# Skript zur Vorlesung
# Analysis III
# bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2024/25

# Inhaltsverzeichnis



Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 Einleitung: Motivation für Maßtheorie

[21. Okt] Wir wollen in diesem Modul eine Theorie erarbeiten, um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen (das heißt ihnen einen Inhalt zuordnen) zu können. Außerdem soll diese Zuordnung eines Inhalts bestimmten (intuitiv klaren) Anforderungen genügen. Wenn wir zum Beispiel zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ $A$ und $B$, die disjunkt sind und denen wir entsprechende Inhalte zugeordnet haben, betrachten, dann soll nach unserem intuitiven geometrischen Verständnis auch gelten

$$\text{Fläche}(A \cup B) = \text{Fläche}(A) + \text{Fläche}(B)$$

Für einfache Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ haben wir bereits eine Möglichkeit, deren Flächeninhalt zu messen:

**Beispiel 1.1.1** (Messen eines Rechtecks)**.** Im Fall eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen $a$ und $b$ wissen wir bereits, dass wir einen sinnvollen Flächeninhalt durch

$$\text{Fläche}(R) = a \cdot b$$

berechnen können.

**Beispiel 1.1.2** (Messen eines Dreiecks)**.** Auch für ein Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Grundfläche $g$ und Höhe $h$ kennen wir die Formel

$$\text{Fläche}(D) = \frac{1}{2} gh$$

**Beispiel 1.1.3** (Parkettierung)**.** Wir können auch eine komplexere Form $F \subseteq \mathbb{R}^2$ mittels (abzählbar) unendlich vielen Dreiecken approximieren. Dafür nehmen wir abzählbar viele paarweise disjunkte Dreiecke $(\Delta_n)_n$, sodass $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j = F$. Dann gilt

$$\text{Fläche}(F) = \text{Fläche}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Fläche}(\Delta_j)$$

**Bemerkung 1.1.4.** Wir wollen dementsprechend ein Maß finden, also nach unserem Verständnis eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, wobei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E) \coloneqq \{U : U \subseteq E\}$ eine Familie von Teilmengen von $E \neq \varnothing$ ist. Außerdem soll gelten, dass

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) Für eine Folge $A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_n \cap A_m = \varnothing$ für $n \neq m$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Liste an Eigenschaften führt wie wir später sehen werden zu einer reichhaltigen Theorie

[1] $\sigma$-Additivität

# 2 $\sigma$-Algebren und Maße

## 2.1 $\sigma$-Algebren

**Definition 2.1.1** ($\sigma$-Algebra)**.** Sei $E \neq \varnothing$ eine Menge. Eine $\sigma$-Algebra in $E$ ist ein System von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ von $E$ mit folgenden Eigenschaften

($\Sigma_1$) $E \in \mathcal{A}$

($\Sigma_2$) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} := E \setminus A \in \mathcal{A}$

($\Sigma_3$) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{A}$ ist stabil unter (abzählbaren) Vereinigungen

Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar ($\mathcal{A}$-messbar).

**Lemma 2.1.2** (Eigenschaften von $\sigma$-Algebren)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $E$. Dann gilt

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$ (das heißt $\mathcal{A}$ ist auch stabil unter endlichen Vereinigungen)

(iii) Für $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

*Beweis.*

(i) $E \in \mathcal{A} \overset{(\Sigma_2)}{\Rightarrow} \varnothing = E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

(ii) Wir definieren $A_1 := A$, $A_2 := B$ und $A_i := \varnothing$ für $i \geq 3$. Dann gilt gilt ($\Sigma_3$)

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

(iv) $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{C}} = A \cap B^{\mathrm{C}} \cap E \cap E \cap \cdots$. Dann gilt nach (iii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$ □

**Beispiel 2.1.3.** Wir betrachten einige Beispiele für $\sigma$-Algebren

(a) Für eine Mengen $E$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ selber nach Definition immer eine $\sigma$-Algebra über $E$.

(b) $\{\varnothing, E\}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra in $E$.

(c) Für $A \subseteq E$ gilt $\mathcal{A} := \left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, die $A$ enthält.

(d) Sei $E$ überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} := \left\{A \subseteq E : A \text{ oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\right\}$ eine $\sigma$-Algebra.

(e) Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $E$. Für $F \subseteq E$ beliebig ist $\mathcal{A}_F := \{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$ die Spur-$\sigma$-Algebra von $F$.

(f) Seien $E, E'$ nicht-leere Mengen, $f : E \to E'$ eine Funktion und $\mathcal{A}'$ eine $\sigma$-Algebra in $E'$. Dann ist auch

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

eine $\sigma$-Algebra.

*Beweis von (d).* Wir prüfen die Kriterien

($\Sigma_1$) $E^{\mathrm{C}} = \varnothing$ ist abzählbar $\Rightarrow E \in \mathcal{A}$

($\Sigma_2$) $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ oder $A^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}$ oder $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar $\Leftrightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$

($\Sigma_3$) Sei $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden 2 Fälle
Fall 1: Alle $A_n$ sind abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.
Fall 2: Ein $A_j$ ist überabzählbar. Dann ist aber $(A_j)^{\mathrm{C}}$ abzählbar $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}} \subseteq (A_j)^{\mathrm{C}}$ ist abzählbar. Dann ist $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^{\mathrm{C}}$ abzählbar. Das heißt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. □

**Notation 2.1.4** (Durchschnitt)**.** Seien $I$ eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine beliebige Familie von Mengensystemen in $E$. Dann ist

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \coloneqq \{A : A \subseteq \mathcal{A}_j \ \forall j \in I\}$$

der Durchschnitt der $\mathcal{A}_j$.

**Satz 2.1.5.** Sei $I$ eine beliebige Menge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren in $E$. Dann gilt

$$\bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$$

ist wieder eine $\sigma$-Algebra.

*Beweis.*

($\Sigma_1$) $E \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

($\Sigma_2$) $A \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$. Daraus folgt $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$

($\Sigma_3$) Sei $A_n \in \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j$. Dann gilt $A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_j \ \forall j \in I$ □

**Satz 2.1.6.** Sei $\zeta \subseteq \mathcal{P}(E)$ für $E$ nicht-leer ein System von Teilmengen von $E$. Dann existiert eine kleinste $\sigma$-Algebra $\sigma(\zeta)$ in $E$, welche $\zeta$ enthält. Das heißt

(a) $\sigma(\zeta)$ ist eine $\sigma$-Algebra in $E$ und

(b) Für eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in $E$ mit $\zeta \subseteq A$ folgt $\sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{A}$

Wir nennen $\sigma(\zeta)$ in diesem Fall die von $\zeta$ erzeugte $\sigma$-Algebra und $\zeta$ den Erzeuger von $\sigma(\zeta)$.

*Beweis.* Wir definieren $I \coloneqq \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ ist $\sigma$-Algebra und $\zeta \subseteq \mathcal{A}\}$ die Menge aller $\sigma$-Algebren, die $\zeta$ enthalten. Dabei gilt $I$ nicht-leer, da $\mathcal{P}(E) \in I$. Damit gilt nach Satz 2.1.5, dass

$$\sigma(\zeta) \coloneqq \bigcap_{\mathcal{A}\in I} \mathcal{A}$$

eine $\sigma$-Algebra ist. Dabei ist $\zeta \subseteq \sigma(\zeta)$ nach Forderung an $I$. Und nach unserer Konstruktion ist auch Anforderung (b) erfüllt. □

**Beispiel 2.1.7.** Sei $\zeta := \{A\}$. Dann ist $\left\{\varnothing, A, A^{\mathrm{C}}, E\right\}$ die von $\zeta$ erzeugte $\sigma$-Algebra.

**Definition 2.1.8.** Sei $\mathcal{O}_d$ das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Dann definieren wir die *Borel-$\sigma$-Algebra*

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

## 2.2 Maße und Prämaße

| Sei in diesem Teilkapitel stets $X$ eine Menge. |
|---|

[25. Okt] **Notation 2.2.1** (Disjunkte Vereinigung)**.** Seien $A, B$ Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Dann schreiben wir $A \sqcup B := A \cup B$ als disjunkte Vereinigung von $A$ und $B$.

**Definition 2.2.2** (Maß)**.** Ein (positives) Maß $\mu$ auf $X$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

($M_0$) $\mathcal{A}$ ist eine $\sigma$-Algebra.

($M_1$) $\mu(\varnothing) = 0$

($M_2$) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Definition 2.2.3** (Prämaß)**.** Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht unbedingt eine $\sigma$-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Funktion, so heißt $\mu$ Prämaß, falls

($PM_1$) $\mu(\varnothing) = 0$ (das setzt also auch voraus, dass $\varnothing \in \mathcal{A}$)

($PM_2$) Sind $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, dann folgt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

**Definition 2.2.4** (Wachsende und fallende Teilmengenfolgen)**.** Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Teilmengen von $X$. Dann nennen wir $(A_n)_n$

- wachsend, falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- fallend, falls $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

**Notation 2.2.5.**

1. Für eine wachsende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.
2. Für eine fallende Teilmengenfolge $(A_n)_n$ schreiben wir $A_n \searrow A$, falls $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

**Definition 2.2.6** (Messraum und Maßraum)**.** Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.

1. Wir nennen das Paar $(X, \mathcal{A})$ einen Messraum.
2. Wir nennen das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum.

3. Wir nennen $\mu$ endlich und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen endlichen Maßraum, falls $\mu(X) < \infty$.
4. Wir nennen $\mu$ Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), falls $\mu(X) = 1$.
5. Wir nennen $\mu$ $\sigma$-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $A_n \nearrow X$ und $\mu(A_n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall heißt $(A_n)_n$ eine ausschöpfende Folge.

**Satz 2.2.7** (Eigenschaften von Maßen)**.** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iv) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Starke Additivität)

(v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (Subadditivität)

(vi) $(A_n)_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten)

(vii) $(B_n)_n \searrow B$ und $\mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (Stetigkeit von oben)

(viii) $\mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ ($\sigma$-Subadditivität)

*Beweis.*

(i) Sei $A_1 \coloneqq A, A_2 \coloneqq B$ und $A_n \coloneqq \varnothing$ für $n \geq 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \sqcup B &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ \Rightarrow \mu(A \sqcup B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(ii) Sei $A \subseteq B$, dann folgt $B = A \sqcup (B \setminus A)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

(iii) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Dann folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A) < \infty$.

(iv) Es gilt $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \sqcup (B \setminus (A \cap B))) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(v) Aus (iv) folgt $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B)$

(vi) Sei $(A_n)_n$ wachsend. Wir definieren eine neue Folge von Mengen $(F_n)_n$ mit $F_1 \coloneqq A_1$ und $F_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann sind $F_j$ paarweise disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{n} A_j &= \bigsqcup_{j=1}^{n} F_j \\ \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(F_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} F_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

(vii) Sei $(B_n)_n \searrow B$ mit $\mu(B_1) < \infty$. Wir definieren $A_n \coloneqq B_1 \setminus B_n \nearrow B_1 \setminus B$ wachsend. Dann gilt nach (vi)

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \setminus B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\ \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\ \Rightarrow \mu(B) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \end{aligned}$$

(viii) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $A \coloneqq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir definieren $\hat{A}_k \coloneqq \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ wachsend. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Nach (v) gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k\right) &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\hat{A}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$ □

**Bemerkung 2.2.8.**

1. Wir schreiben statt „paarweise disjunkt" auch kürzer „disjunkt"
2. Satz 2.2.7 überträgt sich auch auf Prämaße, sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz ist (für (i)-(iv)) und sofern $\mathcal{A}$ stabil bezüglich abzählbaren Schnitten und Vereinigungen ist (für die verbleibenden Eigenschaften)

**Beispiel 2.2.9** (Dirac-Maß)**.** Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $X$ und $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\delta_{x_0}(A) \coloneqq \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

Dann ist $\delta_{x_0}$ ein Maß in $X$ und wird als *Dirac*-Maß bezeichnet.

**Beispiel 2.2.10.** Sei $\mathcal{A} := \Big\{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar oder } A^{\mathrm{C}} \text{ ist abzählbar}\Big\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ nach Beispiel 2.1.3 (d) eine $\sigma$-Algebra in $\mathbb{R}$. Wir definieren ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist nicht abzählbar} \end{cases}$$

**Beispiel 2.2.11** (Zählmaß)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann definieren wir das Zählmaß

$$|A| := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl an Elemente in $A$ angibt.

**Beispiel 2.2.12** (Diskretes W-Maß)**.** Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}\colon\ \omega_n\in A} p_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

ein sogenanntes diskretes W-Maß. Der Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt diskreter W-Raum.

[28. Okt] **Bemerkung 2.2.13** (Ring und Algebra)**.** Ein Mengensystem $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

($\mathrm{R}_1$) $\varnothing \in R$

($\mathrm{R}_2$) $A, B \subseteq R \Rightarrow\ (A \setminus B) \in R$

($\mathrm{R}_3$) $A, B \subseteq R \Rightarrow\ (A \cup B) \in R$

Ist ferner $X \in R$, dann heißt $R$ Algebra.

**Bemerkung 2.2.14** (Eigenschaften von Mengenringen)**.** Es sei $R$ ein Mengenring. Dann gilt

1. Nach der Mengengleichheit $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ enthält $R$ auch Schnitte.
2. Wir definieren die symmetrische Mengendifferenz $\Delta : R \times R \to R,\ (A,B) \mapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann definiert $(R, \Delta, \cap)$ einen kommutativen Ring im Sinne der Algebra, wobei $\Delta$ der „Addition“ und $\cap$ der „Multiplikation“ entspricht.

# 3 Dynkinsysteme

**Definition 3.1.1** (Dynkinsystem)**.** Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls

($D_1$) $X \in \mathcal{D}$

($D_2$) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$

($D_3$) Für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$

**Beispiel 3.1.2.**

1. Jede $\sigma$-Algebra ist ein Dynkinsystem.
2. Sei $X$ eine $2n$-elementige Menge. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat eine gerade Anzahl an Elementen}\}$ ein Dynkinsystem, aber keine $\sigma$-Algebra.

**Lemma 3.1.3.** Sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_j)_{j\in I}$ eine Familie von Dynkinsystemen in $X$, dann ist $\bigcap_{j\in I} \mathcal{D}_j$ wieder ein Dynkinsystem.

*Beweis.* (Übung) □

**Satz 3.1.4.** Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert das kleinste Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$, welches $\mathcal{G}$ enthält. Wir nennen $\delta(\mathcal{G})$ das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkinsystem.

*Beweis.* $\mathcal{P}(X)$ ist ein Dynkinsystem. Wir definieren also

$$I = \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ ist ein Dynkinsystem und } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}\} \neq \varnothing$$

Anschließend setzen wir analog zum Schnitt über $\sigma$-Algebren

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D}\in I} \mathcal{D}$$ □

**Definition 3.1.5.** Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir nennen $\mathcal{D}$ $\cap$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Analog dazu nennen wir $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil, falls $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{D}$.

Frage: Wann ist ein Dynkinsystem eine $\sigma$-Algebra?

**Lemma 3.1.6.** Sei $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Dann gilt $\mathcal{D}$ ist genau dann eine $\sigma$-Algebra, wenn $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

*Beweis.* „$\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{D}$ eine $\sigma$-Algebra. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann folgt $A^{\mathrm{C}}, B^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B = \left(A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$.

„$\Leftarrow$“ Zu zeigen ist Eigenschaft ($\Sigma_3$). Sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ eine Mengenfolge. Wir definieren $D_0' := \varnothing$ und $D_n' := D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Dann ist $(D_n')_n$ eine aufsteigende Folge und es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n' = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n' \setminus D_{n-1}')$$

Außerdem ist

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n' \setminus D_{n-1}') \in \mathcal{D} \text{ falls } (D_n' \setminus D_{n-1}') \in \mathcal{D} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Und es gilt $D'_n \setminus D'_{n-1} = \left(D'_n \cap \left(D'_{n-1}\right)^{\mathrm{C}}\right) \in \mathcal{D}$, falls $D'_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also unsere Behauptung gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass $\mathcal{D}$ $\cup$-stabil ist. Es gilt aber

$$A \cup B = \left(A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$$

Damit ist $(\Sigma_3)$ gezeigt. □

**Satz 3.1.7.** Sei $X$ eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann folgt aus $\mathcal{G}$ ist $\cap$-stabil, dass $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil ist.

*Beweis.* Wir nehmen ein beliebiges $D \in \delta(\mathcal{G})$ und definieren

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{G})\}$$

Behauptung: $\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkinsystem

($D_1$) Da $X \cap D = D \in \delta(\mathcal{G})$ folgt $X \in \mathcal{D}_D$.

($D_2$) Sei $Q \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $Q^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}_D$, denn $Q^{\mathrm{C}} \cap D = \left(Q^{\mathrm{C}} \cup D^{\mathrm{C}}\right) \cap D = (Q \cap D)^{\mathrm{C}} \cap D = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{G})$.

($D_3$) (Siehe handschriftliches Skript)

Nun können wir folgendermaßen argumentieren: Da $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, gilt

$$\begin{aligned} &\forall G, D \in \mathcal{G} \colon G \cap D \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G}) \\ &\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{G} \colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_D \\ &\Rightarrow \forall D \in \mathcal{G} \colon \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_D) \overset{\text{(Beh.)}}{=} \mathcal{D}_D \\ \Leftrightarrow\ &\forall D \in \mathcal{G}\ \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \colon G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\begin{aligned} &\forall G \in \delta(\mathcal{G})\ \forall D \in \mathcal{G} \colon D \cap G = G \cap D \in \delta(\mathcal{G}) \\ &\Leftrightarrow \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \colon \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_G \\ &\Rightarrow \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{D}_G) = \mathcal{D}_G \quad \forall G \in \delta(\mathcal{G}) \\ &\Leftrightarrow \forall D, G \in \delta(\mathcal{G}) \colon D \cap G \in \delta(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Das heißt $\delta(\mathcal{G})$ ist $\sigma$-stabil. □

**Korollar 3.1.8.** Sei $X$ eine beliebige Menge und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wenn $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, dann ist $\delta(\mathcal{G})$ eine $\sigma$-Algebra und es gilt $\sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G})$.

*Beweis.* Nach Satz 3.1.7 ist $\delta(\mathcal{G})$ $\cap$-stabil und damit nach Lemma 3.1.6 eine $\sigma$-Algebra. Damit gilt dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})$, da $\sigma(\mathcal{G})$ die kleinste $\sigma$-Algebra ist, die $\mathcal{G}$ enthält. Außerdem ist $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

# 4 [*] Eindeutigkeit von Maßen und erste Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

[04. Nov] **Satz 4.1.1** (Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ferner seien $\mu, \nu$ Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(a) $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil

(b) Es gibt Mengen $G_n \in \mathcal{E}$ mit $G_n \nearrow X$ ($X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$) mit $\mu(G_n), \nu(G_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: Aus $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{E}$ folgt $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Das heißt unter den obigen Voraussetzungen wird ein Maß eindeutig durch seine Werte auf dem Erzeuger definiert.

*Beweis.* Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt nach Korollar 3.1.8, dass $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest und betrachten

$$\mathcal{D}_n \coloneqq \{A \in \mathcal{A} : \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$$

$\mathcal{D}_n$ ist ein Dynkinsystem:

($\mathrm{D}_1$) Folgt direkt.

($\mathrm{D}_2$) Sei $A \in \mathcal{D}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu\left(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\right) &= \mu(G_n \setminus A) = \mu(G_n \setminus (A \cap G_n)) \\ &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\ &= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) \\ &= \nu\left(G_n \cap A^{\mathrm{C}}\right) \\ \Rightarrow A^{\mathrm{C}} &\in \mathcal{D}_n \end{aligned}$$

($\mathrm{D}_3$) Sei $(A_m)_m \subseteq \mathcal{D}_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap G_n)\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m \cap G_n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(A_m \cap G_n) = \nu\left(\left(\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) \cap G_n\right) \\ \Rightarrow \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} A_m &\in \mathrm{D}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\mathcal{D}_n$ gilt $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n$. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $A \cap G_n \in \mathcal{E}$, da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Nach Voraussetzung gilt $\nu(A \cap G_n) = \mu(A \cap G_n)$, also folgt $A \in \mathcal{D}_n$.
Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_n \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_n$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_n$. Das heißt $\forall A \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt $\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$.
Für $A \in \sigma(\mathcal{E})$ definieren wir eine aufsteigende Folge $A_n \coloneqq A \cap G_n \nearrow A$. Da $\mu, \nu$ Maße sind, sind sie von unten stetig. Das heißt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap G_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \nu(A \cap G_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.1.2** (Ausschöpfende Folgen)**.** Wir nennen $(G_n)_n$ im Sinne von Satz 4.1.1 eine ausschöpfende Folge. Wir nennen ein Maß $\mu$ auf $\mathcal{A}$ $\sigma$-endlich, wenn es eine Folge $(G_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt mit $G_n \nearrow X$ und $\mu(G_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Satz 4.1.3** (Eigenschaften der Borelmengen)**.** In Definition 2.1.8 hatten wir $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) := \sigma(\mathcal{O}_d)$, wobei $\mathcal{O}$ das System offener Teilmengen im $\mathbb{R}^d$ war. Wir definieren nun

- $\mathcal{A}_d$: System der abgeschlossenen Teilmengen im $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{K}_d$: System der kompakten Teilmengen im $\mathbb{R}^d$

Dann gilt $\sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

*Beweis.* Schritt 1: $\sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)$ ist klar, da $\sigma$-Algebren stabil unter Komplementbildung sind.
Schritt 2: Es gilt $\mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{A}_d \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_d)$.
Schritt 3: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $K_n := \{|x| < n\}$. Sei $A \in \mathcal{A}_d$, dann ist $A \cap K_n$ kompakt und

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n &= \mathbb{R}^d \\
A &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap K_n) \in \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_d) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{K}_d)) = \sigma(\mathcal{K}_d) \\
&\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}_d) = \sigma(\mathcal{A}_d) = \sigma(\mathcal{O}_d)
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass das Lebesgue-Maß $\lambda^d$ auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existiert. Wir werden das später noch beweisen, aber entwickeln das Maß nun nach unserem geometrischen Verständnis unter der Annahme, dass es existiert (das tut es) und untersuchen erste Eigenschaften:

**Beobachtung 4.1.4.** Wir betrachten den Fall $d = 1$ und ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$. Dann muss gelten $\lambda^1(I) = b - a$. Wir betrachten allgemeine $d$ mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ wobei $a \leq b$ (das heißt $a_j \leq b_j$). Dann sei

$$[a, b) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \ \forall j \in \{1, \dots, d\}\right\}$$

und wir definieren nach unserem geometrischen Verständnis

$$\lambda^d([a, b)) := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

**Definition 4.1.5.** Es sei $J^d := \left\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a \leq b\right\}$ das Mengensystem der halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^d$.

**Bemerkung 4.1.6** (Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß)**.** Es sei $c \in \mathbb{R}^d$ und wir definieren eine Translation $T_c(x) := x + c$ mit inverser Funktion $T_c^{-1}$. Dann gilt für ein halboffenes Intervall $I := [a, b)$

$$\begin{aligned}
\lambda^d\left(T_c^{-1}(I)\right) &= \lambda^d([a - c, b - c)) \\
&= \prod_{j=1}^{d} (b_j - c_j - (a_j - c_j))
\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \lambda^d(I)$$

Das heißt auf $J^d$ ist $\lambda^d$ invariant unter Translation.

**Lemma 4.1.7.** Sei $B \in \mathcal{B}^d$ eine Borelmenge und $c \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $B + c \coloneqq \{b + c : b \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

*Beweis.* Sei $c \in \mathbb{R}^d$ fest. Schritt 1: Wir wenden das „Wünsch-dir-was"-Vorgehen an und definieren

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ A \in \mathcal{B}^d : A + c \in \mathcal{B}^d \right\}$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra (Übung).
Schritt 2: $\mathcal{O}_d$ ist translationsinvariant. Das heißt $\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}_d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Das heißt $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{A}$. Damit sind die Borelmengen translationsinvariant. $\square$

[8. Nov] (fehlt)

[18. Nov] **Satz 4.1.8.** Es gilt

$$T\left(\lambda^d\right) = \lambda^d \quad \forall T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

*Beweis.* Schritt 1: Sei $T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right) : T(0) = 0$. Das heißt $T$ ist linear. Dann definieren wir eine Translation

$$\begin{aligned} T_a(x) &:= x + a \\ \Rightarrow \ (T_a \circ T)(x) &= T(x) + a \\ &= T(x) + T(b) && (b := T^{-1}(a)) \\ &= T(x+b) = (T \circ T_b)(x) \\ \Rightarrow T_a \circ T &= T \circ T_b \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= T\left(\lambda^d\right) && = \lambda^d \circ T^{-1} \\ T_a(\mu) &= T_a\left(T\left(\lambda^d\right)\right) = T_a \circ T\left(\lambda^d\right) \\ &= T \circ T_b\left(\lambda^d\right) = T(T_b(\lambda_d)) \\ &= T\left(\lambda^d\right) = \mu \end{aligned}$$

Damit ist $\mu$ invariant unter Translation. Das heißt nach dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = \alpha\lambda^d$.
Frage: Warum ist $\alpha = 1$?
Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel $B := \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\right\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} T^{-1}(B) &= B \\ \Rightarrow \lambda^d(B) &= \lambda^d\left(T^{-1}(B)\right) = \mu(B) = \alpha\lambda^d(B) \\ \Rightarrow \alpha &= 1 \text{ falls } 0 < \lambda^d(B) < \infty \\ \Rightarrow T\left(\lambda^d\right) &= \lambda^d \quad \forall T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right) : T(0) = 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Sei $T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$ beliebig und wir setzen $c := T(0)$ und $S := T_{-c} \circ T \in \mathrm{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(0) &= T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(c) = 0 \\ \Rightarrow S\left(\lambda^d\right) &= \lambda^d \text{ nach Schritt 1} \end{aligned}$$

Wir wollen das aber noch für allgemeine Bewegungen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} T &= T_c \circ S \\ \Rightarrow T\left(\lambda^d\right) &= T_c(S(\lambda_d)) = T_c\left(\lambda^d\right) = \lambda^d \end{aligned}$$

nach Schritt 1. □

**Beispiel 4.1.9** (Lebesgue-Maß von einem Punkt)**.** Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Was ist dann $\lambda^d(\{x\})$?. Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$J := [x, x + \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in J \\ &\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(J) = \varepsilon^d \to 0 \\ &\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Damit ist auch das Lebesgue-Maß von einer Menge von abzählbar vielen Punkten $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ null, da

$$\begin{aligned} \lambda^d(A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\{x_n\}) = 0 \\ \Rightarrow \lambda^d\left(\mathbb{Q}^d\right) &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel 4.1.10** (Lebesgue-Maß einer Hyperebene)**.** Es sei $j \in \{1, \dots, d\}$ und wir definieren eine Hyperebene $H_j := \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_j = 0\right\}$. Was ist dann $\lambda^d(H_j)$? Wir definieren

$$J_n := \left\{x \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_k \leq n, k \neq j \wedge -\frac{\varepsilon}{(2n)^{d-1} 2 \cdot 2^n} \leq x_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n (2n)^{d-1}}\right\}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} H_j &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \\ \lambda^d(H_j) &\leq \lambda^d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(J_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{d-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2(2n)^{d-1} 2^n} \\ &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \lambda^d(H_j) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Result gilt auch für allgemeine Hyperebenen, da wir eine Bewegung finden, die diese auf eine Hyperebene der Form $H_j$ abbildet.

# 5 [*] Existenz von Maßen

**Definition 5.1.1** (Halbring)**.** Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Halbring, falls

($S_1$) $\varnothing \in \mathcal{S}$

($S_2$) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$

($S_3$) $A, B \in \mathcal{S}$ existieren endlich viele disjunkte Mengen $S_1, \dots, S_M \in \mathcal{S}$ mit $A \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^{M} S_j$

**Satz 5.1.2** (Nach Carathéodory)**.** Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ein Prämaß. Dann existiert (mindestens) eine Fortsetzung von $\mu$ zu einem Maß $\mu$ auf $\sigma(\mathcal{S})$.
Falls $\mu$ $\sigma$-endlich auf $\mathcal{S}$ ist, dann ist die Fortsetzung eindeutig.

[25. Nov] **Definition 5.1.3** (Äußere Maße)**.** Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß, falls

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$ (Normierung)

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ ($\sigma$-Subadditivität)

**Konstruktion 5.1.4.** Zu einem Prämaß $\mu$ auf $\mathcal{S}$ gibt es ein äußeres Maß.
Nehme $A \subseteq X$. Wir bepflastern $A$ mit Mengen aus $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{C}(A) := \left\{ (S_n)_{n\in\mathbb{N}} : S_n \in \mathcal{S} \ \forall n \in N \wedge A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \right\} \tag{Cover}$$

$\mathcal{C}(A) = \varnothing$ ist dabei möglich. Gegeben ein Prämaß $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ definieren wir nun

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\} & \text{falls } \mathcal{C}(A) \neq \varnothing \\ +\infty & \text{falls } \mathcal{C}(A) = \varnothing \end{cases}$$

**Lemma 5.1.5.** Das in Konstruktion 5.1.4 definierte $\mu^*$ ist ein äußeres Maß.

*Beweis.*

(i) Wir nehmen $S_n = \varnothing$. Dann gilt $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) Sei $A \subseteq B$. Angenommen $\mathcal{C}(B) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(B) \right\} \\ &= \mu^*(A) \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\mu^*(A_n) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(S_n) : (S_n)_n \in \mathcal{C}(A) \right\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $(S_{n,m})_m \in \mathcal{C}(A_n)$ mit

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(S_n, m) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \Sigma^n \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mu^*(A) &\leq \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(S_{n,m}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(S_{n,m})\right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon\Sigma^n) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_m) + \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0\end{aligned}$$

□

**Konstruktion 5.1.6** (Prämaß auf erzeugtem Ring)**.** Sei $\mu$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathcal{S}$. Wir wollen $\mu$ zu einem Prämaß auf dem erzeugten Mengenring forsetzen. Dazu gehen wir wie folgt vor.
Wir setzen $\mathcal{S}_\cup := \{S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_n : S_j \in \mathcal{S}\}$ und definieren

$$\overline{\mu}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n) = \sum_{j=1}^n \mu(S_j)$$

Wir zeigen die Wohldefiniertheit von $\mu$. Angenommen $S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_n$ und $S_j, T_j \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}S_j = S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n S_k\right) &= S_j \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^n T_k\right) \\ &= \bigsqcup_{k=1}^n (S_j \cap T_k)\end{aligned}$$

Analog ist auch

$$\begin{aligned}T_k &= \bigsqcup_{j=1}^n (T_k \cap S_j) \\ \Rightarrow S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \\ \Rightarrow \overline{\mu}(S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n) &= \overline{\mu}\left(\bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^M (S_j \cap T_k)\right) \\ \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^N \mu(S_j \cap T_k) &= \sum_{k=1}^N \mu(T_k) = \overline{\mu}(T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N)\end{aligned}$$

Das heißt $\overline{\mu}$ ist wohldefiniert.

Frage: Wie verhält sich $\mathcal{S}_\cup$ unter allgemeinen (endlichen) Vereinigungen und Schnitten? Wir betrachten $S, T \in \mathcal{S}_\cup$ mit

$$\begin{aligned}S \cap T &= (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \cap (T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N) \\ &= \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{k=1}^N (S_j \cap T_k) \in \mathcal{S}_\cup\end{aligned}$$

Das heißt $\mathcal{S}_\cup$ ist stabil unter (endlichen) Schnitten.

$$S \setminus T = (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \setminus (T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_N)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S \cap T^{\mathrm{C}} &= (S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_M) \cap \bigcap_{n=1}^{N} {T_k}^{\mathrm{C}} \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{M} \left( S_j \cap \bigcap_{k=1}^{N} {T_k}^{\mathrm{C}} \right) \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{M} \bigcap_{k=1}^{N} \left( S_j \cap {T_k}^{\mathrm{C}} \right) \in \mathcal{S}_{\cup}\end{aligned}$$

Das heißt für $S, T \in \mathcal{S}_{\cup}$ ist auch $S \setminus T \in \mathcal{S}_{\cup}$. Außerdem können wir schreiben

$$S \cup T = (S \setminus T) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus S) \in \mathcal{S}_{\cup}$$

Das heißt $\mathcal{S}_{\cup}$ ist ein Mengenring und $\overline{\mu}$ ist eine Fortsetzung von $\mu$ auf $\mathcal{S}_{\cup}$.

$$\Rightarrow \overline{\mu}(T \cup S) = \overline{\mu}(S \setminus T) + \overline{\mu}(S \cap T) + \overline{\mu}(T \setminus S)$$

Das heißt $\overline{\mu}$ ist definiert für endlich viele Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}_{\cup}$.

Behauptung: $\overline{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\mathcal{S}_{\cup}$. Also ist zu zeigen, dass $\overline{\mu}$ $\sigma$-additiv auf $\mathcal{S}_{\cup}$ ist. Wir nehmen $(T_k)_k \subseteq \mathcal{S}_{\cup}$

$$T \coloneqq \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \in \mathcal{S}_{\cup}$$

Zu zeigen:

$$\overline{\mu}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\mu}(T_k)$$

Nach Definition von $\mathcal{S}_{\cup}$ gibt es $(S_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und Indizes $0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$ mit

$$\begin{aligned}T_k &= S_{i(k-1)+1} \sqcup \cdots \sqcup S_{i(k)} && (k \in \mathbb{N}) \\ T &= U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_L \\ U_l &\coloneqq \bigsqcup_{i \in J_l} S_i\end{aligned}$$

Indexmengen $J_1, \dots, J_l \subseteq \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und $J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_L = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(T) &= \overline{\mu}(U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_L) \\ &= \overline{\mu}(U_1) + \ldots + \overline{\mu}(U_l) \\ &= \mu(U_1) + \ldots + \mu(U_l) \\ &= \sum_{i \in J_1} \mu(S_i) + \ldots + \sum_{i \in J_L} \mu(S_i) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(T_k)\end{aligned}$$

[29. Nov] **Bemerkung 5.1.7** (Prämaß und äußeres Maß)**.** Wenn wir ein Prämaß $\mu$ auf einem Halbring $\mathcal{S}$ haben, dann gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

wobei $\mu^*$ das in Konstruktion 5.1.4 definierte äußere Maß ist. Das heißt $\mu^*$ ist eine Fortsetzung von $\mu$.

*Beweis.* Sei $A \in \mathcal{S}$ und $(S_j)_j \in \mathcal{C}(A)$ Überdeckung von $A$. Dann gilt

$$\mu(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j\right) \cap A\right)$$

Wegen der $\sigma$-Subadditivität von $\overline{\mu}$ gilt

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(S_j)$$

Wir nehmen das Infimum auf beiden Seiten und erhalten

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\mu(A) \geq \mu^*(A)$. Für ein $A \in \mathcal{S}$ nehmen wir $(S_j)_j$ mit $S_1 \coloneqq A$, $S_2 = S_3 = \ldots = \varnothing$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}\\ &\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

□

**Definition 5.1.8** (Zerlegungsbedingung)**.** Sei $\mu^*$ ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann sagen wir $A \subseteq X$ erfüllt die Zerlegungsbedingung, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X \tag{5.1.1}$$

Außerdem definieren wir

$$\mathcal{A}_* \coloneqq \{A \subseteq X : A \text{ erfüllt die Zerlegungsbedingung 5.1.1}\}$$

**Bemerkung 5.1.9.** Die Bedingung 5.1.1 ist äquivalent zu der Bedingung

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

da die Ungleichung in die andere Richtung bereits durch die $\sigma$-Subadditivität von $\mu^*$ gegeben ist.

**Lemma 5.1.10.** Sei $\mu^*$ das vom Prämaß $\mu$ auf $\mathcal{S}$ erzeugte äußere Maß. Dann gilt

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_*$$

*Beweis.* Sei $A \in \mathcal{S}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

O.B.d.A sei $\mathcal{C}(B) \neq \varnothing$. Sei $(B_n)_n \in \mathcal{C}(B)$, $B_n \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}B_n &= (B_n \cap A) \sqcup (B_n \setminus A)\\ \Rightarrow \mu(B_n) &= \overline{\mu}(B_n) = \overline{\mu}((B_n \cap A)) + \overline{\mu(B_n \setminus A)}\\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{\mu}(B_n \setminus A))\end{aligned}$$

Es gilt $(B_n \cap A)_n \in \mathcal{C}(B \cap A)$ und $(B_n \setminus A)_n \in \mathcal{C}(B \setminus A)$

$$\begin{aligned}&\geq \mu^*(B \cap A) + \overline{\mu}^*(B \setminus A)\\ &= \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)\\ \Rightarrow \mu(B) &\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)\end{aligned}$$

□

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz von Carathéodory zu beweisen.

*Beweis von Satz 5.1.2.* SCHRITT 1: Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_*$ eine Algebra ist. Die Stabilität unter Komplementbildung und $\varnothing \in \mathcal{A}_*$ zeigt sich leicht. Wir wollen also noch zeigen, dass $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$. Das heißt es soll gelten

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &\coloneqq (A_1 \cap B) \setminus A_2 \\ B_2 &\coloneqq (A_2 \cap B) \setminus A_1 \\ B_3 &\coloneqq B \cap A_1 \cap A_2 \end{aligned}$$
$$B_4 = B \setminus (A_1 \cup A_2)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \\ B \setminus (A_1 \cup A_2) &= B_4 \end{aligned}$$

Das heißt es ist zu zeigen, dass

$$\mu(B) = \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3) + \mu(B_4)$$

$A_1$ erfüllt die Zerlegungsbedingung. Also

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \setminus A_1) \\ &= \mu^*(B_1 \cup B_3) + \mu^*(B_2 \cup B_4) \end{aligned}$$

Verwende $A_2$, um $B_1 \cup B_3$ zu zerlegen

$$\begin{aligned} \mu^*(B_1 \cup B_3) &= \mu^*((B_1 \cup B_2) \cap A_2) + \mu^*((B_1 \cup B_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) \end{aligned}$$

Genauso zerlegen von $B_2 \cup B_4$ mittels $A_2$

$$\begin{aligned} \mu^*(B_2 \cup B_4) &= \mu^*(B_2) + \mu^*(B_4) \\ \Rightarrow \mu^*(B) &= \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3) + \mu^*(B_4) \end{aligned}$$

Machen dasselbe mit $\overline{B} \coloneqq B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow \mu^*(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) + \mu^*(B_3)$$

Es folgt dann $A_1 \cup A_2$ erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_*$.
[02. Dez] SCHRITT 2: Wir zeigen, dass $\mu^*$ endlich additiv auf $\mathcal{A}_*$ ist. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Wir benutzen $A_1$, um $A_1 \sqcup A_2$ zu zerlegen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \sqcup A_2) &= \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_1) + \mu^*((A_1 \sqcup A_2) \setminus A_2) \\ &= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \end{aligned}$$

Schritt 3: Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_*$ eine $\sigma$-Algebra und $\mu^*$ ein Maß auf $\mathcal{A}_*$ ist. Sei $(A_j)_j \subseteq \mathcal{A}_*$ und $A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \quad \forall B \subseteq X$$

Dabei reicht $\geq$ zu zeigen, da die andere Ungleichung allgemein erfüllt ist. WIr definieren

$$F_n \coloneqq \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}_*$$

mit $F_n \nearrow A$ und

$$B \setminus A \subseteq B \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also wird $B$ von $F_n$ zerlegt

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)\\ &= \mu^*\left(B \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) + \mu^*\Big(B \cap \bigcap {A_j}^{\mathrm{C}}\Big)\end{aligned}$$

Wegen der endlichen Additivität von $\mu^*$ gilt

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*\Big(B \cap \bigcap {A_j}^{\mathrm{C}}\Big)$$

$$\begin{aligned}B \cap A = B \cap \left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} (B \cap A_j)\\ \Rightarrow \mu^*(B \cap A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} (B \cap A_j)\right)\\ &\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)\right)\end{aligned}$$

Aber wir wissen $B \setminus A \subseteq B \setminus F_n$. Damit folgt

$$\begin{aligned}&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus F_n)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\mu^*(B \cap F_n) + \mu^*(B \setminus F_n)\right) = \mu(B)\end{aligned}$$

Das heißt $A$ erfüllt die Zerlegungsbedingung und damit $A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}_*$. Das heißt $A_*$ ist ein Dynkinsystem. Wir wollen Satz 3.1.6 anwenden und müssen daher noch zeigen, dass $A_*$ $\cap$-stabil ist. Es gilt

$$A_1 \cap A_2 = \Big({A_1}^{\mathrm{C}} \cup {A_2}^{\mathrm{C}}\Big)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}_*$$

für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_*$. Damit ist $A_*$ nach Lemma 3.1.6 eine $\sigma$-Algebra.

Schritt 4: Wir zeigen, dass $\mu^*$ ein Maß auf $\mathcal{A}_*$ ist. Sei

$$B := A = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$$

Wir zerlegen $B$ mittels $A$

$$\Rightarrow \mu^*(B) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j)$$

Durch die $\sigma$-Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in die andere Richtung. Also folgt

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j) \qquad \square$$

Um den Satz von Carathéodory auf $\lambda^d$ anwenden zu können, brauchen wir noch

- $\mathcal{J}^d :=$ *Mengensystem der (rechts-)halboffenen Intervalle im* $\mathbb{R}^d$ ist ein Halbring
- $\lambda^d : \mathcal{J}^d \to [0, \infty]$ ist ein Prämaß

**Lemma 5.1.11.** Seien $X_1, X_2$ Mengen und $\mathcal{S}_1$ ein Halbring in $X_1$ sowie $\mathcal{S}_2$ Halbring in $X_2$. Dann gilt $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ist ein Halbring in $X_1 \times X_2$.

*Beweis.*

($S_1$) $\varnothing \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ folgt direkt aus $\varnothing \in \mathcal{S}_1$ und $\varnothing \in \mathcal{S}_2$

($S_2$) Seien $J_1^1, J_1^2 \in \mathcal{S}_1$ und $J_2^1, J_2^2 \in \mathcal{S}_2$. Dann gilt

$$\left(J_1^1 \times J_2^1\right) \cap \left(J_1^2 \times J_2^2\right) = \left(J_1^1 \cap J_1^2\right) \times \left(J_2^1 \cap J_2^2\right) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$$

($S_3$) (Übung)

$\square$

**Satz 5.1.12.**

$$\mathcal{J}^d := \left\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$$

ist ein Halbring.

*Beweis.* Für eine Dimension (das heißt $d = 1$) zeigen sich die Halbring-Eigenschaften von $\mathcal{J}^1$ direkt durch Fallunterscheidungen. Wir wollen also für höhere Dimensionen einfach Lemma 5.1.11 induktiv anwenden. Wir definieren also

$$\mathcal{J}^2 := \mathcal{J}^1 \times \mathcal{J}^1$$

Das ist nach dem Lemma ein Halbring

$$\Rightarrow \mathcal{J}^3 := \mathcal{J}^2 \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}^3 := \mathcal{J}^{d-1} \times \mathcal{J}^1 \text{ ist ein Halbring} \qquad \square$$

**Lemma 5.1.13.** Sei $\mu$ endlich-additiv auf einem Halbring $\mathcal{S}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen

(a) $\mu$ ein Prämaß

(b) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \nearrow A \in \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

(c) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

(d) $A_n \in \mathcal{S} \wedge A_n \searrow \varnothing \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = 0$

Dann gilt (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). Gilt ferner $\mu(A) < \infty \ \forall A \in \mathcal{S}$, dann ist auch (c) $\Rightarrow (b)$. In diesem Fall sind also alle Aussagen äquivalent und damit verwendbar, um zu prüfen, ob $\mu$ ein Prämaß ist.

*Beweis.* (Später) □

**Satz 5.1.14.** Sei $\lambda^d$ für $A \in \mathcal{J}^d$ mit

$$A = \times_{j=1}^{d} [a_j, b_j) = [a, b)$$

definiert als

$$\lambda^d([a,b)) := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

Dann ist $\lambda^d$ ein Prämaß auf $\mathcal{J}^d$.

*Beweis.* Es gilt $\lambda^d(\varnothing) = \lambda^d([a,a)) = 0$. ?? □

[06. Dez] Wir wollen Maße nun einfacher darstellen, als nur als Fortsetzung eines Prämaßes, was auf einem Halbring definiert ist. Dafür sei nun $\mu$ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

**Konstruktion 5.1.15** (Maße mit Funktionen identifizieren)**.** Wir betrachten zunächst nur den Fall $d = 1$. Wir wollen $\mu$ auf den halboffenen Intervallen durch eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ darstellen. Das heißt es soll gelten

$$\mu([a,b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Welche Eigenschaften hat dann die Funktion $F$?

1. $F$ ist monoton wachsend

$$F(b) - F(a) = \mu([a,b)) \geq 0 \quad \forall b \geq a$$

2. $F$ ist ?seitig stetig. Wir betrachten eine Folge $x_n \to b$ $(a < b)$ mit $x_n \leq x_{n+1}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, x_n) = [a, b)$$

Da $\mu$ ein Maß ist, ist es von unten stetig. Das heißt es gilt

$$F(x_n) - F(a) = \mu([a, x_n)) \nearrow \mu([a,b)) = F(b) - F(a)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \nearrow b} F(x) = F(b)$$

**Beispiel 5.1.16** (Dirac-Maß)**.**

**Satz 5.1.17.** Jede wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die von rechts stetig ist und (von links Grenzwerte hat) erzeugt ein Borelmaß $\mu_F$, sodass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

Ferner: Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend und von rechts stetig mit $\mu_G = \mu_F$. Dann folgt

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Der letzte Teil zeigt sich durch nachrechnen direkt. Erster Teil: Siehe Literatur. □

# 6 [*] Messbare Abbildungen und Bildmaße

## 6.1 Messbare Abbildungen

**Definition 6.1.1.** Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume und $T : X \to X'$ eine Funktion. Dann heißt $T$ $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar, falls

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

**Beispiel 6.1.2.**

1. Konstante Funktionen sind messbar

2. Wir betrachten $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ mit $\mathcal{O}$ Mengensystem der offenen Mengen. Dann ist eine stetige Funktion $T$ $\mathcal{B}(\mathcal{O}) - \mathcal{B}(\mathcal{O}')$-messbar, da die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen offen sind

**Satz 6.1.3.** Seien $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ Messräume und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ Erzeuger von $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$. Dann ist $T$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'$$

*Beweis.* $\Sigma' := \{A' \subseteq X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist eine $\sigma$-Algebra in $X'$ (Übung) mit $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma'$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\Sigma') = \Sigma' \\ &\Rightarrow \mathcal{A}' = \Sigma' \end{aligned}$$

□

**Satz 6.1.4.** Seien $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2), (X_3, \mathcal{A}_3)$ Messräume und $T_1 : X_1 \to X_2$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar sowie $T_2 : X_2 \to X_3$ $\mathcal{A}_2$- $\mathcal{A}_3$-messbar. Dann ist $T_2 \circ T_1 : X_1 \to X_3$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbar.

*Beweis.* Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann ist

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1}\underbrace{\left(T_2^{-1}(A_3)\right)}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_3$$

□

**Bemerkung 6.1.5.** Sei $I$ eine Index-Menge und $(X_j, \mathcal{A}_j)$ ein Messraum für $j \in I$. Abbildung $T_j : X \to X_j$. Dann ist $\sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$ die kleinste $\sigma$-Algebra, auf $X$, für die alle Abbildungen $T_j$ messbar (also $\sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$-$\mathcal{A}_j$-messbar) sind.

**Satz 6.1.6.** $S : X_0 \to X$ ist $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}$-messbar. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma\Big(\bigcup_{j\in I} T^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big)$ genau dann, wenn

$$T_j \circ S : X_0 \to X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0\text{-}\mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

*Beweis.* „$\Rightarrow$ “ Folgt direkt aus Satz 6.1.4.

„$\Leftarrow$“ Nehmen $E \in \bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Dann ist $E \in T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ für ein $j \in I$. Dann ist $E = T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$. Es folgt $S^{-1}(E) = S^{-1}\Big(T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\Big) = (T_j \circ S)^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_0$.
$\mathcal{E} := \bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist Erzeuger von $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Damit folgt die Behauptung. □

## 6.2 Bildmaße

[09. Dez] **Notation 6.2.1.** Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Messräume. Wir schreiben $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ für eine Funktion $T : X \to X'$, die $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar ist.

**Konstruktion 6.2.2.** Sei $\mu$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ eine Funktion. Wir nehmen $A' \in \mathcal{A}'$ und definieren

$$\mu'(A') \coloneqq \mu\Big(T^{-1}(A')\Big)$$

Dann ist $\mu'$ ein Maß auf $(X', \mathcal{A}')$.

**Definition 6.2.3** (Bildmaß)**.** Im Sinne von Konstruktion 6.2.2 nennen wir $\mu'$ das Bild von $\mu$ unter $T$. Das heißt wir schreiben

$$\mu' \coloneqq T(\mu)$$

Es gilt

$$T(\mu)(A') \coloneqq \mu\Big(T^{-1}(A')\Big)$$

**Bemerkung 6.2.4** (Transitivität der Bildmaße)**.** Ist $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2)\,,\ T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \to (X_3, \mathcal{A}_3)$ und $\mu$ ein Maß auf $(X_1, \mathcal{A}_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)\,(\mu) &= T_2(T_1(\mu)) \\ (T_2 \circ T_1)^{-1} &= T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \\ \Rightarrow\ (T_2 \circ T_1)^{-1}\,(A_3) &= T_1^{-1}\Big(T_2^{-1}(A_3)\Big) \end{aligned}$$

# 7 [*] Messbare numerische Funktionen

**Definition 7.1.1** ($\overline{\mathbb{R}}$)**.** Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ für die Menge der reellen Zahlen einschließlich $\pm\infty$. Wir definieren die algebraischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned}
x + \infty &\coloneqq \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
x - \infty &\coloneqq -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\infty + \infty &\coloneqq \infty \\
-\infty + (-\infty) = -\infty - \infty &\coloneqq -\infty \\
-\infty &< x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
x \cdot \infty &\coloneqq \infty \quad \forall x > 0 \\
x \cdot (-\infty) &\coloneqq -\infty \quad \forall x > 0 \\
x \cdot \infty &\coloneqq (-\infty) \quad \forall x < 0 \\
x \cdot (-\infty) &\coloneqq \infty \quad \forall x < 0 \\
0 \cdot (\pm\infty) &\coloneqq 0 \\
\frac{x}{\pm\infty} &\coloneqq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty
\end{aligned}$$

Dabei bleiben Ausdrücke wie $\infty - \infty$ nicht definiert. Wir definieren offene Mengen im $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt: $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist offen, wenn

$$\forall x \in U \cap \mathbb{R}\ \exists R > 0\colon\ (x - R, x + R) \subseteq U$$

Außerdem muss für den Fall $\infty \in U$ zu sätzlich gelten

$$\exists R > 0\colon\ (R, \infty] \subseteq U$$

Analog muss für $-\infty \in U$ gelten

$$\exists L > 0\colon\ [-\infty, L) \subseteq U$$

Mit dieser Definition können wir die Borel-$\sigma$-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren mit $\overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \overline{\mathcal{B}}$. Dann gilt für die Spur-$\sigma$-Algebra $\overline{\mathcal{B}}^1 \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}^1$.

**Bemerkung 7.1.2** (Identitätsfunktion)**.** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $A \in \mathcal{A}$. Dann definieren wir die Identitätsfunktion (von $A$) mit

$$\mathbf{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Diese ist Borel-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{1}_A &\leq \mathbf{1}_B \\
\mathbf{1}_{A^\mathrm{C}} &= 1 - \mathbf{1}_A
\end{aligned}$$

**Definition 7.1.3** (Numerische Funktion)**.** Eine numerische Funktion ist eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in $X$, so heißt $f$ $\mathcal{A}$-messbar, falls es $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar ist. Das heißt

$$\forall B \in \overline{\mathcal{B}}\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

**Satz 7.1.4.** Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Dann ist eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Wir setzen $\overline{\mathcal{E}} := \{[\alpha, \infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Zu zeigen ist $\sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right) = \overline{\mathcal{B}}^1$

(1) Es gilt $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Das heißt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \Sigma := \sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right) \subseteq \overline{\mathcal{B}}^1 \\
&[\alpha, \beta) = [\alpha, \infty] \setminus [\beta, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}^1 && (\alpha \leq \beta) \\
\Rightarrow\ &[\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 \\
&\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \sigma\left(\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1\right)
\end{aligned}$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}
\{+\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty] \in \sigma(\mathcal{E}) \\
\{-\infty\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, \infty]^{\mathrm{C}} \in \sigma(\mathcal{E}) \\
\Rightarrow \forall \overline{G} \in \Sigma \colon \overline{G} \cap \mathbb{R} &= \overline{G} \cap \left(\{-\infty, \infty\}^{\mathrm{C}}\right) = \Sigma \\
&\Rightarrow \mathbb{R} \cap \Sigma := \Sigma \\
&\Rightarrow \mathcal{B}^1 \subseteq \Sigma \\
&\Rightarrow \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1 \cup \{0, \{-\infty\}, \{\infty\}, [-\infty, \infty)\} \subseteq \Sigma
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\mathcal{E}}$ ein Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}^1$ und es genügt die Maßeigenschaften auf dem Erzeuger zu haben.

□

**Satz 7.1.5.** Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Dann ist eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
&\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (1) \\
\Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (2) \\
\Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (3) \\
\Leftrightarrow\ &\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} && (4)
\end{aligned}$$

*Beweis.* Die Äquivalenz zu (1) folgt direkt aus Satz 7.1.4. Warum sind die anderen Aussagen dazu äquivalent? (Übung). □

**Satz 7.1.6.** Für messbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum folgt

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$$

*Beweis.* $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Dann ist

$$\{f < g\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{A} \\
\{f \le g\} &= \{f > g\}^{\mathrm{C}} \\
\{f = g\} &= \{f \le g\} \cap \{f \ge g\} = \mathcal{A} \\
\{f \ne g\} &= \{f = g\}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

□

[13. Dez] **Satz 7.1.7.** Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann folgt $f \pm g$ (falls definiert) sowie $f \cdot g$ sind messbar.

*Beweis.*

$$
\begin{aligned}
\{f - g \ge \alpha\} &= \left\{ f \ge \underbrace{g + \alpha}_{=:h} \right\} \\
&= \{f \ge h\}
\end{aligned}
$$

Das heißt es reicht aus zu zeigen, dass $\alpha + g$ (bzw. $h$) messbare Funktionen für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sind. $g$ ist messbar, das heißt

$$
\begin{aligned}
\{g \le \beta\} &\in \mathcal{A} \\
h \ge \beta &\Leftrightarrow g + \alpha \ge \beta \Leftrightarrow g \le \beta - \alpha \\
\{h \ge \beta\} &= \{g \le \beta - \alpha\}
\end{aligned}
$$

Das ist messbar, da $g$ messbar ist und wir Satz 7.1.6 anwenden können. Damit ist $h$ und damit $f - g$ messbar.
Um zu zeigen, dass auch $f + g$ messbar ist, können wir einfach zeigen, dass $-g$ messbar ist. Es gilt

$$
\{-g \ge \gamma\} = \{g \ge -\gamma\}
$$

Damit ist $-g$, also auch $f - (-g) = f + g$ messbar.
Wir zeigen noch die Messbarkeit von $f \cdot g$. Annahme: $f$ und $g$ sind reellwertig

$$
\begin{aligned}
(f+g)^2 - (f-g)^2 &= 4fg \\
\Rightarrow fg &= \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)
\end{aligned}
$$

Das heißt es reicht aus, zu zeigen, dass die Messbarkeit einer Funktion $h$ auch die Messbarkeit von $h^2$ impliziert

$$
\begin{aligned}
\left\{h^2 \ge \beta\right\} &= X \quad \text{falls } \beta \le 0 \\
\left\{h^2 \ge \beta\right\} &= \left\{h \ge \sqrt{\beta}\right\} \cup \left\{h \le -\sqrt{\beta}\right\} \in \mathcal{A} \quad \text{falls } \beta > 0
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Messbarkeit von $h^2$ gezeigt. Wir wollen nun noch die Annahme loswerden, dass $f$ und $g$ reellwertig sind. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
X_1 &:= \{fg = +\infty\} \cup (\{f > 0\} \cap \{g = \infty\} \sqcup (\{f < 0\} \cap \{g = -\infty\})) \\
&\quad \cup (\{f = \infty\} \cap \{g \ge 0\} \cup \{f = \infty\} \cap \{g < 0\})\ (?) \\
X_2 &:= \{fg = -\infty\} \\
X_3 &:= \{fg = 0\} = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_4 &:= (X_1 \cup X_2 \cup X_3)^{\mathrm{C}} \\
\Rightarrow f, g : X_4 &\to \mathbb{R} \text{ sind reellwertig} \\
fg &= fg\mathbf{1}_{X_4} + \infty\mathbf{1}_{X_1} - \infty\mathbf{1}_{X_2} + 0\mathbf{1}_{X_3}
\end{aligned}
$$

Damit ist $fg$ nach Voraussetzung messbar, da $X_4 \in \mathcal{A}$. □

**Satz 7.1.8** (WICHTIG)**.** Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sowie $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar.

**Bemerkung 7.1.9.** Sei $s := \sup_n f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ist punktweise definiert. Das heißt

$$
s(x) = \left(\sup_n f_n\right)(x) := \sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}
$$

*Beweis von Satz 7.1.8.* Sei $s(x) := \sup_n f_n(x)$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\{s \leq \alpha\} &= \{x : s(x) \leq \alpha\} =: A_1 \\
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < \alpha\} = A_2 \in \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

Wir zeigen $A_1 = A_2$. Sei $x \in A_1$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\alpha &\geq s(x) = \sup f_n(x) \geq f_n(x) \\
\Rightarrow f_m(x) &\leq \alpha \quad \forall m \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow A_1 &\subseteq A_2
\end{aligned}
$$

Sei $x \in A_2$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &\leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \sup f_n(x) &\leq \alpha \Rightarrow x \in A_1
\end{aligned}
$$

Damit ist $A_1 = A_2$. Es gilt

$$
\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)
$$

ist messbar

$$
\begin{aligned}
\left(\limsup_n f_n\right)(x) &= \inf_n \sup_{\alpha\geq n} f_\alpha(x) \\
\left(\liminf_n f_n\right)(x) &= \sup_n \inf_{\alpha\geq n} f_\alpha(x)
\end{aligned}
$$

□

**Korollar 7.1.10.** Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen auf $X$ und $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Angenommen $\forall x \in X$ existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (wir schreiben auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n$). Dann ist $f$ messbar.

*Beweis.*

$$
f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n
$$

Damit ist $f$ nach dem vorherigen Satz messbar. □

**Korollar 7.1.11.** Seien $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann sind

$$f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n \coloneqq \max(f_1, f_2, \dots, f_n) \qquad \text{(punktweise)}$$

sowie

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \coloneqq \min(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

messbar.

*Beweis.* Nehme die Folge $(\overline{f}_n)_n$ mit $\overline{f}_m = f_m$ für $1 \leq m \leq n$ und $\overline{f}_m = f_n$ für $m > n$. Damit ist

$$f_1 \vee \dots f_n = \sup_n \overline{f}_n$$

messbar nach Satz 7.1.8. Die zweite Behauptung zeigt sich analog. □

**Notation 7.1.12.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir definieren

$$\begin{aligned} f_+ &\coloneqq f \vee 0 = \max(f, 0) \geq 0 && \text{(Positivteil)} \\ f_- &\coloneqq (-f) \vee 0 \geq 0 && \text{(Negativteil)} \end{aligned}$$

Damit gilt außerdem

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

**Korollar 7.1.13.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann ist $f$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $f_+$ und $f_-$ messbar sind.

**Korollar 7.1.14.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Dann ist $|f|$ messbar.

# 8 [*] Elementarfunktionen und ihr Integral

**Definition 8.1.1.** Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir definieren $E_+ \coloneqq E_+(X, \mathcal{A})$ als die Menge aller nicht-negativen Elementarfunktionen. Das heißt $u \in E_+$, falls $u : X \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-messbar ist und Bild$(u)$ endlich viele Werte annimmt. Das heißt

$$u(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

mit

$$\begin{aligned} 0 \le \alpha_j < \infty \quad \forall j \le n \\ \alpha_i \neq \alpha_n \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Wir setzen $A_j \coloneqq u^{-1}(\{\alpha_j\}) \in \mathcal{A}$. Damit gilt $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}(x)$. Wir haben den Raum $X$ nun folgendermaßen disjunkt zerlegt: $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$.
Sind umgekehrt nicht-notwendigerweise disjunkte $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j 1_{\tilde{A}_j}$ eine Elementarfunktion.

**Bemerkung 8.1.2** (Eigenschaften von $E_+$)**.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $u, v \in E_+$. Dann gilt

- $\alpha u \in E_+$
- $u + v \in E_+$
- $u - v \in E_+$
- $u \wedge v \in E_+$
- $u \vee v \in E_+$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition und den Messbarkeitseigenschaften aus dem letzten Kapitel. □

**Notation 8.1.3** (Normaldarstellung)**.** Sei $u \in E_+$. Dann schreiben wir $u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$ als Normaldarstellung mit $\bigsqcup_{j=1}^n = X$.

**Lemma 8.1.4.** Sei $u \in E_+ = E_+(X, \mathcal{A})$ mit Normaldarstellungen

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{B_k}$$

Sei $\mu$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k)$$

Das heißt die Uneindeutigkeit der Normaldarstellung verschwindet bei der Verwendung eines Maßes.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \\ &= B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} (A_j \cap B_k) \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_j \cap B_k)$$

$$\Rightarrow 1_{A_j} = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_j \cap B_k} \quad 1_{B_k} = \sum_{j=1}^{m} 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \qquad = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j \cap B_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \beta_k 1_{A_j \cap B_k}$$

Jeder Punkt $x \in X$ liegt in genau einer Menge $A_j \cap B_k$

$$u(x) = \alpha_{j_0} 1_{A_{j_0} \cap B_k}(x) = \beta_{k_0} 1_{A_{j_0} \cap B_{k_0}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_j \cap B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(B_k) \end{aligned}$$ □

[16. Dez] **Definition 8.1.5.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $u$ eine Elementarfunktion. Dann heißt die von der spezifischen Normaldarstellung $\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$ unabhängige Zahl (Lemma 8.1.4)

$$\int u \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

das ($\mu$-)Integral von $u$ (über $X$). Wir schreiben auch

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \int_X u \,\mathrm{d}\mu = \int_X u(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X u(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

und definieren in diesem Sinne eine Abbildung

$$\begin{aligned} E_+ &\to \overline{\mathbb{R}} \\ u &\mapsto \int u \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

**Lemma 8.1.6** (Eigenschaften des Integrals)**.** Für $A \subseteq X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E_+$ gilt

(i) $\displaystyle\int 1_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$

(ii) $\displaystyle\int \alpha u \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int u \,\mathrm{d}\mu$

(iii) $\displaystyle\int (u + v) \,\mathrm{d}\mu = \int u \,\mathrm{d}\mu + \int v \,\mathrm{d}\mu$

(iv) $\displaystyle u \leq v \Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu \leq \int v \,\mathrm{d}\mu$

*Beweis.* (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. Für (iii) sei

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j} \quad v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$$

$$\Rightarrow A_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_j \cap B_k \quad B_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j \cap B_k$$

$$u = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j \cap B_k} \quad v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\Rightarrow u + v = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_j + \beta_k) 1_{A_j \cap B_k}$$

$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \quad \int v \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k)$$

$$\begin{aligned} \int (u+v)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_j + \beta_k)\, \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int u \,\mathrm{d}\mu + \int v \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Für (iv) gilt mit der Definition, die wir auch schon bei (iii) verwendet haben, dass $\alpha_j \leq \beta_k$ auf $A_j \cap B_k$

$$\Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_{j} \sum_{k} \beta_k \mu(A_j \cap B_k) = \int v \,\mathrm{d}\mu \qquad \square$$

# 9 [*] Das Integral von nicht-negativen meßbaren Funktionen

**Satz 9.1.1.** Für jede wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ und jedes $u \in E_+$ gilt

$$u \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \Rightarrow \int u \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* Sei $u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$ und $0 < \delta < 1$. Wir definieren $B_n := \{x \in X : u_n(x) \geq \delta u(x)\}$. Wir wissen nach Voraussetzung, dass $u_n \leq u_{n+1}$, das heißt $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \geq u(x)\ \forall x \in X$. Sei $x \in X$ fest. Ist $u(x) > 0$, dann gilt $\exists N(x) \in \mathbb{N} : u_n(x) \geq \delta u(x)$ für $n \geq N(x)$.
Aus $u_{n+1} \geq u_n$ folgt $B_n \subseteq B_{n+1}$. Außerdem ist $\forall x \in X : x \in B_n$ für ein ausreichend großes $n$. Also haben wir $B_n \nearrow X$. Auch ist $u_n \geq \delta u 1_{B_n}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int u_n \,\mathrm{d}\mu &\geq \int \delta u 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu \\
u &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j} \\
\Rightarrow u 1_{B_n} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} \\
\delta \int u 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu &= \delta \int \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \to \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u \,\mathrm{d}\mu \geq \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lim_{n\to\infty} \mu(A_j \cap B_n) = \delta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j} = \delta \int u \,\mathrm{d}\mu$$

Das gilt für alle $\delta < 1$. Mit dem Limes für $\delta \to 1$ folgt dann die Behauptung. □

**Korollar 9.1.2.** Seien $(u_n)_n, (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsende Folgen von Elementarfunktionen. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* Nach dem vorherigen Satz und $u_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\int u_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}x &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}x = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu$$

□

**Notation 9.1.3.** Wir schreiben $E^* = E_+^* = E_+^*(X, \mathcal{A})$ für die Menge aller numerischen meßbaren Funktionen $f \geq 0$ auf $X$, für die es eine wachsende Folge $(u_n)_n \subseteq E_+$ gibt, sodass $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Für $f \in E_+^n$ ist dann

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sup \left\{ \int u_n \,\mathrm{d}\mu : u_n \subseteq E_+,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f \right\}$$

Das nennen wir das ($\mu$-)Integral von $f$.

[20. Dez] **Bemerkung 9.1.4** (Eigenschaften des Integrals)**.** Seien $f, g \in E^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

(i) $\alpha f \in E^*$

(ii) $f \pm g \in E^*$

(iii) $fg \in E^*$

(iv) $f \vee g \coloneqq \max(f, g) \in E^*$

(v) $f \wedge g \coloneqq \min(f, g) \in E^*$

(vi) $\displaystyle\int (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$

(vii) $\displaystyle\int (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$

(viii) $\displaystyle f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$

*Beweis.*

(i)-(v) Beachte $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ und $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Damit lassen sich entsprechende Folgen finden, um auch Kombinationen von $f$ und $g$ im obigen Sinne zu finden.

(vi) (Übung)

(vii) Es ist $f = \lim_{n\to\infty} u_n$, $g = \lim_{n\to\infty} v_n$. Das heißt

$$\begin{aligned}
\int f \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu \\
\int g \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
\int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (u_n + v_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (u_n + v_n) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left( \int u_n \,\mathrm{d}\mu + \int v_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int u_n \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

(viii) $f \leq g \Rightarrow u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Wir definieren $(\tilde{u}_n)_n$ mit $\tilde{u}_n \coloneqq u_k$ für ein festes $k$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{u}_k = u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \\
&\Rightarrow \int u_k \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \tilde{u}_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int u_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int u_k \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$$

□

**Bemerkung 9.1.5** (Interpretation des Integrals)**.** Das Integral bezüglich einem Maß $\mu$ ist eine monotone Linearform von $E^*$ nach $[0,\infty]$. Aber was ist $E^*$?

**Notation 9.1.6.** Es sei $\mathcal{M}_+ \coloneqq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}) \coloneqq \{f : x \to [0,\infty]\,,\ f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$.

**Satz 9.1.7.** $E^*(X,\mathcal{A}) = \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$.

*Beweis.* $E^* \subseteq \mathcal{M}_+$ ist klar. Wir zeigen die Inklusion in die andere Richtung. Wir definieren für ein $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,\dots,n2^n\}$

$$A_{j,n} \coloneqq \begin{cases} \{f \geq j2^{-n}\} \cap \{f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0,\dots,n2^n-1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \{j2^{-n} \leq f \leq (j+1)2^{-n}\} & j \in \{0,\dots,n2^n-1\} \\ \{f \geq n\} & j = n2^n - 1 \end{cases}$$

Für ein festes $n$ ist $A_{j,n} \cap A_{k,n} = \varnothing$ für $j \neq k$. Wir setzen

$$u_n \coloneqq \sum_{j=0}^{n2^n} j2^{-n} 1_{A_{j,n}}$$

Behauptung 1: $u_n \leq u_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Bew.:

$$A_{2k,n+1} = \left\{2k2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\} = \left\{k2^{-n} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\}$$
$$A_{2k+1,n+1} = \left\{(2k+1)2^{-(n+1)} \leq f \leq (2k+1)2^{-(n+1)}\right\}$$
$$\Rightarrow A_{k,n} = A_{2k,n+1} \sqcup A_{2k+1,n+1}$$
$$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

Damit ist auch $u_n \leq f\ \forall n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt auf $A_{j,n}$ ist $f(x) \leq (j+1)2^{-n} = u_n(x) + 2^{-n}$. Das heißt $\lim_{n\to\infty} u_n = f$ für $x \in A_{j,n}$. Insgesamt gilt damit $\lim_{n\to\infty} u_n = f$. □

**Satz 9.1.8** (Monotone Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_n$ eine wachsende Folge in $E^*(X,\mathcal{A})$. Dann folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E^*$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$.

*Beweis.* Sei $f \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann reicht es, zu zeigen, dass $\exists (v_n)_n \subseteq E_+$ wachsend mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = f$ und $v_n \leq f_n$. Denn in diesem Fall ist

$$\int v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Mit Bemerkung 9.1.9 folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Wir brauchen also nur noch die Existenz von $(v_n)_n$. Zu $(f_n)$ existiert ein $(u_{m,n})_n \subseteq E_+$ mit $u_{m,n} \leq u_{m-1,n}$ sowie $f_n = \sup_m u_{m,n}$. Das heißt

$$\begin{aligned} & v_m \leq v_{m+1} \\ \Rightarrow\ & \sup_m v_m \in E_+ \end{aligned}$$

Behauptung: $\sup_m v_m = f = \sup_n f_n$. Da $u_{m,n} \leq f_n \leq f_{n+1}$

$$\Rightarrow \sup_m v_m \leq \sup_m f_m = f$$

Auch ist $v_m = u_{m-1} \vee u_{m-2} \vee \ldots \geq u_{m,n} \to f_n$

$$\begin{aligned} & f_n = \sup_m u_{m,n} = \sup_m v_m \\ \Rightarrow\ & f = \sup_n f_n \leq \sup_m v_m \leq f \\ \Rightarrow\ & f = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 9.1.9.** Im Sinne von Satz 9.1.8 gilt die Ungleichung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$ allgemein. Die Voraussetzung, dass die Folge wächst ist nur für die Ungleichung in die andere Richtung relevant.

**Korollar 9.1.10.** Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in E^*$ und $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

*Beweis.* Wir haben $f_n \geq 0$. Das heißt die Partialsummen von $(f_n)_n$ sind monoton wachsend. Damit ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz 9.1.8. □

# 10 [*] Integrierbarkeit

## 10.1 Integration von allgemeinen numerischen Funktionen

Wir haben $f \geq 0$ messbar auf $X$. Dann ist $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ wohldefiniert. Wir wollen das auch auf Funktionen mit negativen Werten erweitern.

**Definition 10.1.1.** Eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ($\mu$-)integrierbar, wenn sie $\mathcal{A}$-messbar ist sowie $\int f_+ \, \mathrm{d}\mu, \int f_- \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. In diesem Fall definieren wir

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu$$

**Satz 10.1.2.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) $f_+$ und $f_-$ sind integrierbar

(ii) Es existieren integrierbare Funktionen $u, v \geq 0$ mit $f = u - v$

(iii) Es existiert eine integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit $|f| \leq g$

(iv) $|f|$ ist integrierbar

[10. Jan] Im Fall (ii) ist $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu = \int u \, \mathrm{d}\mu - \int v \, \mathrm{d}\mu$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Wir wählen $u = f_+$ und $v = f_-$. Damit existieren die geforderten Funktionen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $u$ und $v$ sind integrierbare, nicht-negative Funktionen. Damit ist auch $u + v$ integrierbar und nicht-negativ und es gilt

$$\begin{aligned} f &= u - v \leq u \leq u + v \\ -f &= v - u \leq v \leq v + u \\ \Rightarrow |f| &\leq u + v =: g \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Aus der Monotonie des Integrals (für nicht-negative, integrierbare Funktionen) folgt

$$\int |f(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int g(x) \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Es gilt $f_+ \leq |f|$ und $f_- \leq |f|$. Das heißt nach der Argumentation aus der vorherigen Implikation sind $f_+$ und $f_-$ integrierbar.

Im Fall (ii) ist $f = u - v = f_+ - f_-$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow u + f_- = f_+ + v \\ &\Rightarrow \int u \, \mathrm{d}\mu + \int f_- \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu + \int v \, \mathrm{d}\mu \\ &\Rightarrow \int u \, \mathrm{d}x - \int v \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 10.1.3** (Komplexwertige Integrale)**.** Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar, falls $Re(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ integrierbar sind. Wir definieren dann

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu$$

Eine entsprechende Version von Satz 10.1.2 gilt dann auch für komplexe Funktionen.

## 10.2 Linearität und Monotonie des Integrals

**Satz 10.2.1.** Seien $f, g$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $\alpha f$ und $f+g$ ebenfalls integrierbar und es gilt

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu \tag{i}$$

$$\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \tag{ii}$$

Außerdem sind auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ integrierbar. (iii)

*Beweis.*

(i) Es gilt $(\alpha f)_+ = \alpha f_+$ und $(\alpha f)_- = \alpha f_-$, falls $\alpha \geq 0$ sowie $(\alpha f)_- = \alpha f_+$ und $(\alpha f)_+ = \alpha f_-$, falls $\alpha < 0$. Für $\alpha \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu &= \int (\alpha f)_+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)_- \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int \alpha f_- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f_- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Der Fall $\alpha < 0$ zeigt sich analog.

(ii) $f$ und $g$ lassen sich in positiv- und negativ-Teil zerlegen. Das heißt

$$f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_- = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v}$$

Mit Satz 10.1.2 folgt die Integrierbarkeit von $f+g$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int f + g \,\mathrm{d}\mu &= \int u \,\mathrm{d}\mu - \int v \,\mathrm{d}\mu = \int f_+ + g_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- + g_- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu + \int g_+ \,\mathrm{d}\mu - \int g_- \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $|\max(f, g)| \leq |f| + |g|$ sowie $|\min(f, g)| \leq |f| + |g|$. Damit folgt die Integrierbarkeit direkt aus Satz 10.1.2, da $f$ und $g$ integrierbar sind.

□

**Bemerkung 10.2.2.** Für komplexe Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ gilt Satz 10.2.1 analog (mit $\alpha \in \mathbb{C}$).

*Beweis.* Der Beweis ist eine Standardrechnung und funktioniert genauso wie der Beweis des Satzes für reelle Funktionen mit einer zusätzlichen Zerlegung in Real- und Imaginärteil. □

**Satz 10.2.3.** Seien $f, g$ integrierbar auf $X$. Dann gilt

$$f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu \tag{Monotonie}$$

sowie

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{Dreiecksungleichung}$$

*Beweis.* Monotonie: Aus $f \leq g$ folgen $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu &= \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int g_+ \,\mathrm{d}\mu - \int g_- \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung: Da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ folgt aus der Monotonie

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &\leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu \\ -\int f \,\mathrm{d}\mu = \int -f \,\mathrm{d}\mu &\leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow \left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| &\leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 10.2.4.** Sei $f : X \to \mathbb{C}$ integrierbar. Bisher haben sich alle Sätze und Argumente für reelle Funktionen ohne Probleme auch auf komplexe Funktionen übertragen. Bei Satz 10.2.3 ist hier jedoch etwas Vorsicht geboten. Wir versuchen, die Dreiecksungleichung analog zum vorherigen Beweis auch auf komplexe Funktionen zu übertragen:

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int \mathrm{Re}(f) \,\mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im}(f) \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \left|\int \mathrm{Re}(f) \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int \mathrm{Im}(f) \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \int |\mathrm{Re}(f)| \,\mathrm{d}\mu + \int |\mathrm{Im}(f)| \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)| \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Die einzige Abschätzung, die wir jetzt noch sinnvoll machen können, um wieder $|f|$ im Integral stehen zu haben, ist, sowohl Real- als auch Imaginärteil gegen den Betrag abzuschätzen

$$\leq 2 \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Der Faktor, den wir hier zusätzlich erhalten, ergibt sich aber nicht aus den Eigenschaften des komplexen Integrals, sondern entsteht nur durch unsere zu großzügigen Abschätzungen. Wir führen stattdessen ein besseres Argument mit Polarkoordinaten: *(fehlt)*

## 10.3 Der Raum $\mathcal{L}^1(\mu)$

**Definition 10.3.1.** Wir definieren $\mathcal{L}^1(\mu) \coloneqq \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ als die Menge aller $\mu$-integrierbaren reellen Funktionen auf $X$. Analog dazu ist $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ die Menge aller $\mu$-integrierbaren komplexen Funktionen. Aus Satz 10.2.1 und der zugehörigen Bemerkung folgt bereits, dass $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ Vektorräume bezüglich Addition und Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ sind.
Es gilt

$$\left|\int f \,\mathrm{d}x - \int g \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int f - g \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f - g| \,\mathrm{d}\mu$$

Damit definiert $\|f\|_1 \coloneqq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$ eine Halbnorm auf unserem Vektorraum. Dabei ist $\|f\|_1$ keine Norm, denn aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nicht-notwendigerweise, dass $f = 0$. Betrachten wir dafür das Lebesgue-Maß und die Funktion $f = 1_0$. Dann gilt $\int |f| \,\mathrm{d}\lambda^1 = \lambda^1(\{0\}) = 0$, aber $f$ ist nicht die Nullfunktion.

## 10.4 Integration über (messbaren) Teilmengen

**Definition 10.4.1.** Sei $f$ eine messbare numerische Funktion, die entweder nicht-negativ oder integrierbar bezüglich $\mu$ ist. Sei weiter $A \in \mathcal{A}$. Dann setzt man

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int f \cdot 1_A \,\mathrm{d}\mu$$

und nennt $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ das ($\mu$-)Integral von $f$ über $A$.

**Bemerkung 10.4.2.** Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $1_{A\cup B} + 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B$. Das heißt

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}x + \int_{A\cap B} f \,\mathrm{d}x = \int_A f \,\mathrm{d}x + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

Insbesondere gilt $\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$, falls $A \cap B = \varnothing$.

*Beweis.* (Übung) □

Zusätzlich übertragen sich auch Monotonie, Linearität und Dreiecksungleichung (mit entsprechenden Einschränkungen auf die Menge $A$).

**Lemma 10.4.3.**

# 11 [*] Fast überall bestehende Eigenschaften

[13. Jan] **Definition 11.1.1.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E$ eine Eigenschaft, die für $x \in X$ sinnvoll definiert ist. Dann sagen wir $E$ ist ($\mu$-)fast-sicher wahr oder $E$ gilt ($\mu$-)fast-sicher (abgekürzt ($\mu$-)fs. und im Englischen ($\mu$-)almost-everywhere bzw. ($\mu$-)ae.), falls es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ (d.h. $\mu(N) = 0$) gibt, sodass $E$ gilt für alle $x \notin N$.

**Beispiel 11.1.2.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare, numerische Funktion. Dann ist $f$ $\mu$-fast-überall endlich, falls $\exists N \in \mathcal{A}\colon \mu(N) = 0 \wedge \left(\forall x \in N^{\mathrm{C}}\colon f(x) \in \mathbb{R}\right)$.

**Beispiel 11.1.3.** Sei $f_n$ eine Folge von messbaren Funktionen. Dann gilt $f_n \to f$ $\mu$-fs. genau dann, wenn eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert, sodass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in N^{\mathrm{C}}$ und $n \to \infty$.

**Satz 11.1.4.** Sei $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ eine nicht-negative, messbare Funktion. Dann gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ $\mu$-fast-überall.

*Beweis.* „$\Rightarrow$": Wir definieren $N := \{f > 0\} \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
N &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{f > \frac{1}{n}\right\}}_{=: N_n \in \mathcal{A}} \\
\mu(N_n) &= \mu\left(\left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right) = \int 1_{\{f > \frac{1}{n}\}} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\{f > \frac{1}{n}\}} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\{f > \frac{1}{n}\}} n f \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq n \int f \,\mathrm{d}\mu = 0 \\
\Rightarrow \mu(N) &= 0
\end{aligned}
$$

„$\Leftarrow$": Angenommen $f = 0$ $\mu$-fs. Das heißt es existiert eine Nullmenge $N$, sodass $f(x) = 0\ \forall x \in N^{\mathrm{C}}$. Sei $u_m := m \cdot 1_N$, dann gilt $\forall x \in X$, dass $f(x) \leq \sup_m u_m(x) =: u(x)$.

$$
0 \leq \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int u \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m \to \infty} \int u_m \,\mathrm{d}\mu = \lim_{m \to \infty} (m\mu(N)) = 0
$$

□

**Korollar 11.1.5.** Sei $f : X \to \overline{R}$ eine beliebige meßbare, numerische Funktion und $N \in \mathcal{A}$ eine $\mu$-Nullmenge. Dann ist $f$ über $N$ integrierbar und $\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

*Beweis.* Fall 1: Ist $f \geq 0$, dann folgt die Behauptung direkt aus Satz 11.1.4.
Fall 2: Ist $f = f_+ - f_-$, dann haben wir nach Fall 1, dass

$$
\begin{aligned}
\int_N f_+ \,\mathrm{d}\mu = 0 &= \int_N f_- \,\mathrm{d}\mu \\
\Rightarrow \int_N f \,\mathrm{d}\mu &= \int_N f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_N f_- \,\mathrm{d}\mu = 0
\end{aligned}
$$

□

**Satz 11.1.6.** Seien $f, g$ messbare, numerische Funktionen auf $X$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f = g$ $\mu$-fs. Dann gilt

(i) $f, g \geq 0 \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

(ii) $f$ integrierbar $\Rightarrow$ $g$ integrierbar mit $\int g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

*Beweis.* Sei $N = \{f \neq g\}$. Dann ist $N$ eine Nullmenge.

(i) Es gilt

$$0 = \int_N f \, \mathrm{d}\mu = \int_N g \, \mathrm{d}\mu = 0$$

Sei $M \coloneqq N^{\mathrm{C}}$

$$\Rightarrow \int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int 1_M f \, \mathrm{d}\mu = \int 1_M g \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}x \int_M g \, \mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu = \int_N f \, \mathrm{d}\mu + \int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_N g \, \mathrm{d}\mu + \int_M g \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$$

(ii) Es ist $f_+ = g_+$ $\mu$-fs. sowie $f_- = g_-$ $\mu$-fs. Damit gilt nach (i), dass

$$\underbrace{\int f_+ \, \mathrm{d}\mu}_{<\infty} = \int g_+ \, \mathrm{d}\mu$$
$$\Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$$

□

**Korollar 11.1.7.** Seien $f, g$ meßbare, numerische Funktionen auf $X$ und $|f| \leq g$ $\mu$-fast-überall und $g$ integrierbar. Dann ist $f$ integrierbar (bezüglich $\mu$).

*Beweis.* Sei $\tilde{g} \coloneqq g \vee |f| = \max(g, |f|)$. Damit ist $\tilde{g} = g$ fast-überall nach Voraussetzung und $|f| \leq \tilde{g}$. Damit gilt nach Satz 11.1.6, dass

$$\int \tilde{g} \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$$
$$\Rightarrow \int |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int \tilde{g} \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu < \infty$$
$$\Rightarrow f \text{ ist integrierbar}$$

□

**Satz 11.1.8.** Sei $f$ eine integrierbare, numerische Funktion auf $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann ist $f$ $\mu$-fs. reellwertig (d.h. $f$ ist $\mu$-fs. endlich). Ferner hat die Menge $\{f \neq 0\}$ ein $\sigma$-endliches Maß.

*Beweis.* Sei $N \coloneqq \{|f| = \infty\} \in \mathcal{A}$. Dann gilt für beliebiges $\alpha \geq 0$, dass $\alpha 1_N \leq |f|$. Damit folgt außerdem

$$\alpha\mu(N) = \int_N \alpha 1_N \, \mathrm{d}\mu \leq \int_N |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \, \mathrm{d}x < \infty$$
$$\Rightarrow \mu(N) \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \text{ für } \alpha \to \infty$$
$$\Rightarrow \mu(N) = 0$$

Also ist $|f| < \infty$ $\mu$-fs. Zu zeigen bleibt die zweite Behauptung

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}}_{=:A_n}$$

$$\begin{aligned}\mu(A_n) &= \int_{A_n} 1 \,\mathrm{d}\mu = \int_{A_n} n\,|f|\,\mathrm{d}\mu \\ &= n\int_{A_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \le n\int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty \\ \Rightarrow \mu(A_n) &< \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Also hat $\{f \neq 0\}$ ein $\sigma$-endliches Maß. □

**Bemerkung 11.1.9.** Sei $A \in \mathcal{A}$ und $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(A \cap \mathcal{A})$-messbar. Wir definieren

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und genau dann integrierbar, wenn $f$ über $A$ integrierbar ist. Wir sagen $f$ ist $\mu$-fast-überall definiert, falls $\mu\left(A^{\mathrm{C}}\right) = 0$ und es gilt

$$\int \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$

# 12 [*] Konvergenzsätze

## 12.1 Monotone Konvergenz und das Lemma von Fatou

**Satz 12.1.1** (Erweiterung von der monotonen Konvergenz)**.** Sei $g \geq 0$ integrierbar und $f_n \geq -g \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n \leq f_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* Sei $h_n \coloneqq f_n - g \geq 0$ mit $h_n \leq h_{n+1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int \lim_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu &= \int (f+g) \,\mathrm{d}\mu \\ = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu &\leq \int f_n \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \quad (???)\end{aligned}$$

□

[16. Jan] **Lemma 12.1.2** (Lemma von Fatou)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ eine Folge nicht-negativer[2], messbarer numerischer Funktionen. Dann gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* Nach Def. ist

$$\begin{aligned} f \coloneqq \liminf_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{k\geq n} f_k}_{=:g_n} \\ \Rightarrow g_n &\leq g_{n+1} \\ \int f \,\mathrm{d}\mu &= \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz 9.1.8}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

**Lemma 12.1.3** (Leicht verallgemeinertes Fatou)**.** Sei $g \geq 0$ eine $\mu$-integrierbare Funktion und $(f_n)_n$ eine Folge von meßbaren numerischen Funktionen mit $f_n \geq -g$ $\mu$-fs. für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \leq f_{n+1}$. Dann sind $f_n$ und $f \coloneqq \liminf_{n\to\infty} f_n$ quasi-integrierbar (d.h. $\int (f_n)_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$) und es ist

$$-\infty < \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \infty$$

*Beweis.* Da $(f_n)_- \leq g$ und $f_- \leq g$ $\mu$-fs. folgt $f_n$ und $f$ sind quasi-integrierbar. Das heißt es existiert $N_n$ mit $\mu(N_n) = 0$ und $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $x \in {N_n}^{\mathrm{C}}$. Es sei $h_n \coloneqq f_n + g \geq 0 \Rightarrow h_n \leq h_{n+1}$ fast überall. Das heißt

$$\liminf_{n\to\infty} h_n = \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) = \left(\liminf_{n\to\infty} h_n\right) + g = f + g \geq 0$$

$$N = \bigcup_n N_n \Rightarrow \mu(N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N_n) = C$$

[2]Es reicht sogar, nur zu fordern, dass $0 \leq f_n$ $\mu$-fs.

und

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in N^{\mathrm{C}},\ n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} \mu(M) = 0 \quad f \geq -g \text{ auf } M^{\mathrm{C}} \\ \mu(M_n) = 0 \quad f_n \geq -g \text{ auf } M^{\mathrm{C}} \\ \tilde{M} = M \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \cup N \Rightarrow \mu\left(\tilde{M}\right) = 0 \end{aligned}$$

und

$$f_n \leq f_{n+1} \quad f_n \geq -g\ f \geq -g \text{ auf } M^{\mathrm{C}}$$

Redefiniere $f_n, f$ auf $f_n(x) = f(x) = 0$ für $x \in M$. Nach Lemma 12.1.2 gilt dann

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) \,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g) \,\mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

**Korollar 12.1.4** (lim sup-Version von Fatou)**.** Sei $g \geq 0$ integrierbar und $(f_n)_n$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \leq g$ $\mu$-fast-überall. Dann gilt $f := \limsup_{n\to\infty} f_n$ ist quasi-integrierbar und

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \limsup_{n\to\infty} f \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* Wende Lemma 12.1.3 auf $h_n := g - f_n$ an und $\liminf_{n\to\infty} h_n = g - \limsup_{n\to\infty} f_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \liminf_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf \int h_n \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow \int g \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu &\leq \int g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

## 12.2 Majorante Konvergenz (Lebesgue)

**Satz 12.2.1.** Seien $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $\mu$-fast-überall. und es gebe eine $\mu$-integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit $|f_n| \leq g$ $\mu$-fast-überall. Dann sind $f_n, f$ integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{1'}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0 \tag{2}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \int f_n\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int (f-f_n)\,\mathrm{d}\mu\right|\\ &\le \int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu \to 0 \text{ für } n\to\infty\\ \left|\int |f|\,\mathrm{d}\mu - \int |f_n|\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int (|f|-|f_n|)\,\mathrm{d}\mu\right|\\ &\le \int |f|-|f_n|\,\mathrm{d}\mu \le \int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Das heißt es gelten (1) und (1'), sofern (2) gilt. Wir beweisen zusätzlich noch (2)

$$0 \le \int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu$$

$$0 \le h_n = |f-f_n| \le |f| + |f_n| \le |f| + |g| \le g + g = 2g \ \mu\text{-fs.}$$

Nach Korollar 12.1.4 gilt dann

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}\mu &\le \int \limsup_{n\to\infty} h_n\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int \limsup_{n\to\infty} |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu = 0 \ \mu\text{-fs.}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu = 0$$ □

**Bemerkung 12.2.2.** Der vorherigen Satz gilt auch für komplexwertige Funktionen.

[17. Jan] **Satz 12.2.3.** Seien $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) integrierbar mit $f_n \to f$ $\mu$-fs. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu = 0$$

*Beweis.* „$\Leftarrow$“:

$$\begin{aligned}\left|\int |f|\,\mathrm{d}\mu - \int |f_n|\,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int |f|-|f_n|\,\mathrm{d}\mu\right|\\ &\le \int ||f|-|f_n||\,\mathrm{d}\mu \le \int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu \to 0\end{aligned}$$

„$\Rightarrow$ “: Sei $g_n \coloneqq |f_n| + |f| - |f-f_n| \ge 0$ $\mu$-fs. Dann folgt mit Lemma 12.1.2

$$\begin{aligned}\int \liminf_{n\to\infty} g_n\,\mathrm{d}\mu &\le \liminf_{n\to\infty}\int g_n\,\mathrm{d}\mu\\ \liminf_{n\to\infty} g_n &= 2\,|f| - 0 = 2\,|f|\\ \int g_n\,\mathrm{d}\mu &= \int |f_n|\,\mathrm{d}\mu + \int |f|\,\mathrm{d}\mu - \int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu\\ \Rightarrow \liminf_{n\to\infty}\int g_n\,\mathrm{d}\mu &= 2\int |f|\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty}\int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu\\ \Rightarrow 0 &\le \limsup_{n\to\infty}\int |f-f_n|\,\mathrm{d}\mu \le 0\end{aligned}$$ □

**Satz 12.2.4.** Seien $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $C$) meßbar und es gebe $g \geq 0$ $\mu$-integrierbar mit $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right| \leq g$ $\mu$-fs. Ferner existiere $f \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{L\to\infty} \sum_{n=1}^{L} f_n$ $\mu$-fs. Dann sind $f_n$ und $f$ integrierbar und

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.* (Übung) $\square$

# 13 [*] Anwendung der Konvergenzsätze

## 13.1 Parameter-abhängige Integrale

**Satz 13.1.1.** Sei $T$ ein metrischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : T \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion mit

(i) $x \mapsto f(t,x)$ ist $\mu$-integrierbar $\forall t \in T$

(ii) $t \mapsto f(t,x)$ ist stetig in $t_0$ für $\mu$-fast-alle $x \in X$

(iii) Es existiert eine $\mu$-integrierbare Funktion $g \geq 0$, sodass $|f(t,\cdot)| \leq g$ $\mu$-fs. $\forall t \in T$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int f(t,x)\mu(\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

ist stetig in $t_0$.

*Beweis.* Zu zeigen: Sei $(t_n)_n \subseteq T$ mit $t_n \to t_0$, dann muss folgen $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$.
Wir haben Nullmenge $N_1$, sodass $f(t_n,x) \to f(t_0,x)$ für $x \in {N_1}^{\mathrm{C}}$ und wir haben Nullmenge $M_n$, sodass $|f(t_n,x)| \leq g(x)$ $\forall x \in {M_n}^{\mathrm{C}}$. Das heißt für $M :== \bigcup_n M_n$ gilt $|f(t_n,x)| \leq g(x)$ $\forall x \in M^{\mathrm{C}}$. Wir definieren $\tilde{N} := M \cup N$ auch Nullmenge und beide obigen Folgerungen gelten für alle $n \in \mathbb{N}, x \in \tilde{N}^{\mathrm{C}}$. Das heißt nach Satz 12.2.1 folgt mit $f_n := f(t_n,\cdot)$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(t_0,x)\mu(\mathrm{d}x) = \varphi(t_0) = \lim_{n\to\infty} \int f(t_n,x)\mu(\mathrm{d}x) \qquad \square$$

**Lemma 13.1.2** (Differentiationslemma)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-ausgeartetes Intervall (das heißt weder leer noch einpunktig) und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion mit

(i) $f(t,\cdot)$ ist $\mu$-integrierbar $\forall t \in I$

(ii) $t \mapsto f(t,x)$ ist differenzierbar auf $I$ für alle $x \in X$

(iii) Es existiert eine $\mu$-integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit $|f'(t,\cdot)| \leq g$ $\mu$-fs. $\forall t \in I$ (das heißt es existiert *eine* Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $|f'(t,x)| \leq g(x)$ $\forall x \in N^{\mathrm{C}}, t \in I$)

Dann ist $\varphi(t) := \int f(t,x)\mu(\mathrm{d}x)$ differenzierbar auf $I$ und $\forall t \in I$ ist $f'(t,\cdot)$ $\mu$-integrierbar mit

$$\varphi'(t) = \int f'(t,x)\mu(\mathrm{d}x)$$

*Beweis.* Sei $t_0 \in I$ beliebig und $(t_n)_n \subseteq I$ eine Folge mit $t_n \to t_0$, wobei $t_n \neq t_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann soll gelten

$$h_n(x) := \frac{f(t_n,x) - f(t_0,x)}{t_n - t_0} \to f'(t_0,x)$$

Nach Voraussetzung ist $h_n$ $\mu$-integrierbar.
Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0} = f'(\xi_t,x)$$

für ein $\xi_t$ zwischen $t_0$ und $t$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0}\right| = |f'(\xi_{t_n},x)| \leq g(x)$$

Nach Satz 12.2.1 folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} h_n \,\mathrm{d}\mu = \int f'(t_0,x)\,\mathrm{d}\mu$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ ist differenzierbar in } t_0 \text{ und } \varphi'(t_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(t_n)-\varphi(t_0)}{t_n-t_0} = \int f'(t_0,x)\mu(\mathrm{d}x) \qquad \square$$

**Korollar 13.1.3** (Mehrdimensionaler Fall)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) mit

(i) $f(t,\cdot)$ ist $\mu$-integrierbar $\forall t \in U$

(ii) $t \mapsto f(t,x)$ ist auf $U$ partiell differenzierbar $\mu$-fs. in der Variablen $t_j$ $\forall x \in X$

(iii) Es existiert eine $\mu$-integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\right| \leq g(x) \ \mu\text{-fs. für alle } x \in X \text{ und } t \in U$$

Dann ist $\varphi(t) := \int f(t,x)\mu(\mathrm{d}x)$ partiell differenzierbar bezüglich $t_j$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\mu(\mathrm{d}x)$$

*Beweis.* Halte alle Variablen bis auf $t_j$ und $x$ fest und wende Lemma 13.1.2 an. $\square$

## 13.2 Vergleich des Riemann- mit dem Lebesgue-Integral

**Satz 13.2.1.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ differenzierbar und $f'$ beschränkt. Dann ist $f'$ Lebesgue-integrierbar auf $[a,b]$ und

$$\int_a^b f' \,\mathrm{d}\lambda = f(b) - f(a)$$

**Warnung:** $f'$ braucht hierfür nicht Riemann-integrierbar zu sein.

[20. Jan] *Beweis.* (Übung) $\square$

**Satz 13.2.2.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar. Ist $f$ Riemann-integrierbar (also auch beschränkt), so ist $f$ Lebesgue-integrierbar mit

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda$$

*Beweis.* (Übung) $\square$

**Korollar 13.2.3.** Sei $f \geq 0$ Borel-meßbar auf $(a,b)$ und Riemann-integrierbar über den kompakten Teilintervallen von $[a,b)$. Dann ist $f$ genau dann Lebesgue-integrierbar über $(a,b)$, wenn das uneigentliche Riemann-integral

$$\lim_{\tilde{a}\searrow a,\ \tilde{b}\nearrow b} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \,\mathrm{d}x$$

existiert und das Riemann-Integral und Lebesgue-Integral gleich sind.
**Warnung**:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

existiert, aber ist nicht Lebesgue-integrierbar über $[0,\infty)$, denn

$$\int_1^\infty \frac{(\sin(x))_+}{x}\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{d}x) = \infty$$
$$\int_1^\infty \frac{(\sin(x))_-}{x}\,\mathrm{d}\lambda(\mathrm{d}x) = \infty$$

*Beweis.* (Übung) □

## 13.3 Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\lambda(\mathrm{d}x)$

**Anwendung 13.3.1.** Wir setzen

$$f(t,x) := \frac{e^{-t\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R},\ t\geq 0)$$

und wählen als Ansatz

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &\geq 2ab \qquad (a,b\geq 0)\\
\Rightarrow 1+x^2 &\geq 2\,|x| \geq |x|\\
\Rightarrow e^{-t\left(1+x^2\right)} &\leq e^{-t|x|}\\
\Rightarrow 0 \leq f(t,x) &\leq e^{-t|x|}\\
0 \leq \int_a^b f(t,x)\lambda(\mathrm{d}x) &\leq \int_0^n e^{-t|x|}\lambda(\mathrm{d}x)\\
&= \int_0^n e^{-t|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\left[-e^{-tx}\right]_0^n\\
&= \frac{1}{t}\left[1-e^{-tn}\right] \to \frac{1}{t}\\
\Rightarrow \int_0^\infty f(t,x)\lambda(\mathrm{d}x) &\text{ existiert für } t>0
\end{aligned}$$

Genauso zeigt sich

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(t,x)\lambda(\mathrm{d}x) \text{ existiert für } t>0$$

Wir betrachten noch den Fall $t = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(0,x) &= \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow f \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } \mathbb{R} \text{ für } t = 0 \end{aligned}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ fest, dann ist $0 \leq t \mapsto f(t,x)$ stetig und $0 \leq f(t,x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ ist eine integrierbare Majorante

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\lambda(\mathrm{d}x) \text{ ist stetig über } t \geq 0$$

und $f(t,x)$ ist differenzierbar für $t > 0$. Für $t_0 > 0$, $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) &= \frac{-1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)e^{-t\left(1+x^2\right)} \\ &= e^{-t\left(1+x^2\right)} \\ |\partial_t f(t,x)| &= e^{-t\left(1+x^2\right)} \leq e^{-t|x|} \leq e^{-t_0|x|} \text{ ist Majorante} \end{aligned}$$

Diffbarkeit: Für $t > t_0$ ist $\varphi$ diff.-bar mit

$$\varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\left(1+x^2\right)}\lambda(\mathrm{d}x)$$

Da $t_0 > 0$ beliebig, ist $\varphi$ diffbar $\forall t > 0$. $t > 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(1+x^2\right)}\lambda(\mathrm{d}x) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{\infty} e^{-t\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Substitution $x = t^{-\frac{1}{2}}y$

$$\begin{aligned} \int_{-n}^{n} e^{-t\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x &= t^{-1\frac{1}{2}}\int_{-n\sqrt{t}}^{n\sqrt{t}} e^{-t\left(1+t^{-1}y\right)}\,\mathrm{d}y \\ &= t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\int_{-n\sqrt{t}}^{n\sqrt{t}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \to t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &=: -Gt^{-\frac{1}{2}}e^{-t} \\ \varphi'(t) &= -Gt^{-\frac{1}{2}}e^{-t} \end{aligned}$$

Für $0 < \alpha < s$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(\alpha) &= \int_{\alpha}^{s} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -G\int_{\alpha}^{s} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Substitution $t = r^2$, $\mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r$

$$\int_{\alpha}^{s} e^{t}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{s}} e^{-r^2}t^{-1}2r\,\mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(s) - \varphi(\alpha) &= -2G \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{s}} e^{-r^2} \,\mathrm{d}r \\
\Rightarrow \varphi(s) - \varphi(0) &= \lim_{\alpha \searrow 0} (\varphi(s) - \varphi(\alpha)) \\
&= -2G \lim_{\alpha \searrow 0} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{s}} e^{-t^2} \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= -2G \int_0^{\sqrt{s}} e^{-t^2} \lambda(\mathrm{d}t) \\
\Rightarrow \lim_{s \to \infty} (\varphi(s) - \varphi(0)) &= -2G \lim_{s \to \infty} \int_0^{\sqrt{s}} e^{-t^2} \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= -2G \int_0^{\infty} e^{-t^2} \lambda(\mathrm{d}x) = -G \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} \lambda(\mathrm{d}r) = -G^2 \\
\Rightarrow \lim_{s \to \infty} \varphi(s) &= 0 \\
\Rightarrow t\varphi(0) &= tG^2 \\
0 \le \varphi(s) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-s\left(1+x^2\right)}}{1+x^2} \lambda(\mathrm{d}x) \\
\int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \arctan(n) - \arctan(-n) = 2\arctan(n) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \lambda(\mathrm{d}x) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

# 14 [*] Die $\mathcal{L}^p$-Räume

## 14.1 Definitino der $\mathcal{L}^p$-Räume

Sei $p \geq 1$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) meßbar sowie $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann ist auch $|f|$ meßbar. Das heißt $|f|^p$ ist meßbar und $\{|f|^p > \alpha\} = \left\{|f| > \alpha^{\frac{1}{p}}\right\}$ für $\alpha \geq 0$.

**Notation 14.1.1.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir schreiben

$$N_p(f) \coloneqq \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Es gilt $0 \leq N_p(f) \leq \infty$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $N_p(\alpha f) = |\alpha| \, N_p(f)$

**Satz 14.1.2** (Hölder-Ungleichung)**.** Sei $p > 1$ und $1 < q < \infty$ dual zu $p$ (das heißt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Dann gilt für zwei meßbare numerische Funktionen $f, g$ auf $X$

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g)$$

*Beweis.* Benutzt die Ungleichung von Young. Für $a, b \geq 0$ folgt $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

*Beweis von der Ungleichung von Young.* Sei $G(a) \coloneqq \frac{1}{p}a^p$. Wir wollen eine Funktion $F$, sodass $ab \leq G(a) + F(b)$ $\forall a, b \geq 0$. Das ist äquivalent zu

$$F(b) \geq ab - G(a) \quad \forall a \geq 0, b \geq 0 \text{ fest}$$

Die beste Wahl von $F$ ist die kleinste obere Schranke. Das heißt

$$\begin{aligned}
F(b) &= \sup_{a \geq 0} (ab - G(a)) \\
\partial_a(ab - G(a)) &= b - G'(a) = b - a^{p-1} \\
\Rightarrow F(b) &= b \cdot b^{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}\left(b^{\frac{1}{q-1}}\right)^p \\
&= b^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{q} b^q
\end{aligned}$$

□

[23. Jan] Wir setzen $\sigma = N_p(f)$ und $\tau = N_q(g)$. Im Fall $\tau = 0$ folgt direkt, dass $N_1(fg) = 0$. In diesem Fall ist die Ungleichung erfüllt. Es sei also O.B.d.A. $\sigma > 0$ und $\tau < \infty$ (da die Ungleichung sonst trivialerweise erfüllt ist). Sei $\tilde{f} = \frac{f}{\tau}$, $\tilde{g} = \frac{g}{\sigma}$. Dann ist $N_p\left(\tilde{f}\right) = N_q(\tilde{g}) = 1$. Wir müsen also noch zeigen, dass $N_1\left(\tilde{f}\tilde{g}\right) \leq 1$ (Skalierungstrick). Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f}\tilde{g}\right| &= \left|\tilde{f}\right| |\tilde{g}| \leq \frac{1}{p}\left|\tilde{f}\right|^p + \frac{1}{q}|\tilde{g}|^q \\
\Rightarrow N_1\left(\tilde{f}\tilde{g}\right) &= \int_X \left|\tilde{f}\tilde{g}\right| \mathrm{d}\mu \leq \int_X \left(\frac{1}{p}\left|\tilde{f}\right|^p + \frac{1}{q}|\tilde{g}|^q\right) \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{p}\int_X \left|\tilde{f}\right|^p \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_X |\tilde{g}|^q \,\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{p} N_p\left(\tilde{f}\right)^p + \frac{1}{q} N_q(\tilde{g})^q = \frac{1}{p}1^p + \frac{1}{q}1^q = 1
\end{aligned}$$

□

**Satz 14.1.3.** Es seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) zwei numerische Funktionen, für die $f + g$ definiert ist und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &\le (|f|+|g|)^p \le (2\,(|f|\vee|g|))^p \\
&= 2^p\,(|f|\vee|g|) = 2^p\,(|f|^p\vee|g|^p) \le 2^p\,(|f|^p+|g|^p) \\
\Rightarrow N_p(f+g)^p &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le 2^p\,(N_p(f)^p + N_p(g)^p)
\end{aligned}$$

Ist $N_p(f), N_p(g) < \infty$, folgt $N_p(f+g) < \infty$

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &= |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1} \\
\Rightarrow N_p(f+g)^p &= \int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int |f|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Es sei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann folgt nach Hölder

$$\begin{aligned}
&\le \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= N_p(f)N_p(f+g)^{\frac{p}{q}} + N_p(g)N_p(f+g)^{\frac{p}{q}} = (N_p(f)+N_p(g))\,N_p(f+g)^{p-1} \\
\Rightarrow N_p(f+g) &= N_p(f+g)^p N_p(f+g)^{1-p} \le N_p(f)+N_p(g)
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 14.1.4.** Ist $N_p(f) < \infty$ und $N_p(g) < \infty$, so ist $f, g$ fast-überall reellwertig und $f+g$ fast-überall definiert.

**Definition 14.1.5.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) meßbar. Dann heißt $f$ $p$-fach integrierbar für $1 \le p < \infty$, wenn $N_p(f) < \infty$. Wir definieren

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{\text{messbare Funktion } f : X \to \overline{\mathbb{R}} : N_p(f) < \infty\right\}$$

Analog schreiben wir $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ für den Raum solcher komplexwertiger Funktionen. Die definierten Räume sind Vektorräume. Zusätzlich gilt Homogenität und Dreiecksungleichung für $N_p$. Das heißt $N_p$ ist bereits eine Halbnorm. Aber $N_p(f) \Rightarrow f = 0$ gilt nur $\mu$-fast-überall. Das kann man beheben, indem man Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^p$-Funktionen definiert, die $\mu$-fast-überall gleich sind.

**Satz 14.1.6.** Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt $\alpha f, f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sowie $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

*Beweis.* (Übung) □

**Korollar 14.1.7.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare, numerische Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{L}^p$ genau dann, wenn $f_+, f_- \in \mathcal{L}^p$.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: $f_+ = f \vee 0$, $f_- = (-f) \vee 0$.
„$\Leftarrow$“: Sind $f_\pm \in \mathcal{L}^p$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f &= f_+ + (-f_-) \\
N_p(f) &\le N_p(f_+) + N_p(f_-) < \infty
\end{aligned}$$

□

**Satz 14.1.8.** Sei $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$ sowie $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ mit $1 < p < \infty$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1$.

*Beweis.* Hölder! □

**Bemerkung 14.1.9.** Man schreibt auch häufig $\|f\|_p = N_p(f)$.

**Korollar 14.1.10.** Sei $\mu(X) < \infty$. Dann folgt aus $f \in \mathcal{L}^p(\mu) \Rightarrow \mathcal{L}^1(\mu)$ (für $1 \leq p < \infty$).

*Beweis.*

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1 \cdot |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Nach Hölder

$$\leq N_p(f) N_q(1) = (\mu(X))^{\frac{1}{q}} N_p(f)$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow N_1(f) \leq (\mu(x))^{\frac{p-1}{p}} N_p(f) \qquad \square$$

**Satz 14.1.11.** Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine $p$-fach integrierbare Funktion ($f \in \mathcal{L}^p(\mu)$). $g$ sei fast-überall beschränkt, das heißt es existiert ein $\alpha > 0$ und eine Nullmenge $N$, sodass $|g(x)| \leq \alpha \ \forall x \in N^{\mathrm{C}}$. Dann folgt $gf$ ist $p$-fach integrierbar und $N_p(fg) \leq \alpha N_p(f)$.

*Beweis.* Es gilt $|fg| = |f| \, |g| \leq |f| \, \alpha$ $\mu$-fast-überall

$$\Rightarrow N_p(fg)^p = \int |fg|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int \alpha^p \, |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \alpha^p \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \alpha^p N_p(f)^p \qquad \square$$

**Notation 14.1.12.**

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \left\{ g : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} : \exists M_g \geq 0, N_g \in \mathcal{A} : \mu(N_g) = 0 \text{ sodass } |g(x)| \leq M_g \ \forall x \in {N_g}^{\mathrm{C}} \right\}$$

**Definition 14.1.13.** Wir definieren $N_\infty(g) := \inf\{M \geq 0 : |g| \leq M \ \mu\text{-fast-überall}\}$. Es gilt

$$N_1(fg) \leq N_1(f) N_\infty(g)$$

Auch

$$N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

**Konvention 14.1.14.** Wenn wir die $\mathcal{L}^p$-Räume betrachten, beschränken wir uns auf den Fall $1 \leq p < \infty$, da für $p < 1$ Eigenschaften wie die Dreiecksungleichung verloren gehen und die resultierenden Räume sich daher von denen mit $p \geq 1$ unterscheiden.

## 14.2 Konvergenzsätze

Sei $1 \leq p < \infty$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. $N_p$ ist auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine Halbnorm. Wir können also auch einen Abstandsbegriff definieren:

$$d_p(f,g) := N_p(f-g) = \|f-g\|_p$$

Es gilt $d_p(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$ $\mu$-fast-überall. Wir definieren außerdem Folgen $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p(\mu)$. Wir sagen $f_n$ konvergiert im $p$-ten Mittel gegen $f$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n - f) = 0$$

Man sagt auch $f_n$ konvergiert in $\mathcal{L}^p$ gegen $f$. Wir sagen außerdem, dass $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon N_p(f_n - f_m) < \varepsilon \quad \forall m,n \geq N$$

[24. Jan] **Satz 14.2.1.** Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$ eine Folge für $1 \leq p < \infty$ mit $f_n \to f$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \to \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\int_A |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int 1_A \,|f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int |1_A f_n|^p \,\mathrm{d}\mu = N_p(1_A f_n) \\ \Rightarrow\ |N_p(1_A f_n) - N_p(1_A f)| &\leq N_p(1_A \,(f_n - f)) \\ &\leq N_p(f_n - f) \to 0\end{aligned}$$

□

**Satz 14.2.2** (Riesz)**.** Konvergiere $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p$ $\mu$-fast-überall gegen $f \in \mathcal{L}^p$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$$

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: siehe oben.
„$\Leftarrow$“: Schritt 1

$$(\alpha + \beta)^p \leq (2\,(\alpha \vee \beta))^p = 2^p\,(\alpha^p \vee \beta^p) \leq 2^p\,(\alpha^p + \beta^p) \qquad (\alpha, \beta \geq 0)$$

Schritt 2: Es gilt

$$\begin{aligned}|\alpha - \beta|^p &\leq ||\alpha| + |\beta||^p \leq 2^p\,(|\alpha|^p + |\beta|^p) \\ g_n &:= 2^p\,(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \\ \lim_{n\to\infty} g_n &= 2^{p+1}\,|f|^p\end{aligned}$$

Nach Fatou gilt

$$\begin{aligned}2^{p+1} \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} f g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \\ &= 2^p \left(\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu + \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) - \limsup_{n\to\infty} \left(\int |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\ &\quad - 2^{p+1} \int |f|^p \,\mathrm{d}x - \limsup_{n\to\infty}\,(\dots) \\ \Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu &= 0\end{aligned}$$

□

**Lemma 14.2.3.** Sei $(f_n)_n \subseteq \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n)$$

*Beweis.* Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
N_p\left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right) &\le \sum_{n=1}^{k} N_p(f_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) \\
S_k &:= \sum_{n=1}^{k} f_n \text{ monoton wachsend} \\
\lim_{k\to\infty} N_p(S_k)^p &= \lim_{k\to\infty} \int |S_k|^p \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{k\to\infty} |S_k|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right|^p \mathrm{d}x = N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^p
\end{aligned}
$$

□

**Satz 14.2.4** (Maj. Konvergenz in $\mathcal{L}^p$)**.** Sei $(f_n)_n$ eine Folge $\mu$-fast-überall definierter Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Es existiert ein $\mathcal{L}^p \ni g \geq 0$ mit $|f_n| \leq g$ $\mu$-fast-überall $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} |f_n|$ existiert $\mu$-fast-überall.
Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, sodass $f_n \to f$ $\mu$-fast-überall und $f_n$ konvergiert gegen $f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

*Beweis.* Entsprechend der Voraussetzungen existiert eine Nullmenge $N_1$, sodass $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in {N_1}^{\mathrm{C}}$. Wir definieren außerdem $f(x) = 0$ $\forall x \in N_1$. Das heißt $|f| \leq g$ $\mu$-fast-überall. Damit können wir folgern

$$
\begin{aligned}
&N_p(f) \le N_p(g) < \infty \\
&\Rightarrow f \in \mathcal{L}^p \\
&\quad h_n := |f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le (g + |f|)^p \le 2^p\left(g^p + |f|^p\right)
\end{aligned}
$$

$\mu$-fast-sicher. Das heißt es ist zu zeigen $\int h_n \,\mathrm{d}\mu \to 0$

$$
\begin{aligned}
g_n &:= 2^p\left(g^p + |f|^p\right) - h_n = 2^p\left(g^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p \\
\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty} g_n = 2^p\left(g^p + |f|^p\right) \ \mu\text{-fas-überall}
\end{aligned}
$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
\int 2^p\left(g^p + |f|^p\right) \mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int 2^p\left(g^p + |f|^p\right) \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \\
\Rightarrow 0 &\le \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \le 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f)^p &= 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) &= 0
\end{aligned}
$$

□

**Satz 14.2.5** (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p$)**.** Sei $1 \leq p < \infty$. Jede Cauchy-Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert gegen ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ im $p$-ten Mittel und eine geordnete Teilfolge $(f_{n_k})_k$ konvergiert $\mu$-fast-überall gegen $f$. Das gilt auch für den Fall $p = \infty$.

*Beweis.* Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge im $\mathcal{L}^p$. Dann gilt

$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} N_p(f_m - f_n) = 0 \tag{1}
$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass eine Teilfolge $(f_{n_k})$ existiert, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_{n_{k-1}} - f_{n_k}) < \infty$. Nach (1) gilt

$$\begin{aligned}
&\exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \sup_{m \geq n_1} N_p(f_m - f_{n_1}) \leq \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\ &\exists n_2 \in \mathbb{N}\colon \sup_{m \geq n_2} N_p(f_m - f_{n_2}) \leq \frac{1}{2^2} \\
&\vdots \\
\Rightarrow\ &\exists n_k \in \mathbb{N}\colon \sup_{m \geq n_k} N_p(f_m - f_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) &\leq \sup_{m \geq n_k} N_p(f_m - f_{n_k}) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_{n_k} - f_{n_k}) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1
\end{aligned}$$

Schritt 2: Definiere

$$\begin{aligned}
g_k &\coloneqq f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \\
g &\coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \\
f_{n_{k+1}} &= g_k + f_{n_k} = g_k + g_{k-1} + f_{n_{k-1}} \\
&= g_k + g_{k-1} + \ldots + g_1 + f_{n_1} \\
&\leq N_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_p(|g_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \\
\Rightarrow N_p(g) &\leq 1 \\
&\Rightarrow g \in \mathcal{L}^p \\
&\Rightarrow g \text{ ist } \mu\text{-fast-überall endlich} \\
\Rightarrow \exists \text{Nullmenge } M\colon \sum_{n=1}^{\infty} |g_k(x)| &= g(x) < \infty \quad \forall x \in M^{\mathrm{C}} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) &\text{ konvergiert} \quad \forall x \in M^{\mathrm{C}} \\
\Rightarrow \lim_{L \to \infty} \sum_{k=1}^{L} g_k(x) &\text{ existiert} \\
\Rightarrow \lim_{L \to \infty} f_{n_{L+1}}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) + f_{n_1}(x) \text{ existiert} \quad \forall x \in M^{\mathrm{C}} \\
\Rightarrow (f_{n_k})_k &\text{ konvergiert } \mu\text{-fast-überall}
\end{aligned}$$

Schritt 3: Definiere $f(x) \coloneqq \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$ existiert für $\mu$-fast-alle $x \in X$. Frage: Ist $f \in \mathcal{L}^p$?

$\square$