

Skript zur Vorlesung
Analysis IV
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Erinnerungen/Rückblick	3
1.1	Komplexe Zahlen \mathbb{C}	3
1.2	Konvergenz	3
1.3	Ein paar Definitionen	4
2	[*] Analytische Polynome	5

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** (\mathbb{C} ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass \mathbb{C} so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i := (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene*.

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a + bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\bar{z} := a - bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil). Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\operatorname{Re}(z) = a$ sowie $\operatorname{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für \mathbb{C}). Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z||w|$.

Beweis.

□

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz). Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen). Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von \mathbb{C}). Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3).

□

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n := \sum_{j=1}^n z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \rightarrow 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss). Wir definieren die (offene) ε -Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε -Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \exists r > 0 : D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^C := \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^C offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : S \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \wedge S^C \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] := \{(1 - \Theta)z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w . Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt z_1, \dots, z_n sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x, y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x, y) = \sum_{n=0}^L \alpha_n (x + iy)^n = f(x + yi)$. Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?