

Skript zur Vorlesung  
Analysis IV  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>[*] Erinnerungen/Rückblick</b>	<b>3</b>
1.1	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ . . . . .	3
1.2	Konvergenz . . . . .	3
1.3	Ein paar Definitionen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>[*] Analytische Polynome</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>[*] Stenographische Projektion</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>[*] Komplexe Differenzierbarkeit</b>	<b>8</b>
4.1	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung . . . . .	8
4.2	Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>[*] Linienintegrale</b>	<b>13</b>
5.1	Definition und Berechnung . . . . .	13
5.2	Integrale über geschlossenen Kurven . . . . .	15
<b>6</b>	<b>[*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>[*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen</b>	<b>19</b>
7.1	Vorbereitung . . . . .	19
7.2	Lokale Potenzreihenentwicklung . . . . .	20
7.3	Liouville . . . . .	22
<b>8</b>	<b>[*] Eindeutigkeit, Mittelwert &amp; Max, Modulus-Sätze</b>	<b>24</b>
8.1	Formulierung . . . . .	24
8.2	Anwendungen . . . . .	25
<b>9</b>	<b>[*] Eine Umkehrung von Cauchy: Morera</b>	<b>29</b>
9.1	Satz von Morera . . . . .	29
9.2	Reflexionsprinzip von Schwarz . . . . .	29
<b>10</b>	<b>[*] Einfach zusammenhängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz</b>	<b>32</b>

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 [\*] Erinnerungen/Rückblick

## 1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ( $\mathbb{C}$  ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass  $\mathbb{C}$  so die Körperaxiome erfüllt, wobei  $(0, 0)$  bzw.  $(1, 0)$  die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem  $i := (0, 1)$ . Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene*.

**Bemerkung 1.1.2.** Sei  $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dann gilt  $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$ . Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form  $a + bi$  schreiben.

**Definition 1.1.3** (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder  $z = a + bi$ . Dann ist die komplexe Konjugation von  $z$  definiert durch  $\bar{z} := a - bi$ . Damit ergibt sich die multiplikative Inverse  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse  $(-a, -b)$  ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

**Definition 1.1.4** (Real- und Komplexteil). Sei  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann schreiben wir  $\operatorname{Re}(z) = a$  sowie  $\operatorname{Im}(z) = b$ . Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

**Satz 1.1.5** (Cauchy-Schwarz für  $\mathbb{C}$ ). Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann gilt  $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z||w|$ .

*Beweis.* (fehlt)

□

## 1.2 Konvergenz

**Definition 1.2.1** (Konvergenz). Sei  $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$  eine Folge. Dann konvergiert diese gegen  $z$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  oder  $z_n \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$ . Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

**Definition 1.2.2** (Cauchy-Folgen). Wir nennen  $(z_n)_n$  eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

**Satz 1.2.3** (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ ). Die Folge  $(z_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(z_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist.

*Beweis.* (Nicht hier, siehe Ana 3)

□

**Bemerkung 1.2.4** (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen  $(s_n)_n$ ,  $s_n := \sum_{j=1}^n z_j$  konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von  $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$  ist dabei, dass  $z_n \rightarrow 0$ . Hinreichend ist z.B., dass  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

### 1.3 Ein paar Definitionen

**Definition 1.3.1** (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss). Wir definieren die (offene)  $\varepsilon$ -Scheibe um  $z$

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den  $\varepsilon$ -Kreis um  $z$

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \exists r > 0 : D_r(z) \subseteq S$$

Es sei  $S^C := \mathbb{C} \setminus S$ . Dann nennen wir  $S$  abgeschlossen, falls  $S^C$  offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von  $S$

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : S \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \wedge S^C \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von  $S$

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen  $S$  ist beschränkt, falls  $S \subseteq D_R(0)$  für ein  $R > 0$ . Außerdem ist  $S$  kompakt, falls  $S$  sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

$S$  ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen  $A, B$  gibt mit  $S \subseteq A \cup B$  mit  $S \cap A \neq \emptyset$ ,  $S \cap B \neq \emptyset$ .  $S$  ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

**Definition 1.3.2.** Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann definieren wir  $[z, w] := \{(1 - \Theta)z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$  als die Strecke zwischen  $z$  und  $w$ . Wir sagen eine Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten  $a, b \in S$  gibt. Das heißt es gibt  $z_1, \dots, z_n$  sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

**Definition 1.3.3.** Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

**Satz 1.3.4.** Sei  $U$  offen. Dann ist  $U$  genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

## 2 [\*] Analytische Polynome

**Motivation.** Sei  $P(x, y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ . Wir sagen  $P$  ist analytisch, wenn es ein Polynom in  $x + yi$  ist. Das heißt  $P(x, y) = \sum_{n=0}^L \alpha_n (x + iy)^n =: f(x + iy)$  für passende  $\alpha_n$ . Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom  $P(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$  ist analytisch, da  $P(x, y) = (x + iy)^2$ .

(ii)  $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2ixy$  ist nicht analytisch.

*Beweis für (ii).* Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^N a_k (x + iy)^k$$

Dann gilt für  $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N$$

$$\alpha_2 = 1$$

□

**Definition 2.1.2** (Partielle Ableitung). Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = u(x, y) + v(x, y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von  $f$  wie folgt

$$f_x := \partial_x f = \partial_x u + i \partial_x v = u_x + i v_x$$

$$f_y := \partial_y f = \partial_y u + i \partial_y v = u_y + i v_y$$

**Satz 2.1.3.** Ein Polynom  $P(x, y)$  ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i \partial_x P \tag{2.1.1}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n (x + iy)^n$$

$$\partial_x P = \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_x (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n (x + iy)^{n-1}$$

$$\partial_y P = \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_y (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n i (x + iy)^{n-1}$$

## 2 [\*] Analytische Polynome

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\partial_x P = i\partial_y P$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0 \leq r \leq N_1 \\ 0 \leq s \leq N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=: G_n(x,y)} \\
 &\Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n G_n(x, y)
 \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die  $G_n$ . Das heißt für festes  $n$

$$\partial_y G_n(x, y) = \sum_{t=1}^n t \alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

||

$$i\partial_x G_n(x, y) = i \left( \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \alpha_t x^{n-t-1} y^t \right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \dots + nc_n y^{n-1} = i \left( nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-2} y + \dots + c_{n-1} y^{n-1} \right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned}
 c_1 &= inc_0 = i \binom{n}{1} c_0 \\
 c_2 &= i^2 \frac{n(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0
 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 G_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\
 &= c_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k = c_0 (x + iy)^n \\
 &\Rightarrow P(x, y) = \sum_{n=0}^N G_n(x, y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{n,0} (x + iy)^n
 \end{aligned}$$

Das heißt  $P$  ist analytisch. □

**Bemerkung 2.1.4.** Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

### 3 [\*] Stenographische Projektion

**Motivation.** Es sei  $\Sigma := \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$  die Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $\frac{1}{2}$  um den Punkt  $(0, 0, \frac{1}{2})$ . Dann lässt sich eine Abbildung  $(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  definieren. Wobei  $z$  der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und  $(\xi, \eta, \zeta)$  ist. Sei

$$\lambda((\xi, \eta, \zeta) - (0, 0, 1)) = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\xi &= x, \quad \lambda\eta = y, \quad \lambda(\zeta - 1) = -1 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \zeta} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda = \frac{y}{\eta} \\ &\Rightarrow x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{aligned}$$

Sind  $x, y$  gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

**Definition 3.1.1.** Sei  $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $z_n \rightarrow \infty$ , falls  $|z_n| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $f(z_n) \rightarrow \infty$ , falls  $|f(z_n)| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 3.1.2** (Zusammenhang von Kreisen in  $\Sigma$  und  $\mathbb{C}$ ). Ein Kreis in  $\Sigma$  ist ein Schnitt von  $\Sigma$  mit einer Ebene im  $\mathbb{R}^3$  der Form  $A\xi + B\eta + C\xi = D$ . Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned} D &= A \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + B \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + C \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow D = (C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By \end{aligned}$$

FALL 1:  $C = D$ . Dann ist  $Ax + By = D$  eine Linie in  $\mathbb{C}$ .

FALL 2:  $C \neq D \Rightarrow$  Kreis in  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

**Satz 3.1.3.** (Sinngemäß: Kreise in  $\Sigma$  werden stenographisch auf Geraden projiziert.)

## 4 [\*] Komplexe Differenzierbarkeit

### 4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

**Definition 4.1.1.** Wir sagen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist (komplex) differenzierbar in  $z_0$ , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass  $h$  in  $\mathbb{C}$  gegen 0 konvergiert)

**Folgerung 4.1.2** (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung).

1. Setze  $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (das heißt wir wählen eine Folge von  $h$ , die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und  $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze  $h = it, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion  $f$  (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn  $f = u + iv$  für Funktionen  $u$  und  $v$ , dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Ist  $f$  in  $z \in U$  (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung  $f_x(z)$  und  $f_y(z)$  und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

**Bemerkung 4.1.4.** Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) &= 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) &= 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Das heißt für  $x \rightarrow 0$  kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.



**Satz 4.1.5** (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z \in U$  und  $f, g$  in  $z$  differenzierbar. Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(z) \neq 0$ ) in  $z$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

*Beweis.* (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1).  $\square$

**Satz 4.1.6** (Ableitung von komplexen Polynomen). Sei  $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  ein Polynom in  $\mathbb{C}$ . Dann gilt  $P'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$ .

*Beweis.* Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z + h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow (z + h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z + h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( n z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1} \quad \square\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.1.7** (Ableitung von komplexen Potenzreihen). Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann ist  $f$  differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

**Bemerkung 4.1.8** (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann). Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Dann können wir diese auch interpretieren als Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen. Wir erinnern uns, dass  $f$  dann im Punkt  $(x, y)$  differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt mit

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \quad (h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix})$$

und  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Wir spalten  $f$  außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern  $f$  differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht  $A$  der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

**Satz 4.1.9.** Angenommen die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  in einer Umgebung von  $z$  existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist  $f$  komplex differenzierbar in  $z$  und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

*Beweis.* Sei  $f = u + iv$  und  $h = \xi + i\eta$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\rightarrow f_x(z) \text{ für } h \rightarrow 0 \\ u(z) &= u(x, y) \quad v(z) = v(x, y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y) + i(v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_1\eta}_{=:z_1}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(\underbrace{x+\Theta_2\xi, y}_{=:z_3}) \quad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_3\eta}_{=:z_2}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(\underbrace{x+\Theta_4\xi, y}_{=:z_4}) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} + i \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z_1) + iv_y(z_2)) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z_3) + iv_x(z_4)) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z))}_{\rightarrow 0} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\xi}{\xi} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\eta}{i\eta} \right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \rightarrow 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben.  $\square$

**Beispiel 4.1.10.** Es sei  $f(z) = x^2 + y^2 = z\bar{z}$ . Dann gilt  $f_x = 2x$  sowie  $f_y = 2y$ . Das heißt  $f_y = if_x$  gilt nur für  $z = 0$ . Ist  $f$  dann differenzierbar?

**Definition 4.1.11.** Wir sagen  $f$  ist analytisch in  $z$ , falls  $f$  (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von  $z$ .  $f$  ist außerdem analytisch auf  $S \subseteq \mathbb{C}$ , falls  $f$  (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von  $S$ .

**Satz 4.1.12.** Sei  $f = u + iv$  analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge  $D$  ( $D$  Umgebung). Ist  $u$  konstant auf  $D$ , so ist  $f$  konstant.

*Beweis.*  $u$  ist konstant auf  $D$ . Das heißt  $u_x = u_y = 0$  auf  $D$ . Nach Satz 4.1.3 ist auch  $v_x = v_y = 0$  auf  $D$ . Da  $D$  zusammenhängend ist, ist also auch  $v$  konstant und damit ist  $f = u + iv$  konstant.  $\square$

**Satz 4.1.13.** Sei  $f = u + iv$  analytisch auf einer Umgebung  $D$ . Ist  $|f|$  konstant auf  $D$ , so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $|f| > 0$ . Dann gilt  $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x (u^2 + v^2) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y (u^2 + v^2) = 2uu_y + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 0 = u^2 u_x - uvu_y \\ 0 = uvu_y + v^2 u_x \end{cases} \\ \Rightarrow & 0 = (u^2 + v^2) u_x = C \cdot u_x \\ \Rightarrow & u_x = 0 \\ \Rightarrow & v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $u_y = -v_x = 0$ . Damit sind  $u, v$  und somit  $f$  konstant.  $\square$

**4.2 Die Funktionen  $e^z, \cos z, \sin z$** 

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \frac{d}{dz} e^z &= e^z \\
 e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
 &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\
 \overline{e^z} &= e^{\bar{z}} \\
 \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\
 \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})
 \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
 \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\
 \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})
 \end{aligned}$$

## 5 [\*] Linienintegrale

### 5.1 Definition und Berechnung

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion auf  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_I f \, dt = \int_a^b f(t) \, dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

**Definition 5.1.2** (Glatte Kurven).

- (i) Sei  $z(t) := x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ). Die Kurve  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  ist bestimmt durch  $z(t)$  und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$

falls die Funktionen  $x, y, : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  sind und es eine Partition

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \quad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass  $x(t), y(t)$  stetig differenzierbar auf  $[t_{j-1}, t_j]$  sind

- (ii) Die Kurve heißt glatt, falls  $\dot{z}(t) \neq 0$  bis auf endlich viele  $t \in [a, b]$

**Definition 5.1.3** (Kurvenintegral). Sei  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von  $f$  (definiert in einer Umgebung von  $C$  oder nur auf  $C$ ) ist definiert durch

$$\int_C f \, dz = \int_C f(z) \, dz := \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) \, dt$$

**Definition 5.1.4** (Zwei Kurven). Zwei Kurven  $C_1 := z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $C_2 : w(t)$ ,  $c \leq t \leq d$  sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive  $C^1$ -Abbildung  $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$  gibt mit  $\lambda(c) = a$ ,  $\lambda(d) = b$ ,  $\lambda'(t) \geq 0$  und  $w(t) = z(\lambda(t))$  (für  $c \leq t \leq d$ ).

**Satz 5.1.5.** Sind die Kurven  $C_1, C_2$  äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f \, dz = \int_{C_2} f \, dz$$

*Beweis.* Es gilt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t))) \dot{z}(\lambda(t)) \dot{\lambda}(t) \, dt = \int_a^b h(z(s)) \dot{z}(s) \, ds \quad \square$$

**Satz 5.1.6.** Es gilt

$$\int_C f \, dt = - \int_{-C} f \, dt$$

wobei  $-C : z(a + b - t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

*Beweis.* Wir setzen  $w(t) = z(a + b - t)$ . Dann gilt  $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a + b - t)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(w) \, dw &= \int_a^b f(w(t)) \dot{w}(t) \, dt = - \int_a^b f(z(a + b - t)) \dot{z}(a + b - t) \, dt \\ &= \int_b^a f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_a^b f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_C f(z) \, dz\end{aligned}\quad \square$$

**Beispiel 5.1.7.** Sei  $f(z) = x^2 + iy^2$  mit  $z = x + iy$  sowie  $C = z(t) = (1 + i)t$  für  $0 \leq t \leq 1$ .

$$\begin{aligned}\int_C f(z) \, dz &= \int_0^1 f((1 + i)t) (1 + i) \, dt \\ &= (1 + i)^2 \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{2i}{3}\end{aligned}$$

**Beispiel 5.1.8.** Sei  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$  mit  $C : z(t) = R(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z} \, dz &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{R \cos t}{R^2} - \frac{R \sin t}{R^2} \right) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, d2\pi t\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{dz}{z} \, dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it} \, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\end{aligned}$$

**Beispiel 5.1.9.** Sei  $f = 1$  und  $C$  eine beliebige Kurve

$$\int_C dz = \int_a^b \dot{z}(t) \, dt = z(b) - z(a)$$

**Satz 5.1.10** ( $C$ -glatte Kurve). Seien  $f, g$  stetige Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C f + g \, dz &= \int_C f \, dz + \int_C g \, dz \\ \int_C \alpha f \, dz &= \alpha \int_C f \, dz\end{aligned}$$

*Beweis.* (Selber machen) .  $\square$

**Definition 5.1.11.** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $\alpha \ll \beta$ , falls  $|\alpha| \leq |\beta|$ .

**Lemma 5.1.12.** Sei  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b G(t) \, dt &\ll \int_a^b |G(t)| \, dt \\ \Rightarrow \int_a^b G(t) \, dt &\leq \int_a^b |G(t)| \, dt\end{aligned}$$

Beweise  $G(t) = \operatorname{Re}(G(t)) - i \sin(G(t))$ . Trick:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t) dt &= R e^{i\varphi} & (R > 0, \varphi \in \mathbb{R}) \\ \int_1^b G(t) dt &= R = \bar{e} \int_a^b G(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} G(t) dt \\ \operatorname{Re} \left( \int_a^b e^{-i\varphi} G(t) dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( e^{-i\varphi} G(t) \right) dt \\ &\leq \int_a^b |G(t)| dt \end{aligned}$$

**Satz 5.1.13.** Sei  $C$  eine Kurve der Länge  $L$  auf  $f$ , stetig auf  $\mathbb{C}$  und  $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$ . Dann folgt

$$\int_C f(z) dz \ll M \cdot L$$

*Beweis.* (Fehlt) □

**Korollar 5.1.14.** Sei  $(f_n)_n$  eine Folge stetiger Funktionen und  $f_n \rightarrow f$ . Dann folgt

$$\int_C f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n dz$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz - \int_C f_n dz \right| &= \left| \int_C (f(z) - f_n(z)) dz \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z) - f_n(z)| dt = \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z) - f_n(z)|}_{\rightarrow 0} \cdot L_z \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 5.1.15.** Angenommen  $f = F'$ ,  $F$  analytisch auch eine Kurve  $C$  mit Analysepunkt  $z(a)$ , Endpunkt  $z(b)$ . Dann folgt

$$\int_C f dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} F(z(t)) &= F'(z(t)) \dot{z}(t) = f(z(t)) z(t) \\ \int_C f dz &= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \\ &= \int_a^b \gamma(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned} \quad \square$$

## 5.2 Integrale über geschlossenen Kurven

[06. Mai] **Definition 5.2.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  eine Kurve in  $U$ . Dann nennen wir  $C$  geschlossen, falls  $z(a) = z(b)$ . Eine geschlossene Linie heißt einfach, falls  $z(t_1) = z(t_2)$  für  $t_1 < t_2 \in [a, b]$  schon impliziert, dass  $t_1 = a, t_2 = b$ .

**Bemerkung 5.2.2.** Ein (Standard-)Rechteck  $R$  in  $U$  ist ein abgeschlossenes, achsen-paralleles Rechteck. Rand  $\Gamma = \partial R$  wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das erste Ziel dieses Kapitels soll es sein, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 5.2.3** (Rechteckssatz I). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $R \subseteq U$  ein Rechteck mit Rand  $\Gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

**Lemma 5.2.4.** Sei  $f(z) = \alpha + \beta z$  affin linear. Dann gilt Satz 5.2.3

*Beweis.* Es ist  $F(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2} z^2$  eine Stammfunktion von  $f$  mit  $z(t)$  Parameterlösung von  $\Gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \stackrel{\text{Lemma 5.1.15}}{=} F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass  $z(b) = z(a)$ . □

*Beweis von Satz 5.2.3.* (Erfolgt durch Überdeckung und schlaue Abschätzung, fehlt hier) □

**Satz 5.2.5.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $z_0 \in U$  und  $R > 0$ , sodass  $D_R(z_0) = \{|z - z_0| \leq R\} \subseteq U$ . Dann existiert eine analytische Funktion  $F : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F'(z) = f(z) \forall z \in D_R(z_0)$ . D.h.  $f$  hat lokal in der Nähe von  $z_0$  eine Stammfunktion.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $U = D_R(z_0)$ . Zwischen  $w, z \in D_R(z_0)$  gibt es einen Weg

$$\gamma_{w,z}(t) = \begin{cases} w + \operatorname{Re}(z - w)t & 0 \leq t \leq 1 \\ w + \operatorname{Re}(z - w) + i \operatorname{Im}(z - w)(t - 1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw \\ \Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw \end{aligned}$$

Durch geometrische Überlegungen sehen wir, dass sich die Pfade auch folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw + \int_{\Gamma_{z,z+h}} f(w) dw \stackrel{\text{Satz 5.2.3}}{=} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw \\ \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\int_{\gamma_{z,z+h}} 1 dw = z + h - w = h$$

Das heißt für festes  $z$

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(z) dw = f(z)$$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w) - f(z)) \, dw \\
&\Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) - f(z) \, dw \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \cdot (|\operatorname{Re}(h)| + |\operatorname{Im}(h)|) \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \cdot 2|h| \\
&= 2 \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 5.2.6.** Ist  $f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $C$  eine glatte, geschlossene Kurve in  $D_R(z_0)$ , so ist

$$\int_C f(z) \, dz = 0$$

*Beweis.* Nach Satz 5.2.5 hat  $f$  eine Stammfunktion  $F$  auf  $D_R(z_0)$  und  $F$  ist analytisch.  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  und wegen geschlossen gilt  $z(a) = z(b)$ . Damit folgt

$$\int_C f(z) \, dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0 \quad \square$$

Vorsicht, dieser Satz gilt nur lokal:

**Beispiel 5.2.7.** Sei  $f(z) = \frac{1}{z}$  und  $C : Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} \, dt = 2\pi i$$

Andererseits ist

$$\int_C z^k \, dz = 0 \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

## 6 [\*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

ist stetig auf  $U$ . Wir wollen jetzt den Rechtecksatz auf  $g$  erweitern.

**Satz 6.1.1** (Rechtecksatz II). Ist  $R \subseteq U$  ein Rechteck, dann gilt

$$\int_{\partial R} g(z) \, dz = 0$$

*Beweis.* FALL 1:  $\alpha \notin R$ . Dann betrachten wir eine Umgebung von  $R$ , in der  $\alpha$  nicht enthalten ist und verwenden Satz 5.2.3, da  $g$  analytisch auf  $R$  ist.

FALL 2:  $\alpha \in \partial R$ . Dann teilen wir  $R$  in 6 Subrechtecke  $R_{k \in \{1, \dots, 6\}}$  und es sei  $\alpha \in \partial R_1$ . Dann gilt

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} g(z) \, dz = \sum_{k=1}^6 \int_{\partial R_k} f(z) \, dz$$

Nach FALL 1 haben wir dann

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \\ \left| \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \right| &\leq \underbrace{\sup_{z \in \partial R_1} |g(z)|}_{< \infty} \cdot \text{diam}(R_1) \end{aligned}$$

Wir können  $R_1$  aber beliebig klein machen. Damit geht der Ausdruck gegen 0.

FALL 3:  $\alpha \in R \setminus \partial R$ . Wir gehen wie in FALL 2 vor und teilen  $R$  in 6 Subrechtecke auf. Damit gilt

$$\int_{\partial R} g(z) \, dz = \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \rightarrow 0 \text{ für } \text{diam}(R_1) \rightarrow 0 \quad \square$$

## 7 [\*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

### 7.1 Vorbereitung

[12. Mai] **Situation:** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Es sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ , dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

stetig auf  $U$  und analytisch auf  $U \setminus \{\alpha\}$ .

**Korollar 7.1.1.** In der obigen Situation hat  $g$  wieder lokal eine Stammfunktion. Genau gilt: Für jeden Punkt  $z_0 \in U$  gibt es ein  $F : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $F' = g$  auf  $D_R(z_0)$  für ein  $R > 0$ . Ist insbesondere  $C$  eine geschlossene Kurve in  $D_R(z_0)$ , so ist

$$\int_C g(z) dz = 0$$

**Satz 7.1.2** (Cauchy-Integralformel I). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\alpha \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $R > 0$ , sodass  $D_R(\alpha) \subseteq U$ . Ferner sei  $0 < \rho < R$  und  $C_\rho(\alpha)$  die Kurve  $z(t) := \rho e^{it} + \alpha$ . Dann folgt

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw$$

*Beweis.* Wir betrachten

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

Dann gilt nach Korollar 7.1.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_\rho(\alpha)} g(w) dw = \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w) - f(\alpha)}{w - \alpha} dw \\ &= \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw - \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{w - \alpha} dw \\ &\Rightarrow \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw = f(\alpha) \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{1}{w - \alpha} dw = f(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = f(\alpha) 2\pi i \\ &\Rightarrow \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw = 2\pi i f(\alpha) \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 7.1.3.** In Satz 7.1.2 gilt sogar  $\forall z \in D_\rho(\alpha)$  ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

**Lemma 7.1.4.** Sei  $C_\rho(\alpha) : z(t) = \rho e^{it} + \alpha \subseteq D_R(\alpha)$  ( $R > \rho > 0$ ). Dann gilt für alle  $z \in D_\rho(\alpha)$

$$\int_{C_\rho(\alpha)} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z} dw &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha-(z-\alpha)} dw \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw\end{aligned}$$

Es ist  $|z-\alpha| < \rho$  und  $|w-\alpha| < \rho$ . Also ist

$$\delta = \left| \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right| = \frac{|z-\alpha|}{\rho} < 1 \quad \forall w \in C\rho(\alpha)$$

Wir schreiben um über die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n$$

Wir haben gleichmäßige und absolute Konvergenz

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \\ \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw &= \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{(\rho e^{it})^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw &= 2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z} dw &= 2\pi i \quad \square\end{aligned}$$

**Korollar 7.1.5** (Cauchy-Integralformel II). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch sowie  $\alpha \in U$ ,  $R > 0$  mit  $D_R(\alpha) \subseteq U$ . Dann folgt  $\forall 0 < \rho < R$  und  $z \in D_\rho(\alpha)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

*Beweis.* Nach Korollar 7.1.1 gilt

$$0 = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w) - f(z)}{w-\alpha} dw = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw - f(z) \underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha} dw}_{=2\pi i} \quad \square$$

## 7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung

**Satz 7.2.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $\alpha \in U$ ,  $R > 0$ , sodass  $D_R(\alpha) \subseteq U$ . Dann hat  $f$  eine in  $D_R(\alpha)$  konvergente Potenzreihe. Das heißt es existiert eine Folge  $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ , sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Dabei ist  $D_R(\alpha)$  „ $=$ “  $\mathbb{C}$  erlaubt.

*Beweis.* Für  $z \in D_\rho(\alpha)$  haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha-(w-\alpha)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha) \left(1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw \end{aligned}$$

Wir können wieder die Umschreibung zur geometrischen Reihe verwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \underbrace{\int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw}_{=: a_n(\rho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho) (z-\alpha)^n \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 7.2.2.** In Satz 7.2.1 ist  $(a_n)_n$  unabhängig von  $R > 0$ , solange  $D_R(\alpha) \subseteq U$ .

**Beobachtung 7.2.3.** Ist  $z \in D_R(\alpha)$ , so existiert ein  $\rho$  mit  $|z-\alpha| < \rho < R$ . Für dieses  $\rho$  haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\rho)}{2\pi i} (z-\alpha)^n$$

**Beobachtung 7.2.4.**  $a_n(\rho)$  ist unabhängig von  $0 < \rho < R$ .

*Beweis.* Sei  $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$  und  $|z-\alpha| < \rho_1$ . Dann folgt

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1) (z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2) (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_{\rho_1}(\alpha)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen haben wir  $a_n(\rho_1) = a_n(\rho_2)$ . □

**Korollar 7.2.5.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar.

*Beweis.* Lokal ist  $f(z)$  durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar. □

[13. Mai] **Korollar 7.2.6.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Dann ist

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw$$

**Satz 7.2.7.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $\alpha \in U$ . Dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

analytisch.

*Beweis.* In  $D_R(\alpha) \subseteq U$  gilt  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$  mit  $a_0 = f(\alpha)$ . Das heißt

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n-1} \quad \square$$

### 7.3 Liouville

**Notation 7.3.1.** Eine analytische Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ganze Funktion.

**Korollar 7.3.2.** Habe  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $U$  genau  $N$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_N \in U$ . Dann definieren wir

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_N)} \quad (z \neq a_j)$$

Dann gilt  $\lim_{z \rightarrow a_k} g(z)$  existiert und  $g$  ist analytisch.

*Beweis.* Sei  $f_0(z) := f(z)$  und

$$f_k(z) := \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z - a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z - a_k} \quad (z \neq a_k)$$

Nach Induktion und Satz 7.2.7 gilt dann, dass  $f_k$  analytisch ist für alle  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Beachte  $g = f_N$ .  $\square$

**Satz 7.3.3.** Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

*Beweis.* Für alle  $R > 0$  ist  $z \in D_R(0)$  und

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Seien  $z_1, z_2 \in D_R(0)$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} \left( \frac{f(w)}{w - z_1} - \frac{f(w)}{w - z_2} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} f(w) \frac{z_1 - z_2}{(w - z_1)(w - z_2)} dw \end{aligned}$$

Es ist  $|f(w)| < M < \infty$  für alle  $w \in \mathbb{C}$ . Nach M-L-Regel gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi R}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

Das heißt  $f$  ist konstant.  $\square$

**Satz 7.3.4.** Sei  $f$  eine ganze Funktion und für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  existieren  $A, B \geq 0$  mit  $|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq k$ .

*Beweis.* Wir verwenden Induktion.  $k = 0$  ist Satz 7.3.3.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist  $g$  eine ganze Funktion

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} & (|z| \geq 1) \\ &\leq \frac{A + B|z|^k + |f(0)|}{|z|} \leq \tilde{A} + B|z|^{k-1} \\ |g(z)| &\leq C & (|z| \leq 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq \max(\tilde{A}, C) + B|z|^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Per Induktionsvoraussetzung ist  $g$  ein Polynom vom Grad  $\leq k - 1$ . Dann ist  $f(z) = zg(z) + f(0)$  ein Polynom vom Grad  $\leq k$ .  $\square$

**Satz 7.3.5.** Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat (mindestens) eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n| \\
 &= |z^n| \underbrace{\left| a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n} \right|}_{\geq |a_n| - |a_{n-1}| |z|^{-1} - \dots - |a_1| |z|^{1-n} - |a_0| |z|^{-n}} \\
 &\geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n
 \end{aligned}$$

Das heißt  $P(z) \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Wenn  $P$  keine Nullstelle hat, dann ist

$$h(z) = \frac{1}{P(z)}$$

wohldefiniert und  $h(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Damit ist  $h$  eine beschränkte analytische Funktion und nach Satz 7.3.3 ist  $h$  konstant. Das heißt  $P$  war bereits konstant.  $\square$

**Bemerkung 7.3.6.** Satz 7.3.5 erweitert sich wie folgt: Sei  $g(z) := \frac{P(z)}{z - a_1}$  für  $P$  ein Polynom mit Nullstelle  $a_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &\leq A + B |z|^n \\
 \Rightarrow |g(z)| &\leq \tilde{A} + \tilde{B} |z|^{n-1}
 \end{aligned}$$

Das heißt  $g$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq n - 1$  und nach Satz 7.3.3 gilt  $P(z) = (z - a_1) g(z)$ . Das heißt wir können ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor vollständig in seine Nullstellen aufspalten.

## 8 [\*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze

### 8.1 Formulierung

**Satz 8.1.1** (Eindeutigkeit). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Sei  $S \subseteq U$  mit Häufungspunkt in  $U$  und  $f(z) = 0 \ \forall z \in S$ . Dann ist  $f = 0$  in  $U$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha \in U$  Häufungspunkt von  $S$ . Dann existiert ein  $R > 0$ , sodass  $D_R(\alpha) \subseteq U$  und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Das heißt es existiert eine Folge  $z_k \in S$  mit  $z_k \neq \alpha$ ,  $z_k \rightarrow \alpha$  mit  $f(z_k) = 0 \ \forall k$ . Nach dem Eindeutigkeitssatz von Potenzreihen folgt damit

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= 0 \text{ auf } D_R(\alpha) \\ A &:= \{z \in U : z \text{ ist Häufungspunkt von Nullstellen von } f\} \\ B &= U \setminus A \end{aligned}$$

Behauptung 1:  $A$  ist offen. Sei  $z_0 \in A$ , existieren  $R > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \quad \forall z \in D_r(z_0) \\ \Rightarrow D_r(z_0) &\subseteq A \end{aligned}$$

Das heißt  $A$  ist offen. Behauptung 2:  $B$  ist offen. Sei  $w \in B$ . Dann hat  $w$  einen Sicherheitsabstand von der Nullstelle von  $f$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_r(w) \subseteq B$$

Damit ist  $B$  offen. Daraus, dass  $U$  zusammenhängend ist, folgt, dass  $A$  oder  $B$  leer ist. Da  $\alpha \in A$  folgt also  $B = \emptyset$

$$\Rightarrow A = U$$

Da  $f$  stetig ist, folgt  $f(z) = 0 \ \forall z \in U$ . □

**Korollar 8.1.2.** Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $U$  offen und zusammenhängend. Seien  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in S$ , wobei  $S$  hat Häufungspunkt in  $U$ . Dann gilt bereits  $f = g$  auf  $U$ .

*Beweis.* Betrachte  $f - g$  und wende vorherigen Satz an. □

**Beispiel 8.1.3.**  $\sin(z) = 0$  für  $z = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 8.1.4** (Mittelwertsatz). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $U$  offen. Sei  $\alpha \in U$ ,  $R > 0$ ,  $D_R(\alpha) \subseteq U$ . Dann folgt

$$\forall 0 < r < R : f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt$$

*Beweis.* Sei  $C_r(\alpha) : w(t) = re^{it} + \alpha$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + \alpha)}{re^{it}} \cdot re^{it} dt \end{aligned} \quad \square$$



[19. Mai] **Satz 8.1.5** (Maximum modulus). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann hat  $|f|$  kein lokales Maximum in  $U$ . Das heißt  $\forall \alpha \in U$  und  $\delta > 0$  mit  $D_\delta(\alpha) \subseteq U$  existiert ein  $z \in D_\delta(\alpha)$  mit  $|f(z)| > |f(\alpha)|$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha \in U$ . Nach Satz 8.1.4 gilt

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( f(re^{it} + \alpha) \right) dt \quad \forall \alpha \in U, \overline{D_r(\alpha)} \subseteq U \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| f(re^{it} + \alpha) \right| \end{aligned} \quad (1)$$

Satz 8.1.5 folgt, wenn wir folgendes zeigen: Ist  $f$  nicht-konstant, so gibt es ein  $w \in Cr(\alpha)$  mit  $|f(w)| > |f(\alpha)|$ . Angenommen das ist der Fall, dann würde gelten

$$|f(w)| \leq |f(\alpha)| \quad \forall w \in Cr(\alpha) \text{ für } r > 0 \text{ klein genug}$$

Darum muss  $|f(w)| = |f(\alpha)|$  sein für alle  $w \in Cr(\alpha)$  für  $r > 0$  klein genug. Ansonsten ist

$$|f(w_0)| \leq |f(\alpha)|$$

?, dass  $w_0 \in Cr(\alpha)$ .  $w_0 = w(t_0) = re^{it} + \alpha$ ,  $t_0 \in [0, 2\pi]$ . Aus der Stetigkeit von  $|f|$  folgt jetzt

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0: |f(w(t))| < |f(w)| \quad t \in [0, 2\pi], |t - t_0| \leq \delta \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w(t))| dt < |f(\alpha)| \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu (1). Also haben wir

$$\left| f(re^{it} + \alpha) \right| = |f(\alpha)| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \text{ mit } r > 0 \text{ klein genug}$$

Das heißt  $|f|$  ist konstant auf  $\overline{D_{r_0}(\alpha)}$  für ein  $r_0 > 0$ . Damit ist nach Satz 4.1.13 bereits  $f$  konstant auf  $D_{r_0}(\alpha)$  und nach Satz 8.1.1 ist  $f$  konstant auf  $U$ .  $\square$

**Korollar 8.1.6.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Nimmt  $|f|$  ein (lokales oder globales) Maximum in  $U$  an, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Umformulierung von Satz 8.1.5  $\square$

**Korollar 8.1.7.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und beschränkt,  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $f$  analytisch auf  $U$ . Dann folgt

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$$

Das heißt das Maximum wird am Rand  $\partial U$  angenommen.

## 8.2 Anwendungen

**Situation:** Wir haben die Einheitskreis  $D_1(0)$  und  $f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch mit  $f(0) = 0$ . Dann wollen wir zeigen, dass

$$(a) \quad |f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1$$

$$(b) \quad |f'(0)| \leq 1$$

*Beweis.* Definiere

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist  $g$  analytisch auf  $D_1(0)$ . Sei  $0 < r < 1$  mit  $|z| = r$

$$\Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \forall 0 < r < 1$$

Nach Satz 8.1.5 folgt

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad \forall |z| \leq r \\ |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad |z| \leq r \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq 1 \quad \forall |z| < 1 \\ \Rightarrow \forall 0 < |z| < 1: \frac{|f(z)|}{|z|} &= |g(z)| \leq 1 \\ \Rightarrow |f(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

und für 8b) gilt

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

□

Ferner gilt: Gilt „=“ für ein  $|z| < 1$  in (a) oder „=“ in (b), so ist

$$f(z) = e^{i\Theta} z$$

für ein  $\Theta \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 8.2.1.** Die obigen Aussagen kombiniert sind auch bekannt als das Lemma von Schwarz.

**Andere Situation:** Sei  $f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $|f(z)| \geq 1$  für alle  $|z| < 1$  und  $f(\alpha) = 0$  für ein  $|\alpha| < 1$ . Definiere

$$B_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Dann folgt (mit Beweis, der hier fehlt), dass

$$(a) \quad |f(z)| \leq |B_\alpha(z)| \quad \text{für alle } |z| < 1$$

$$(b) \quad |f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

**Notation 8.2.2.** Sei  $\mathcal{A}_\alpha := \{f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch und } |f(z)| \leq 1 \quad \forall |z| < 1 \text{ und } f(\alpha) = 0\}$ . Das heißt

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f(z)| = |B_\alpha(z)|$$

und

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

**Leicht andere Frage:** Sei  $\mathcal{A} := \{f : D_\eta(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch mit } |f(z)| \leq 1, |\eta| < 1\}$ . Was ist

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} |f'(\alpha)|$$

? Es ist

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

[20. Mai] **Satz 8.2.3** (Minimum-Modulus). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und nicht-konstant. Dann kann kein Punkt  $\alpha \in U$  ein lokales Minimum von  $|f|$  sein, außer  $|f(\alpha)| = 0$ .

*Beweis.* Angenommen  $|f(\alpha)|$  ist ein lokales Minimum von  $|f(z)|$ ,  $z$  nahe  $\alpha$  und  $f(\alpha) \neq 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$\exists r > 0 : D_r(\alpha) \subseteq U$$

und

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_r(\alpha)$$

$$h : D_r(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = \frac{1}{f(z)}$$

ist analytisch auf  $D_r(\alpha)$ .  $|h|$  hat in  $\alpha$  ein lokales Maximum. Nach Satz 8.1.5 ist  $h$  damit konstant in  $D_r(\alpha)$ . Damit ist  $f$  konstant in  $U$ .  $\square$

**Satz 8.2.4.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und nicht-konstant. Dann ist  $f(D)$  offen für jede offene Menge  $D \subseteq U$ .

*Beweis.* Sei  $f$  nicht-konstant und analytisch,  $D \subseteq U$  offen,  $\beta \in f(D)$ . Dann existiert ein  $\alpha \in D$ :  $f(\alpha) = \beta$ . Es reicht zu zeigen, dass das Bild einer kleinen Kreisscheibe um  $\alpha$  unter  $f$  enthält eine kleine Kreisscheibe um  $\beta$ . O.B.d.A. sei  $f(\alpha) = 0$ , sonst betrachten wir  $g(z) = g(z) - f(\alpha)$ . Es gilt Kreis  $C_r(\alpha) \subseteq D$  für  $r > 0$  klein genug. Behauptung: Es existiert ein  $r > 0$  klein genug, sodass

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in C_r(\alpha)$$

Falls nicht, dann existieren  $r_n := n^{-1}$ , sodass für  $n$  groß genug  $z_n \in C_{r_n}(\alpha)$ ,  $f(z_n) = 0$ . Dann wäre  $f$  aber nach Satz 8.1.1 konstant. Das ist ein Widerspruch.

Sei  $z_\varepsilon := \inf_{z \in C_r(\alpha)} |f(z)| > 0$ . Behauptung 2:  $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0) = D_\varepsilon(f(\alpha))$ . Bew: Sei  $w \in D_\varepsilon(0)$ . Zu zeigen ist, dass ein  $z \in D_r(\alpha)$  existiert, sodass  $f(z) = w \Leftrightarrow \underbrace{f(z) - w}_{=: h(z)} = 0$ . Wir haben

also  $h : D_r(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ .  $z \in \partial D_r(\alpha) = C_r(\alpha)$

$$|h(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

und

$$|h(\alpha)| = |f(\alpha) - w| = |-w| < \varepsilon$$

Nach Satz 8.2.3 gibt es ein  $z \in D_r(\alpha)$  mit  $h(z) = 0 \Rightarrow f(z) = w$ . Das heißt  $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0)$ .  $\square$

**Satz 8.2.5.** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Dann ist  $f = 0$  auf  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* (mittels Skizze, nicht hier)

□

## 9 [\*] Eine Umkehrung von Cauchy: Morera

### 9.1 Satz von Morera

**Satz 9.1.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und für jedes Rechteck (achsenparallel)  $R \subseteq U$  sei

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\partial R} f(z) dz = 0 \quad (\Gamma = \partial R)$$

Dann ist  $f$  analytisch auf  $U$ .

*Beweis.* Sei  $z_0 \in U$ ,  $D_r(z_0) \subseteq U$ ,  $z \in D_r(z_0)$ . Wir definieren

$$\gamma_{w,z} : z(t) := \begin{cases} w + t \operatorname{Re}(z - w) & 0 \leq t \leq 1 \\ \operatorname{Re}(?) + (t - 1) \operatorname{Im}(z - w) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$F(z) := \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w) - f(z)) dw \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow F' = f \text{ auf } D_r(z_0)$$

$\Rightarrow F$  ist analytisch und  $f$  ist auch analytisch □

**Definition 9.1.2.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f_n, f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann konvergiert  $(f_n)_n$  lokal gleichmäßig gegen  $f$ , falls  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen  $K \subseteq U$ . Das heißt

$$\forall K \subseteq U \text{ kompakt: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

**Satz 9.1.3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch konvergiere lokal gleichmäßig gegen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  analytisch.

*Beweis.* 1)  $f$  ist stetig.  $z_0 \in U$ ,  $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$ , dann  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $\overline{D_r(z_0)}$ . Das heißt  $f_n$  ist stetig auf  $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow f$  ist stetig auf  $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow f$  ist stetig auf  $U$ .

2)  $R \subseteq D_r(z_0)$  ein Rechteck,  $\Gamma = \partial R$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\Gamma} f_n(z) dz}_{=0} = 0$$

Das heißt  $f$  ist analytisch nach Satz 9.1.1. □

### 9.2 Reflexionsprinzip von Schwarz

[26. Mai] **Satz 9.2.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $L \subseteq U$  ein Liniensegment,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und analytisch auf  $U \setminus L$ . Dann ist  $f$  analytisch auf  $U$ .

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $L \subseteq \mathbb{R}$ , sonst sei  $g(z) = az + b$  mit  $L \subseteq g(\mathbb{R})$  und betrachte  $h = f \circ g$ . Wenn  $h$  auf  $g^{-1}(U)$  analytisch ist, dann ist  $f$  auf  $U$  analytisch.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Rechteck  $R \subseteq U$  und wollen Satz 9.1.1 anwenden. Das heißt wir müssen zeigen, dass

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

FALL 1:  $R \cap L = \emptyset$ . In diesem Fall gilt

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

da  $f$  analytisch in einer offenen Umgebung von  $R$  ist.

FALL 2:  $\partial R \cap L \neq \emptyset$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $R_\varepsilon$  wie oben im Bild. Dann gilt

$$\int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = 0$$

Da

$$\int_a^b f(x + i\varepsilon) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

folgt

$$0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial R_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial R} f(z) dz$$

FALL 3:  $L$  liegt im Inneren von  $R$ . Wir teilen  $R$  in zwei Rechtecke  $R_1, R_2$  auf, sodass  $L$  auf dem Rand von  $R_1, R_2$  liegt. Dann gilt nach FALL 2:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R_1} f(z) dz + \int_{\partial R_2} f(z) dz = 0 + 0 = 0$$

Nach Satz 9.1.1 ist  $f$  damit analytisch auf  $U$ . □

**Notation 9.2.2.** Wir schreiben  $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ .

**Satz 9.2.3** (Reflexionsprinzip). Sei  $D \subseteq \mathbb{C}_+$  oder  $D \subseteq \mathbb{C}_-$  und  $L := \partial D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Sei  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch, stetig auf  $D \cup L$  sowie  $f(z) \in \mathbb{R} \ \forall z \in L$ . Wir definieren  $D_- := \{\bar{z} : z \in D\}$ . Dann ist die Funktion  $g : D_+ \cup L \cup D_- \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D \cup L \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

analytisch.

*Beweis.*  $g$  ist stetig auf  $D_+ \cup L \cup D_-$ , da  $f$  analytisch auf  $D, D_-$  ist und  $f$  reellwertig auf  $L$  ist. Es bleibt noch zu beweisen, dass  $g$  auf  $D$  und  $D_-$  analytisch ist. Auf  $D$  ist das klar, weil  $g(z) = f(z)$ . Sei also  $z \in D_- \Rightarrow \bar{z} \in D_+$ ,  $h \neq 0$  klein genug, dass  $z + h \in D_-$ . Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{\bar{h}} \rightarrow \overline{f'(\bar{z})} \text{ für } h \rightarrow 0$$

nach Satz 9.2.1 weil  $f$  analytisch ist auf  $D \cup L \cup D_-$ . □

**Korollar 9.2.4.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und symmetrisch bezüglich der reellen Achse  $\mathbb{R}$ . Sei außerdem  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und  $f$  reellwertig auf  $U \cap \mathbb{R}$ . Dann folgt

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in U$$

*Beweis.* Wende Satz 9.2.3 auf  $f : D_+ \cup L \rightarrow \mathbb{C}$  an. Dann erhalten wir

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D_+ \cup L \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

ist analytisch auf  $U = D_+ \cup L \cup D_-$  und  $g = f$  auf  $D_+$ . Nach Satz 8.1.1 gilt damit aber  $g = f$  auf  $U$ . Das heißt  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$  für alle  $z \in D_-$  und damit auch für alle  $z \in D_+$ .  $\square$

**Beispiel 9.2.5.** 1. Betrachte  $z \mapsto e^z = \exp(z)$ . Es gilt  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ .

## 10 [\*] Einfach zusammenhängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $z_0 \in U$ ,  $D_r(z_0) \subseteq U$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $D_r(z_0)$ . Dann folgt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Erinnerung: Stetige Linie  $\gamma$  in  $U$  ist eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ .

$U$  ist wegzusammenhängend, wenn für alle  $z, w \in U$  eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  existiert, sodass  $\gamma(0) = z$ ,  $\gamma(1) = w$ .

$U$  ist zusammenhängend, wenn für jede Partition  $U = A \cup B$  mit offenen Mengen  $A, B$  (in  $U$ ) und  $A \cap B \neq \emptyset$  folgt  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ .

$U$  ist lokal wegzusammenhängend, wenn für jedes  $z_0 \in U$  ein  $r > 0$  existiert, sodass  $U \cap D_r(z_0)$  wegzusammenhängend ist.

**Lemma 10.1.1.** Sei  $U$  lokal wegzusammenhängend. Dann gilt  $U$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $U$  wegzusammenhängend ist.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Gilt immer

„ $\Rightarrow$ “: siehe Skript □

**Definition 10.1.2.** Zwei Wege  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ ,  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$  sind homotop, falls es eine stetige Funktion  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  gibt mit  $\gamma_0 = \Gamma(\cdot, 0)$ ,  $\gamma_1 = \Gamma(\cdot, 1)$  und  $\Gamma(0, s) = \gamma_0(0)$ ,  $\Gamma(1, \cdot) = \gamma_1(0)$ . In diesem Fall heißt  $\Gamma$  Homotopie und liefert Äquivalenzklassen.

**10.1.3.** Zwei geschlossene Kurven  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$  und  $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$  sind homotop, wenn es eine Homotopie  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  gibt mit obigem Ergebnis.

**Definition 10.1.4.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann heißt  $U$  einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $z_0 := \gamma(0)$  homotop zu den trivialen  $\hat{\gamma} = z_0$  ist.

**Beispiel 10.1.5.** Sei  $U$  offen und konvex. Dann ist  $U$  einfach zusammenhängend.

*Beweis.* Zu  $z_0, w \in U$  ist  $[w, z_0] = \{w + s(z_0 - w) : 0 \leq s \leq 1\} \subseteq U$ .  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  ist ein geschlossener Weg,  $z_0 := \gamma(0)$ .  $\Gamma(t, s) := (1 - s)\gamma(t) + sz_0$  ist eine Homotopie von  $\gamma$  und  $\hat{\gamma} = z_0$ . □

**Beispiel 10.1.6.** Sei  $U$  offen und sternförmig (d.h.  $\exists z_0 \in U : [w, z_0] \subseteq U \forall w \in U$ ). Dann ist  $U$  einfach zusammenhängend.

*Beweis.* FALL 1:  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  ist eine geschlossene Kurve mit  $\gamma(0) = z_0 = \gamma(1)$ . Dann funktioniert wieder  $\Gamma(t, s) := (1 - s)\gamma(t) + sz_0$ .

FALL 2:  $\gamma(0) = z_1 \neq z_0$ . Nehme Weg  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $\gamma_1(0) = z_1$ ,  $\gamma_1(1) = z_0$ . Betrachte Weg  $\bar{\gamma} := \gamma_1^{-1}\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}\gamma_1 = \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1$ ,  $\hat{\gamma} := \gamma_1\gamma_1\gamma_1^{-1}$  geschlossener Weg von  $z_0$  nach  $z_0$ .  $\bar{\gamma}$  ist homotop zu  $\hat{\gamma} = \gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}$ .  $\gamma_s(t) := \gamma - 1(st)$  für  $0 \leq s \leq 1$  ist ein Weg von  $z_1$  nach  $\gamma_1(s)$ .  $\Gamma(\cdot, s) = \gamma_s^{-1}\hat{\gamma}\gamma_s$ . Dann ist  $\bar{\gamma}$  homotop zu  $\hat{\gamma}$ . □