Skript zur Vorlesung
Analysis IV
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ($\mathbb{C}$ ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) \coloneqq (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) \coloneqq (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass $\mathbb{C}$ so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i \coloneqq (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene.*

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a+bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\overline{z} \coloneqq a-bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil). Sei $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\operatorname{Re}(z) = a$ sowie $\operatorname{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{i}(z - \overline{z})$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für $\mathbb{C}$). Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(\overline{z}w) \leq |z|\,|w|$.

Beweis. (fehlt) □

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz). Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z, falls

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen). Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$). Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3) . □

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \to 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss)**.** Wir definieren die (offene) ε-Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε-Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \; \exists r > 0 \colon D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^{\mathrm{C}} := \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^{C} offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \colon S \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing \wedge S^{\mathrm{C}} \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.
S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \varnothing$, $S \cap B \neq \varnothing$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] := \{(1 - \Theta)\, z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w. Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt $z_{1,\ldots,n}$ sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x,y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x,y) = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n (x+iy)^n =: f(x+yi)$ für passende a_n. Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x,y) = (x+iy)^2$.

(ii) $P(x,y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^{N} a_k (x+iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_N \\ &\alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = u(x,y) + v(x,y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &\coloneqq \partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = u_x + iv_x \\ f_y &\coloneqq \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v = u_y + iv_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x,y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i\partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „$\Rightarrow$ “

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_x (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n (x+iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_y (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n i (x+iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0\le r\le N_1\\ 0\le s\le N_2\\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=:G_n(x,y)} \\ \Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^n G_n(x,y) \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n. Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x,y) = \sum_{t=1}^{n} t\alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

$$\parallel$$

$$i\partial_x G_n(x,y) = i\left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\,\alpha_t x^{n-t-1} y^t\right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \ldots + nc_n y^{n-1} = i\left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)\,c_1 x^{n-2} y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1}\right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned} c_1 &= inc_0 = i\binom{n}{1} c_0 \\ c_2 &= i^2 \frac{n\,(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} G_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,(iy)^k = c_k\,(x+iy)^n \\ \Rightarrow P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} G_n(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,0}\,(x+iy)^n \end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. $\square$

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\sum \coloneqq \left\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3 : \xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi,\eta,\zeta)\in\sum\setminus\{(0,0,1)\}\mapsto z\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ,η,ζ) ist.
Sei

$$\lambda\left((\xi,\eta,\zeta)-(0,0,1)\right)=(x,y,0)-(0,0,1)=(x,y,-1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda\xi=x,\ \lambda\eta=y,\lambda(\zeta-1)=-1&\\ \Rightarrow\lambda&=\frac{1}{1-\zeta}\\ \Rightarrow\frac{x}{\xi}=\lambda&=\frac{y}{\eta}\\ \Rightarrow x&=\frac{\xi}{1-\zeta},\ y=\frac{\eta}{1-\zeta}\end{aligned}$$

Sind x,y gegeben. Dann gilt

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1} \tag{1}$$

$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1} \tag{2}$$

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n\subseteq\mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n\to\infty$, falls $|z_n|\to\infty$ für $n\to\infty$ sowie $f(z_n)\to\infty$, falls $|f(z_n)|\to\infty$ für $n\to\infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in $\sum$ und $\mathbb{C}$)**.** Ein Kreis in $\sum$ ist ein Schnitt von $\sum$ mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ der Form $A\xi+B\eta+C\xi=D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned}D&=A\frac{x}{x^2+y^2+1}+B\frac{y}{x^2+y^2+1}+C\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\\ \Leftrightarrow D&=(C-D)\left(x^2+y^2\right)+Ax+By\end{aligned}$$

Fall 1: $C=D$. Dann ist $Ax+By=D$ eine Linie in $\mathbb{C}$.
Fall 2: $C\neq D\Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (*Sinngemäß: Kreise in $\sum$ werden stenographisch auf Geraden projeziert.*)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in $\mathbb{C}$ gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung)**.**

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h, die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \to \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze $h = it$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_+ t) - f(x_0, y_0)}{t} \to \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v, dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) = 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) = 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Das heißt für $x \to 0$ kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z)\\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1) . □

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen)**.** Sei $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z+h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ (z+h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\\ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1}\right) = n z^{n-1}\end{aligned}$$
□

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen)**.** Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann)**.** Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch intepretieren als Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x + h_1, g + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \qquad \left(h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)$$

und $\varepsilon(h) \to 0$ für $h \to 0$. Wir spalten f außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \to f_x(z) \text{ für } h \to 0 \\
&u(z) = u(x,y) \qquad v(z) = v(x,y) \\
f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) + i\left(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)\right) \\
\frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_1\eta)}_{=:z_1} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x \underbrace{(x+\Theta_2\xi, y)}_{=:z_3} \qquad (0 < \Theta_i < 1)
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
\frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_3\eta)}_{=:z_2} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x \underbrace{(x+\Theta_4\eta\xi, y)}_{=:z_4} \\
\Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} + i\frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \left(u_y(z_1) + iv_y(z_2)\right) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \left(u_x(z_3) + iv_x(z_4)\right)
\end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\
\Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z)\right)}_{\to 0} + \frac{\xi}{\xi - i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z)\right)}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\xi}{\xi}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\eta}{i\eta}\right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f_x(z) \to 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2 + y^2 = z\overline{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z. f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S.

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D. Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D. Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D. Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u+iv$ konstant. □

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D. Ist $|f|$ konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$0 = \partial_x \left(u^2 + v^2\right) = 2uv_x + 2vu_x$$
$$0 = \partial_y \left(u^2 + v^2\right) = 2uu_x + 2vv_y$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 0 = u^2u_x - uvu_y \\ 0 = uvu_y + v^2u_x \end{cases} \\
&\Rightarrow 0 = \left(u^2 + v^2\right) u_x = C \cdot u_x \\
&\Rightarrow u_x = 0 \\
&\Rightarrow v_y = u_x = 0
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. □

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z &= e^z \\
e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
&= \cos\varphi + \sin\varphi \\
\overline{e^z} &= e^{\overline{z}} \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)
\end{aligned}$$

5 [*] Linienintegrale

5.1 Definition und Berechnung

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_I f \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \coloneqq \int_a^b Re(f(t)) \,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t)) \,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.2 (Glatte Kurven)**.**

(i) Sei $z(t) \coloneqq x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Die Kurve $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ ist bestimmt durch $z(t)$ und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

falls die Funktionen $x, y, : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ sind und es eine Partition

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup \ldots \cup [t_{n-1}, t_n] \qquad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[t_{j-1}, t_j]$ sind

(ii) Die Kurve heißt glatt, falls $\dot{z}(t) \neq 0$ bis auf endlich viele $t \in [a, b]$

Definition 5.1.3 (Kurvenintegral)**.** Sei $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von f (definiert in einer Umgebung von C oder nur auf C) ist definiert durch

$$\int_C f \,\mathrm{d}z = \int_C f(z) \,\mathrm{d}z \coloneqq \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t) \,\mathrm{d}t$$

Definition 5.1.4 (Zwei Kurven)**.** Zwei Kurven $C_1 \coloneqq z(t),\ a \leq t \leq b$, $C_2 : w(t),\ c \leq t \leq d$ sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\lambda : [c, d] \to [a, b]$ gibt mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) \geq 0$ und $w(t) = z(\lambda(t))$ (für $c \leq t \leq d$).

Satz 5.1.5. Sind die Kurven C_1, C_2 äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f \,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f \,\mathrm{d}z$$

Beweis. Es gilt die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t)))\dot{z}(\lambda(t))\dot{\lambda}(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b h(z(s))\dot{z}(s) \,\mathrm{d}s \qquad \square$$

Satz 5.1.6. Es gilt

$$\int_C f \,\mathrm{d}t = -\int_{-C} f \,\mathrm{d}t$$

wobei $-C : z(a + b - t),\ a \leq t \leq b$.

Beweis. Wir setzen $w(t) = z(a+b-t)$. Dann gilt $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a+b-t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{-C} f(w)\,\mathrm{d}w &= \int_a^b f(w(t))\dot{w}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(z(a+b-t))\dot{z}(a+b-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^a f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f(z(s))\dot{z}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$ □

Beispiel 5.1.7. Sei $f(z) = x^2 + iy^2$ mit $z = x + iy$ sowie $C = z(t) = (1+i)\,t$ für $0 \le t \le 1$.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f((1+i)\,t)\,(1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1+i)^2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2i}{3}\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.8. Sei $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ mit $C : z(t) = R\,(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2} - \frac{R\sin t}{R^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\mathrm{d}2\pi t\end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned}z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i\end{aligned}$$

Beispiel 5.1.9. Sei $f = 1$ und C eine beliebige Kurve

$$\int_C \mathrm{d}z = \int_a^b \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t = z(b) - z(a)$$

Satz 5.1.10 (C-glatte Kurve)**.** Seinen f, g stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C f + g\,\mathrm{d}z &= \int_C f\,\mathrm{d}z + \int_C g\,\mathrm{d}z \\ \int_C \alpha f\,\mathrm{d}z &= \alpha \int_C f\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Beweis. (Selber machen) . □

Definition 5.1.11. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \le |\beta|$.

Lemma 5.1.12. Sei $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned}&\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \ll \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow &\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Beweise $G(t) = \mathrm{Re}(G(t)) - i\sin(G(t))$. Trick:

$$\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t = Re^{i\varphi} \qquad (R > 0, \varphi \in \mathbb{R})$$

$$\int_1^b G(t)\,\mathrm{d}t = R = \overline{e}\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\varphi} G(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\varphi} G(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\Big(e^{-i\varphi} G(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_a^b |G(t)|\,\mathrm{d}t$$

Satz 5.1.13. Sei C eine Kurve der Länge L auf f, stetig auf $\mathbb{C}$ und $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \ll M \cdot L$$

Beweis. (Fehlt) □

Korollar 5.1.14. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen und $f_n \to f$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \lim_{h\to\infty} \int_C f_n\,\mathrm{d}z$$

Beweis.

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f_n\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_C (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_a^b \mathrm{d}f(z)ofh - f_n(z(t))\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z) - f_n(z)|}_{\to 0} \cdot L_z$$ □

Lemma 5.1.15. Angenommen $f = F'$, F analytisch auch eine Kurve C mit Analysepunkt $z(a)$, Endpunkt $z(b)$. Dann folgt

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a))$$

Beweis.

$$F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t) = f(z(t))z(t)$$

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a))$$ □

5.2 Integrale über geschlossenen Kurven

[06. Mai] **Definition 5.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ eine Kurve in U. Dann nennen wir C geschlossen, falls $z(a) = z(b)$. Eine geschlossene Linie heißt einfach, falls $z(t_1) = z(t_2)$ für $t_1 < t_2 \in [a, b]$ schon impliziert, dass $t_1 = a, t_2 = b$.

Bemerkung 5.2.2. Ein (Standard-)Rechteck R in U ist ein abgeschlossenes, achsen-paralleles Rechteck. Rand $\Gamma = \partial R$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das erste Ziel dieses Kapitels soll es sein, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2.3 (Rechteckssatz I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R \subseteq U$ ein Rechteck mit Rand Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Lemma 5.2.4. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ affin linear. Dann gilt Satz 5.2.3

Beweis. Es ist $F(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2} z^2$ eine Stammfunktion von f mit $z(t)$ Parameterlösung von Γ. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Lemma 5.1.15}}{=} F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass $z(b) = z(a)$. □

Beweis von Satz 5.2.3. (Erfolt durch Überdeckung und schlaue Abschätzung, fehlt hier) □

Satz 5.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ und $R > 0$, sodass $D_R(z_0) = \{|z - z_0| \leq R\} \subseteq U$. Dann existiert eine analytische Funktion $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D_R(z_0)$. D.h. f hat lokal in der Nähe von z_0 eine Stammfunktion.

Beweis. O.B.d.A. sei $U = D_R(z_0)$. Zwischen $w, z \in D_R(z_0)$ gibt es einen Weg

$$\gamma_{w,z}(t) = \begin{cases} w + \operatorname{Re}(z-w)t & 0 \leq t \leq 1 \\ w + \operatorname{Re}(z-w) + i\operatorname{Im}(z-w)\,(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Durch geometrische Überlegungen sehen wir, dass sich die Pfade auch folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\Gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \overset{\text{Satz 5.2.3}}{=} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\int_{\gamma_{z,z+h}} 1\,\mathrm{d}w = z + h - w = h$$

Das heißt für festes z

$$\frac{1}{h} \int f(z)\,\mathrm{d}w = f(z)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w \\
\Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)-f(z)\,\mathrm{d}w\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot(|\mathrm{Re}(h)|+|\mathrm{Im}(h)|) \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)|\cdot 2\,|h| \\
&= 2\sup_{w\in\gamma_{z,z+h}} |f(w)-f(z)| \to 0 \text{ für } h\to 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz 5.2.6. Ist $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch und C eine glatte, geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Nach Satz 5.2.5 hat f eine Stammfunktion F auf $D_R(z_0)$ und F ist analytisch. $C : z(t),\ a \leq t \leq b$ und wegen geschlossen gilt $z(a) = z(b)$. Damit folgt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(b)) - F(z(a)) = 0 \qquad \square$$

Vorsicht, dieser Satz gilt nur lokal:

Beispiel 5.2.7. Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ und $C : Re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

Andererseits ist

$$\int_C z^k\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

6 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

ist stetig auf U. Wir wollen jetzt den Rechtecksatz auf g erweitern.

Satz 6.1.1 (Rechtecksatz II)**.** Ist $R \subseteq U$ ein Rechteck. dann gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Beweis. Fall 1: $\alpha \notin R$. Dann betrachten wir eine Umgebung von R, in der α nicht enthalten ist und verwenden Satz 5.2.3, da g analytisch auf R ist.

Fall 2: $\alpha \in \partial R$. Dann teilen wir R in 6 Subrechtecke $R_{k\in\{1,\ldots,6\}}$ und es sei $\alpha \in \partial R_1$. Dann gilt

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{6} \int_{\partial R_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Nach Fall 1 haben wir dann

$$= \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\left| \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \underbrace{\sup_{z\in\partial R_1} |g(z)|}_{<\infty} \cdot \operatorname{diam}(R_1)$$

Wir können R_1 aber beliebig klein machen. Damit geht der Ausdruck gegen 0.

Fall 3: $\alpha \in R \setminus \partial R$. Wir gehen wie in Fall 2 vor und teilen R in 6 Subrechtecke auf. Damit gilt

$$\int_{\partial R} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} g(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \text{ für } \operatorname{diam}(R_1) \to 0$$ □

7 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1 Vorbereitung

[12. Mai] **Situation:** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{\alpha\}$.

Korollar 7.1.1. In der obigen Situation hat g wieder lokal eine Stammfunktion. Genau gilt: Für jeden Punkt $z_0 \in U$ gibt es ein $F : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch mit $F' = g$ auf $D_R(z_0)$ für ein $R > 0$. Ist insbesondere C eine geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Satz 7.1.2 (Cauchy-Integralformel I)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Ferner sei $0 < \rho < R$ und $C\rho(\alpha)$ die Kurve $z(t) := \rho e^{it} + \alpha$. Dann folgt

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Wir betrachten

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

Dann gilt nach Korollar 7.1.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C\rho(\alpha)} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)-f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha - \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= f(\alpha)\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\,\mathrm{d}x = f(\alpha)\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\,\mathrm{d}t = f(\alpha)2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i f(\alpha) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.1.3. In Satz 7.1.2 gilt sogar $\forall z \in D_\rho(\alpha)$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Lemma 7.1.4. Sei $C\rho(\alpha) : z(t) = \rho e^{it} + \alpha \subseteq D_R(\alpha)$ $(R > \rho > 0)$. Dann gilt für alle $z \in D_\rho(\alpha)$

$$\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha-(z-\alpha)}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

Es ist $|z-\alpha| < \rho$ und $|w-\alpha| < \rho$. Also ist

$$\delta = \left|\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right| = \frac{|z-\alpha|}{\rho} < 1 \quad \forall w \in C\rho(\alpha)$$

Wir schreiben um über die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n$$

Wir haben gleichmäßige und absolute Konvergenz

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}\,\mathrm{d}w &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\ \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w &= \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{(\rho e^{it})^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \geq 1\end{cases} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= 2\pi i\end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.5 (Cauchy-Integralformel II)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch sowie $\alpha \in U$, $R > 0$ mit $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt $\forall 0 < \rho < R$ und $z \in D_\rho(\alpha)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Beweis. Nach Korollar 7.1.1 gilt

$$0 = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)-f(z)}{w-\alpha}\,\mathrm{d}w = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i}$$

□

7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung

Satz 7.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha \in U$, $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann hat f eine in $D_R(\alpha)$ konvergente Potenzreihe. Das heißt es existiert eine Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Dabei ist $D_R(\alpha)$ „=“ $\mathbb{C}$ erlaubt.

Beweis. Für $z \in D_\rho(\alpha)$ haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha-(w-\alpha)} \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} \, \mathrm{d}w \end{aligned}$$

Wir können wieder die Umschreibung zur geometrischen Reihe verwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} \, \mathrm{d}w}_{=: a_n(\rho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho)\,(z-\alpha)^n \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2. In Satz 7.2.1 ist $(a_n)_n$ unabhängig von $R > 0$, solange $D_R(\alpha) \subseteq U$.

Beobachtung 7.2.3. Ist $z \in D_R(\alpha)$, so existiert ein ρ mit $|z-\alpha| < \rho < R$. Für dieses ρ haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\rho)}{2\pi i} (z-\alpha)^n$$

Beobachtung 7.2.4. $a_n(\rho)$ ist unabhängig von $0 < \rho < R$.

Beweis. Sei $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ und $|z-\alpha| < \rho_1$. Dann folgt

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1)\,(z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2)\,(z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_{\rho_1}(\alpha)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen haben wir $a_n(\rho_1) = a_n(\rho_2)$. □

Korollar 7.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Lokal ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist f unendlich oft komplex differenzierbar. □