

Skript zur Vorlesung
Analysis IV
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Erinnerungen/Rückblick	3
1.1	Komplexe Zahlen \mathbb{C}	3
1.2	Konvergenz	3
1.3	Ein paar Definitionen	4
2	[*] Analytische Polynome	5
3	[*] Stenographische Projektion	7
4	[*] Komplexe Differenzierbarkeit	8
4.1	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung	8
4.2	Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$	12

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** (\mathbb{C} ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass \mathbb{C} so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i := (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene*.

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a + bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\bar{z} := a - bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil). Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\operatorname{Re}(z) = a$ sowie $\operatorname{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für \mathbb{C}). Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z||w|$.

Beweis. (fehlt)

□

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz). Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen). Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von \mathbb{C}). Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3)

□

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n := \sum_{j=1}^n z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \rightarrow 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss). Wir definieren die (offene) ε -Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε -Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \exists r > 0 : D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^C := \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^C offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : S \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \wedge S^C \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] := \{(1 - \Theta)z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w . Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt z_1, \dots, z_n sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x, y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x, y) = \sum_{n=0}^L \alpha_n (x + iy)^n =: f(x + iy)$ für passende α_n . Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x, y) = (x + iy)^2$.

(ii) $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^N a_k (x + iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_0 &= \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = u(x, y) + v(x, y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &:= \partial_x f = \partial_x u + i \partial_x v = u_x + i v_x \\ f_y &:= \partial_y f = \partial_y u + i \partial_y v = u_y + i v_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x, y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i \partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „ \Rightarrow “

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{n=0}^N a_n (x + iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_x (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n (x + iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_y (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n i (x + iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0 \leq r \leq N_1 \\ 0 \leq s \leq N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=: G_n(x, y)} \\
 &\Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n G_n(x, y)
 \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n . Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x, y) = \sum_{t=1}^n t \alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

||

$$i\partial_x G_n(x, y) = i \left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \alpha_t x^{n-t-1} y^t \right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \dots + nc_n y^{n-1} = i \left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-2} y + \dots + c_{n-1} y^{n-1} \right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned}
 c_1 &= inc_0 = i \binom{n}{1} c_0 \\
 c_2 &= i^2 \frac{n(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0
 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 G_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\
 &= c_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k = c_n (x + iy)^n \\
 &\Rightarrow P(x, y) = \sum_{n=0}^N G_n(x, y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{n,0} (x + iy)^n
 \end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. □

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\Sigma := \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$ die Sphäre im \mathbb{R}^3 mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2})$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ, η, ζ) ist.
Sei

$$\lambda((\xi, \eta, \zeta) - (0, 0, 1)) = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\xi &= x, \quad \lambda\eta = y, \quad \lambda(\zeta - 1) = -1 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \zeta} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda = \frac{y}{\eta} \\ &\Rightarrow x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{aligned}$$

Sind x, y gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n \rightarrow \infty$, falls $|z_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $f(z_n) \rightarrow \infty$, falls $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in Σ und \mathbb{C}). Ein Kreis in Σ ist ein Schnitt von Σ mit einer Ebene im \mathbb{R}^3 der Form $A\xi + B\eta + C\xi = D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned} D &= A \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + B \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + C \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow D = (C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By \end{aligned}$$

FALL 1: $C = D$. Dann ist $Ax + By = D$ eine Linie in \mathbb{C} .

FALL 2: $C \neq D \Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (Sinngemäß: Kreise in Σ werden stenographisch auf Geraden projiziert.)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0 , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in \mathbb{C} gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung).

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h , die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze $h = it, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + iy_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v , dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) &= 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) &= 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Allerdings gilt

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \dots = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexe Funktionen). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1). \square

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen). Sei $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ein Polynom in \mathbb{C} . Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z + h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow (z + h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z + h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1} \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen). Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann). Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch interpretieren als Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + Ah + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0} \cdot h \quad \left(h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)$$

Wir spalten f zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\rightarrow f_x(z) \text{ für } h \rightarrow 0 \\ u(z) &= u(x, y) \quad v(z) = v(x, y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y) + i(v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_1\eta}_{=:z_1}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(\underbrace{x+\Theta_2\xi, y}_{=:z_3}) \quad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_3\eta}_{=:z_2}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(\underbrace{x+\Theta_4\xi, y}_{=:z_4}) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} + i \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z_1) + iv_y(z_2)) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z_3) + iv_x(z_4)) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_y(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z))}_{\rightarrow 0} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\xi}{\xi} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\eta}{i\eta} \right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \rightarrow 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. \square

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2 + y^2 = z\bar{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z , falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z . f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S .

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D , so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D . Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D . Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D . Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u + iv$ konstant. \square

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D . Ist $|f|$ konstant auf D , so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x (u^2 + v^2) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y (u^2 + v^2) = 2uu_y + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} 0 = uu_x - vv_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 0 = u^2 u_x - uvv_y \\ 0 = uvu_y + v^2 u_x \end{cases} \\ \Rightarrow & 0 = (u^2 + v^2) u_x = C \cdot u_x \\ \Rightarrow & u_x = 0 \\ \Rightarrow & v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. \square

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \frac{d}{dz} e^z &= e^z \\
 e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
 &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\
 \overline{e^z} &= e^{\bar{z}} \\
 \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\
 \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})
 \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
 \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\
 \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})
 \end{aligned}$$