } (A^C)^C \text{ ist abzählbar} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \mathcal{A} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \text{ Wir unterscheiden 2 Fälle}$$

FALL 1: Alle A_n sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

FALL 2: Ein A_j ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^C$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C \subseteq (A_j)^C$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^C$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. \square

Notation 2.1.4 (Durchschnitt). Seien I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in E . Dann ist

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j := \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der \mathcal{A}_j .

Satz 2.1.5. Sei I eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j \in I}$ eine Familie von σ -Algebren in E . Dann gilt

$$\bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine σ -Algebra.

Beweis.

$$(\Sigma_1) \quad E \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_2) \quad A \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \forall j \in I. \text{ Daraus folgt } A^C \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow A^C \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j$$

$$(\Sigma_3) \quad \text{Sei } A_n \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j. \text{ Dann gilt } A_n \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \forall j \in I \quad \square$$

Satz 2.1.6. Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für E nicht-leer ein System von Teilmengen von E . Dann existiert eine kleinste σ -Algebra $\sigma(E)$ in E , welche ζ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine σ -Algebra in E und

(b) Für eine σ -Algebra \mathcal{A} in E mit $\zeta \subseteq \mathcal{A}$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von ζ erzeugte σ -Algebra und ζ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

Beweis. Wir definieren $I := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller σ -Algebren, die ζ enthalten. Dabei gilt I nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$$

eine σ -Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an I . Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. \square

Beispiel 2.1.7. Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\{\emptyset, A, A^C, E\}$ die von ζ erzeugte σ -Algebra.

Definition 2.1.8. Sei \mathcal{O}_d das System der offenen Mengen im \mathbb{R}^d . Dann definieren wir die *Borel- σ -Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

2.2 Maße und Prämaße

Sei in diesem Teilkapitel stets X eine Menge.

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung). Seien A, B Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von A und B .

Definition 2.2.2 (Maß). Ein (positives) Maß μ auf X ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit
 (M_0) \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.

(M_1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M_2) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.3 (Prämaß). Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt μ Prämaß, falls

(PM_1) $\mu(\emptyset) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\emptyset \in \mathcal{A}$)

(PM_2) Sind $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 2.2.4 (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X . Dann nennen wir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$

Notation 2.2.5.

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.2.6 (Messraum und Maßraum). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra und $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar (X, \mathcal{A}) einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) einen Maßraum.

2 σ -Algebren und Maße

3. Wir nennen μ endlich und (X, \mathcal{A}, μ) einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen μ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und (X, \mathcal{A}, μ) einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen μ σ -endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

Satz 2.2.7 (Eigenschaften von Maßen). Seien (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- (i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- (iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)
- (v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)
- (vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- (vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)
- (viii) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ -Subadditivität)

Beweis.

- (i) Sei $A_1 := A, A_2 := B$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

- (iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

- (iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

- (vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 := A_1$ und $F_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind F_j paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^n A_j &= \bigsqcup_{j=1}^n F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(F_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^n F_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

- (vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n := B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

- (viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^k A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\hat{A}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.2.8.

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt“ auch kürzer „disjunkt“
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern \mathcal{A} stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern \mathcal{A} stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

Beispiel 2.2.9 (Dirac-Maß). Sei X eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra in X und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist δ_{x_0} ein Maß in X und wird als *Dirac-Maß* bezeichnet.

2 σ -Algebren und Maße

Beispiel 2.2.10. Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^C \text{ ist abzählbar}\}$. Dann ist \mathcal{A} nach Beispiel 2.1.3 (d) eine σ -Algebra in \mathbb{R} . Wir definieren ein Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

Beispiel 2.2.11 (Zählmaß). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elementen in A angibt.

Beispiel 2.2.12 (Diskretes W-Maß). Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n \in \mathbb{N}: \omega_n \in A} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra). Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

$$(R_1) \emptyset \in R$$

$$(R_2) A, B \subseteq R \Rightarrow (A \setminus B) \in R$$

$$(R_3) A, B \subseteq R \Rightarrow (A \cup B) \in R$$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt R Algebra.

Bemerkung 2.2.14 (Eigenschaften von Mengenringen). Es sei R ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält R auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \rightarrow R$, $(A, B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert (R, Δ, \cap) einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei Δ der „Addition“ und \cap der „Multiplikation“ entspricht.

3 Dynkinsysteme

Definition 3.1.1 (Dynkinsystem). Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

$$(D_1) \quad X \in \mathcal{D}$$

$$(D_2) \quad D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^C \in \mathcal{D}$$

$$(D_3) \quad \text{Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge } (D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$$

Beispiel 3.1.2.

1. Jede σ -Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei X eine $2n$ -elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine σ -Algebra.

Lemma 3.1.3. Sei I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j \in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in X , dann ist $\bigcap_{j \in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

Beweis. (Übung) □

Satz 3.1.4. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches \mathcal{G} enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von \mathcal{G} erzeugte Dynkinsystem.

Beweis. $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \emptyset$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über σ -Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in I} \mathcal{D}$$
□

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen \mathcal{D} \cap -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir \mathcal{D} \cup -stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine σ -Algebra?

Lemma 3.1.6. Sei \mathcal{D} ein Dynkinsystem. Dann gilt \mathcal{D} ist genau dann eine σ -Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei \mathcal{D} eine σ -Algebra. Dann ist \mathcal{D} ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^C, B^C \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{D}$.

„ \Leftarrow “ Zu zeigen ist Eigenschaft (Σ_3) . Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D'_0 := \emptyset$ und $D'_n := D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. Dann ist $(D'_n)_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1})$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \text{ falls } (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3 Dynkinsysteme

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = (D'_n \cap (D'_{n-1})^C) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass \mathcal{D} \cup -stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = (A^C \cap B^C)^C \in \mathcal{D}$$

Damit ist (Σ_3) gezeigt. \square

Satz 3.1.7. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus \mathcal{G} ist \cap -stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil ist.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: \mathcal{D}_D ist ein Dynkinsystem

(D₁) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

(D₂) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^C \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^C \cap D = (Q^C \cup D^C) \cap D = (Q \cap D)^C \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

(D₃) (Siehe handschriftliches Skript)

Nun können wir folgendermaßen argumentieren: Da \mathcal{G} \cap -stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} & \forall G, D \in \mathcal{G} : G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ & \Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} : \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \stackrel{\text{(Beh.)}}{=} \mathcal{D}_D \\ & \Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} & \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \forall D \in \mathcal{G} : D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ & \Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ & \Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) : D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist σ -stabil. \square

Korollar 3.1.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn \mathcal{G} \cap -stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine σ -Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

Beweis. Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ \cap -stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine σ -Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste σ -Algebra ist, die \mathcal{G} enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. \square

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz). Sei (X, \mathcal{A}) ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien μ, ν Maße auf \mathcal{A} mit

- (a) \mathcal{E} ist \cap -stabil
- (b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ ($X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$) mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

Beweis. Da \mathcal{E} \cap -stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

\mathcal{D}_n ist ein Dynkinsystem:

(D₁) Folgt direkt.

(D₂) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(G_n \cap A^C) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\ &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n \cap A^C) \\ \Rightarrow A^C &\in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

(D₃) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\ \Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m &\in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von \mathcal{D}_n gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da \mathcal{E} \cap -stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.

Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.

Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n := A \cap G_n \nearrow A$. Da μ, ν Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap G_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

□

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Bemerkung 4.1.2 (Ausschöpfende Folgen). Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß μ auf \mathcal{A} σ -endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.3 (Eigenschaften der Borelmengen). In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei \mathcal{O} das System offener Teilmengen im \mathbb{R}^d war. Wir definieren nun

- \mathcal{A}_d : System der abgeschlossenen Teilmengen im \mathbb{R}^d
- \mathcal{K}_d : System der kompakten Teilmengen im \mathbb{R}^d

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. SCHRITT 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da σ -Algebren stabil unter Komplementbildung sind.

SCHRITT 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.

SCHRITT 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\ A &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow A \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

Beobachtung 4.1.4. Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine d mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Definition 4.1.5. Es sei $J^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^d .

Bemerkung 4.1.6 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß). Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion T_c^{-1} . Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$\begin{aligned} \lambda^d(T_c^{-1}(I)) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\ &= \prod_{j=1}^d (b_j - c_j - (a_j - c_j)) \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf J^d ist λ^d invariant unter Translation.

Lemma 4.1.7. Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c := \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. SCHRITT 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was“-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d \right\}$$

Dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra (Übung).

SCHRITT 2: \mathcal{O}_d ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. \square

[8. Nov] (fehlt)

4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T(\lambda^d) = \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis. SCHRITT 1: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0$. Das heißt T ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &:= x + a \\ \Rightarrow (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) && (b := T^{-1}(a)) \\ &= T(x + b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= T(\lambda^d) &= \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a(T(\lambda^d)) = T_a \circ T(\lambda^d) \\ &= T \circ T_b(\lambda^d) = T(T_b(\lambda_d)) \\ &= T(\lambda^d) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist μ invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = \alpha \lambda^d$.
Frage: Warum ist $\alpha = 1$?

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d(T^{-1}(B)) = \mu(B) = \alpha \lambda^d(B) \\ \Rightarrow \alpha &= 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= \lambda^d \quad \forall T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

SCHRITT 2: Sei $T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$ beliebig und wir setzen $c := T(0)$ und $S := T_{-c} \circ T \in \text{Bew}(\mathbb{R}^d)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S(\lambda^d) &= \lambda^d \text{ nach SCHRITT 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T(\lambda^d) &= T_c(S(\lambda_d)) = T_c(\lambda^d) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach SCHRITT 1. □

Beispiel 4.1.9 (Lebesgue-Maß von einem Punkt). Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Was ist dann $\lambda^d(\{x\})$? Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$J := [x, x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x \in J \\
 \Rightarrow \lambda^d(\{x\}) &\leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \lambda^d(\{x\}) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d
 \end{aligned}$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ null, da

$$\begin{aligned}
 \lambda^d(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\
 \Rightarrow \lambda^d(\mathbb{Q}^d) &= 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.10 (Lebesgue-Maß einer Hyperebene). Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und wir definieren eine Hyperebene $H_j := \{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\}$. Was ist dann $\lambda^d(H_j)$? Wir definieren

$$J_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1}2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n (2n)^{d-1}} \right\}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 H_j &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \\
 \lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1}2^n} \\
 &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\
 \Rightarrow \lambda^d(H_j) &= 0
 \end{aligned}$$

Dieses Result gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form H_j abbildet.

5 [*] Existenz von Maßen

Definition 5.1.1 (Halbring). Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring, falls

$$(\text{S}_1) \quad \emptyset \in \mathcal{S}$$

$$(\text{S}_2) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$$

$$(\text{S}_3) \quad A, B \in \mathcal{S} \text{ existieren endlich viele disjunkte Mengen } S_1, \dots, S_M \in \mathcal{S} \text{ mit } A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

Satz 5.1.2 (Nach Carathéodory). Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Fortsetzung von μ zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{S})$. Falls μ σ -endlich auf \mathcal{S} ist, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

[25. Nov] **Definition 5.1.3** (Äußere Maße). Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß, falls

$$(i) \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \quad (\text{Normierung})$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad (\text{Monotonie})$$

$$(iii) \quad \mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

Konstruktion 5.1.4. Zu einem Prämaß μ auf \mathcal{S} gibt es ein äußeres Maß.

Nehme $A \subseteq X$. Wir bepflastern A mit Mengen aus \mathcal{S} :

$$\mathcal{C}(A) := \left\{ (S_n)_{n \in \mathbb{N}} : S_n \in \mathcal{S} \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right\} \quad (\text{Cover})$$

$\mathcal{C}(A) = \emptyset$ ist dabei möglich. Gegeben ein Prämaß $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir nun

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(A) \} & \text{falls } \mathcal{C}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{falls } \mathcal{C}(A) = \emptyset \end{cases}$$

Lemma 5.1.5. Das in Konstruktion 5.1.4 definierte μ^* ist ein äußeres Maß.

Beweis.

(i) Wir nehmen $S_n = \emptyset$. Dann gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Sei $A \subseteq B$. Angenommen $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\mu^*(A_n) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(A_n) \}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $(S_{n,m})_m \in \mathcal{C}(A_n)$ mit

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \right) \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu^*(A_m) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned} \tag*{\square}$$

Konstruktion 5.1.6 (Prämaß auf erzeugtem Ring). Sei μ ein Prämaß auf einem Halbring \mathcal{S} . Wir wollen μ zu einem Prämaß auf dem erzeugten Mengenring forsetzen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Wir setzen $\mathcal{S}_\cup := \{S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_n : S_j \in \mathcal{S}\}$ und definieren

$$\bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) = \sum_{j=1}^n \mu(S_j)$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von μ . Angenommen $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ und $S_j, T_j \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 S_j &= S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n S_k \right) = S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n T_k \right) \\
 &= \bigsqcup_{k=1}^n (S_j \cap T_k)
 \end{aligned}$$

Analog ist auch

$$\begin{aligned}
 T_k &= \bigsqcup_{j=1}^n (T_k \cap S_j) \\
 \Rightarrow S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \\
 \Rightarrow \bar{\mu}(S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n) &= \bar{\mu} \left(\bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \right) \\
 \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N \mu(S_j \cap T_k) &= \sum_{k=1}^N \mu(T_k) = \bar{\mu}(T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)
 \end{aligned}$$

Das heißt $\bar{\mu}$ ist wohldefiniert.

Frage: Wie verhält sich \mathcal{S}_\cup unter allgemeinen (endlichen) Vereinigungen und Schnitten? Wir betrachten $S, T \in \mathcal{S}_\cup$ mit

$$\begin{aligned}
 S \cap T &= (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \cap (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N) \\
 &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \in \mathcal{S}_\cup
 \end{aligned}$$

Das heißt \mathcal{S}_\cup ist stabil unter (endlichen) Schnitten.

$$S \setminus T = (S_1 \sqcup \dots \sqcup S_M) \setminus (T_1 \sqcup \dots \sqcup T_N)$$

5 [*] Existenz von Maßen

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S \cap T^C &= (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \cap \bigcap_{n=1}^N T_k^C \\
&= \bigsqcup_{j=1}^M \left(S_j \cap \bigcap_{k=1}^N T_k^C \right) \\
&= \bigsqcup_{j=1}^M \bigcap_{k=1}^N (S_j \cap T_k^C) \in \mathcal{S}_\cup
\end{aligned}$$

Das heißt für $S, T \in \mathcal{S}_\cup$ ist auch $S \setminus T \in \mathcal{S}_\cup$. Außerdem können wir schreiben

$$S \cup T = (S \setminus T) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus S) \in \mathcal{S}_\cup$$

Das heißt \mathcal{S}_\cup ist ein Mengenring und $\bar{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ auf \mathcal{S}_\cup .

$$\Rightarrow \bar{\mu}(T \cup S) = \bar{\mu}(S \setminus T) + \bar{\mu}(S \cap T) + \bar{\mu}(T \setminus S)$$

Das heißt $\bar{\mu}$ ist definiert für endlich viele Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{S}_\cup .

Behauptung: $\bar{\mu}$ ist ein Prämaß auf \mathcal{S}_\cup . Also ist zu zeigen, dass $\bar{\mu}$ σ -additiv auf \mathcal{S}_\cup ist. Wir nehmen $(T_k)_k \subseteq \mathcal{S}_\cup$

$$T := \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \in \mathcal{S}_\cup$$

Zu zeigen:

$$\bar{\mu}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(T_k)$$

Nach Definition von \mathcal{S}_\cup gibt es $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und Indizes $0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$ mit

$$\begin{aligned}
T_k &= S_{i(k-1)+1} \sqcup \cdots \sqcup S_{i(k)} & (k \in \mathbb{N}) \\
T &= U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_L \\
U_l &:= \bigsqcup_{i \in J_l} S_i
\end{aligned}$$

Indexmengen $J_1, \dots, J_l \subseteq \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und $J_1 \sqcup \dots \sqcup J_L = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(T) &= \bar{\mu}(U_1 \sqcup \dots \sqcup U_L) \\
&= \bar{\mu}(U_1) + \dots + \bar{\mu}(U_l) \\
&= \mu(U_1) + \dots + \mu(U_l) \\
&= \sum_{i \in J_1} \mu(S_i) + \dots + \sum_{i \in J_L} \mu(S_i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(T_k)
\end{aligned}$$

[29. Nov] **Bemerkung 5.1.7** (Prämaß und äußeres Maß). Wenn wir ein Prämaß μ auf einem Halbring \mathcal{S} haben, dann gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

wobei μ^* das in Konstruktion 5.1.4 definierte äußere Maß ist. Das heißt μ^* ist eine Fortsetzung von μ .

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$ und $(S_j)_j \in \mathcal{C}(A)$ Überdeckung von A . Dann gilt

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j\right) \cap A\right)$$

Wegen der σ -Subadditivität von $\overline{\mu}$ gilt

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j)$$

Wir nehmen das Infimum auf beiden Seiten und erhalten

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\mu(A) \geq \mu^*(A)$. Für ein $A \in \mathcal{S}$ nehmen wir $(S_j)_j$ mit $S_1 := A$, $S_2 = S_3 = \dots = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \\ &\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

□

Definition 5.1.8 (Zerlegungsbedingung). Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann sagen wir $A \subseteq X$ erfüllt die Zerlegungsbedingung, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X \tag{5.1.1}$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_* := \{A \subseteq X : A \text{ erfüllt die Zerlegungsbedingung 5.1.1}\}$$

Bemerkung 5.1.9. Die Bedingung 5.1.1 ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

da die Ungleichung in die andere Richtung bereits durch die σ -Subadditivität von μ^* gegeben ist.

Lemma 5.1.10. Sei μ^* das vom Prämaß μ auf \mathcal{S} erzeugte äußere Maß. Dann gilt

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_*$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{S}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

O.B.d.A sei $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset$. Sei $(B_n)_n \in \mathcal{C}(B)$, $B_n \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B_n &= (B_n \cap A) \sqcup (B_n \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B_n) &= \overline{\mu}(B_n) = \overline{\mu}((B_n \cap A)) + \overline{\mu}(B_n \setminus A) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{\mu}(B_n \setminus A)) \end{aligned}$$

Es gilt $(B_n \cap A)_n \in \mathcal{C}(B \cap A)$ und $(B_n \setminus A)_n \in \mathcal{C}(B \setminus A)$

$$\begin{aligned} &\geq \mu^*(B \cap A) + \overline{\mu}^*(B \setminus A) \\ &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu(B) &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \end{aligned}$$

□

5 [*] Existenz von Maßen

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz von Carathéodory zu beweisen.

Beweis von Satz 5.1.2. SCHRITT 1: Wir zeigen, dass \mathcal{A}_* eine Algebra ist. Die Stabilität unter Komplementbildung und $\emptyset \in \mathcal{A}_*$ zeigt sich leicht. Wir wollen also noch zeigen, dass $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$. Das heißt es soll gelten

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &:= (A_1 \cap B) \setminus A_2 \\ B_2 &:= (A_2 \cap B) \setminus A_1 \\ B_3 &:= B \cap A_1 \cap A_2 \\ B_4 &:= B \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \\ B \setminus (A_1 \cup A_2) &= B_4 \end{aligned}$$

Das heißt es ist zu zeigen, dass

$$\mu(B) = \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) + \mu(B_4)$$

A_1 erfüllt die Zerlegungsbedingung. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B_1 \cup B_3) + \mu^*(B_2 \cup B_4) \end{aligned}$$

Verwende A_2 , um $B_1 \cup B_3$ zu zerlegen

$$\begin{aligned} \mu^*(B_1 \cup B_3) &= \mu^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + \mu^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) \end{aligned}$$

Genauso zerlegen von $B_2 \cup B_4$ mittels A_2

$$\begin{aligned} \mu^*(B_2 \cup B_4) &= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_4) \\ \Rightarrow \mu^*(B) &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3) + \mu^*(B_4) \end{aligned}$$

Machen dasselbe mit $\overline{B} := B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3)$$

Es folgt dann $A_1 \cup A_2$ erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$.

[02. Dez] SCHRITT 2: Wir zeigen, dass μ^* endlich additiv auf \mathcal{A}_* ist. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Wir benutzen A_1 , um $A_1 \sqcup A_2$ zu zerlegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \sqcup A_2) &= \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_1) + \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \end{aligned}$$

SCHRITT 3: Wir zeigen, dass \mathcal{A}_* eine σ -Algebra und μ^* ein Maß auf \mathcal{A}_* ist. Sei $(A_j)_j \subseteq \mathcal{A}_*$ und $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

Dabei reicht \geq zu zeigen, da die andere Ungleichung allgemein erfüllt ist. Wir definieren

$$F_n := \bigsqcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_*$$

mit $F_n \nearrow A$ und

$$B \setminus A \subseteq B \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also wird B von F_n zerlegt

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n) \\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^n A_j\right)\right) + \mu^*\left(B \cap \bigcap A_j^C\right) \end{aligned}$$

Wegen der endlichen Additivität von μ^* gilt

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*\left(B \cap \bigcap A_j^C\right) \\ B \cap A &= B \cap \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j) \\ \Rightarrow \mu^*(B \cap A) &= \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j)\right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)) \end{aligned}$$

Aber wir wissen $B \setminus A \subseteq B \setminus F_n$. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus F_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)) = \mu(B) \end{aligned}$$

Das heißt A erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_*$. Das heißt \mathcal{A}_* ist ein Dynkinssystem. Wir wollen Satz 3.1.6 anwenden und müssen daher noch zeigen, dass \mathcal{A}_* \cap -stabil ist. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^C \cup A_2^C)^C \in \mathcal{A}_*$$

5 [*] Existenz von Maßen

für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$. Damit ist \mathcal{A}_* nach Lemma 3.1.6 eine σ -Algebra.

SCHRITT 4: Wir zeigen, dass μ^* ein Maß auf \mathcal{A}_* ist. Sei

$$B := A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Wir zerlegen B mittels A

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu^*(B) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A) \\ \Rightarrow \mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A_j) \end{aligned}$$

Durch die σ -Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in die andere Richtung. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu^*(A_j) \quad \square$$

Um den Satz von Carathéodory auf λ^d anwenden zu können, brauchen wir noch

- $\mathcal{J}^d :=$ Mengensystem der (rechts-)halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^d ist ein Halbring
- $\lambda^d : \mathcal{J}^d \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Prämaß

Lemma 5.1.11. Seien X_1, X_2 Mengen und \mathcal{S}_1 ein Halbring in X_1 sowie \mathcal{S}_2 Halbring in X_2 . Dann gilt $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Halbring in $X_1 \times X_2$.

Beweis.

(S₁) $\emptyset \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ folgt direkt aus $\emptyset \in \mathcal{S}_1$ und $\emptyset \in \mathcal{S}_2$

(S₂) Seien $J_1^1, J_1^2 \in \mathcal{S}_1$ und $J_2^1, J_2^2 \in \mathcal{S}_2$. Dann gilt

$$(J_1^1 \times J_2^1) \cap (J_1^2 \times J_2^2) = (J_1^1 \cap J_1^2) \times (J_2^1 \cap J_2^2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

(S₃) (Übung)

□

Satz 5.1.12.

$$\mathcal{J}^d := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\}$$

ist ein Halbring.

Beweis. Für eine Dimension (das heißt $d = 1$) zeigen sich die Halbring-Eigenschaften von \mathcal{J}^1 direkt durch Fallunterscheidungen. Wir wollen also für höhere Dimensionen einfach Lemma 5.1.11 induktiv anwenden. Wir definieren also

$$\mathcal{J}^2 := \mathcal{J}^1 \times \mathcal{J}^1$$

Das ist nach dem Lemma ein Halbring

$$\Rightarrow \mathcal{J}^3 := \mathcal{J}^2 \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring}$$

⋮

$$\Rightarrow \mathcal{J}^d := \mathcal{J}^{d-1} \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \quad \square$$

Lemma 5.1.13. Sei μ endlich-additiv auf einem Halbring \mathcal{S} . Wir betrachten die folgenden Aussagen

- (a) μ ein Prämaß
- (b) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \nearrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (c) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (d) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow \emptyset \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$

Dann gilt (a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d). Gilt ferner $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{S}$, dann ist auch (c) \Rightarrow (b). In diesem Fall sind also alle Aussagen äquivalent und damit verwendbar, um zu prüfen, ob μ ein Prämaß ist.

Beweis. (Später) □

Satz 5.1.14. Sei λ^d für $A \in \mathcal{J}^d$ mit

$$A = \times_{j=1}^d [a_j, b_j) = [a, b)$$

definiert als

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$$

Dann ist λ^d ein Prämaß auf \mathcal{J}^d .

Beweis. Es gilt $\lambda^d(\emptyset) = \lambda^d([a, a)) = 0$. ?? □

[06. Dez] Wir wollen Maße nun einfacher darstellen, als nur als Forsetzung eines Prämaßes, was auf einem Halbring definiert ist. Dafür sei nun μ ein Borelmaß auf \mathbb{R}^d mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Konstruktion 5.1.15 (Maße mit Funktionen identifizieren). Wir betrachten zunächst nur den Fall $d = 1$. Wir wollen μ auf den halboffenen Intervallen durch eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen. Das heißt es soll gelten

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Welche Eigenschaften hat dann die Funktion F ?

1. F ist monoton wachsend

$$F(b) - F(a) = \mu([a, b)) \geq 0 \quad \forall b \geq a$$

2. F ist ?seitig stetig. Wir betrachten eine Folge $x_n \rightarrow b$ ($a < b$) mit $x_n \leq x_{n+1}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, x_n) = [a, b)$$

Da μ ein Maß ist, ist es von unten stetig. Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(a) &= \mu([a, x_n)) \nearrow \mu([a, b)) = F(b) - F(a) \\ &\Rightarrow \lim_{x \nearrow b} F(x) = F(b) \end{aligned}$$

5 [*] Existenz von Maßen

Beispiel 5.1.16 (Dirac-Maß).

Satz 5.1.17. Jede wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die von rechts stetig ist und (von links Grenzwerte hat) erzeugt ein Borelmaß μ_F , sodass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

Ferner: Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend und von rechts stetig mit $\mu_G = \mu_F$. Dann folgt

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Der letzte Teil zeigt sich durch nachrechnen direkt. Erster Teil: Siehe Literatur. \square

6 [*] Messbare Abbildungen und Bildmaße

6.1 Messbare Abbildungen

Definition 6.1.1. Seien (X, \mathcal{A}) und (X', \mathcal{A}') Messräume und $T : X \rightarrow X'$ eine Funktion. Dann heißt T $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Beispiel 6.1.2.

1. Konstante Funktionen sind messbar
2. Wir betrachten $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ mit \mathcal{O} Mengensystem der offenen Mengen. Dann ist eine stetige Funktion $T : \mathcal{B}(\mathcal{O}) - \mathcal{B}(\mathcal{O}')$ -messbar, da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen sind

Satz 6.1.3. Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ Erzeuger von $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$. Dann ist T genau dann $\mathcal{A}-\mathcal{A}'$ -messbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'$$

Beweis. $\Sigma' := \{A' \subseteq X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ -Algebra in X' (Übung) mit $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}' &= \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\Sigma') = \Sigma' \\ \Rightarrow \mathcal{A}' &= \Sigma' \end{aligned}$$

□

Satz 6.1.4. Seien $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2), (X_3, \mathcal{A}_3)$ Messräume und $T_1 : X_1 \rightarrow X_2$ $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2$ -messbar sowie $T_2 : X_2 \rightarrow X_3$ $\mathcal{A}_2-\mathcal{A}_3$ -messbar. Dann ist $T_2 \circ T_1 : X_1 \rightarrow X_3$ $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_3$ -messbar.

Beweis. Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1} \underbrace{\left(T_2^{-1}(A_3) \right)}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_3$$

□

Bemerkung 6.1.5. Sei I eine Index-Menge und (X_j, \mathcal{A}_j) ein Messraum für $j \in I$. Abbildung $T_j : X \rightarrow X_j$. Dann ist $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ die kleinste σ -Algebra, auf X , für die alle Abbildungen T_j messbar (also $\sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ - \mathcal{A}_j -messbar) sind.

Satz 6.1.6. $S : X_0 \rightarrow X$ ist $\mathcal{A}_0-\mathcal{A}$ -messbar. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ genau dann, wenn

$$T_j \circ S : X_0 \rightarrow X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0-\mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Folgt direkt aus Satz 6.1.4.

„ \Leftarrow “ Nehmen $E \in \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Dann ist $E \in T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ für ein $j \in I$. Dann ist $E = T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Es folgt $S^{-1}(E) = S^{-1}\left(T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right) = (T_j \circ S)^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_0$.

$\mathcal{E} := \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist Erzeuger von $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Damit folgt die Behauptung. □

6.2 Bildmaße

[09. Dez] **Notation 6.2.1.** Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume. Wir schreiben $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$ für eine Funktion $T : X \rightarrow X'$, die \mathcal{A} - \mathcal{A}' -messbar ist.

Konstruktion 6.2.2. Sei μ ein Maß auf (X, \mathcal{A}) und $T : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X', \mathcal{A}')$ eine Funktion. Wir nehmen $A' \in \mathcal{A}'$ und definieren

$$\mu'(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

Dann ist μ' ein Maß auf (X', \mathcal{A}') .

Definition 6.2.3 (Bildmaß). Im Sinne von Konstruktion 6.2.2 nennen wir μ' das Bild von μ unter T . Das heißt wir schreiben

$$\mu' := T(\mu)$$

Es gilt

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A'))$$

Bemerkung 6.2.4 (Transitivität der Bildmaße). Ist $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$, $T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{A}_3)$ und μ ein Maß auf (X_1, \mathcal{A}_1) . Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\mu) &= T_2(T_1(\mu)) \\ (T_2 \circ T_1)^{-1} &= T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \\ \Rightarrow (T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) &= T_1^{-1}(T_2^{-1}(A_3)) \end{aligned}$$

7 [*] Messbare numerische Funktionen

Definition 7.1.1 ($\overline{\mathbb{R}}$). Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ für die Menge der reellen Zahlen einschließlich $\pm\infty$. Wir definieren die algebraischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned}
x + \infty &:= \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
x - \infty &:= -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\infty + \infty &:= \infty \\
-\infty + (-\infty) &= -\infty - \infty := -\infty \\
-\infty < x < \infty &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\
x \cdot \infty &:= \infty \quad \forall x > 0 \\
x \cdot (-\infty) &:= -\infty \quad \forall x > 0 \\
x \cdot \infty &:= (-\infty) \quad \forall x < 0 \\
x \cdot (-\infty) &:= \infty \quad \forall x < 0 \\
0 \cdot (\pm\infty) &:= 0 \\
\frac{x}{\pm\infty} &:= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty
\end{aligned}$$

Dabei bleiben Ausdrücke wie $\infty - \infty$ nicht definiert. Wir definieren offene Mengen im $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, wenn

$$\forall x \in U \cap \mathbb{R} \exists R > 0: (x - R, x + R) \subseteq U$$

Außerdem muss für den Fall $\infty \in U$ zu sätzlich gelten

$$\exists R > 0: (R, \infty] \subseteq U$$

Analog muss für $-\infty \in U$ gelten

$$\exists L > 0: [-\infty, L) \subseteq U$$

Mit dieser Definition können wir die Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren mit $\overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathcal{B}}$.

Dann gilt für die Spur- σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}^1 \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}^1$.

Bemerkung 7.1.2 (Identitätsfunktion). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann definieren wir die Identitätsfunktion (von A) mit

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diese ist Borel-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\Rightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B \\
\mathbf{1}_{A^C} &= 1 - \mathbf{1}_A
\end{aligned}$$

Definition 7.1.3 (Numerische Funktion). Eine numerische Funktion ist eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Ist \mathcal{A} eine σ -Algebra in X , so heißt f \mathcal{A} -messbar, falls es \mathcal{A} - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist. Das heißt

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}}: f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Satz 7.1.4. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Dann ist eine numerische Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis. Wir setzen $\overline{\mathcal{E}} := \{[\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Zu zeigen ist $\sigma(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{\mathcal{B}}^1$

(1) Es gilt $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Das heißt

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \Sigma := \sigma(\overline{\mathcal{E}}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}^1 \\ & [\alpha, \beta) = [\alpha, \infty] \setminus [\beta, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \quad (\alpha \leq \beta) \\ & \Rightarrow [\alpha, \beta) \in \Sigma \cap \overline{\mathcal{B}}^1 \\ & \Rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \sigma(\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1) \end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} \{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \{-\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^C \in \sigma(\mathcal{E}) \\ \Rightarrow \forall \overline{G} \in \Sigma : \overline{G} \cap \mathbb{R} &= \overline{G} \cap (\{-\infty, \infty\}^C) = \Sigma \\ \Rightarrow \mathbb{R} \cap \Sigma &:= \Sigma \\ \Rightarrow \mathcal{B}^1 &\subseteq \Sigma \\ \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}^1 &= \mathcal{B}^1 \cup \{0, \{-\infty\}, \{\infty\}, [-\infty, \infty]\} \subseteq \Sigma \end{aligned}$$

Also ist $\overline{\mathcal{E}}$ ein Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}^1$ und es genügt die Maßeigenschaften auf dem Erzeuger zu haben.

□

Satz 7.1.5. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X . Dann ist eine numerische Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Beweis. Die Äquivalenz zu (1) folgt direkt aus Satz 7.1.4. Warum sind die anderen Aussagen dazu äquivalent? (Übung). □

Satz 7.1.6. Für messbare Funktionen $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und (X, \mathcal{A}) ein Messraum folgt

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$$

Beweis. \mathbb{Q} ist abzählbar. Dann ist

$$\{f < g\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{A} \\
 \{f \leq g\} &= \{f > g\}^C \\
 \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} = \mathcal{A} \\
 \{f \neq g\} &= \{f = g\}^C \in \mathcal{A} \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 7.1.7. Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} -messbar. Dann folgt $f \pm g$ (falls definiert) sowie $f \cdot g$ sind messbar.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \{f + g \geq \alpha\} &= \left\{ f \geq \underbrace{\alpha - g}_{=: h} \right\} \\
 &= \{f \geq h\}
 \end{aligned}$$

Das heißt es reicht aus zu zeigen, dass $\alpha - g$ (bzw. $\alpha + g$) messbare Funktionen für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. g ist messbar, das heißt

$$\begin{aligned}
 \{g \leq \beta\} &\in \mathcal{A} \\
 h \geq \beta &\Leftrightarrow \alpha - g \geq \beta \Leftrightarrow g \leq \alpha + \beta \\
 \{h \geq \beta\} &= \{g \leq \alpha + \beta\}
 \end{aligned}$$

Rest: Nächste Vorlesung. \square