Skript zur Vorlesung Analysis IV bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ($\mathbb{C}$ ist ein Körper)**.** Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) \coloneqq (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) \coloneqq (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass $\mathbb{C}$ so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i \coloneqq (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene.*

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation)**.** Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a+bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\overline{z} \coloneqq a-bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil)**.** Sei $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\mathrm{Re}(z) = a$ sowie $\mathrm{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{i}(z - \overline{z})$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für $\mathbb{C}$)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\mathrm{Re}(\overline{z}w) \leq |z|\,|w|$.

Beweis. (fehlt) □

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz)**.** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z, falls

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen)**.** Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)**.** Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3) . □

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \to 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss)**.** Wir definieren die (offene) ε-Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε-Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) \coloneqq \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S\ \exists r > 0\colon D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^{\mathrm{C}} \coloneqq \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^{C} offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S \coloneqq \left\{z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0\colon S \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing \wedge S^{\mathrm{C}} \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing\right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} \coloneqq S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.
S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \varnothing$, $S \cap B \neq \varnothing$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] \coloneqq \{(1 - \Theta)\, z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w. Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt $z_{1,\dots,n}$ sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x,y) = \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x,y) = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n (x+iy)^n =: f(x+yi)$ für passende a_n. Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x,y) = (x+iy)^2$.

(ii) $P(x,y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^{N} a_k (x+iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_N \\ &\alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = u(x,y) + v(x,y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &\coloneqq \partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = u_x + iv_x \\ f_y &\coloneqq \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v = u_y + iv_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x,y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i\partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_x (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n (x+iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_y (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n i (x+iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0\le r\le N_1 \\ 0\le s\le N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=:G_n(x,y)} \\ \Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^n G_n(x,y) \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n. Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x,y) = \sum_{t=1}^{n} t\alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

$$\parallel$$

$$i\partial_x G_n(x,y) = i\left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\,\alpha_t x^{n-t-1} y^t\right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \ldots + nc_n y^{n-1} = i\left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)\,c_1 x^{n-2} y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1}\right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned} c_1 &= inc_0 = i\binom{n}{1} c_0 \\ c_2 &= i^2 \frac{n\,(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} G_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,(iy)^k = c_k\,(x+iy)^n \\ \Rightarrow P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} G_n(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,0}\,(x+iy)^n \end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. □

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\sum := \left\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3 : \xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi,\eta,\zeta)\in\sum\setminus\{(0,0,1)\}\mapsto z\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ,η,ζ) ist.
Sei

$$\lambda\left((\xi,\eta,\zeta)-(0,0,1)\right)=(x,y,0)-(0,0,1)=(x,y,-1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda\xi=x,\ \lambda\eta=y,\lambda(\zeta-1)=-1&\\ \Rightarrow\lambda&=\frac{1}{1-\zeta}\\ \Rightarrow\frac{x}{\xi}=\lambda&=\frac{y}{\eta}\\ \Rightarrow x&=\frac{\xi}{1-\zeta},\ y=\frac{\eta}{1-\zeta}\end{aligned}$$

Sind x,y gegeben. Dann gilt

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}\tag{1}$$
$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}\tag{2}$$
$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n\subseteq\mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n\to\infty$, falls $|z_n|\to\infty$ für $n\to\infty$ sowie $f(z_n)\to\infty$, falls $|f(z_n)|\to\infty$ für $n\to\infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in $\sum$ und $\mathbb{C}$)**.** Ein Kreis in $\sum$ ist ein Schnitt von $\sum$ mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ der Form $A\xi+B\eta+C\xi=D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned}D&=A\frac{x}{x^2+y^2+1}+B\frac{y}{x^2+y^2+1}+C\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\\ \Leftrightarrow D&=(C-D)\left(x^2+y^2\right)+Ax+By\end{aligned}$$

Fall 1: $C=D$. Dann ist $Ax+By=D$ eine Linie in $\mathbb{C}$.
Fall 2: $C\neq D\Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (*Sinngemäß: Kreise in $\sum$ werden stenographisch auf Geraden projeziert.*)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in $\mathbb{C}$ gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung)**.**

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h, die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0+t)-f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0+t+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \to \partial_x f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = f_x(z_0)\end{aligned}$$

2. Setze $h = it$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0+iy+it)-f(x_0+y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i}\frac{f(x_0,y_+t)-f(x_0,y_0)}{t} \to \frac{1}{i}\partial_y f(z_0)\end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i\partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v, dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = if_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x+iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{gathered} f(x+i0) = 0 = f(0+iy) \\ \partial_x f(0) = 0 = \partial_y f(0) \end{gathered}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x+\alpha ix)-f(0)}{x+\alpha ix} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Das heißt für $x \to 0$ kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z)\\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1) . □

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen)**.** Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ (z+h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1}\end{aligned}$$
□

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen)**.** Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann)**.** Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch intepretieren als Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x + h_1, g + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \qquad \left(h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)$$

und $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Wir spalten f außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \to f_x(z) \text{ für } h \to 0 \\
&u(z) = u(x,y) \qquad v(z) = v(x,y) \\
f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) + i\left(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)\right) \\
\frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_1\eta)}_{=:z_1} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x \underbrace{(x+\Theta_2\xi, y)}_{=:z_3} \qquad (0 < \Theta_i < 1)
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
\frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_3\eta)}_{=:z_2} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x \underbrace{(x+\Theta_4\eta\xi, y)}_{=:z_4} \\
\Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} + i \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \left(u_y(z_1) + iv_y(z_2)\right) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \left(u_x(z_3) + iv_x(z_4)\right)
\end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\
\Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z)\right)}_{\to 0} + \frac{\xi}{\xi - i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z)\right)}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left|\frac{\xi}{\xi + i\eta}\right| \leq \left|\frac{\xi}{\xi}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\eta}{\xi + i\eta}\right| \leq \left|\frac{\eta}{i\eta}\right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \to 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2 + y^2 = z\overline{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z. f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S.

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D. Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D. Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D. Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u + iv$ konstant. □

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D. Ist $|f|$ konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \left(u^2 + v^2\right) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y \left(u^2 + v^2\right) = 2uu_x + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 = u^2u_x - uvu_y \\ 0 = uvu_y + v^2u_x \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 = \left(u^2 + v^2\right) u_x = C \cdot u_x \\ &\Rightarrow u_x = 0 \\ &\Rightarrow v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. □

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z &= e^z \\
e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
&= \cos\varphi + \sin\varphi \\
\overline{e^z} &= e^{\overline{z}} \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)
\end{aligned}$$

5 [*] Linienintegrale

5.1 Definition und Berechnung

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf $I = [a,b]$. Dann gilt

$$\int_I f \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b Re(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.2 (Glatte Kurven)**.**

(i) Sei $z(t) := x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Die Kurve $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ ist bestimmt durch $z(t)$ und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

falls die Funktionen $x, y, : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ sind und es eine Partition

$$[a,b] = [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n] \qquad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[t_{j-1}, t_j]$ sind

(ii) Die Kurve heißt glatt, falls $\dot{z}(t) \neq 0$ bis auf endlich viele $t \in [a,b]$

Definition 5.1.3 (Kurvenintegral)**.** Sei $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von f (definiert in einer Umgebung von C oder nur auf C) ist definiert durch

$$\int_C f \,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.4 (Zwei Kurven)**.** Zwei Kurven $C_1 := z(t),\ a \leq t \leq b$, $C_2 : w(t),\ c \leq t \leq d$ sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\lambda : [c,d] \to [a,b]$ gibt mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) \geq 0$ und $w(t) = z(\lambda(t))$ (für $c \leq t \leq d$).

Satz 5.1.5. Sind die Kurven C_1, C_2 äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f \,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f \,\mathrm{d}z$$

Beweis. Es gilt die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t)))\dot{z}(\lambda(t))\dot{\lambda}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b h(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s \qquad \square$$

Satz 5.1.6. Es gilt

$$\int_C f \,\mathrm{d}t = -\int_{-C} f \,\mathrm{d}t$$

wobei $-C : z(a+b-t),\ a \leq t \leq b$.

Beweis. Wir setzen $w(t) = z(a+b-t)$. Dann gilt $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a+b-t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_a^b f(w(t))\dot{w}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(z(a+b-t))\dot{z}(a+b-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^a f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$ □

Beispiel 5.1.7. Sei $f(z) = x^2 + iy^2$ mit $z = x + iy$ sowie $C = z(t) = (1+i)\,t$ für $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f((1+i)\,t)\,(1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1+i)^2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2i}{3}\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.8. Sei $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ mit $C : z(t) = R\,(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2} - \frac{R\sin t}{R^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\mathrm{d}2\pi t\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.9. Sei $f = 1$ und C eine beliebige Kurve

$$\int_C \mathrm{d}z = \int_a^b \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t = z(b) - z(a)$$

Satz 5.1.10 (C-glatte Kurve)**.** Seinen f, g stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C f + g\,\mathrm{d}z &= \int_C f\,\mathrm{d}z + \int_C g\,\mathrm{d}z \\ \int_C \alpha f\,\mathrm{d}z &= \alpha\int_C f\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Beweis. (Selber machen) . □

Definition 5.1.11. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \leq |\beta|$.

Lemma 5.1.12. Sei $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned}&\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \ll \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow &\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Beweise $G(t) = \mathrm{Re}(G(t)) - i\sin(G(t))$. Trick:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t &= Re^{i\varphi} && (R > 0, \varphi \in \mathbb{R}) \\ \int_1^b G(t)\,\mathrm{d}t &= R = \overline{e}\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\varphi}G(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\varphi}G(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}G(t)\right)\mathrm{d}t \\ \leq \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Satz 5.1.13. Sei C eine Kurve der Länge L auf f, stetig auf $\mathbb{C}$ und $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \ll M \cdot L$$

Beweis. (Fehlt) □

Korollar 5.1.14. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen und $f_n \to f$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \lim_{h\to\infty}\int_C f_n\,\mathrm{d}z$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f_n\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_C (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leq \int_a^b \mathrm{d}f(z)ofh - f_n(z(t))\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z) - f_n(z)|}_{\to 0}\cdot L_z \end{aligned}$$ □

Lemma 5.1.15. Angenommen $f = F'$, F analytisch auch eine Kurve C mit Analysepunkt $z(a)$, Endpunkt $z(b)$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a))$$

Beweis.

$$\begin{aligned} F(z(t)) &= F'(z(t))\dot{z}(t) = f(z(t))z(t) \\ \int_C f\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned}$$ □

5.2 Integrale über geschlossenen Kurven

[06. Mai] **Definition 5.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine Kurve in U. Dann nennen wir C geschlossen, falls $z(a) = z(b)$. Eine geschlossene Linie heißt einfach, falls $z(t_1) = z(t_2)$ für $t_1 < t_2 \in [a, b]$ schon impliziert, dass $t_1 = a, t_2 = b$.

Bemerkung 5.2.2. Ein (Standard-)Rechteck R in U ist ein abgeschlossenes, achsen-paralleles Rechteck. Rand $\Gamma = \partial R$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das erste Ziel dieses Kapitels soll es sein, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2.3 (Rechteckssatz I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R \subseteq U$ ein Rechteck mit Rand Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Lemma 5.2.4. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ affin linear. Dann gilt Satz 5.2.3

Beweis. Es ist $F(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2} z^2$ eine Stammfunktion von f mit $z(t)$ Parameterlösung von Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Lemma 5.1.15}}{=} F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass $z(b) = z(a)$. □

Beweis von Satz 5.2.3. (Erfolt durch Überdeckung und schlaue Abschätzung, fehlt hier) □

Satz 5.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ und $R > 0$, sodass $D_R(z_0) = \{|z - z_0| \leq R\} \subseteq U$. Dann existiert eine analytische Funktion $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D_R(z_0)$. D.h. f hat lokal in der Nähe von z_0 eine Stammfunktion.

Beweis. O.B.d.A. sei $U = D_R(z_0)$. Zwischen $w, z \in D_R(z_0)$ gibt es einen Weg

$$\gamma_{w,z}(t) = \begin{cases} w + \mathrm{Re}(z - w)t & 0 \leq t \leq 1 \\ w + \mathrm{Re}(z - w) + i\,\mathrm{Im}(z - w)\,(t - 1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Durch geometrische Überlegungen sehen wir, dass sich die Pfade auch folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\Gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \overset{\text{Satz 5.2.3}}{=} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\int_{\gamma_{z,z+h}} 1\,\mathrm{d}w = z + h - w = h$$

Das heißt für festes z

$$\frac{1}{h} \int f(z)\,\mathrm{d}w = f(z)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w \\
&\Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)-f(z)\,\mathrm{d}w\right| \\
&\qquad\le \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot(|\mathrm{Re}(h)|+|\mathrm{Im}(h)|) \\
&\qquad\le \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot 2\,|h| \\
&\qquad= 2\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)| \to 0 \text{ für } h\to 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz 5.2.6. Ist $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch und C eine glatte, geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Nach Satz 5.2.5 hat f eine Stammfunktion F auf $D_R(z_0)$ und F ist analytisch. $C : z(t),\ a \le t \le b$ und wegen geschlossen gilt $z(a) = z(b)$. Damit folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a)) = 0 \qquad \square$$

Vorsicht, dieser Satz gilt nur lokal:

Beispiel 5.2.7. Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ und $C : Re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$. Dann gilt

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Andererseits ist

$$\int_C z^k\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

6 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

ist stetig auf U. Wir wollen jetzt den Rechtecksatz auf g erweitern.

Satz 6.1.1 (Rechtecksatz II)**.** Ist $R \subseteq U$ ein Rechteck. dann gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Fall 1: $\alpha \notin R$. Dann betrachten wir eine Umgebung von R, in der α nicht enthalten ist und verwenden Satz 5.2.3, da g analytisch auf R ist.

Fall 2: $\alpha \in \partial R$. Dann teilen wir R in 6 Subrechtecke $R_{k\in\{1,\ldots,6\}}$ und es sei $\alpha \in \partial R_1$. Dann gilt

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{6} \int_{\partial R_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Nach Fall 1 haben wir dann

$$= \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\left| \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \underbrace{\sup_{z\in\partial R_1} |g(z)|}_{<\infty} \cdot \operatorname{diam}(R_1)$$

Wir können R_1 aber beliebig klein machen. Damit geht der Ausdruck gegen 0.

Fall 3: $\alpha \in R \setminus \partial R$. Wir gehen wie in Fall 2 vor und teilen R in 6 Subrechtecke auf. Damit gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \text{ für } \operatorname{diam}(R_1) \to 0$$

□

7 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1 Vorbereitung

[12. Mai] **Situation:** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{\alpha\}$.

Korollar 7.1.1. In der obigen Situation hat g wieder lokal eine Stammfunktion. Genau gilt: Für jeden Punkt $z_0 \in U$ gibt es ein $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $F' = g$ auf $D_R(z_0)$ für ein $R > 0$. Ist insbesondere C eine geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Satz 7.1.2 (Cauchy-Integralformel I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Ferner sei $0 < \rho < R$ und $C\rho(\alpha)$ die Kurve $z(t) := \rho e^{it} + \alpha$. Dann folgt

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Wir betrachten

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

Dann gilt nach Korollar 7.1.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C\rho(\alpha)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)-f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha - \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= f(\alpha)\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\,\mathrm{d}x = f(\alpha)\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,\mathrm{d}t = f(\alpha)2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i f(\alpha) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.1.3. In Satz 7.1.2 gilt sogar $\forall z \in D_\rho(\alpha)$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Lemma 7.1.4. Sei $C\rho(\alpha) : z(t) = \rho e^{it} + \alpha \subseteq D_R(\alpha)$ $(R > \rho > 0)$. Dann gilt für alle $z \in D_\rho(\alpha)$

$$\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha-(z-\alpha)}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

Es ist $|z-\alpha| < \rho$ und $|w-\alpha| < \rho$. Also ist

$$\delta = \left|\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right| = \frac{|z-\alpha|}{\rho} < 1 \quad \forall w \in C\rho(\alpha)$$

Wir schreiben um über die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n$$

Wir haben gleichmäßige und absolute Konvergenz

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\ \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w &= \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{(\rho e^{it})^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i\end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.5 (Cauchy-Integralformel II)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch sowie $\alpha \in U$, $R > 0$ mit $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt $\forall 0 < \rho < R$ und $z \in D_\rho(\alpha)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Nach Korollar 7.1.1 gilt

$$0 = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)-f(z)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i}$$

□

7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung

Satz 7.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha \in U$, $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann hat f eine in $D_R(\alpha)$ konvergente Potenzreihe. Das heißt es existiert eine Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Dabei ist $D_R(\alpha)$ „=“ $\mathbb{C}$ erlaubt.

Beweis. Für $z \in D_\rho(\alpha)$ haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha-(w-\alpha)}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Wir können wieder die Umschreibung zur geometrischen Reihe verwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w}_{=:a_n(\rho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho)\,(z-\alpha)^n \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2. In Satz 7.2.1 ist $(a_n)_n$ unabhängig von $R > 0$, solange $D_R(\alpha) \subseteq U$.

Beobachtung 7.2.3. Ist $z \in D_R(\alpha)$, so existiert ein ρ mit $|z-\alpha| < \rho < R$. Für dieses ρ haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\rho)}{2\pi i}\,(z-\alpha)^n$$

Beobachtung 7.2.4. $a_n(\rho)$ ist unabhängig von $0 < \rho < R$.

Beweis. Sei $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ und $|z-\alpha| < \rho_1$. Dann folgt

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1)\,(z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2)\,(z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_{\rho_1}(\alpha)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen haben wir $a_n(\rho_1) = a_n(\rho_2)$. □

Korollar 7.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Lokal ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist f unendlich oft komplex differenzierbar. □

[13. Mai] **Korollar 7.2.6.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

Satz 7.2.7. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in U$. Dann ist

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. In $D_R(\alpha) \subseteq U$ gilt $f(z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^n$ mit $a_0 = f(\alpha)$. Das heißt

$$g(z) = \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z-\alpha)^{n-1}$$

□

7.3 Liouville

Notation 7.3.1. Eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ganze Funktion.

Korollar 7.3.2. Habe $f : U \to \mathbb{C}$ in U genau N Nullstellen $a_1, \ldots, A_N \in U$. Dann definieren wir

$$g(z) \coloneqq \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_N)} \qquad (z \neq a_j)$$

Dann gilt $\lim_{z\to a_k} g(z)$ existiert und g ist analytisch.

Beweis. Sei $f_0(z) \coloneqq f(z)$ und

$$f_k(z) \coloneqq \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z-a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z-a_k} \qquad (z \neq a_k)$$

Nach Induktion und Satz 7.2.7 gilt dann, dass f_k analytisch ist für alle $k \in \{0, \ldots, N\}$. Beachte $g = f_N$. □

Satz 7.3.3. Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Für alle $R > 0$ ist $z \in D_R(0)$ und

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Seien $z_1, z_2 \in D_R(\cdot)$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D_R(0)} \left(\frac{f(w)}{w-z_1} - \frac{f(w)}{w-z_2}\right)\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D_R(0)} f(w)\frac{z_1-z_2}{(w-z_1)(w-z_2)}\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Es ist $|f(w)| < M < \infty$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Nach M-L-Regel gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M}{2\pi}\frac{2\pi R}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} \to 0 \text{ für } R \to \infty$$

Das heißt f ist konstant. □

Satz 7.3.4. Sei f eine ganze Funktion und für ein $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $A, B \geq 0$ mit $|f(z)| \leq A + B|z|^k \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. $k = 0$ ist Satz 7.3.3.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist g eine ganze Funktion

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{|f(z)-f(0)|}{|z|} && (|z| \geq 1) \\ &\leq \frac{A + B|z|^k + |f(0)|}{|z|} \leq \tilde{A} + B|z|^{k-1} \\ |g(z)| &\leq C && (|z| \leq 1) \\ \Rightarrow\ |g(z)| &\leq \max\left(\tilde{A}, C\right) + B|z|^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Per Induktionsvoraussetzung ist g ein Polynom vom Grad $\leq k-1$. Dann ist $f(z) = zg(z) + f(0)$ ein Polynom vom Grad $\leq k$. □

Satz 7.3.5. Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right| \\ &= |z^n| \underbrace{\left|a_n + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^- n\right|}_{\geq |a_n| - |a_{n-1}||z|^{-1} - \ldots - |a_1||z|^{1-n} - |a_0||z|^{-n}} \\ &\geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n \end{aligned}$$

Das heißt $P(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Wenn P keine Nullstelle hat, dann ist

$$h(z) = \frac{1}{P(z)}$$

wohldefiniert und $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Damit ist h eine beschränkte analytische Funktion und nach Satz 7.3.3 ist h konstant. Das heißt P war bereits konstant. □

Bemerkung 7.3.6. Satz 7.3.5 erweitert sich wie folgt: Sei $g(z) := \frac{P(z)}{z-a_1}$ für P ein Polynom mit Nullstelle a_1. Dann ist

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq A + B |z|^n \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq \tilde{A} + \tilde{B} |z|^{n-1} \end{aligned}$$

Das heißt g ist ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ und nach Satz 7.3.3 gilt $P(z) = (z - a_1)\, g(z)$. Das heißt wir können ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor vollständig in seine Nullstellen aufspalten.

8 [*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze

8.1 Formulierung

Satz 8.1.1 (Eindeutigkeit)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Sei $S \subseteq U$ mit Häufungspunkt in U und $f(z) = 0\ \forall z \in S$. Dann ist $f = 0$ in U.

Beweis. Sei $\alpha \in U$ Häufungspunkt von S. Dann existiert ein $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \forall z \in \mathrm{D}_R(\alpha)$$

Das heißt es existiert eine Folge $z_k \in S$ mit $z_k \neq \alpha$, $z_k \to \alpha$ mit $f(z_k) = 0\ \forall k$. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Potenzreihen folgt damit

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f = 0 \text{ auf } D_R(\alpha) \\ &\quad A \coloneqq \{z \in U : z \text{ ist Häufungspunkt von Nullstellen von } f\} \\ &\quad B = U \setminus A \end{aligned}$$

Behauptung 1: A ist offen. Sei $z_0 \in A$, existieren $R > 0$, sodass

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \quad \forall z \in D_r(z_0) \\ \Rightarrow D_r(z_0) &\subseteq A \end{aligned}$$

Das heißt A ist offen. Behauptung 2: B ist offen. Sei $w \in B$. Dann hat w einen Siherheitsabstand von der Nullstelle von f

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_r(w) \subseteq B$$

Damit ist B offen. Daraus, dass U zusammenhänged ist, folgt, dass A oder B leer ist. Da $\alpha \in A$ folgt also $B = \varnothing$

$$\Rightarrow A = U$$

Da f stetig ist, folgt $f(z) = 0\ \forall z \in U$. □

Korollar 8.1.2. Seinen $f, g : U \to \mathbb{C}$ analytisch, U offen und zusammenhängend. Seien $f(z) = g(z)$ für alle $z \in S$, wobei S hat Häufungspunkt in U. Dann gilt bereits $f = g$ auf U.

Beweis. Betrachte $f - g$ und wende vorherigen Satz an. □

Beispiel 8.1.3. $\sin(z) = 0$ für $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 8.1.4 (Mittelwertsatz)**.** Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und U offen. Sei $\alpha \in U$, $R > 0$, $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt

$$\forall 0 < r < R\colon\ f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{it}\right) \mathrm{d}t$$

Beweis. Sei $C_r(\alpha) : w(t) = re^{it} + \alpha$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{it} + \alpha\right)}{re^{it}} \cdot re^{it} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

[19. Mai] **Satz 8.1.5** (Maximum modulus)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann hat $|f|$ kein lokales Maximum in U. Das heißt $\forall \alpha \in U$ und $\delta > 0$ mit $D_\delta(\alpha) \subseteq U$ existiert ein $z \in D_\delta(\alpha)$ mit $|f(z)| > |f(\alpha)|$.

Beweis. Sei $\alpha \in U$. Nach Satz 8.1.4 gilt

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(f\Big(re^{it}+\alpha\Big)\Big)\,\mathrm{d}t \quad \forall \alpha \in U, \overline{D_r(\alpha) \subseteq U} \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 2\pi} \Big|f\Big(re^{it}+\alpha\Big)\Big| \end{aligned} \tag{1}$$

Satz 8.1.5 folgt, wenn wir folgendes zeigen: Ist f nicht-konstant, so gibt es ein $w \in Cr(\alpha)$ mit $|f(w)| > |f(\alpha)|$. Angenommen das ist der Fall, dann würde gelten

$$|f(w)| \leq |f(\alpha)| \quad \forall w \in Cr(\alpha) \text{ für } r > 0 \text{ klein genug}$$

Darum muss $|f(w)| = |f(\alpha)|$ sein für alle $w \in Cr(\alpha)$ für $r > 0$ klein genug. Ansonsten ist

$$|f(w_0)| \leq |f(\alpha)|$$

?, dass $w_0 \in Cr(\alpha)$. $w_0 = w(t_0) = re^{it} + \alpha$, $t_0 \in [0, 2\pi]$. Aus der Stetigkeit von $|f|$ folgt jetzt

$$\exists \delta > 0\colon\ |f(w(t))| < |f(w)| \quad t \in [0, 2\pi], |t - t_0| \leq \delta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w(t))|\,\mathrm{d}t < |f(\alpha)|$$

Das ist ein Widerspruch zu (1). Also haben wir

$$\Big|f\Big(re^{it}+\alpha\Big)\Big| = |f(\alpha)| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \text{ mit } r > 0 \text{ klein genug}$$

Das heißt $|f|$ ist konstant auf $\overline{D_{r_0}(\alpha)}$ für ein $r_0 > 0$. Damit ist nach Satz 4.1.13 bereits f konstant auf $D_{r_0}(\alpha)$ und nach Satz 8.1.1 ist f konstant auf U. ☐

Korollar 8.1.6. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Nimmt $|f|$ ein (lokales oder globales) Maximum in U an, so ist f konstant.

Beweis. Umformulierung von Satz 8.1.5 ☐

Korollar 8.1.7. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhänged und beschränkt, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig und f analytisch auf U. Dann folgt

$$\sup_{z\in U} |f(z)| = \sup_{z\in \overline{U}} |f(z)| = \sup_{z\in \partial U} |f(z)|$$

Das heißt das Maximum wird am Rand ∂U angenommen.

8.2 Anwendungen

Situation: Wir haben die Einheitsscheibe $D_1(0)$ und $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Dann wollen wir zeigen, dass

(a) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1$

(b) $|f'(0)| \leq 1$

Beweis. Definiere

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist g analytisch auf $D_1(0)$. Sei $0 < r < 1$ mit $|z| = r$

$$\Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \forall 0 < r < 1$$

Nach Satz 8.1.5 folgt

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad \forall |z| \leq r \\ |g(z)| &\leq \frac{1}{r} \quad |z| \leq r \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq 1 \quad \forall |z| < 1 \\ \Rightarrow \forall 0 < |z| < 1\colon \frac{|f(z)|}{|z|} &= |g(z)| \leq 1 \\ \Rightarrow |f(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

und für 8b) gilt

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

□

Ferner gilt: Gilt „=“ für ein $|z| < 1$ in (a) oder „=“ in (b), so ist

$$f(z) = e^{i\Theta} z$$

für ein $\Theta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.2.1. Die obigen Aussagen kombiniert sind auch bekannt als das Lemma von Schwarz.

Andere Situation: Sei $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch, $|f(z)| \geq 1$ für alle $|z| < 1$ und $f(\alpha) = 0$ für ein $|\alpha| < 1$. Definiere

$$B_\alpha(z) \coloneqq \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Dann folgt (mit Beweis, der hier fehlt), dass

(a) $|f(z)| \leq |B_\alpha(z)|$ für alle $|z| < 1$

(b) $|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}$

Notation 8.2.2. Sei $\mathcal{A}_\alpha \coloneqq \{f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch und $|f(z)| \leq 1 \; \forall |z| < 1$ und $f(\alpha) = 0\}$. Das heißt

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f(z)| = |B_\alpha(z)|$$

und

$$\sup_{f \in \mathcal{A}_\alpha} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

Leicht andere Frage: Sei $\mathcal{A} := \{f : D_\eta(0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $|f(z)| \leq 1, |\eta| < 1\}$. Was ist

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} |f'(\alpha)|$$

? Es ist

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} |f'(\alpha)| = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

[20. Mai] **Satz 8.2.3** (Minimum-Modulus)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Dann kann kein Punkt $\alpha \in U$ ein lokales Minimum von $|f|$ sein, außer $|f(\alpha)| = 0$.

Beweis. Angenommen $|f(\alpha)|$ ist ein lokales Minimum von $|f(z)|$, z nahe α und $f(\alpha) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\exists r > 0\colon D_r(\alpha) \subseteq U$$

und

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_r(\alpha)$$
$$h : D_r(\alpha) \to \mathbb{C},\ h(z) = \frac{1}{f(z)}$$

ist analytisch auf $D_r(\alpha)$. $|h|$ hat in α ein lokales Maximum. Nach Satz 8.1.5 ist h damit konstant in $D_r(\alpha)$. Damit ist f konstant in U. □

Satz 8.2.4. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Dann ist $f(D)$ offen für jede offene Menge $D \subseteq U$.

Beweis. Sei f nicht-konstant und analytisch, $D \subseteq U$ offen, $\beta \in f(D)$. Dann existiert ein $\alpha \in D\colon f(\alpha) = \beta$. Es reicht zu zeigen, dass das Bild einer kleinen Kreisscheibe um α unter f enthält eine kleine Kreisscheibe um β. O.B.d.A. sei $f(\alpha) = 0$, sonst betrachten wir $g(z) = g(z) - f(\alpha)$. Es gilt Kreis $C_r(\alpha) \subseteq D$ für $r > 0$ klein genug. Behauptung: Es existiert ein $r > 0$ klein genug, sodass

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in C_r(\alpha)$$

Falls nicht, dann existieren $r_n := n^{-1}$, sodass für n groß genug $z_n \in C_{r_n}(\alpha), f(z_n) = 0$. Dann wäre f aber nach Satz 8.1.1 konstant. Das ist ein Widerspruch.

Sei $z_\varepsilon := \inf_{z\in C_r(\alpha)} |f(\alpha)| > 0$. Behauptung 2: $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0) = D_\varepsilon(f(\alpha))$. Bew: Sei $w \in D_\varepsilon(0)$. Zu zeigen ist, dass ein $z \in D_r(\alpha)$ existiert, sodass $f(z) = w \Leftrightarrow \underbrace{f(z) - w}_{=:h(z)} = 0$. Wir haben also $h : D_r(\alpha) \to \mathbb{C}$. $z \in \partial D_r(\alpha) = C_r(\alpha)$

$$|h(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

und

$$|h(\alpha)| = |f(\alpha) - w| = |-w| < \varepsilon$$

Nach Satz 8.2.3 gibt es ein $z \in D_r(\alpha)$ mit $h(z) = 0 \Rightarrow f(z) = w$. Das heißt $f(D_r(\alpha)) \supseteq D_\varepsilon(0)$. □

Satz 8.2.5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

Dann ist $f = 0$ auf $\mathbb{C}$.

Beweis. (mittels Skizze, nicht hier) $\square$

9 [*] Eine Umkehrung von Cauchy: Morera

9.1 Satz von Morera

Satz 9.1.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und für jedes Rechteck (achsenparallel) $R \subseteq U$ sei

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\Gamma = \partial R)$$

Dann ist f analytisch auf U.

Beweis. Sei $z_0 \in U$, $D_r(z_0) \subseteq U$, $z \in D_r(z_0)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\gamma_{w,z} : z(t) &\coloneqq \begin{cases} w + t\operatorname{Re}(z-w) & 0 \le t \le 1 \\ \operatorname{Re}(?) + (t-1)\operatorname{Im}(z-w) & 1 \le t \le 2 \end{cases} \\
F(z) &\coloneqq \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w \to 0 \text{ für } h \to 0 \\
&\Rightarrow F' = f \text{ auf } D_r(z_0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ ist analytisch und f ist auch analytisch ☐

Definition 9.1.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_n, f : U \to \mathbb{C}$. Dann konvergiert $(f_n)_n$ lokal gleichmäßig gegen f, falls $f_n \to f$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen $K \subseteq U$. Das heißt

$$\forall K \subseteq U \text{ kompakt}\colon \lim_{n\to\inf} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Satz 9.1.3. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ analytisch konvergiere lokal gleichmäßig gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f analytisch.

Beweis. 1) f ist stetig. $z_0 \in U$, $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$, dann $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\overline{D_r(z_0)}$. Das heißt f_n ist steig auf $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow$ f ist stetig auf $\overline{D_r(z_0)} \Rightarrow$ f ist stetig auf U.
2) $R \subseteq D_r(z_0)$ ein Rechteck, $\Gamma = \partial R$

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} = 0$$

Das heißt f ist analytisch nach Satz 9.1.1. ☐

9.2 Reflexionsprinzip von Schwarz

[26. Mai] **Satz 9.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $L \subseteq U$ ein Liniensegment, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und analytisch auf $U \setminus L$. Dann ist f analytisch auf U.

Beweis. Sei o.B.d.A. $L \subseteq \mathbb{R}$, sonst sei $g(z) = az + b$ mit $L \subseteq g(\mathbb{R})$ und betrachte $h = f \circ g$. Wenn h auf $g^{-1}(U)$ analytisch ist, dann ist f auf U analytisch.
Wir betrachten jetzt ein beliebiges Rechteck $R \subseteq U$ und wollen Satz 9.1.1 anwenden. Das heißt wir müssen zeigen, dass

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Fall 1: $R \cap L = \varnothing$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

da f analytisch in einer offenen Umgebung von R ist.
Fall 2: $\partial R \cap L \neq \varnothing$. Sei $\varepsilon > 0$ und R_ε wie oben im Bild. Dann gilt

$$\int_{\partial R_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Da

$$\int_a^b f(x + i\varepsilon)\,\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

folgt

$$0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Fall 3: L liegt im Inneren von R. Wir teilen R in zwei Rechtecke R_1, R_2 auf, sodass L auf dem Rand von R_1, R_2 liegt. Dann gilt nach Fall 2:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 + 0 = 0$$

Nach Satz 9.1.1 ist f damit analytisch auf U. □

Notation 9.2.2. Wir schreiben $\mathbb{C}_+ \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Satz 9.2.3 (Reflexionsprinzip)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{C}_+$ oder $D \subseteq \mathbb{C}_-$ und $L \coloneqq \partial D \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$. Sei $F : D \to \mathbb{C}$ analytisch, stetig auf $D \cup L$ sowie $f(z) \in \mathbb{R}\ \forall z \in L$. Wir definieren $D_- \coloneqq \{\overline{z} : z \in D\}$. Dann ist die Funktion $g : D_+ \cup L \cup D_- \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} f(z) & z \in D \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. g ist stetig auf $D_+ \cup L \cup D_-$, da f analytisch auf D, D_- ist und f reellwertig auf L ist. Es bleibt noch zu beweisen, dass g auf D und D_- analytisch ist. Auf D ist das klar, weil $g(z) = f(z)$. Sei also $z \in D_- \Rightarrow \overline{z} \in D_+$, $h \neq 0$ klein genug, dass $z + h \in D_-$. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f\left(\overline{z+h}\right)} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \frac{\overline{f\left(\overline{z} + \overline{h}\right) - f(\overline{z})}}{\overline{h}} \to \overline{f'(\overline{z})} \text{ für } h \to 0$$

nach Satz 9.2.1 weil f analytisch ist auf $D \cup L \cup D_-$. □

Korollar 9.2.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich der reellen Achse $\mathbb{R}$. Sei außerdem $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und f reellwertig auf $U \cap \mathbb{R}$. Dann folgt

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in U$$

Beweis. Wende Satz 9.2.3 auf $f : D_+ \cup L \to \mathbb{C}$ an. Dann erhalten wir

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D_+ \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in D_- \end{cases}$$

ist analytisch auf $U = D_+ \cup L \cup D_-$ und $g = f$ auf D_+. Nach Satz 8.1.1 gilt damit aber $g = f$ auf U. Das heißt $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ für alle $z \in D_-$ und damit auch für alle $z \in D_+$. □

Beispiel 9.2.5. 1. Betrachte $z \mapsto e^z = \exp(z)$. Es gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

10 [*] Einfach zusammehängende Gebiete und der Cauchy-Integral-Satz

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$, $D_r(z_0) \subseteq U$ und γ ein geschlossener Weg in $D_r(z_0)$. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Erinnerung: Stetige Linie γ in U ist eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to U$.
U ist wegzusammenhängend, wenn für alle $z, w \in U$ eine stetige FUnktion $\gamma : [0,1] \to U$ existiert, sodass $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$.
U ist zusammenhängend, wenn für jede Partitation $U = A \cup B$ mit offenen Mengen A, B (in U) und $A \cap B \neq \varnothing$ folgt $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$.
U ist lokal wegzusammenhängend, wenn für jedes $z_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, sodass $U \cap D_r(z_0)$ wegzusammenhängend ist.

Lemma 10.1.1. Sei U lokal wegzusammenhängend. Dann gilt U ist genau dann zusammenhängend, wenn U wegzusammenhängend ist.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Gilt immer
„$\Rightarrow$ “: siehe Skript □

Definition 10.1.2. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ sind homotop, falls es eine stetige Funktion $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ gibt mit $\gamma_0 = \Gamma(\cdot, 0), \gamma_1 = \Gamma(\cdot, 1)$ und $\Gamma(0, s) = \gamma_0(0), \Gamma(1, s) = \gamma_1(0)$. In diesem Fall heißt Γ Homotopie und liefert Äquivalenzklassen.

10.1.3. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ und $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ sind homotop, wenn es eine Homotopie $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ gibt mit obigem Ergebnis.

Definition 10.1.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann heißt U einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $z_0 \coloneqq \gamma(0) =?$ homotop zu den trivialen ? $\hat{\gamma} = z_0$ ist.

Beispiel 10.1.5. Sei U offen und konvex. Dann ist U einfach zusammenhängend.

Beweis. Zu $z_0, w \in U$ ist $[w, z_0] = \{w + s\,(z_0 - w) : 0 \leq s \leq 1\} \subseteq U$. $\gamma : [0,1] \to U$ ist ein geschlossener Weg, $z_0 \coloneqq \gamma(0)$. $\Gamma(t, s) \coloneqq (1 - s)\,\gamma(t) + s z_0$ ist eine Homotopie von γ und $\hat{\gamma} = z_0$. □

Beispiel 10.1.6. Sei U offen und sternförmig (d.h. $\exists z_0 \in U : [w, z_0] \subseteq U\ \forall w \in U$). Dann ist U einfach zusammenhängend.

Beweis. Fall 1: $\gamma : [0,1] \to U$ ist eine geschlossene Kurve mit $\gamma(0) = z_0 = \gamma(1)$. Dann funktioniert wieder $\Gamma(t, s) \coloneqq (1 - s)\,\gamma(t) + s z_0$.
Fall 2: $\gamma(0) = z_1 \neq z_0$. Nehme Weg $\gamma_1 : [0,1] \to U$, $\gamma_1(0) = z_1, \gamma_1(1) = z_0$. Betrachte Weg $\overline{\gamma} \coloneqq \gamma_1^{-1} \gamma_1 \gamma \gamma_1^{-1} \gamma_1 = \gamma_1^{-1} \gamma \gamma_1$, $\hat{\gamma} \coloneqq \gamma_1 \gamma_1 \gamma_1^{-1}$ geschlossener Weg von z_0 nach z_0. $\overline{\gamma}$ ist monotop zu $\hat{\gamma} = \gamma_1 \gamma \gamma_1^{-1}$. $\gamma_s(t) \coloneqq \gamma - 1(st)$ für $0 \leq s \leq 1$. ist ein Weg von z_1 nach $\gamma_1(s)$. $\Gamma(\cdot, s) = \gamma_s^{-1} \hat{\gamma} ? \gamma_s$. Dann ist $\overline{\gamma}$ homotop zu $\hat{\gamma}$. (??) □

[27. Mai] **Satz 10.1.7.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch sowie $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zwei homotope, glatte Kurven. Also insbesondere $\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann folgt bereits, dass

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Korollar 10.1.8. Sei U einfach zusammenhängend, γ eine geschlossene Kurve in U, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. γ ist homotop zu $\beta(t) \coloneqq z_0 = \gamma(0)$. Also gilt nach Satz 10.1.7, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\beta(t))\dot{\beta}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \square$$

Korollar 10.1.9. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann hat f eine globale Stammfunktion, das heißt es existiert eine analytische Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$ auf U.

Beweis. Sei $z_0 \in U$ und $z \in U$ mit regulärem, glatten Weg $\gamma_{z_0,z}$ von z_0 nach z. Wir definieren

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Das ist nach Satz 10.1.7 wohldefiniert.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w \\
z(t) &= z + th \\
\Rightarrow \dot{z}(t) &= h \\
\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_0^1 f(z+th)h\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z) \\
\Rightarrow F'(z) &= f(z)
\end{aligned} \qquad \square$$

Lemma 10.1.10. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zwei homotope (glatte) Kurven, Γ Homotopie von γ_1 zu γ_0. Dann können wir Γ so modifizieren, dass alle Zwischenkurven $\Gamma(\cdot, s)$ glatt sind. Für ein Grid auf $[0,1]^2$ der Feinheit $\frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}$.

$$\Delta_{j,k}^N \coloneqq \left\{(t,s) : \frac{j-q}{N} \leq t \leq \frac{j}{N}, \frac{k-1}{N} \leq s \leq \frac{k}{N}\right\}$$

Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ groß genug so, dass offene Kreisscheiben $D_{j,k}$ existieren mit

$$\Gamma\left(\Delta_{j,k}^N\right) \subseteq D_{j,k} \subseteq U$$

Beweis von Satz 10.1.7. Sei $s_k \coloneqq \frac{k}{N}$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = \Gamma(\cdot, s_0)$, $\gamma_k \coloneqq \Gamma(\cdot, s_k)$, $\gamma_{s_N} = \gamma_1$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\int_{\gamma_{s_k}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{s_{k+1}}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Wir hangeln uns also von einer Kurve zur nächsten. Alle Zwischenintegrale werden paarweise in entgegeben gesetzte Richtungen durchlaufen. In Summe ergeben die zusätzlichen Integrale 0.

$$\int_{\gamma_{k+1}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_{\gamma_{j,k}} f(z)\,\mathrm{d}z}_{=0} = 0 \qquad \square$$

[02. Jun] (fehlt)

[03. Jun] **Beispiel 10.1.11.**

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ z_0 &= 1 \\ \log 1 &= 0 \\ \log z &= \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w} \end{aligned}$$

Sei $-\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} \,\mathrm{d}x$$

Dabei ist $\gamma_1 : w(t) = 1 + (|z| - 1)\, t$, $\gamma_2 : w(t) = |z|\, e^{it}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} &= \int_1^{|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \operatorname{Arg}(z) = \log|z| + \int_0^{\operatorname{Arg}(z)} \frac{i\,|z|\,e^{it}}{|z|\,e^{it}} \,\mathrm{d}t \\ &= \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

Beispiel 10.1.12.

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \\ z_0 &= -1 = e^{i\pi} \\ \log z_0 &= i\pi \\ \Rightarrow\ \log y &= \int_{-1}^z \frac{\mathrm{d}w}{w} + i\pi = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \pi i \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + i\pi \end{aligned}$$

Dabei sei $\gamma_2 : w(t) = |z|\, e^{it}$ für t von π bis $\Theta \coloneqq \operatorname{Arg}(z)$ mit $0 < \Theta < 2\pi$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{-|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log(|z|) + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} + \pi i \\ \Rightarrow\ \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} &= \int_\pi^\Theta \frac{i\,|z|\,e^{it}}{|z|\,e^{it}} \,\mathrm{d}t = i \int_\pi^\Theta \mathrm{d}t = i\,(\Theta - \pi) \\ \Rightarrow\ \log z &= \log|z| + i\,(\Theta - \pi) + i\pi = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

Das ist die gleiche Funktion wie im vorherigen Beispiel. Aber jetzt für $0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi$.

Definition 10.1.13 (Komplexe Potenzen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $z^{\frac{1}{n}} \coloneqq \exp\!\left(\frac{1}{n} \log z\right)$ wobei $\log z$ ein analytischer Zweig des Logarithmus ist.

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_1 &= e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi}{4} + i\pi} = -i \end{aligned}$$

(endlich viele genau n verschiedene Zweige)

$$\exp\left(\frac{1}{n}\left(\log z + 2\pi i k\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \log z + 2\pi i \frac{k}{n}\right)$$

verschiedene Werte ? für $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{3}} &= i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k} z_1 && = e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow z &= e^{\frac{1}{k}\left(i\frac{\pi}{2}+2\pi i k\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi i\frac{k}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 0 : z_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} \\ k = 1 : z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ k = 2 : z_2 &= e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}i} = e^{i\frac{7\pi}{6}} \end{aligned}$$

Allgemein

$$\begin{aligned} z &= |z|\, e^{i\Theta} = |z|\, e^{i\Theta+2\pi i k} \\ z^{\frac{1}{n}} &= |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\Theta+2\pi k}{n}} && (k = 0, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow w^z \coloneqq \exp(z \log w)$$

11 [*] Halbierte Singularitäten

Notation 11.1.1. Eine gepunktete Kreisscheibe

$$\dot{D}_k(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$$

?

$$A_{R_1,R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \tag{Ring}$$

Definition 11.1.2. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U offen. f hat eine isolierte Singularität in z_0, falls $f : \dot{D}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch ist, aber <u>nicht analytisch</u> auf z_0.

Beispiel 11.1.3.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $$f(z) = \begin{cases} \sin z & z \neq 2 \\ 0 & z = 2 \end{cases}$$
3. $f(z) = \frac{1}{z-3}$
4. $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z \neq 0$

Definition 11.1.4. f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Dann definieren wir

1. Die Singularität ist (auf-)hebbar, falls eine punktierte Kreisscheibe $\dot{D}_r(z_0)$ sowie eine analytische Funktion $g : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ existieren derart, dass $f(z) = g(z)$ für $z \in \dot{D}_r(z_0)$.
2. Falls es analytische Funktionen $A, B : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ gibt mit $A(z_0) \neq 0$ und $B(z_0) = 0$ und $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ für $z \in \dot{D}_r(z_0)$, so hat f einen Pol in z_0. Hat B eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in z_0, so hat f einen Pol der Ordnung k in z_0.
3. f hat in z_0 ein wesentliche Singularität, falls es keine hebbare Singularität und keinen Pol in z_0 hat.

Satz 11.1.5 (Riemanns Prinzip für hebbare Singularitäten)**.** f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Ist

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$$

so ist die Singularität hebbar.

Beweis. U sei eine Umgebung von z_0. Wir definieren

$$h(z) \coloneqq \begin{cases} (z - z_0)\, f(z) & z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Das heißt h ist stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 9.1.1 ist h analytisch auf U. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} h(z_0) &= 0 \\ f(z) &= \frac{h(z)}{z - z_0} = \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} \to h'(z_0) \text{ für } z \to z_0 \end{aligned}$$

Nach Satz 9.1.1 hat f damit eine analytische Fortsetzung auf U. □

Korollar 11.1.6. Ist f beschränkt in der Nähe von z_0. Dann ist die Singularität in z_0 hebbar.

Beweis.

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0$$

mit vorherigem Satz liefert direkt die Behauptung. □

Beispiel 11.1.7. Sei $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ für $z \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

Satz 11.1.8. Sei f analytisch in einer punktierten Umgebung von z_0 und es gebe ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^k\, f(z) \neq 0$$

und

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^{k+1}\, f(z) = 0$$

Dann hat f in z_0 ein Pol der Ordnung k.

Beweis. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir definieren

$$g(z) \coloneqq \begin{cases} (z - z_0)^{k+1}\, f(z) & z \in U \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf U und analytisch in $U \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 9.1.1 ist g analytisch auf U

$$\begin{aligned} a(z) &\coloneqq \frac{g(z)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \to g'(z_0) \text{ für } z \to z_0 \\ A(z_0) &\to \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^k\, f(z) \neq 0 \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{A(z)}{(z - z_0)^k} && (z \in U \setminus \{z_0\}) \\ A(z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Das heißt wir haben nach Definition einen Pol der Ordnung k in z_0. □

Satz 11.1.9 (Caseratti (?) Weierstraß)**.** f habe in z_0 eine wesentliche Singularität und $U \subseteq \mathbb{C}$ sei offen mit $z_0 \in U$. Außerdem sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist $R = R_U = f(U \setminus \{z_0\}) = \{f(z) : z \in U \setminus \{z_0\}\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen die Aussage ist falsch. Dann existiert ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f(z) - w| > \delta \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\delta} \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\} \end{aligned}$$

Das heißt die Funktion

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in U \setminus \{z_0\})$$

Nach Satz 11.1.5 hat g eine hebbare Singularität in z_0. Das heißt g hat eine analytische Fortsetzung auf U

$$\Rightarrow f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in U \setminus \{z_0\})$$

Das heißt f hat eine hebbare Singularität oder einen Pol in z_0, das ist ein Widerspruch zur Annahme. □

11.2 Laurententwicklung

[16. Jun] Sei $f : D_R(z_0)$ analytisch. Dann existiert eine konvergente Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ für $|z - z_0| < R$.

Frage: Was passiert, wenn $f : \dot{D}_R(z_0) \subseteq D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch ist? Oder wenn $f : A_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch ist?

Antwort: Wir werden sehen, dass wir stattdessen die Reihe $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ betrachten müssen, um ähnliche Konvergenzresultate zu erhalten.

Definition 11.2.1. Sei gegeben eine zweiseitige Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dann ist

$$L \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n$$

konvergent, falls

$$L_- \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{-1} \mu_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{-1} \mu_n$$

und

$$L_+ \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{j} \mu_n$$

beide existieren und

$$L = L_- + L_+$$

Satz 11.2.2. Gegeben $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist

$$f(z) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

konvergent auf

$$A(z_0) = A_{R_1,R_2}(z_0) = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

mit

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$
$$R_1 = \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to -\inf} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$$

Beachte den Spezialfall, dass $R_1 = 0$. In diesem Fall ist $A_{0,R}(z_0) = \dot{D}_R(z_0)$.

Beweis.

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergent für $z \in D_R(z_0)$ mit

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

nach Wurzelkriterium. Damit bleibt noch der Negativteil

$$f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

Für Wurzelkrit. müsste gelten

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \left| a_{-k} (z - z_0)^{-k} \right|^{\frac{1}{k}} &= \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}} \frac{1}{|z - z_0|} < 1 \\ \Leftrightarrow \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}} &< |z - z_0| \end{aligned}$$

Das heißt wir haben die Behauptung, da f_+ auf $|z - z_0| < R_1$ und f_- auf $|z - z_0| > R_1$ konvergiert und analytisch ist. Damit ist auch $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$ analytisch auf $R_1 < |z - z_0| < R_2$. □

Satz 11.2.3 (Laurententwicklung)**.** Sei $f : A_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann wird f durch eine konvergente Laurententwicklung dargestellt. Das heißt es exstiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (z \in A_{R_1,R_2}(z_0))$$

Beweis. Sei $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$ und $C\rho_1(z_0), C\rho_2(z_0)$ Kreisscheiben um z_0 mit Radius ρ_1 bzw. ρ_2.
Schritt 1: Für alle analytischen Funktion $g : A_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ gilt

$$0 = \int_{C\rho_2(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho_1(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w$$

Nach dem ??-Satz gilt damit

$$\int_{C\rho_1(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\tilde{C}\rho_2(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho_2(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w$$

Schritt 2: Sei $z \in A_{R_1,R_2}(z_0)$. Dann existieren $R_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R_2$. Wir definieren

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in A_{R_1,R_2}(z_0) \setminus \{z\} \\ f'(w) & w = z \end{cases}$$

Dann ist g stetig in $A_{R_1,R_2}(z_0)$ und analytisch in $A_{R_1,R_2}(z_0) \setminus \{z\}$. Dann gilt nach Satz 9.1.1, dass g analytisch auf $A_{R_1,R_2}(z_0)$ ist und nach Schritt 1 ist damit

$$\int_{C\rho_1(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho_2(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{C\rho_1(z_0)} g(w)\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho_1(z_0)} \frac{f(-f(z))}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \int_{C\rho_1(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{C\rho_1(z_0)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
&= \int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z)\int_{C\rho_2(z_0)} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(z)\left(\underbrace{\int_{C\rho_2(z_0)} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}}_{=2\pi i} - \underbrace{\int_{C\rho_1(z_0)} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}}_{=0}\right) &= \int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C\rho_1(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\
\Rightarrow 2\pi i f(z) &= \int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C\rho_1(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

Auf $C\rho_2(z_0) : |w-z_0| = \rho_2 > |z-z_0|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} - \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \\
&= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho_2(z_0)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i a_n}\,(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

auf $C\rho_2(z_0) : |z-z_0| > \rho_2 = |w-z_0|$ überträgt sich das auch. Das heißt wir haben mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,(z-z_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho_1(z_0)} (w-z_0)^k f(w)\,\mathrm{d}w\,(z-z_0)^{-(k+1)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-(k+1)}\,(z-z_0)^{-(k+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\begin{cases} \int_{C\rho_2(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w & n \geq 0 \\ \int_{C\rho_1(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w & n < 0 \end{cases}$$

eine Potenzreihenentwicklung. □

Bemerkung 11.2.4. Im vorherigen Beweis hängt a_n nicht von ρ_1 und ρ_2 ab. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{Cr(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n-1}}\,\mathrm{d}w \qquad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

für alle $R_1 < r < R_2$. Das zeigt sich wie folgt: Es gilt $z_0 \notin A_{R_1,R_2}(z_0)$

$$\Rightarrow A_{R_1,R_2}(z_0) \ni w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \text{ analytisch}$$

Nach Schritt 1 aus dem Beweis gilt der Zusammenhang also unaghngig von $R_1 < r < R_2$.

Bemerkung 11.2.5. Die Laurent-Entwicklung ist eindeutig. Das heißt: Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ auf $A_{R_1,R_2}(z_0)$. Dann ist

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Cr(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad (R_1 < r < R_2)$$

Das heißt die b_n entsprechen den hergeleiteten a_n und es gibt damit insbesondere nur eine Koeffizientenfolge.

Korollar 11.2.6. Ist $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann folgt für alle $\delta > 0$ mit $D_\delta(z_0) \subseteq U$ ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in \dot{D}_\delta(z_0)$. Wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{Cr(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad (0 < r < \delta)$$

Beweis. Wir setzen $R_2 = \delta$ und wenden den vorherigen Satz an. □

Beispiel 11.2.7.

1. $\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z$ für $z \neq 0$.
2. $$\frac{1}{z^2 (1 - z)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n$$
3. $$\sin \frac{1}{z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n+1}}{(2n + 1)!}$$

[17. Jun] **Definition 11.2.8** (Definition Hauptteil, analytischer Teil)**.** (fehlt)

Lemma 11.2.9. (fehlt)

Anwendung 11.2.10 (Partialbruchzerlegung)**.** Sei $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit P, Q Polynome sowie $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$. Dann ist R analytisch auf $\mathbb{C}$ ohne die Nullstellen von Q. Außerdem gilt $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Nun gebe es n unterschiedliche Nullstellen von Q, jeweils mit Vielfachheit k_j. Dann gilt $\operatorname{Grad} Q = \sum_{j=1}^{n} k_j$ sowie $Q(z) = \alpha \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{k_j}$. Behauptung: Es existieren Polynome P_j, $j = 1, \ldots, n$ mit

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} P_j \left(\frac{1}{z - z_j} \right)$$

Partialbruchzerlegung von R.

Beweis. R hat in z_j einen Pol der Ordnung k_j. In der Nähe von z_j haben wir

$$R(z) = \sum_{n=-k_j}^{\infty} a_n (z - z_j)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n}_{\text{analytisch in Nähe } z_j} + \underbrace{\sum_{n=-k_j}^{-1} a_n (z - z_j)^n}_{= P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} P_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) &\text{ existiert } \forall z \neq z_j \\ R_1(z) = R(z) - P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) \end{aligned}$$

ist analytisch für $z \neq z_1$ und $R_1(z)$ ist stetig in z_1. Nach Satz 9.1.1 ist R_1 analytisch in $z \neq z_j$ für $j = 2, \dots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned} P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) &\text{Hauptteil von } R \text{ in } z_2 \\ R_2(z) = R_1(z) - P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) \end{aligned}$$

R_2 ist analytisch für $z \neq z_j$, $j = 2, \dots, n$ und stetig in z_2. R_2 hat eine analytische Fortsetzung auf $z \neq z_j, j = 3, \dots, n$. Diese nennen wir ebenfalls R_2. So folgt induktiv

$$R_j(z) = R_{j+1}(z) - P_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) \qquad (0 \leq j \leq n-1)$$

Wir gehen auch hier wieder analog vor und verwenden die analytische Fortsetzung, die R_{j+1} in z_{j+1} hat. Damit gilt

$$\begin{aligned} R(z) &= R_n(z) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)}_{\to 0 \text{ für } z \to \infty} \\ \Rightarrow R_n(z) &\to 0 \text{ für } |z| \to \infty \end{aligned}$$

Damit ist R_n eine beschränkte ganze Funktion auf $\mathbb{C}$. Aber da R_n auch analytisch auf $\mathbb{C}$ ist, folgt, dass R_n konstant und damit gerade gleich 0 sein muss. Damit folgt die Behauptung. $\square$

12 [*] Der Residuen-Satz

12.1 Windungszahlen

f hat Singularität in z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (0 < |z - z_0| < \delta)$$

Sei $0 < r < \delta^n$ und $C_r(z_0)$ der Kreis um z_0 mit Radius r. Dann ist $\dot{D}_r(z_0)$ nicht einfach zusammenhängend. Aber es lässt sich nachrechnen, dass

$$\int_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}$$

Definition 12.1.1. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $0 < |z - z_0| < \delta$. Wir nennen a_{-1} das Residuum von f in z_0 und schreiben

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := 2\pi i a_{-1}$$

Berechnung von Residuen.

1. f hat Pol von Grad 1 bei z_0.

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

mit A, B analytisch nahe z_0 und $A(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}$$

Beweis.

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0)^n + \dots$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{B'(z)} \qquad \square$$

2. f hat einen Pol der Ordnung k bei z_0. Dann gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] (z_0)$$

Beweis.

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n$$

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right) = (k-1)! a_{-1} + k! a_0 (z - z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)|_{z=z_0} = (k-1)! a_{-1} \qquad \square$$

3. f hat eine wesentliche Singularität in z_0. Dann lese a_{-1} in der Laurententwicklung ab.

Beispiel 12.1.2.

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Dann ist
$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{\sin 0} = 1$$

2. $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$
$$\begin{aligned} \frac{1}{z^n - 1} &= \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \\ \Rightarrow \operatorname{Res}(f, i) &= \frac{1}{(i-1)(i+1)(2i)} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4} \end{aligned}$$

[23. Jun] **Ziel**: Berechne $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, wobei γ eine beliebige geschlossene Kurve ist und f Singularitäten in $z_1, \ldots, z_n$ hat.

Definition 12.1.3. Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \notin \gamma$. Dann heißt
$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$
die Windungszahl von γ um a.

Bemerkung 12.1.4. Wir hätten gerne, dass die Windungszahl aus der vorherigen Definition eine ganze Zahl ist. Anhand der Definition lässt sich das nicht direkt erkennen, aber die Betrachtung einiger Beispiele legt tatsächlich nahe, dass das der Fall ist:

1. a liegt vollständig außerhalb von γ. Dann gilt direkt $n(\gamma, a) = 0$.

2. Sei $\gamma = C_r(z_0), a \in D_r(z_0)$ mit Singularität z_0. Dann haben wir bereits ausgerechnet, dass
$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$$

3. Sei $\gamma = C_r(z_0), a \notin D_r(z_0) \cup C_r(z_0)$ mit Singularität z_0. Dann gilt direkt $n(\gamma, a) = 0$.

4. Sei γ ein Kreis, der sich k-mal um a windet mit $|a - z_0| < r$, $C_r^k(z_0) = re^{it} + z_0$, $0 \leq t \leq 2\pi k$
$$\Rightarrow n\Big(C_r^k(z_0), z_0\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi k} \frac{\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t}{z(t) - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi k} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} i \int_0^{2\pi k} \mathrm{d}t = \frac{i2\pi k}{2\pi i} = k$$
Damit ist $n\Big(C_r^k(z_0), a\Big) = k$ für $|a - z_0| < r$.

Das gilt tatsächlich auch im Allgemeinen wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 12.1.5. Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \notin \gamma$. Dann gilt $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $z(t)$ für $0 \le t \le 1$ eine Parametrisierung von γ. Wir wollen zeigen

$$\int_0^1 \frac{z(t)}{z(t)-a}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{Z}$$

Definiere für $0 \le s \le 1$

$$\begin{aligned}
F(s) &:= \int_0^s \frac{z(t)}{z(t)-a}\,\mathrm{d}t \\
h(s) &:= (z(s)-a)\,e^{-F(s)} \\
\Rightarrow \dot{F}(s) &= \frac{\dot{z}(s)}{z(s)-a} \\
\Rightarrow \dot{h}(s) &= \dot{z}(s)e^{-F(s)} - (z(s)-a)\,e^{-F(s)}\dot{F}(s) \\
&= e^{-F(s)}\left[\dot{z}(s) - (z(s)-a)\,\frac{\dot{z}(s)}{z(s)-a}\right] = 0 \\
&\Rightarrow h \text{ ist konstant} \\
\Rightarrow z(0)-a = h(0) &= h(s) = (z(s)-a)\,e^{-F(s)} \\
\Rightarrow e^{F(s)} &= \frac{z(s)-a}{z(0)-a} \\
\Rightarrow e^{F(1)} &= \frac{z(1)-a}{z(0)-a} = 1 \\
\Rightarrow 2\pi i n(\gamma,a) &= F(1) = 2\pi i k
\end{aligned}$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit gilt $n(\gamma,a) \in \mathbb{Z}$. □

Definition 12.1.6. Eine Kurve γ heißt reguläre, geschlossene Kurve, falls γ eine einfache geschlossene Kurve ist (keine Selbstüberschneidungen) und $n(\gamma,a) \in \{0,1\}$ für alle $a \notin \gamma$.
In diesem Fall ist $\{a \in \mathbb{C} : n(\gamma,a) = 1\}$ das Innere von γ und $\{a \in \mathbb{C} : n(\gamma,a) = 0\}$ das Äußere von γ.

Satz 12.1.7 (Cauchy-Residuensatz)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f analytisch auf U bis auf endlich viele beliebige Singularitäten $z_1,\dots,z_m$. Das heißt $f : U \setminus \{z_1,\dots,z_m\} \to \mathbb{C}$ ist analytisch. Sei außerdem γ eine geschlossene Kurve in U mit $z_j \notin \gamma$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^m n(\gamma,z_j)\,\mathrm{Res}(f,z_j)$$

Beweis. Sei $k \in \{1,\dots,m\}$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{A_k(z)}_{\text{analytisch nahe } z_k} + \underbrace{H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)}_{\text{Hauptteil von } f \text{ nahe } z_k}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)}\,(z-z_k)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}\,(z-z_k)^n + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)}\,(z-z_k)^n}_{=H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)}$$

Betrachte, dass $H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$ konvergiert für alle $z \neq z_k$. Das heißt für alle $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$. Wir definieren

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m} H_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\})$$

analytisch auf seinem Definitionsbereich und

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_k} g(z) &= \lim_{z\to z_k}\left[f(z) - H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) - \sum_{j=1, j\neq k}^{m} H_j\left(\frac{1}{z-z_k}\right)\right]\\ &= A_k(z_k) - \sum_{j=1, j\neq k}^{m} H_j\left(\frac{1}{z_k-z_j}\right)\end{aligned}$$

Nach Satz 9.1.1 können wir g analytisch auf U fortsetzen

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m}\int_\gamma H_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)\mathrm{d}z\\ \Rightarrow \int_\gamma H_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)\mathrm{d}z &= \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)}\frac{1}{(z-z_j)^n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_j)^n}\end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_j)^{-n+1} &= (1-n)(z-z_j)^{-n}\\ \Rightarrow \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_j)^n} &= 0 \quad \forall n \geq 2\end{aligned}$$

Damit können wir fast alle Summenterme weglassen und erhalten

$$\begin{aligned}\int_\gamma H_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)\mathrm{d}z &= a_{-1}^{(j)}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_j} = n(\gamma, z_j)\,\mathrm{Res}(f, z_j)2\pi i\\ \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\sum_{j=1}^{m} n(\gamma, z_j)\,\mathrm{Res}(f, z_j)\end{aligned}$$ □

Korollar 12.1.8. Sei γ eine reguläre geschlossene Kurve und f analytisch bis auf Singularitäten in $z_1, \dots, z_m$ im Inneren von γ. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}(f, z_j)$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 12.1.7. □

12.2 Anwendungen

Definition 12.2.1. f ist meromorph im Gebiet D, wenn f nicht in D ist, bis auf endlich viele beliebige Singularitäten.

Satz 12.2.2. Sei γ eine reguläre geschlossene Kurve und f meromorph im Inneren von γ und auf γ. Außerdem enthalte γ keine Nullstellen und keine Pole von f.
Es sei Z die Anzahl (gezählt mit Vielfachheiten) der Nullstellen von f im Inneren von γ und P die Anzahl (gezählt mit Vielfachheiten) der Pole von f im Inneren von γ. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = Z - P$$

Beweis. $\frac{f'}{f}$ ist analytisch in U bis auf Nullstellen und Pole von f. Nun habe f eine Nullstelle in $z = a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^k \, g(z) && (g(a) \neq 0) \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k\,(z-a)^{k-1}\, g(z) + (z-a)^k \, g'(z)}{(z-a)^k \, g(z)} \\ &= \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) &= k \end{aligned}$$

Habe nun f einen Pol der Ordnung k in a. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^{-k} \, g(z) \\ f'(z) &= -k\,(z-a)^{-k-1}\, g(z) + (z-a)^{-k}\, g'(z) \\ \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) &= -k \end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz 12.1.7, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = Z - P \qquad \square$$