

Skript zur Vorlesung  
Analysis IV  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>[*] Erinnerungen/Rückblick</b>	<b>3</b>
1.1	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ . . . . .	3
1.2	Konvergenz . . . . .	3
1.3	Ein paar Definitionen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>[*] Analytische Polynome</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>[*] Stenographische Projektion</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>[*] Komplexe Differenzierbarkeit</b>	<b>8</b>
4.1	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung . . . . .	8
4.2	Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>[*] Linienintegrale</b>	<b>13</b>

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 [\*] Erinnerungen/Rückblick

## 1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ( $\mathbb{C}$  ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass  $\mathbb{C}$  so die Körperaxiome erfüllt, wobei  $(0, 0)$  bzw.  $(1, 0)$  die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem  $i := (0, 1)$ . Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene*.

**Bemerkung 1.1.2.** Sei  $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dann gilt  $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$ . Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form  $a + bi$  schreiben.

**Definition 1.1.3** (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder  $z = a + bi$ . Dann ist die komplexe Konjugation von  $z$  definiert durch  $\bar{z} := a - bi$ . Damit ergibt sich die multiplikative Inverse  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse  $(-a, -b)$  ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

**Definition 1.1.4** (Real- und Komplexteil). Sei  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann schreiben wir  $\operatorname{Re}(z) = a$  sowie  $\operatorname{Im}(z) = b$ . Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

**Satz 1.1.5** (Cauchy-Schwarz für  $\mathbb{C}$ ). Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann gilt  $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z||w|$ .

*Beweis.* (fehlt)

□

## 1.2 Konvergenz

**Definition 1.2.1** (Konvergenz). Sei  $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$  eine Folge. Dann konvergiert diese gegen  $z$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  oder  $z_n \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$ . Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

**Definition 1.2.2** (Cauchy-Folgen). Wir nennen  $(z_n)_n$  eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

**Satz 1.2.3** (Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$ ). Die Folge  $(z_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(z_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist.

*Beweis.* (Nicht hier, siehe Ana 3).

□

**Bemerkung 1.2.4** (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen  $(s_n)_n$ ,  $s_n := \sum_{j=1}^n z_j$  konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von  $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$  ist dabei, dass  $z_n \rightarrow 0$ . Hinreichend ist z.B., dass  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

### 1.3 Ein paar Definitionen

**Definition 1.3.1** (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss). Wir definieren die (offene)  $\varepsilon$ -Scheibe um  $z$

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den  $\varepsilon$ -Kreis um  $z$

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \exists r > 0 : D_r(z) \subseteq S$$

Es sei  $S^C := \mathbb{C} \setminus S$ . Dann nennen wir  $S$  abgeschlossen, falls  $S^C$  offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von  $S$

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : S \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \wedge S^C \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von  $S$

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen  $S$  ist beschränkt, falls  $S \subseteq D_R(0)$  für ein  $R > 0$ . Außerdem ist  $S$  kompakt, falls  $S$  sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

$S$  ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen  $A, B$  gibt mit  $S \subseteq A \cup B$  mit  $S \cap A \neq \emptyset$ ,  $S \cap B \neq \emptyset$ .  $S$  ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

**Definition 1.3.2.** Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann definieren wir  $[z, w] := \{(1 - \Theta)z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$  als die Strecke zwischen  $z$  und  $w$ . Wir sagen eine Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten  $a, b \in S$  gibt. Das heißt es gibt  $z_1, \dots, z_n$  sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

**Definition 1.3.3.** Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

**Satz 1.3.4.** Sei  $U$  offen. Dann ist  $U$  genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

## 2 [\*] Analytische Polynome

**Motivation.** Sei  $P(x, y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ . Wir sagen  $P$  ist analytisch, wenn es ein Polynom in  $x + yi$  ist. Das heißt  $P(x, y) = \sum_{n=0}^L \alpha_n (x + iy)^n =: f(x + iy)$  für passende  $\alpha_n$ . Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom  $P(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$  ist analytisch, da  $P(x, y) = (x + iy)^2$ .

(ii)  $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2ixy$  ist nicht analytisch.

*Beweis für (ii).* Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^N a_k (x + iy)^k$$

Dann gilt für  $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_0 &= \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

□

**Definition 2.1.2** (Partielle Ableitung). Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = u(x, y) + v(x, y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von  $f$  wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &:= \partial_x f = \partial_x u + i \partial_x v = u_x + i v_x \\ f_y &:= \partial_y f = \partial_y u + i \partial_y v = u_y + i v_y \end{aligned}$$

**Satz 2.1.3.** Ein Polynom  $P(x, y)$  ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i \partial_x P \tag{2.1.1}$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{n=0}^N a_n (x + iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_x (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n (x + iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_y (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n i (x + iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\partial_x P = i\partial_y P$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0 \leq r \leq N_1 \\ 0 \leq s \leq N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=: G_n(x,y)} \\
 &\Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n G_n(x, y)
 \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die  $G_n$ . Das heißt für festes  $n$

$$\partial_y G_n(x, y) = \sum_{t=1}^n t \alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

||

$$i\partial_x G_n(x, y) = i \left( \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \alpha_t x^{n-t-1} y^t \right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \dots + nc_n y^{n-1} = i \left( nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-2} y + \dots + c_{n-1} y^{n-1} \right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned}
 c_1 &= inc_0 = i \binom{n}{1} c_0 \\
 c_2 &= i^2 \frac{n(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0
 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 G_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\
 &= c_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k = c_0 (x + iy)^n \\
 &\Rightarrow P(x, y) = \sum_{n=0}^N G_n(x, y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{n,0} (x + iy)^n
 \end{aligned}$$

Das heißt  $P$  ist analytisch. □

**Bemerkung 2.1.4.** Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

### 3 [\*] Stenographische Projektion

**Motivation.** Es sei  $\Sigma := \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$  die Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $\frac{1}{2}$  um den Punkt  $(0, 0, \frac{1}{2})$ . Dann lässt sich eine Abbildung  $(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  definieren. Wobei  $z$  der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und  $(\xi, \eta, \zeta)$  ist.  
Sei

$$\lambda((\xi, \eta, \zeta) - (0, 0, 1)) = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\xi = x, \quad \lambda\eta = y, \quad \lambda(\zeta - 1) &= -1 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{1 - \zeta} \\ \Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda &= \frac{y}{\eta} \\ \Rightarrow x &= \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{aligned}$$

Sind  $x, y$  gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

**Definition 3.1.1.** Sei  $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $z_n \rightarrow \infty$ , falls  $|z_n| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $f(z_n) \rightarrow \infty$ , falls  $|f(z_n)| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 3.1.2** (Zusammenhang von Kreisen in  $\Sigma$  und  $\mathbb{C}$ ). Ein Kreis in  $\Sigma$  ist ein Schnitt von  $\Sigma$  mit einer Ebene im  $\mathbb{R}^3$  der Form  $A\xi + B\eta + C\xi = D$ . Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned} D &= A \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + B \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + C \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \Leftrightarrow D &= (C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By \end{aligned}$$

FALL 1:  $C = D$ . Dann ist  $Ax + By = D$  eine Linie in  $\mathbb{C}$ .

FALL 2:  $C \neq D \Rightarrow$  Kreis in  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

**Satz 3.1.3.** (Sinngemäß: Kreise in  $\Sigma$  werden stenographisch auf Geraden projiziert.)

## 4 [\*] Komplexe Differenzierbarkeit

### 4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

**Definition 4.1.1.** Wir sagen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist (komplex) differenzierbar in  $z_0$ , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass  $h$  in  $\mathbb{C}$  gegen 0 konvergiert)

**Folgerung 4.1.2** (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung).

1. Setze  $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (das heißt wir wählen eine Folge von  $h$ , die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und  $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze  $h = it, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion  $f$  (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn  $f = u + iv$  für Funktionen  $u$  und  $v$ , dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Ist  $f$  in  $z \in U$  (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung  $f_x(z)$  und  $f_y(z)$  und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

**Bemerkung 4.1.4.** Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) &= 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) &= 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Das heißt für  $x \rightarrow 0$  kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.



**Satz 4.1.5** (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z \in U$  und  $f, g$  in  $z$  differenzierbar. Dann sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(z) \neq 0$ ) in  $z$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

*Beweis.* (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1).  $\square$

**Satz 4.1.6** (Ableitung von komplexen Polynomen). Sei  $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  ein Polynom in  $\mathbb{C}$ . Dann gilt  $P'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$ .

*Beweis.* Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z + h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow (z + h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z + h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( n z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1}\end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 4.1.7** (Ableitung von komplexen Potenzreihen). Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Dann ist  $f$  differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ .

**Bemerkung 4.1.8** (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann). Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Dann können wir diese auch interpretieren als Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen. Wir erinnern uns, dass  $f$  dann im Punkt  $(x, y)$  differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt mit

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \quad (h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix})$$

und  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Wir spalten  $f$  außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern  $f$  differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht  $A$  der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

**Satz 4.1.9.** Angenommen die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  in einer Umgebung von  $z$  existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist  $f$  komplex differenzierbar in  $z$  und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

*Beweis.* Sei  $f = u + iv$  und  $h = \xi + i\eta$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\rightarrow f_x(z) \text{ für } h \rightarrow 0 \\ u(z) &= u(x, y) \quad v(z) = v(x, y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y) + i(v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_1\eta}_{=:z_1}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(\underbrace{x+\Theta_2\xi, y}_{=:z_3}) \quad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_3\eta}_{=:z_2}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(\underbrace{x+\Theta_4\xi, y}_{=:z_4}) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} + i \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z_1) + iv_y(z_2)) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z_3) + iv_x(z_4)) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z))}_{\rightarrow 0} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\xi}{\xi} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\eta}{i\eta} \right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \rightarrow 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben.  $\square$

**Beispiel 4.1.10.** Es sei  $f(z) = x^2 + y^2 = z\bar{z}$ . Dann gilt  $f_x = 2x$  sowie  $f_y = 2y$ . Das heißt  $f_y = if_x$  gilt nur für  $z = 0$ . Ist  $f$  dann differenzierbar?

**Definition 4.1.11.** Wir sagen  $f$  ist analytisch in  $z$ , falls  $f$  (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von  $z$ .  $f$  ist außerdem analytisch auf  $S \subseteq \mathbb{C}$ , falls  $f$  (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von  $S$ .

**Satz 4.1.12.** Sei  $f = u + iv$  analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge  $D$  ( $D$  Umgebung). Ist  $u$  konstant auf  $D$ , so ist  $f$  konstant.

*Beweis.*  $u$  ist konstant auf  $D$ . Das heißt  $u_x = u_y = 0$  auf  $D$ . Nach Satz 4.1.3 ist auch  $v_x = v_y = 0$  auf  $D$ . Da  $D$  zusammenhängend ist, ist also auch  $v$  konstant und damit ist  $f = u + iv$  konstant.  $\square$

**Satz 4.1.13.** Sei  $f = u + iv$  analytisch auf einer Umgebung  $D$ . Ist  $|f|$  konstant auf  $D$ , so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $|f| > 0$ . Dann gilt  $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x (u^2 + v^2) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y (u^2 + v^2) = 2uu_y + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 0 = u^2 u_x - uvv_y \\ 0 = uvu_y + v^2 u_x \end{cases} \\ \Rightarrow & 0 = (u^2 + v^2) u_x = C \cdot u_x \\ \Rightarrow & u_x = 0 \\ \Rightarrow & v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $u_y = -v_x = 0$ . Damit sind  $u, v$  und somit  $f$  konstant.  $\square$

**4.2 Die Funktionen  $e^z, \cos z, \sin z$** 

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \frac{d}{dz} e^z &= e^z \\
 e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
 &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\
 \overline{e^z} &= e^{\bar{z}} \\
 \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\
 \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})
 \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
 \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\
 \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})
 \end{aligned}$$

## 5 [\*] Linienintegrale

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion auf  $I = [a, b]$ . Dann gilt

$$\int_I f \, dt = \int_a^b f(t) \, dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

**Definition 5.1.2** (Glatte Kurven).

- (i) Sei  $z(t) := x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ). Die Kurve  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  ist bestimmt durch  $z(t)$  und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$

falls die Funktionen  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  sind und es eine Partition

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \quad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass  $x(t), y(t)$  stetig differenzierbar auf  $[t_{j-1}, t_j]$  sind

- (ii) Die Kurve heißt glatt, falls  $\dot{z}(t) \neq 0$  bis auf endlich viele  $t \in [a, b]$

**Definition 5.1.3** (Kurvenintegral). Sei  $C : z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von  $f$  (definiert in einer Umgebung von  $C$  oder nur auf  $C$ ) ist definiert durch

$$\int_C f \, dz = \int_C f(z) \, dz := \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) \, dt$$

**Definition 5.1.4** (Zwei Kurven). Zwei Kurven  $C_1 := z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $C_2 : w(t)$ ,  $c \leq t \leq d$  sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive  $C^1$ -Abbildung  $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$  gibt mit  $\lambda(c) = a$ ,  $\lambda(d) = b$ ,  $\lambda'(t) \geq 0$  und  $w(t) = z(\lambda(t))$  (für  $c \leq t \leq d$ ).

**Satz 5.1.5.** Sind die Kurven  $C_1, C_2$  äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f \, dz = \int_{C_2} f \, dz$$

*Beweis.* Es gilt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t))) \dot{z}(\lambda(t)) \dot{\lambda}(t) \, dt = \int_a^b h(z(s)) \dot{z}(s) \, ds \quad \square$$

**Satz 5.1.6.** Es gilt

$$\int_C f \, dt = - \int_{-C} f \, dt$$

wobei  $-C : z(a+b-t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

*Beweis.* Wir setzen  $w(t) = z(a + b - t)$ . Dann gilt  $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a + b - t)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(w) \, dw &= \int_a^b f(w(t)) \dot{w}(t) \, dt = - \int_a^b f(z(a + b - t)) \dot{z}(a + b - t) \, dt \\ &= \int_b^a f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_a^b f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_C f(z) \, dz\end{aligned}\quad \square$$

**Beispiel 5.1.7.** Sei  $f(z) = x^2 + iy^2$  mit  $z = x + iy$  sowie  $C = z(t) = (1 + i)t$  für  $0 \leq t \leq 1$ .

$$\begin{aligned}\int_C f(z) \, dz &= \int_0^1 f(1 + it) (1 + i) \, dt \\ &= (1 + i)^2 \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{2i}{3}\end{aligned}$$

**Beispiel 5.1.8.** Sei  $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$  mit  $C : z(t) = R(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z} \, dz &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{R \cos t}{R^2} - \frac{R \sin t}{R^2} \right) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, d2\pi t\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{dz}{z} \, dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it} \, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\end{aligned}$$

**Beispiel 5.1.9.** Sei  $f = 1$  und  $C$  eine beliebige Kurve

$$\int_C dz = \int_a^b \dot{z}(t) \, dt = z(b) - z(a)$$

**Satz 5.1.10** ( $C$ -glatte Kurve). Seien  $f, g$  stetige Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C f + g \, dz &= \int_C f \, dz + \int_C g \, dz \\ \int_C \alpha f \, dz &= \alpha \int_C f \, dz\end{aligned}$$

*Beweis.* (Selber machen) . □

**Definition 5.1.11.** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $\alpha \ll \beta$ , falls  $|\alpha| \leq |\beta|$ .

**Lemma 5.1.12.** Sei  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b G(t) \, dt &\ll \int_a^b |G(t)| \, dt \\ \Rightarrow \int_a^b G(t) \, dt &\leq \int_a^b |G(t)| \, dt\end{aligned}$$

Beweise  $G(t) = \operatorname{Re}(G(t)) - i \sin(G(t))$ . Trick:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t) \, dt &= R e^{i\varphi} & (R > 0, \varphi \in \mathbb{R}) \\ \int_1^b G(t) \, dt &= R = \bar{e} \int_a^b G(t) \, dt = \int_a^b e^{-i\varphi} G(t) \, dt \\ \operatorname{Re} \left( \int_a^b e^{-i\varphi} G(t) \, dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Re} \left( e^{-i\varphi} G(t) \right) \, dt \\ &\leq \int_a^b |G(t)| \, dt \end{aligned}$$

**Satz 5.1.13.** Sei  $C$  eine Kurve der Länge  $L$  auf  $f$ , stetig auf  $\mathbb{C}$  und  $|f(z)| \leq M \, \forall z \in \mathbb{C}$ . Dann folgt

$$\int_C f(z) \, dz \ll M \cdot L$$

*Beweis.* (Fehlt) □

**Korollar 5.1.14.** Sei  $(f_n)_n$  eine Folge stetiger Funktionen und  $f_n \rightarrow f$ . Dann folgt

$$\int_C f \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n \, dz$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) \, dz - \int_C f_n(z) \, dz \right| &= \left| \int_C (f(z) - f_n(z)) \, dz \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z) - f_n(z)| \, dt = \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z) - f_n(z)|}_{\rightarrow 0} \cdot L_z \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 5.1.15.** Angenommen  $f = F'$ ,  $F$  analytisch auch eine Kurve  $C$  mit Analysepunkt  $z(a)$ , Endpunkt  $z(b)$ . Dann folgt

$$\int_C f \, dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} F(z(t)) &= F'(z(t)) \dot{z}(t) = f(z(t)) \dot{z}(t) \\ \int_C f \, dz &= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) \, dt \\ &= \int_a^b \gamma(t) \, dt = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned} \quad \square$$