Skript zur Vorlesung
Analysis IV
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1 [*] Erinnerungen/Rückblick **3**
1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ 3
1.2 Konvergenz 3
1.3 Ein paar Definitionen 4

2 [*] Analytische Polynome **5**

3 [*] Stenographische Projektion **7**

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit **8**
4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung 8
4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$ 12

5 [*] Linienintegrale **13**
5.1 Definition und Berechnung 13
5.2 Integrale über geschlossenen Kurven 15

6 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen **18**

7 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen **19**
7.1 Vorbereitung 19
7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung 20
7.3 Liouville 22

8 [*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze **24**
8.1 Formulierung 24
8.2 Anwendungen 25

9 [*] Eine Umkehrung von Cauchy: Morera **29**
9.1 Satz von Morera 29
9.2 Reflexionsprinzip von Schwarz 29

10 [*] Einfach zusammehängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz **32**

11 [*] Halbierte Singularitäten **37**

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ($\mathbb{C}$ ist ein Körper)**.** Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) \coloneqq (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) \coloneqq (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass $\mathbb{C}$ so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i \coloneqq (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene.*

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation)**.** Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a + bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\overline{z} \coloneqq a - bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil)**.** Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\operatorname{Re}(z) = a$ sowie $\operatorname{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{i}(z - \overline{z})$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für $\mathbb{C}$)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(\overline{z}w) \leq |z|\,|w|$.

Beweis. (fehlt) □

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz)**.** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z, falls

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen)**.** Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)**.** Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3) . □

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \to 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss)**.** Wir definieren die (offene) ε-Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε-Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) \coloneqq \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \; \exists r > 0 \colon D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^\mathrm{C} \coloneqq \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^C offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S \coloneqq \left\{z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \colon S \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing \wedge S^\mathrm{C} \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing\right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} \coloneqq S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.
S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \varnothing$, $S \cap B \neq \varnothing$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] \coloneqq \{(1 - \Theta)\, z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w. Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt $z_{1,\ldots,n}$ sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x,y) = \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x,y) = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n (x+iy)^n =: f(x+yi)$ für passende a_n. Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x,y) = (x+iy)^2$.

(ii) $P(x,y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^{N} a_k (x+iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_N \\ \alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = u(x,y) + v(x,y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &\coloneqq \partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = u_x + iv_x \\ f_y &\coloneqq \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v = u_y + iv_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x,y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i\partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_x (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n (x+iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_y (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n i (x+iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„⇐" Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
&= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0\le r\le N_1\\ 0\le s\le N_2\\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
&= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=:G_n(x,y)} \\
\Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^n G_n(x,y)
\end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n. Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x,y) = \sum_{t=1}^{n} t\alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

$$\|$$

$$i\partial_x G_n(x,y) = i\left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\,\alpha_t x^{n-t-1} y^t\right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \ldots + nc_n y^{n-1} = i\left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)\,c_1 x^{n-2} y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1}\right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned}
c_1 &= inc_0 = i\binom{n}{1} c_0 \\
c_2 &= i^2 \frac{n\,(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0
\end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
G_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,(iy)^k = c_k\,(x+iy)^n \\
\Rightarrow P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} G_n(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,0}\,(x+iy)^n
\end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. □

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\sum \coloneqq \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \in \sum \setminus \{(0,0,1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ, η, ζ) ist.
Sei

$$\lambda \left((\xi, \eta, \zeta) - (0,0,1) \right) = (x, y, 0) - (0,0,1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\xi = x,\ \lambda\eta = y, \lambda(\zeta - 1) = -1 \\ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1-\zeta} \\ \Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda = \frac{y}{\eta} \\ \Rightarrow x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{aligned}$$

Sind x, y gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n \to \infty$, falls $|z_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ sowie $f(z_n) \to \infty$, falls $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in $\sum$ und $\mathbb{C}$)**.** Ein Kreis in $\sum$ ist ein Schnitt von $\sum$ mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ der Form $A\xi + B\eta + C\xi = D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned} D &= A\frac{x}{x^2+y^2+1} + B\frac{y}{x^2+y^2+1} + C\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \\ \Leftrightarrow D &= (C - D)\left(x^2 + y^2\right) + Ax + By \end{aligned}$$

Fall 1: $C = D$. Dann ist $Ax + By = D$ eine Linie in $\mathbb{C}$.
Fall 2: $C \neq D \Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (*Sinngemäß: Kreise in $\sum$ werden stenographisch auf Geraden projeziert.*)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in $\mathbb{C}$ gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung)**.**

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h, die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} &= \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \to \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze $h = it$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_+ t) - f(x_0, y_0)}{t} \to \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v, dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) = 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) = 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Das heißt für $x \to 0$ kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z)\\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1) . □

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen)**.** Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ (z+h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1}\end{aligned}$$ □

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen)**.** Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann)**.** Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch intepretieren als Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x + h_1, g + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \qquad \left(h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)$$

und $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Wir spalten f außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad &\text{und} \quad u_y = -v_x \end{aligned}$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\to f_x(z) \text{ für } h \to 0 \\ u(z) = u(x,y) & \qquad v(z) = v(x,y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) + i\left(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)\right) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_1\eta)}_{=:z_1} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x \underbrace{(x+\Theta_2\xi, y)}_{=:z_3} \qquad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_3\eta)}_{=:z_2} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x \underbrace{(x+\Theta_4\eta\xi, y)}_{=:z_4} \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} + i\frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta}\left(u_y(z_1) + iv_y(z_2)\right) + \frac{\xi}{\xi + i\eta}\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4)\right) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z)\right)}_{\to 0} + \frac{\xi}{\xi - i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z)\right)}_{\to 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\xi}{\xi}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\eta}{i\eta}\right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f_x(z) \to 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2+y^2 = z\overline{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z. f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S.

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D. Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D. Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D. Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u+iv$ konstant. □

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D. Ist $|f|$ konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x\left(u^2+v^2\right) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y\left(u^2+v^2\right) = 2uu_x + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 = u^2u_x - uvu_y \\ 0 = uvu_y + v^2u_x \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 = \left(u^2+v^2\right)u_x = C \cdot u_x \\ &\Rightarrow u_x = 0 \\ &\Rightarrow v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. □

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z &= e^z \\
e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
&= \cos\varphi + \sin\varphi \\
\overline{e^z} &= e^{\overline{z}} \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)
\end{aligned}$$

5 [*] Linienintegrale

5.1 Definition und Berechnung

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf $I = [a,b]$. Dann gilt

$$\int_I f \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \coloneqq \int_a^b Re(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.2 (Glatte Kurven)**.**

(i) Sei $z(t) \coloneqq x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Die Kurve $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ ist bestimmt durch $z(t)$ und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

falls die Funktionen $x, y, : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ sind und es eine Partition

$$[a,b] = [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n] \qquad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[t_{j-1}, t_j]$ sind

(ii) Die Kurve heißt glatt, falls $\dot{z}(t) \neq 0$ bis auf endlich viele $t \in [a,b]$

Definition 5.1.3 (Kurvenintegral)**.** Sei $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von f (definiert in einer Umgebung von C oder nur auf C) ist definiert durch

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \coloneqq \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.4 (Zwei Kurven)**.** Zwei Kurven $C_1 \coloneqq z(t),\ a \leq t \leq b$, $C_2 : w(t),\ c \leq t \leq d$ sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\lambda : [c,d] \to [a,b]$ gibt mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) \geq 0$ und $w(t) = z(\lambda(t))$ (für $c \leq t \leq d$).

Satz 5.1.5. Sind die Kurven C_1, C_2 äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f\,\mathrm{d}z$$

Beweis. Es gilt die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t)))\dot{z}(\lambda(t))\dot{\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b h(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s$$ □

Satz 5.1.6. Es gilt

$$\int_C f\,\mathrm{d}t = -\int_{-C} f\,\mathrm{d}t$$

wobei $-C : z(a+b-t),\ a \leq t \leq b$.

Beweis. Wir setzen $w(t) = z(a+b-t)$. Dann gilt $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a+b-t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_a^b f(w(t))\dot{w}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(z(a+b-t))\dot{z}(a+b-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^a f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.7. Sei $f(z) = x^2 + iy^2$ mit $z = x + iy$ sowie $C = z(t) = (1+i)\,t$ für $0 \le t \le 1$.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f((1+i)\,t)\,(1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1+i)^2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2i}{3}\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.8. Sei $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ mit $C : z(t) = R\,(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2} - \frac{R\sin t}{R^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\mathrm{d}2\pi t\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.9. Sei $f = 1$ und C eine beliebige Kurve

$$\int_C \mathrm{d}z = \int_a^b \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t = z(b) - z(a)$$

Satz 5.1.10 (C-glatte Kurve)**.** Seinen f, g stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C f + g\,\mathrm{d}z &= \int_C f\,\mathrm{d}z + \int_C g\,\mathrm{d}z \\ \int_C \alpha f\,\mathrm{d}z &= \alpha\int_C f\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Beweis. (Selber machen) . □

Definition 5.1.11. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \le |\beta|$.

Lemma 5.1.12. Sei $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned}&\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \ll \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow &\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Beweise $G(t) = \operatorname{Re}(G(t)) - i\sin(G(t))$. Trick:

$$\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t = Re^{i\varphi} \qquad (R > 0, \varphi \in \mathbb{R})$$

$$\int_1^b G(t)\,\mathrm{d}t = R = \overline{e}\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\varphi}G(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\varphi}G(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\Big(e^{-i\varphi}G(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t$$

Satz 5.1.13. Sei C eine Kurve der Länge L auf f, stetig auf $\mathbb{C}$ und $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \ll M \cdot L$$

Beweis. (Fehlt) □

Korollar 5.1.14. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen und $f_n \to f$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \lim_{h\to\infty}\int_C f_n\,\mathrm{d}z$$

Beweis.

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f_n\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_C (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_a^b \mathrm{d}f(z)ofh - f_n(z(t))\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z) - f_n(z)|}_{\to 0}\cdot L_z$$ □

Lemma 5.1.15. Angenommen $f = F'$, F analytisch auch eine Kurve C mit Analysepunkt $z(a)$, Endpunkt $z(b)$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a))$$

Beweis.

$$F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t) = f(z(t))z(t)$$

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a))$$ □

5.2 Integrale über geschlossenen Kurven

[06. Mai] **Definition 5.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine Kurve in U. Dann nennen wir C geschlossen, falls $z(a) = z(b)$. Eine geschlossene Linie heißt einfach, falls $z(t_1) = z(t_2)$ für $t_1 < t_2 \in [a, b]$ schon impliziert, dass $t_1 = a, t_2 = b$.

Bemerkung 5.2.2. Ein (Standard-)Rechteck R in U ist ein abgeschlossenes, achsen-paralleles Rechteck. Rand $\Gamma = \partial R$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das erste Ziel dieses Kapitels soll es sein, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2.3 (Rechteckssatz I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R \subseteq U$ ein Rechteck mit Rand Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Lemma 5.2.4. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ affin linear. Dann gilt Satz 5.2.3

Beweis. Es ist $F(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2} z^2$ eine Stammfunktion von f mit $z(t)$ Parameterlösung von Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Lemma 5.1.15}}{=} F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass $z(b) = z(a)$. ☐

Beweis von Satz 5.2.3. (Erfolt durch Überdeckung und schlaue Abschätzung, fehlt hier) ☐

Satz 5.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ und $R > 0$, sodass $D_R(z_0) = \{|z - z_0| \leq R\} \subseteq U$. Dann existiert eine analytische Funktion $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D_R(z_0)$. D.h. f hat lokal in der Nähe von z_0 eine Stammfunktion.

Beweis. O.B.d.A. sei $U = D_R(z_0)$. Zwischen $w, z \in D_R(z_0)$ gibt es einen Weg

$$\gamma_{w,z}(t) = \begin{cases} w + \mathrm{Re}(z-w)t & 0 \leq t \leq 1 \\ w + \mathrm{Re}(z-w) + i\,\mathrm{Im}(z-w)\,(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Durch geometrische Überlegungen sehen wir, dass sich die Pfade auch folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\Gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \overset{\text{Satz 5.2.3}}{=} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\int_{\gamma_{z,z+h}} 1\,\mathrm{d}w = z + h - w = h$$

Das heißt für festes z

$$\frac{1}{h} \int f(z)\,\mathrm{d}w = f(z)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w \\
\Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)-f(z)\,\mathrm{d}w\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot(|\mathrm{Re}(h)|+|\mathrm{Im}(h)|) \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot 2\,|h| \\
&= 2\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)| \to 0 \text{ für } h\to 0
\end{aligned}
$$
□

Satz 5.2.6. Ist $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch und C eine glatte, geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Nach Satz 5.2.5 hat f eine Stammfunktion F auf $D_R(z_0)$ und F ist analytisch. C : $z(t),\ a \leq t \leq b$ und wegen geschlossen gilt $z(a) = z(b)$. Damit folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$
□

Vorsicht, dieser Satz gilt nur lokal:

Beispiel 5.2.7. Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ und $C : Re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Andererseits ist

$$\int_C z^k\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

6 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

ist stetig auf U. Wir wollen jetzt den Rechtecksatz auf g erweitern.

Satz 6.1.1 (Rechtecksatz II)**.** Ist $R \subseteq U$ ein Rechteck. dann gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Fall 1: $\alpha \notin R$. Dann betrachten wir eine Umgebung von R, in der α nicht enthalten ist und verwenden Satz 5.2.3, da g analytisch auf R ist.

Fall 2: $\alpha \in \partial R$. Dann teilen wir R in 6 Subrechtecke $R_{k\in\{1,\ldots,6\}}$ und es sei $\alpha \in \partial R_1$. Dann gilt

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{6} \int_{\partial R_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Nach Fall 1 haben wir dann

$$= \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z$$
$$\left| \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \underbrace{\sup_{z\in\partial R_1} |g(z)|}_{<\infty} \cdot \operatorname{diam}(R_1)$$

Wir können R_1 aber beliebig klein machen. Damit geht der Ausdruck gegen 0.

Fall 3: $\alpha \in R \setminus \partial R$. Wir gehen wie in Fall 2 vor und teilen R in 6 Subrechtecke auf. Damit gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \text{ für } \operatorname{diam}(R_1) \to 0$$ □

7 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1 Vorbereitung

[12. Mai] **Situation:** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{\alpha\}$.

Korollar 7.1.1. In der obigen Situation hat g wieder lokal eine Stammfunktion. Genau gilt: Für jeden Punkt $z_0 \in U$ gibt es ein $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $F' = g$ auf $D_R(z_0)$ für ein $R > 0$. Ist insbesondere C eine geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Satz 7.1.2 (Cauchy-Integralformel I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Ferner sei $0 < \rho < R$ und $C\rho(\alpha)$ die Kurve $z(t) := \rho e^{it} + \alpha$. Dann folgt

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Wir betrachten

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

Dann gilt nach Korollar 7.1.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C\rho(\alpha)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)-f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha - \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= f(\alpha) \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\,\mathrm{d}x = f(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,\mathrm{d}t = f(\alpha) 2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i f(\alpha) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.1.3. In Satz 7.1.2 gilt sogar $\forall z \in D_\rho(\alpha)$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Lemma 7.1.4. Sei $C\rho(\alpha) : z(t) = \rho e^{it} + \alpha \subseteq D_R(\alpha)$ $(R > \rho > 0)$. Dann gilt für alle $z \in D_\rho(\alpha)$

$$\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha-(z-\alpha)}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

Es ist $|z-\alpha|<\rho$ und $|w-\alpha|<\rho$. Also ist

$$\delta = \left|\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right| = \frac{|z-\alpha|}{\rho} < 1 \quad \forall w \in C\rho(\alpha)$$

Wir schreiben um über die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n$$

Wir haben gleichmäßige und absolute Konvergenz

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n\mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\int_{C\rho(\alpha)}\frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)}\frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w &= \int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{it}}{(\rho e^{it})^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\geq 1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\int_{C\rho(\alpha)}\frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$$

□

Korollar 7.1.5 (Cauchy-Integralformel II)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ analytisch sowie $\alpha \in U$, $R>0$ mit $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt $\forall 0<\rho<R$ und $z \in D_\rho(\alpha)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Nach Korollar 7.1.1 gilt

$$0 = \int_{C\rho(\alpha)}\frac{f(w)-f(z)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\underbrace{\int_{C\rho(\alpha)}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i}$$

□

7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung

Satz 7.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha \in U$, $R>0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann hat f eine in $D_R(\alpha)$ konvergente Potenzreihe. Das heißt es existiert eine Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Dabei ist $D_R(\alpha)$ „=“ $\mathbb{C}$ erlaubt.

Beweis. Für $z \in D_\rho(\alpha)$ haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha-(w-\alpha)} \,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} \,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Wir können wieder die Umschreibung zur geometrischen Reihe verwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} \,\mathrm{d}w}_{=:a_n(\rho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho)\,(z-\alpha)^n \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2. In Satz 7.2.1 ist $(a_n)_n$ unabhängig von $R > 0$, solange $D_R(\alpha) \subseteq U$.

Beobachtung 7.2.3. Ist $z \in D_R(\alpha)$, so existiert ein ρ mit $|z-\alpha| < \rho < R$. Für dieses ρ haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\rho)}{2\pi i} (z-\alpha)^n$$

Beobachtung 7.2.4. $a_n(\rho)$ ist unabhängig von $0 < \rho < R$.

Beweis. Sei $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ und $|z-\alpha| < \rho_1$. Dann folgt

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1)\,(z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2)\,(z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_{\rho_1}(\alpha)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen haben wir $a_n(\rho_1) = a_n(\rho_2)$. □

Korollar 7.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Lokal ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist f unendlich oft komplex differenzierbar. □

[13. Mai] **Korollar 7.2.6.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

Satz 7.2.7. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in U$. Dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. In $D_R(\alpha) \subseteq U$ gilt $f(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n$ mit $a_0 = f(\alpha)$. Das heißt

$$g(z) = \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^{n-1}$$

□

7.3 Liouville

Notation 7.3.1. Eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ganze Funktion.

Korollar 7.3.2. Habe $f : U \to \mathbb{C}$ in U genau N Nullstellen $a_1, \ldots, A_N \in U$. Dann definieren wir

$$g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_N)} \qquad (z \neq a_j)$$

Dann gilt $\lim_{z\to a_k} g(z)$ existiert und g ist analytisch.

Beweis. Sei $f_0(z) \coloneqq f(z)$ und

$$f_k(z) \coloneqq \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z-a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z-a_k} \qquad (z \neq a_k)$$

Nach Induktion und Satz 7.2.7 gilt dann, dass f_k analytisch ist für alle $k \in \{0, \ldots, N\}$. Beachte $g = f_N$. □

Satz 7.3.3. Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Für alle $R > 0$ ist $z \in D_R(0)$ und

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w$$

Seien $z_1, z_2 \in D_R(\cdot)$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} \left(\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z_2} \right) \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} f(w) \frac{z_1 - z_2}{(w-z_1)(w-z_2)} \,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Es ist $|f(w)| < M < \infty$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Nach M-L-Regel gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi R}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} \to 0 \text{ für } R \to \infty$$

Das heißt f ist konstant. □

Satz 7.3.4. Sei f eine ganze Funktion und für ein $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $A, B \geq 0$ mit $|f(z)| \leq A + B|z|^k \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. $k = 0$ ist Satz 7.3.3.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist g eine ganze Funktion

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} && (|z| \geq 1) \\ &\leq \frac{A + B|z|^k + |f(0)|}{|z|} \leq \tilde{A} + B|z|^{k-1} \\ |g(z)| &\leq C && (|z| \leq 1) \\ \Rightarrow \; |g(z)| &\leq \max\left(\tilde{A}, C\right) + B|z|^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung ist g ein Polynom vom Grad $\leq k-1$. Dann ist $f(z) = zg(z) + f(0)$ ein Polynom vom Grad $\leq k$. □

Satz 7.3.5. Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right| \\ &= |z^n| \underbrace{\left|a_n + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^- n\right|}_{\geq |a_n| - |a_{n-1}||z|^{-1} - \ldots - |a_1||z|^{1-n} - |a_0||z|^{-n}} \\ &\geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n \end{aligned}$$

Das heißt $P(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Wenn P keine Nullstelle hat, dann ist

$$h(z) = \frac{1}{P(z)}$$

wohldefiniert und $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Damit ist h eine beschränkte analytische Funktion und nach Satz 7.3.3 ist h konstant. Das heißt P war bereits konstant. □

Bemerkung 7.3.6. Satz 7.3.5 erweitert sich wie folgt: Sei $g(z) := \frac{P(z)}{z - a_1}$ für P ein Polynom mit Nullstelle a_1. Dann ist

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq A + B |z|^n \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq \tilde{A} + \tilde{B} |z|^{n-1} \end{aligned}$$

Das heißt g ist ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ und nach Satz 7.3.3 gilt $P(z) = (z - a_1)\, g(z)$. Das heißt wir können ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor vollständig in seine Nullstellen aufspalten.

8 [*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze

8.1 Formulierung

Satz 8.1.1 (Eindeutigkeit)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Sei $S \subseteq U$ mit Häufungspunkt in U und $f(z) = 0\ \forall z \in S$. Dann ist $f = 0$ in U.

Beweis. Sei $\alpha \in U$ Häufungspunkt von S. Dann existiert ein $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \alpha\right)^n \quad \forall z \in \mathrm{D}_R(\alpha)$$

Das heißt es existiert eine Folge $z_k \in S$ mit $z_k \neq \alpha$, $z_k \to \alpha$ mit $f(z_k) = 0\ \forall k$. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Potenzreihen folgt damit

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f = 0 \text{ auf } D_R(\alpha) \\ &A \coloneqq \{z \in U : z \text{ ist Häufungspunkt von Nullstellen von } f\} \\ &B = U \setminus A \end{aligned}$$

Behauptung 1: A ist offen. Sei $z_0 \in A$, existieren $R > 0$, sodass

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \quad \forall z \in D_r(z_0) \\ \Rightarrow D_r(z_0) &\subseteq A \end{aligned}$$

Das heißt A ist offen. Behauptung 2: B ist offen. Sei $w \in B$. Dann hat w einen Siherheitsabstand von der Nullstelle von f

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_r(w) \subseteq B$$

Damit ist B offen. Daraus, dass U zusammenhänged ist, folgt, dass A oder B leer ist. Da $\alpha \in A$ folgt also $B = \varnothing$

$$\Rightarrow A = U$$

Da f stetig ist, folgt $f(z) = 0\ \forall z \in U$. □

Korollar 8.1.2. Seinen $f, g : U \to \mathbb{C}$ analytisch, U offen und zusammenhängend. Seien $f(z) = g(z)$ für alle $z \in S$, wobei S hat Häufungspunkt in U. Dann gilt bereits $f = g$ auf U.

Beweis. Betrachte $f - g$ und wende vorherigen Satz an. □

Beispiel 8.1.3. $\sin(z) = 0$ für $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 8.1.4 (Mittelwertsatz)**.** Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und U offen. Sei $\alpha \in U$, $R > 0$, $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt

$$\forall 0 < r < R\colon\ f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\Big(\alpha + re^{it}\Big)\,\mathrm{d}t$$

Beweis. Sei $C_r(\alpha) : w(t) = re^{it} + \alpha$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{it} + \alpha\right)}{re^{it}} \cdot re^{it}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

[19. Mai] **Satz 8.1.5** (Maximum modulus)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann hat $|f|$ kein lokales Maximum in U. Das heißt $\forall \alpha \in U$ und $\delta > 0$ mit $D_\delta(\alpha) \subseteq U$ existiert ein $z \in D_\delta(\alpha)$ mit $|f(z)| > |f(\alpha)|$.

Beweis. Sei $\alpha \in U$. Nach Satz 8.1.4 gilt

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(re^{it} + \alpha \right) \right) \mathrm{d}t \quad \forall \alpha \in U, \overline{D_r(\alpha) \subseteq U} \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| f\left(re^{it} + \alpha \right) \right| \end{aligned} \tag{1}$$

Satz 8.1.5 folgt, wenn wir folgendes zeigen: Ist f nicht-konstant, so gibt es ein $w \in Cr(\alpha)$ mit $|f(w)| > |f(\alpha)|$. Angenommen das ist der Fall, dann würde gelten

$$|f(w)| \leq |f(\alpha)| \quad \forall w \in Cr(\alpha) \text{ für } r > 0 \text{ klein genug}$$

Darum muss $|f(w)| = |f(\alpha)|$ sein für alle $w \in Cr(\alpha)$ für $r > 0$ klein genug. Ansonsten ist

$$|f(w_0)| \leq |f(\alpha)|$$

?, dass $w_0 \in Cr(\alpha)$. $w_0 = w(t_0) = re^{it} + \alpha$, $t_0 \in [0, 2\pi]$. Aus der Stetigkeit von $|f|$ folgt jetzt

$$\begin{aligned} &\exists \delta > 0\colon\ |f(w(t))| < |f(w)| \quad t \in [0, 2\pi], |t - t_0| \leq \delta \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} &|f(w(t))| \, \mathrm{d}t < |f(\alpha)| \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu (1). Also haben wir

$$\left| f\left(re^{it} + \alpha \right) \right| = |f(\alpha)| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \text{ mit } r > 0 \text{ klein genug}$$

Das heißt $|f|$ ist konstant auf $\overline{D_{r_0}(\alpha)}$ für ein $r_0 > 0$. Damit ist nach Satz 4.1.13 bereits f konstant auf $D_{r_0}(\alpha)$ und nach Satz 8.1.1 ist f konstant auf U. ☐

Korollar 8.1.6. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Nimmt $|f|$ ein (lokales oder globales) Maximum in U an, so ist f konstant.

Beweis. Umformulierung von Satz 8.1.5 ☐

Korollar 8.1.7. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhänged und beschränkt, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig und f analytisch auf U. Dann folgt

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$$

Das heißt das Maximum wird am Rand ∂U angenommen.

8.2 Anwendungen

Situation: Wir haben die Einheitsscheibe $D_1(0)$ und $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Dann wollen wir zeigen, dass

(a) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1$

(b) $|f'(0)| \leq 1$

Beweis. Definiere

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist g analytisch auf $D_1(0)$. Sei $0 < r < 1$ mit $|z| = r$

$$\Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \forall 0 < r < 1$$

Nach Satz 8.1.5 folgt

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad \forall\, |z| \leq r \\ |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad |z| \leq r \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq 1 \quad \forall\, |z| < 1 \\ \Rightarrow \forall 0 < |z| < 1\colon \frac{|f(z)|}{|z|} &= |g(z)| \leq 1 \\ \Rightarrow |f(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

und für 8b) gilt

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

□

Ferner gilt: Gilt „=“ für ein $|z| < 1$ in (a) oder „=“ in (b), so ist

$$f(z) = e^{i\Theta} z$$

für ein $\Theta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.2.1. Die obigen Aussagen kombiniert sind auch bekannt als das Lemma von Schwarz.

Andere Situation: Sei $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch, $|f(z)| \geq 1$ für alle $|z| < 1$ und $f(\alpha) = 0$ für ein $|\alpha| < 1$. Definiere

$$B_\alpha(z) \coloneqq \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Dann folgt (mit Beweis, der hier fehlt), dass

(a) $|f(z)| \leq |B_\alpha(z)|$ für alle $|z| < 1$

(b) $|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}$

Notation 8.2.2. Sei $\mathcal{A}_\alpha \coloneqq \{f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch und $|f(z)| \leq 1\ \forall\, |z| < 1$ und $f(\alpha) = 0\}$. Das heißt

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f(z)| = |B_\alpha(z)|$$

und

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

Leicht andere Frage: Sei $\mathcal{A} \coloneqq \{f : D_\eta(0) \to \mathbb{C} \text{ analytisch mit } |f(z)| \leq 1, |\eta| < 1\}$. Was ist

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} |f'(\alpha)|$$

? Es ist

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

[20. Mai] **Satz 8.2.3** (Minimum-Modulus)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Dann kann kein Punkt $\alpha \in U$ ein lokales Minimum von $|f|$ sein, außer $|f(\alpha)| = 0$.

Beweis. Angenommen $|f(\alpha)|$ ist ein lokales Minimum von $|f(z)|$, z nahe α und $f(\alpha) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\exists r > 0 \colon D_r(\alpha) \subseteq U$$

und

$$\begin{aligned} f(z) &\neq 0 \quad \forall z \in D_r(\alpha) \\ h : D_r(\alpha) \to \mathbb{C},\ h(z) &= \frac{1}{f(z)} \end{aligned}$$

ist analytisch auf $D_r(\alpha)$. $|h|$ hat in α ein lokales Maximum. Nach Satz 8.1.5 ist h damit konstant in $D_r(\alpha)$. Damit ist f konstant in U. □

Satz 8.2.4. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Dann ist $f(D)$ offen für jede offene Menge $D \subseteq U$.

Beweis. Sei f nicht-konstant und analytisch, $D \subseteq U$ offen, $\beta \in f(D)$. Dann existiert ein $\alpha \in D \colon f(\alpha) = \beta$. Es reicht zu zeigen, dass das Bild einer kleinen Kreisscheibe um α unter f enthält eine kleine Kreisscheibe um β. O.B.d.A. sei $f(\alpha) = 0$, sonst betrachten wir $g(z) = g(z) - f(\alpha)$. Es gilt Kreis $C_r(\alpha) \subseteq D$ für $r > 0$ klein genug. Behauptung: Es existiert ein $r > 0$ klein genug, sodass

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in C_r(\alpha)$$

Falls nicht, dann existieren $r_n \coloneqq n^{-1}$, sodass für n groß genug $z_n \in C_{r_n}(\alpha), f(z_n) = 0$. Dann wäre f aber nach Satz 8.1.1 konstant. Das ist ein Widerspruch.

Sei $z_\varepsilon \coloneqq \inf_{z \in C_r(\alpha)} |f(\alpha)| > 0$. Behauptung 2: $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0) = D_\varepsilon(f(\alpha))$. Bew: Sei $w \in D_\varepsilon(0)$. Zu zeigen ist, dass ein $z \in D_r(\alpha)$ existiert, sodass $f(z) = w \Leftrightarrow \underbrace{f(z) - w}_{=:h(z)} = 0$. Wir haben also $h : D_r(\alpha) \to \mathbb{C}$. $z \in \partial D_r(\alpha) = C_r(\alpha)$

$$|h(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

und

$$|h(\alpha)| = |f(\alpha) - w| = |-w| < \varepsilon$$

Nach Satz 8.2.3 gibt es ein $z \in D_r(\alpha)$ mit $h(z) = 0 \Rightarrow f(z) = w$. Das heißt $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0)$. □

Satz 8.2.5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Dann ist $f = 0$ auf $\mathbb{C}$.

Beweis. (mittels Skizze, nicht hier) $\square$

9 [*] Eine Umkehrung von Cauchy: Morera

9.1 Satz von Morera

Satz 9.1.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und für jedes Rechteck (achsenparallel) $R \subseteq U$ sei

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\Gamma = \partial R)$$

Dann ist f analytisch auf U.

Beweis. Sei $z_0 \in U$, $D_r(z_0) \subseteq U$, $z \in D_r(z_0)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\gamma_{w,z} : z(t) &\coloneqq \begin{cases} w + t\,\mathrm{Re}(z-w) & 0 \le t \le 1 \\ \mathrm{Re}(?) + (t-1)\,\mathrm{Im}(z-w) & 1 \le t \le 2 \end{cases} \\
F(z) &\coloneqq \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w \to 0 \text{ für } h \to 0 \\
&\Rightarrow F' = f \text{ auf } D_r(z_0) \\
\Rightarrow F \text{ ist analytisch und } f \text{ ist auch analytisch}
\end{aligned}$$

□

Definition 9.1.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_n, f : U \to \mathbb{C}$. Dann konvergiert $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f, falls $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen $K \subseteq U$. Das heißt

$$\forall K \subseteq U \text{ kompakt: } \lim_{n\to\inf} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Satz 9.1.3. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ analytisch konvergiere lokal gleichmäßig gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f analytisch.

Beweis. 1) f ist stetig. $z_0 \in U$, $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$, dann $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{D_r(z_0)}$. Das heißt f_n ist steig auf $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow$ f ist stetig auf $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow$ f ist stetig auf U.
2) $R \subseteq D_r(z_0)$ ein Rechteck, $\Gamma = \partial R$

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} = 0$$

Das heißt f ist analytisch nach Satz 9.1.1. □

9.2 Reflexionsprinzip von Schwarz

[26. Mai] **Satz 9.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $L \subseteq U$ ein Liniensegment, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und analytisch auf $U \setminus L$. Dann ist f analytisch auf U.

Beweis. Sei o.B.d.A. $L \subseteq \mathbb{R}$, sonst sei $g(z) = az + b$ mit $L \subseteq g(\mathbb{R})$ und betrachte $h = f \circ g$. Wenn h auf $g^{-1}(U)$ analytisch ist, dann ist f auf U analytisch.
Wir betrachten jetzt ein beliebiges Rechteck $R \subseteq U$ und wollen Satz 9.1.1 anwenden. Das heißt wir müssen zeigen, dass

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

FALL 1: $R \cap L = \varnothing$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

da f analytisch in einer offenen Umgebung von R ist.
FALL 2: $\partial R \cap L \neq \varnothing$. Sei $\varepsilon > 0$ und R_ε wie oben im Bild. Dann gilt

$$\int_{\partial R_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Da

$$\int_a^b f(x + i\varepsilon)\,\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

folgt

$$0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

FALL 3: L liegt im Inneren von R. Wir teilen R in zwei Rechtecke R_1, R_2 auf, sodass L auf dem Rand von R_1, R_2 liegt. Dann gilt nach FALL 2:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 + 0 = 0$$

Nach Satz 9.1.1 ist f damit analytisch auf U. □

Notation 9.2.2. Wir schreiben $\mathbb{C}_+ \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Satz 9.2.3 (Reflexionsprinzip)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{C}_+$ oder $D \subseteq \mathbb{C}_-$ und $L \coloneqq \partial D \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$. Sei $F : D \to \mathbb{C}$ analytisch, stetig auf $D \cup L$ sowie $f(z) \in \mathbb{R}\ \forall z \in L$. Wir definieren $D_- \coloneqq \{\overline{z} : z \in D\}$. Dann ist die Funktion $g : D_+ \cup L \cup D_- \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} f(z) & z \in D \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. g ist stetig auf $D_+ \cup L \cup D_-$, da f analytisch auf D, D_- ist und f reellwertig auf L ist. Es bleibt noch zu beweisen, dass g auf D und D_- analytisch ist. Auf D ist das klar, weil $g(z) = f(z)$. Sei also $z \in D_- \Rightarrow \overline{z} \in D_+$, $h \neq 0$ klein genug, dass $z + h \in D_-$. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f\left(\overline{z+h}\right)} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\frac{f\left(\overline{z} + \overline{h}\right) - f(\overline{z})}{\overline{h}}} \to \overline{f'(\overline{z})} \text{ für } h \to 0$$

nach Satz 9.2.1 weil f analytisch ist auf $D \cup L \cup D_-$. □

Korollar 9.2.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich der reellen Achse $\mathbb{R}$. Sei außerdem $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und f reellwertig auf $U \cap \mathbb{R}$. Dann folgt

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in U$$

Beweis. Wende Satz 9.2.3 auf $f : D_+ \cup L \to \mathbb{C}$ an. Dann erhalten wir

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D_+ \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

ist analytisch auf $U = D_+ \cup L \cup D_-$ und $g = f$ auf D_+. Nach Satz 8.1.1 gilt damit aber $g = f$ auf U. Das heißt $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für alle $z \in D_-$ und damit auch für alle $z \in D_+$. □

Beispiel 9.2.5. 1. Betrachte $z \mapsto e^z = \exp(z)$. Es gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

10 [*] Einfach zusammehängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$, $D_r(z_0) \subseteq U$ und γ ein geschlossener Weg in $D_r(z_0)$. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Erinnerung: Stetige Linie γ in U ist eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to U$.
U ist wegzusammenhängend, wenn für alle $z, w \in U$ eine stetige FUnktion $\gamma : [0,1] \to U$ existiert, sodass $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$.
U ist zusammenhängend, wenn für jede Partitation $U = A \cup B$ mit offenen Mengen A, B (in U) und $A \cap B \neq \varnothing$ folgt $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$.
U ist lokal wegzusammenhängend, wenn für jedes $z_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, sodass $U \cap D_r(z_0)$ wegzusammenhängend ist.

Lemma 10.1.1. Sei U lokal wegzusammenhängend. Dann gilt U ist genau dann zusammenhängend, wenn U wegzusammenhängend ist.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Gilt immer
„$\Rightarrow$ “: siehe Skript □

Definition 10.1.2. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ sind homotop, falls es eine stetige Funktion $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ gibt mit $\gamma_0 = \Gamma(\cdot, 0), \gamma_1 = \Gamma(\cdot, 1)$ und $\Gamma(0,s) = \gamma_0(0), \Gamma(1,s) = \gamma_1(0)$. In diesem Fall heißt Γ Homotopie und liefert Äquivalenzklassen.

10.1.3. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ und $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ sind homotop, wenn es eine Homotopie $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ gibt mit obigem Ergebnis.

Definition 10.1.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann heißt U einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $z_0 := \gamma(0) =?$ homotop zu den trivialen ? $\hat{\gamma} = z_0$ ist.

Beispiel 10.1.5. Sei U offen und konvex. Dann ist U einfach zusammenhängend.

Beweis. Zu $z_0, w \in U$ ist $[w, z_0] = \{w + s\,(z_0 - w) : 0 \leq s \leq 1\} \subseteq U$. $\gamma : [0,1] \to U$ ist ein geschlossener Weg, $z_0 := \gamma(0)$. $\Gamma(t,s) := (1-s)\,\gamma(t) + s z_0$ ist eine Homotopie von γ und $\hat{\gamma} = z_0$. □

Beispiel 10.1.6. Sei U offen und sternförmig (d.h. $\exists z_0 \in U : [w, z_0] \subseteq U \ \forall w \in U$). Dann ist U einfach zusammenhängend.

Beweis. Fall 1: $\gamma : [0,1] \to U$ ist eine geschlossene Kurve mit $\gamma(0) = z_0 = \gamma(1)$. Dann funktioniert wieder $\Gamma(t,s) := (1-s)\,\gamma(t) + s z_0$.
Fall 2: $\gamma(0) = z_1 \neq z_0$. Nehme Weg $\gamma_1 : [0,1] \to U$, $\gamma_1(0) = z_1, \gamma_1(1) = z_0$. Betrachte Weg $\overline{\gamma} := \gamma_1^{-1}\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}\gamma_1 = \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1$, $\hat{\gamma} := \gamma_1\gamma_1\gamma_1^{-1}$ geschlossener Weg von z_0 nach z_0. $\overline{\gamma}$ ist monotop zu $\hat{\gamma} = \gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}$. $\gamma_s(t) := \gamma - 1(st)$ für $0 \leq s \leq 1$. ist ein Weg von z_1 nach $\gamma_1(s)$. $\Gamma(\cdot, s) = \gamma_s^{-1}\hat{\gamma}?\gamma_s$. Dann ist $\overline{\gamma}$ homotop zu $\hat{\gamma}$. (??) □

[27. Mai] **Satz 10.1.7.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch sowie $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zwei homotope, glatte Kurven. Also insbesondere $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann folgt bereits, dass

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Korollar 10.1.8. Sei U einfach zusammenhängend, γ eine geschlossene Kurve in U, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. γ ist homotop zu $\beta(t) \coloneqq z_0 = \gamma(0)$. Also gilt nach Satz 10.1.7, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\beta(t))\dot{\beta}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \square$$

Korollar 10.1.9. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann hat f eine globale Stammfunktion, das heißt es existiert eine analytische Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ auf U.

Beweis. Sei $z_0 \in U$ und $z \in U$ mit regulärem, glatten Weg $\gamma_{z_0,z}$ von z_0 nach z. Wir definieren

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Das ist nach Satz 10.1.7 wohldefiniert.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w \\
z(t) &= z + th \\
\Rightarrow \dot{z}(t) &= h \\
\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z) \\
\Rightarrow F'(z) &= f(z)
\end{aligned} \qquad \square$$

Lemma 10.1.10. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zwei homotope (glatte) Kurven, Γ Homotopie von γ_1 zu γ_0. Dann können wir Γ so modifizieren, dass alle Zwischenkurven $\Gamma(\cdot, s)$ glatt sind. Für ein Grid auf $[0,1]^2$ der Feinheit $\frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}$.

$$\Delta_{j,k}^N \coloneqq \left\{(t,s) : \frac{j-q}{N} \le t \le \frac{j}{N}, \frac{k-1}{N} \le s \le \frac{k}{N}\right\}$$

Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ groß genug so, dass offene Kreisscheiben $D_{j,k}$ existieren mit

$$\Gamma\Big(\Delta_{j,k}^N\Big) \subseteq D_{j,k} \subseteq U$$

Beweis von Satz 10.1.7. Sei $s_k \coloneqq \frac{k}{N}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = \Gamma(\cdot, s_0)$, $\gamma_k \coloneqq \Gamma(\cdot, s_k)$, $\gamma_{s_N} = \gamma_1$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\int_{\gamma_{s_k}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{s_{k+1}}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Wir hangeln uns also von einer Kurve zur nächsten. Alle Zwischenintegrale werden paarweise in entgegeben gesetzte Richtungen durchlaufen. In Summe ergeben die zusätzlichen Integrale 0.

$$\int_{\gamma_{k+1}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_{\gamma_{j,k}} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} = 0 \qquad \square$$

10 *[*] Einfach zusammehängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz*

[02. Jun] (fehlt)

[03. Jun] **Beispiel 10.1.11.**

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ z_0 &= 1 \\ \log 1 &= 0 \\ \log z &= \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w} \end{aligned}$$

Sei $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} \,\mathrm{d}x$$

Dabei ist $\gamma_1 : w(t) = 1 + (|z| - 1)\, t$, $\gamma_2 : w(t) = |z|\, e^{it}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} &= \int_1^{|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \operatorname{Arg}(z) = \log|z| + \int_0^{\operatorname{Arg}(z)} \frac{i\,|z|\,e^{it}}{|z|\,e^{it}} \,\mathrm{d}t \\ &= \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

Beispiel 10.1.12.

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \\ z_0 &= -1 = e^{i\pi} \\ \log z_0 &= i\pi \\ \Rightarrow\ \log y &= \int_{-1}^z \frac{\mathrm{d}w}{w} + i\pi = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \pi i \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + i\pi \end{aligned}$$

Dabei sei $\gamma_2 : w(t) = |z|\, e^{it}$ für t von π bis $\Theta \coloneqq \operatorname{Arg}(z)$ mit $0 < \Theta < 2\pi$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{-|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log(|z|) + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \pi i \\ \Rightarrow \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} &= \int_\pi^\Theta \frac{i\,|z|\,e^{it}}{|z|\,e^{it}} \,\mathrm{d}t = i \int_\pi^\Theta \mathrm{d}t = i\,(\Theta - \pi) \\ \Rightarrow\ \log z &= \log|z| + i\,(\Theta - \pi) + i\pi = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

Das ist die gleiche Funktion wie im vorherigen Beispiel. Aber jetzt für $0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi$.

Definition 10.1.13 (Komplexe Potenzen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $z^{\frac{1}{n}} \coloneqq \exp\!\left(\frac{1}{n} \log z\right)$ wobei $\log z$ ein analytischer Zweig des Logarithmus ist.

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_1 &= e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi}{4} + i\pi} = -i \end{aligned}$$

(endlich viele genau n verschiedene Zweige)

$$\exp\left(\frac{1}{n}\,(\log z + 2\pi i k)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \log z + 2\pi i \frac{k}{n}\right)$$

verschiedene Werte ? für $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{3}} &= i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k} z_1 && = e^{i\frac{\pi}{6}} && (k \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow z &= e^{\frac{1}{k}\left(i\frac{\pi}{2}+2\pi ik\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi i\frac{k}{3}} \\ k = 0 : z_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} \\ k = 1 : z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ k = 2 : z_2 &= e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}i} = e^{i\frac{7\pi}{6}} \end{aligned}$$

Allgemein

$$\begin{aligned} z &= |z|\, e^{i\Theta} = |z|\, e^{i\Theta+2\pi ik} \\ z^{\frac{1}{n}} &= |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\Theta+2\pi k}{n}} && (k = 0, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow w^z \coloneqq \exp(z \log w)$$

11 [*] Halbierte Singularitäten

Notation 11.1.1. Eine gepunktete Kreisscheibe

$$\dot{D}_k(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$$

?

$$A_{R_1,R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \tag{Ring}$$

Definition 11.1.2. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U offen. f hat eine isolierte Singularität in z_0, falls $f : \dot{D}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch ist, aber nicht analytisch auf z_0.

Beispiel 11.1.3.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $$f(z) = \begin{cases} \sin z & z \neq 2 \\ 0 & z = 2 \end{cases}$$
3. $f(z) = \frac{1}{z-3}$
4. $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z \neq 0$

Definition 11.1.4. f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Dann definieren wir

1. Die Singularität ist (auf-)hebbar, falls eine punktierte Kreisscheibe $\dot{D}_r(z_0)$ sowie eine analytische Funktion $g : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ existieren derart, dass $f(z) = g(z)$ für $z \in \dot{D}_r(z_0)$.
2. Falls es analytische Funktionen $A, B : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ gibt mit $A(z_0) \neq 0$ und $B(z_0) = 0$ und $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ für $z \in \dot{D}_r(z_0)$, so hat f einen Pol in z_0. Hat B eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in z_0, so hat f einen Pol der Ordnung k in z_0.
3. f hat in z_0 ein wesentliche Singularität, falls es keine hebbare Singularität und keinen Pol in z_0 hat.

Satz 11.1.5 (Riemanns Prinzip für hebbare Singularitäten)**.** f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Ist

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$$

so ist die Singularität hebbar.

Beweis. U sei eine Umgebung von z_0. Wir definieren

$$h(z) \coloneqq \begin{cases} (z - z_0)\, f(z) & z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Das heißt h ist stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 9.1.1 ist h analytisch auf U. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} h(z_0) &= 0 \\ f(z) &= \frac{h(z)}{z - z_0} = \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} \to h'(z_0) \text{ für } z \to z_0 \end{aligned}$$

Nach Satz 9.1.1 hat f damit eine analytische Fortsetzung auf U. □

Korollar 11.1.6. Ist f beschränkt in der Nähe von z_0. Dann ist die Singularität in z_0 hebbar.

Beweis.

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z) = 0$$

mit vorherigem Satz liefert direkt die Behauptung. □

Beispiel 11.1.7. Sei $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

Satz 11.1.8. Sei f analytisch in einer punktierten Umgebung von z_0 und es gebe ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k\, f(z) \neq 0$$

und

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{k+1}\, f(z) = 0$$

Dann hat f in z_0 ein Pol der Ordnung k.

Beweis. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^{k+1}\, f(z) & z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf U und analytisch in $U \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 9.1.1 ist g analytisch auf U

$$\begin{aligned} a(z) &:= \frac{g(z)}{z-z_0} = \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \to g'(z_0) \text{ für } z \to z_0 \\ A(z_0) &\to \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k\, f(z) \neq 0 \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{A(z)}{(z-z_0)^k} && (z \in U \setminus \{z_0\}) \\ A(z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Das heißt wir haben nach Definition einen Pol der Ordnung k in z_0. □

Satz 11.1.9 (Caseratti (?) Weierstraß)**.** f habe in z_0 eine wesentliche Singularität und $U \subseteq \mathbb{C}$ sei offen mit $z_0 \in U$. Außerdem sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist $R = R_U = f(U \setminus \{z_0\}) = \{f(z) : z \in U \setminus \{z_0\}\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen die Aussage ist falsch. Dann existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f(z)-w| > \delta \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|f(z)-w|} < \frac{1}{\delta} \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\} \end{aligned}$$

Das heißt die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z)-w} \qquad (z \in U \setminus \{z_0\})$$

Nach Satz 11.1.5 hat g eine hebbare Singularität in z_0. Das heißt g hat eine analytische Fortsetzung auf U

$$\Rightarrow f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{z_0\})$$

Das heißt f hat eine hebbare Singularität oder einen Pol in z_0, das ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$