

Skript zur Vorlesung
Analysis IV
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1	[*] Erinnerungen/Rückblick	3
1.1	Komplexe Zahlen \mathbb{C}	3
1.2	Konvergenz	3
1.3	Ein paar Definitionen	4
2	[*] Analytische Polynome	5
3	[*] Stenographische Projektion	7
4	[*] Komplexe Differenzierbarkeit	8
4.1	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung	8
4.2	Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$	12
5	[*] Linienintegrale	13
5.1	Definition und Berechnung	13
5.2	Integrale über geschlossenen Kurven	15
6	[*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen	18
7	[*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen	19
7.1	Vorbereitung	19
7.2	Lokale Potenzreihenentwicklung	20
7.3	Liouville	22
8	[*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze	24

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** (\mathbb{C} ist ein Körper). Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass \mathbb{C} so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i := (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene*.

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation). Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a + bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\bar{z} := a - bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil). Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\operatorname{Re}(z) = a$ sowie $\operatorname{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für \mathbb{C}). Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |z||w|$.

Beweis. (fehlt)

□

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz). Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen). Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von \mathbb{C}). Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3)

□

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen). Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n := \sum_{j=1}^n z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \rightarrow 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss). Wir definieren die (offene) ε -Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε -Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S \exists r > 0 : D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^C := \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^C offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : S \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \wedge S^C \cap D_\varepsilon(z) \neq \emptyset \right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] := \{(1 - \Theta)z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w . Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt z_1, \dots, z_n sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x, y) = \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x, y) = \sum_{n=0}^L \alpha_n (x + iy)^n =: f(x + iy)$ für passende α_n . Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x, y) = (x + iy)^2$.

(ii) $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^N a_k (x + iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_0 &= \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = u(x, y) + v(x, y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &:= \partial_x f = \partial_x u + i \partial_x v = u_x + i v_x \\ f_y &:= \partial_y f = \partial_y u + i \partial_y v = u_y + i v_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x, y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i \partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „ \Rightarrow “

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{n=0}^N a_n (x + iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_x (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n (x + iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \partial_y (x + iy)^n = \sum_{n=0}^N \alpha_n n i (x + iy)^{n-1} \end{aligned}$$

2 [*] Analytische Polynome

„ \Leftarrow “ Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= \sum_{r=0}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0 \leq r \leq N_1 \\ 0 \leq s \leq N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\
 &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=: G_n(x, y)} \\
 &\Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n G_n(x, y)
 \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n . Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x, y) = \sum_{t=1}^n t \alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

||

$$i\partial_x G_n(x, y) = i \left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t) \alpha_t x^{n-t-1} y^t \right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \dots + nc_n y^{n-1} = i \left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)c_1 x^{n-2} y + \dots + c_{n-1} y^{n-1} \right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned}
 c_1 &= inc_0 = i \binom{n}{1} c_0 \\
 c_2 &= i^2 \frac{n(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0
 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 G_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\
 &= c_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k = c_n (x + iy)^n \\
 &\Rightarrow P(x, y) = \sum_{n=0}^N G_n(x, y) = \sum_{n=0}^N \alpha_{n,0} (x + iy)^n
 \end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. □

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\Sigma := \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$ die Sphäre im \mathbb{R}^3 mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, 0, \frac{1}{2})$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ, η, ζ) ist.
Sei

$$\lambda((\xi, \eta, \zeta) - (0, 0, 1)) = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\xi = x, \quad \lambda\eta = y, \quad \lambda(\zeta - 1) &= -1 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{1 - \zeta} \\ \Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda &= \frac{y}{\eta} \\ \Rightarrow x &= \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{aligned}$$

Sind x, y gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n \rightarrow \infty$, falls $|z_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $f(z_n) \rightarrow \infty$, falls $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in Σ und \mathbb{C}). Ein Kreis in Σ ist ein Schnitt von Σ mit einer Ebene im \mathbb{R}^3 der Form $A\xi + B\eta + C\xi = D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned} D &= A \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + B \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + C \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \\ \Leftrightarrow D &= (C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By \end{aligned}$$

FALL 1: $C = D$. Dann ist $Ax + By = D$ eine Linie in \mathbb{C} .

FALL 2: $C \neq D \Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (Sinngemäß: Kreise in Σ werden stenographisch auf Geraden projiziert.)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0 , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in \mathbb{C} gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung).

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h , die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0) \end{aligned}$$

2. Setze $h = it, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \rightarrow \frac{1}{i} \partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v , dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) &= 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) &= 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Man rechnet allerdings nach, dass

$$\frac{f(x + \alpha ix) - f(0)}{x + \alpha ix} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Das heißt für $x \rightarrow 0$ kriegen wir einen anderen Grenzwert als 0.

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexer Funktionen). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1). \square

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen). Sei $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ein Polynom in \mathbb{C} . Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}(z + h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow (z + h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z + h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1} \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen). Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann). Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch interpretieren als Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + Ah + \varepsilon(h) \cdot h \quad (h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix})$$

und $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Wir spalten f außerdem in zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a + ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\rightarrow f_x(z) \text{ für } h \rightarrow 0 \\ u(z) &= u(x, y) \quad v(z) = v(x, y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y) + i(v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_1\eta}_{=:z_1}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(\underbrace{x+\Theta_2\xi, y}_{=:z_3}) \quad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(\underbrace{x+\xi, y+\Theta_3\eta}_{=:z_2}) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(\underbrace{x+\Theta_4\xi, y}_{=:z_4}) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} + i \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z_1) + iv_y(z_2)) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z_3) + iv_x(z_4)) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z))}_{\rightarrow 0} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \underbrace{(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\xi}{\xi} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq \left| \frac{\eta}{i\eta} \right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \rightarrow 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. \square

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2 + y^2 = z\bar{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z , falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z . f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S .

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D , so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D . Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D . Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D . Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u + iv$ konstant. \square

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D . Ist $|f|$ konstant auf D , so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x (u^2 + v^2) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y (u^2 + v^2) = 2uu_y + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} 0 = uu_x - vv_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 0 = u^2 u_x - uvv_y \\ 0 = uvu_y + v^2 u_x \end{cases} \\ \Rightarrow & 0 = (u^2 + v^2) u_x = C \cdot u_x \\ \Rightarrow & u_x = 0 \\ \Rightarrow & v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. \square

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \frac{d}{dz} e^z &= e^z \\
 e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
 &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\
 \overline{e^z} &= e^{\bar{z}} \\
 \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\
 \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})
 \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
 \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \\
 \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})
 \end{aligned}$$

5 [*] Linienintegrale

5.1 Definition und Berechnung

[05. Mai] **Definition 5.1.1.** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion auf $I = [a, b]$. Dann gilt

$$\int_I f \, dt = \int_a^b f(t) \, dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Definition 5.1.2 (Glatte Kurven).

- (i) Sei $z(t) := x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$). Die Kurve $C : z(t)$, $a \leq t \leq b$ ist bestimmt durch $z(t)$ und heißt stückweise differenzierbar und wir setzen

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$

falls die Funktionen $x, y, : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ sind und es eine Partition

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \quad (t_i \leq t_{i+1}, t_0 = a, t_n = b)$$

gibt, sodass $x(t), y(t)$ stetig differenzierbar auf $[t_{j-1}, t_j]$ sind

- (ii) Die Kurve heißt glatt, falls $\dot{z}(t) \neq 0$ bis auf endlich viele $t \in [a, b]$

Definition 5.1.3 (Kurvenintegral). Sei $C : z(t)$, $a \leq t \leq b$ eine (glatte) Kurve. Das Linienintegral von f (definiert in einer Umgebung von C oder nur auf C) ist definiert durch

$$\int_C f \, dz = \int_C f(z) \, dz := \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) \, dt$$

Definition 5.1.4 (Zwei Kurven). Zwei Kurven $C_1 := z(t)$, $a \leq t \leq b$, $C_2 : w(t)$, $c \leq t \leq d$ sind (glatt) äquivalent, falls es eine bijektive C^1 -Abbildung $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$ gibt mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) \geq 0$ und $w(t) = z(\lambda(t))$ (für $c \leq t \leq d$).

Satz 5.1.5. Sind die Kurven C_1, C_2 äquivalent, so folgt

$$\int_{C_1} f \, dz = \int_{C_2} f \, dz$$

Beweis. Es gilt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = F'(z(t)) \dot{z}(t)$$

Nach den Substitutionsregeln folgt also

$$\int_c^d h(z(\lambda(t))) \dot{z}(\lambda(t)) \dot{\lambda}(t) \, dt = \int_a^b h(z(s)) \dot{z}(s) \, ds \quad \square$$

Satz 5.1.6. Es gilt

$$\int_C f \, dt = - \int_{-C} f \, dt$$

wobei $-C : z(a + b - t)$, $a \leq t \leq b$.

Beweis. Wir setzen $w(t) = z(a + b - t)$. Dann gilt $\dot{w}(t) = -\dot{z}(a + b - t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(w) \, dw &= \int_a^b f(w(t)) \dot{w}(t) \, dt = - \int_a^b f(z(a + b - t)) \dot{z}(a + b - t) \, dt \\ &= \int_b^a f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_a^b f(z(s)) \dot{z}(s) \, ds = - \int_C f(z) \, dz \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.7. Sei $f(z) = x^2 + iy^2$ mit $z = x + iy$ sowie $C = z(t) = (1 + i)t$ für $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) \, dz &= \int_0^1 f((1 + i)t) (1 + i) \, dt \\ &= (1 + i)^2 \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{2i}{3} \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.8. Sei $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$ mit $C : z(t) = R(\cos t + i \sin t)$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z} \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R \cos t}{R^2} - \frac{R \sin t}{R^2} \right) \, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, d2\pi t \end{aligned}$$

Alternativ

$$\begin{aligned} z(t) &= Re^{it} \\ \dot{z}(t) &= iRe^{it} \\ \int_C \frac{dz}{z} \, dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot Re^{it} \, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.9. Sei $f = 1$ und C eine beliebige Kurve

$$\int_C dz = \int_a^b \dot{z}(t) \, dt = z(b) - z(a)$$

Satz 5.1.10 (C -glatte Kurve). Seien f, g stetige Funktionen auf \mathbb{C} . Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C f + g \, dz &= \int_C f \, dz + \int_C g \, dz \\ \int_C \alpha f \, dz &= \alpha \int_C f \, dz \end{aligned}$$

Beweis. (Selber machen) . □

Definition 5.1.11. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \leq |\beta|$.

Lemma 5.1.12. Sei $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t) \, dt &\ll \int_a^b |G(t)| \, dt \\ \Rightarrow \int_a^b G(t) \, dt &\leq \int_a^b |G(t)| \, dt \end{aligned}$$

Beweise $G(t) = \operatorname{Re}(G(t)) - i \sin(G(t))$. Trick:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t) dt &= R e^{i\varphi} & (R > 0, \varphi \in \mathbb{R}) \\ \int_1^b G(t) dt &= R = \bar{e} \int_a^b G(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} G(t) dt \\ \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\varphi} G(t) dt \right) &= \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\varphi} G(t) \right) dt \\ &\leq \int_a^b |G(t)| dt \end{aligned}$$

Satz 5.1.13. Sei C eine Kurve der Länge L auf f , stetig auf \mathbb{C} und $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\int_C f(z) dz \ll M \cdot L$$

Beweis. (Fehlt) □

Korollar 5.1.14. Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen und $f_n \rightarrow f$. Dann folgt

$$\int_C f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n dz$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz - \int_C f_n dz \right| &= \left| \int_C (f(z) - f_n(z)) dz \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z) - f_n(z)| dt = \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z) - f_n(z)|}_{\rightarrow 0} \cdot L_z \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 5.1.15. Angenommen $f = F'$, F analytisch auch eine Kurve C mit Analysepunkt $z(a)$, Endpunkt $z(b)$. Dann folgt

$$\int_C f dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

Beweis.

$$\begin{aligned} F(z(t)) &= F'(z(t)) \dot{z}(t) = f(z(t)) z(t) \\ \int_C f dz &= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \\ &= \int_a^b \gamma(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned} \quad \square$$

5.2 Integrale über geschlossenen Kurven

[06. Mai] **Definition 5.2.1.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C : z(t)$, $a \leq t \leq b$ eine Kurve in U . Dann nennen wir C geschlossen, falls $z(a) = z(b)$. Eine geschlossene Linie heißt einfach, falls $z(t_1) = z(t_2)$ für $t_1 < t_2 \in [a, b]$ schon impliziert, dass $t_1 = a, t_2 = b$.

Bemerkung 5.2.2. Ein (Standard-)Rechteck R in U ist ein abgeschlossenes, achsen-paralleles Rechteck. Rand $\Gamma = \partial R$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Das erste Ziel dieses Kapitels soll es sein, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2.3 (Rechteckssatz I). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $R \subseteq U$ ein Rechteck mit Rand Γ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Lemma 5.2.4. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ affin linear. Dann gilt Satz 5.2.3

Beweis. Es ist $F(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2} z^2$ eine Stammfunktion von f mit $z(t)$ Parameterlösung von Γ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz \stackrel{\text{Lemma 5.1.15}}{=} F(z(b)) - F(z(a)) = 0$$

wobei wir verwendet haben, dass $z(b) = z(a)$. □

Beweis von Satz 5.2.3. (Erfolgt durch Überdeckung und schlaue Abschätzung, fehlt hier) □

Satz 5.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in U$ und $R > 0$, sodass $D_R(z_0) = \{|z - z_0| \leq R\} \subseteq U$. Dann existiert eine analytische Funktion $F : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z) \forall z \in D_R(z_0)$. D.h. f hat lokal in der Nähe von z_0 eine Stammfunktion.

Beweis. O.B.d.A. sei $U = D_R(z_0)$. Zwischen $w, z \in D_R(z_0)$ gibt es einen Weg

$$\gamma_{w,z}(t) = \begin{cases} w + \operatorname{Re}(z - w)t & 0 \leq t \leq 1 \\ w + \operatorname{Re}(z - w) + i \operatorname{Im}(z - w)(t - 1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw \\ \Rightarrow F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z_0,z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w) dw \end{aligned}$$

Durch geometrische Überlegungen sehen wir, dass sich die Pfade auch folgendermaßen darstellen lassen

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw + \int_{\Gamma_{z,z+h}} f(w) dw \stackrel{\text{Satz 5.2.3}}{=} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw \\ \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) dw \end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\int_{\gamma_{z,z+h}} 1 dw = z + h - w = h$$

Das heißt für festes z

$$\frac{1}{h} \int f(z) dw = f(z)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w) - f(z)) \, dw \\
&\Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w) - f(z) \, dw \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \cdot (|\operatorname{Re}(h)| + |\operatorname{Im}(h)|) \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \cdot 2|h| \\
&= 2 \sup_{w \in \gamma_{z,z+h}} |f(w) - f(z)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 5.2.6. Ist $f : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und C eine glatte, geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C f(z) \, dz = 0$$

Beweis. Nach Satz 5.2.5 hat f eine Stammfunktion F auf $D_R(z_0)$ und F ist analytisch. $C : z(t)$, $a \leq t \leq b$ und wegen geschlossen gilt $z(a) = z(b)$. Damit folgt

$$\int_C f(z) \, dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0 \quad \square$$

Vorsicht, dieser Satz gilt nur lokal:

Beispiel 5.2.7. Sei $f(z) = \frac{1}{z}$ und $C : Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\int_C \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} \, dt = 2\pi i$$

Andererseits ist

$$\int_C z^k \, dz = 0 \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

6 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

ist stetig auf U . Wir wollen jetzt den Rechtecksatz auf g erweitern.

Satz 6.1.1 (Rechtecksatz II). Ist $R \subseteq U$ ein Rechteck, dann gilt

$$\int_{\partial R} g(z) \, dz = 0$$

Beweis. FALL 1: $\alpha \notin R$. Dann betrachten wir eine Umgebung von R , in der α nicht enthalten ist und verwenden Satz 5.2.3, da g analytisch auf R ist.

FALL 2: $\alpha \in \partial R$. Dann teilen wir R in 6 Subrechtecke $R_{k \in \{1, \dots, 6\}}$ und es sei $\alpha \in \partial R_1$. Dann gilt

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} g(z) \, dz = \sum_{k=1}^6 \int_{\partial R_k} f(z) \, dz$$

Nach FALL 1 haben wir dann

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \\ \left| \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \right| &\leq \underbrace{\sup_{z \in \partial R_1} |g(z)|}_{< \infty} \cdot \text{diam}(R_1) \end{aligned}$$

Wir können R_1 aber beliebig klein machen. Damit geht der Ausdruck gegen 0.

FALL 3: $\alpha \in R \setminus \partial R$. Wir gehen wie in FALL 2 vor und teilen R in 6 Subrechtecke auf. Damit gilt

$$\int_{\partial R} g(z) \, dz = \int_{\partial R_1} g(z) \, dz \rightarrow 0 \text{ für } \text{diam}(R_1) \rightarrow 0 \quad \square$$

7 [*] Lokale Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1 Vorbereitung

[12. Mai] **Situation:** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

stetig auf U und analytisch auf $U \setminus \{\alpha\}$.

Korollar 7.1.1. In der obigen Situation hat g wieder lokal eine Stammfunktion. Genau gilt: Für jeden Punkt $z_0 \in U$ gibt es ein $F : D_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $F' = g$ auf $D_R(z_0)$ für ein $R > 0$. Ist insbesondere C eine geschlossene Kurve in $D_R(z_0)$, so ist

$$\int_C g(z) dz = 0$$

Satz 7.1.2 (Cauchy-Integralformel I). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Ferner sei $0 < \rho < R$ und $C_\rho(\alpha)$ die Kurve $z(t) := \rho e^{it} + \alpha$. Dann folgt

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw$$

Beweis. Wir betrachten

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

Dann gilt nach Korollar 7.1.1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_\rho(\alpha)} g(w) dw = \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w) - f(\alpha)}{w - \alpha} dw \\ &= \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw - \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{w - \alpha} dw \\ &\Rightarrow \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw = f(\alpha) \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{1}{w - \alpha} dw = f(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = f(\alpha) 2\pi i \\ &\Rightarrow \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw = 2\pi i f(\alpha) \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 7.1.3. In Satz 7.1.2 gilt sogar $\forall z \in D_\rho(\alpha)$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Lemma 7.1.4. Sei $C_\rho(\alpha) : z(t) = \rho e^{it} + \alpha \subseteq D_R(\alpha)$ ($R > \rho > 0$). Dann gilt für alle $z \in D_\rho(\alpha)$

$$\int_{C_\rho(\alpha)} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z} dw &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha-(z-\alpha)} dw \\ &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw\end{aligned}$$

Es ist $|z-\alpha| < \rho$ und $|w-\alpha| < \rho$. Also ist

$$\delta = \left| \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right| = \frac{|z-\alpha|}{\rho} < 1 \quad \forall w \in C\rho(\alpha)$$

Wir schreiben um über die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n$$

Wir haben gleichmäßige und absolute Konvergenz

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)\left(1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw &= \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \\ \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw &= \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}}{(\rho e^{it})^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{(w-\alpha)^{n+1}} dw &= 2\pi i \\ \Rightarrow \int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-z} dw &= 2\pi i \quad \square\end{aligned}$$

Korollar 7.1.5 (Cauchy-Integralformel II). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch sowie $\alpha \in U$, $R > 0$ mit $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt $\forall 0 < \rho < R$ und $z \in D_\rho(\alpha)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Beweis. Nach Korollar 7.1.1 gilt

$$0 = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w) - f(z)}{w-\alpha} dw = \int_{C\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw - f(z) \underbrace{\int_{C\rho(\alpha)} \frac{1}{w-\alpha} dw}_{=2\pi i} \quad \square$$

7.2 Lokale Potenzreihenentwicklung

Satz 7.2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $\alpha \in U$, $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann hat f eine in $D_R(\alpha)$ konvergente Potenzreihe. Das heißt es existiert eine Folge $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Dabei ist $D_R(\alpha)$ „ $=$ “ \mathbb{C} erlaubt.

Beweis. Für $z \in D_\rho(\alpha)$ haben wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{w-\alpha-(w-\alpha)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha) \left(1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)} dw \end{aligned}$$

Wir können wieder die Umschreibung zur geometrischen Reihe verwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-\alpha)^n \underbrace{\int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw}_{=: a_n(\rho)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho) (z-\alpha)^n \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 7.2.2. In Satz 7.2.1 ist $(a_n)_n$ unabhängig von $R > 0$, solange $D_R(\alpha) \subseteq U$.

Beobachtung 7.2.3. Ist $z \in D_R(\alpha)$, so existiert ein ρ mit $|z-\alpha| < \rho < R$. Für dieses ρ haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\rho)}{2\pi i} (z-\alpha)^n$$

Beobachtung 7.2.4. $a_n(\rho)$ ist unabhängig von $0 < \rho < R$.

Beweis. Sei $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ und $|z-\alpha| < \rho_1$. Dann folgt

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_1) (z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho_2) (z-\alpha)^n \quad \forall z \in D_{\rho_1}(\alpha)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen haben wir $a_n(\rho_1) = a_n(\rho_2)$. \square

Korollar 7.2.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Lokal ist $f(z)$ durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Also ist f unendlich oft komplex differenzierbar. \square

[13. Mai] **Korollar 7.2.6.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_\rho(\alpha)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw$$

Satz 7.2.7. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\alpha \in U$. Dann ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} & z \neq \alpha \\ f'(\alpha) & z = \alpha \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. In $D_R(\alpha) \subseteq U$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ mit $a_0 = f(\alpha)$. Das heißt

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n-1} \quad \square$$

7.3 Liouville

Notation 7.3.1. Eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ganze Funktion.

Korollar 7.3.2. Habe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in U genau N Nullstellen $a_1, \dots, a_N \in U$. Dann definieren wir

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_N)} \quad (z \neq a_j)$$

Dann gilt $\lim_{z \rightarrow a_k} g(z)$ existiert und g ist analytisch.

Beweis. Sei $f_0(z) := f(z)$ und

$$f_k(z) := \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z - a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z - a_k} \quad (z \neq a_k)$$

Nach Induktion und Satz 7.2.7 gilt dann, dass f_k analytisch ist für alle $k \in \{0, \dots, N\}$. Beachte $g = f_N$. \square

Satz 7.3.3. Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Für alle $R > 0$ ist $z \in D_R(0)$ und

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Seien $z_1, z_2 \in D_R(0)$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} \left(\frac{f(w)}{w - z_1} - \frac{f(w)}{w - z_2} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{D_R(0)} f(w) \frac{z_1 - z_2}{(w - z_1)(w - z_2)} dw \end{aligned}$$

Es ist $|f(w)| < M < \infty$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Nach M-L-Regel gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi R}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

Das heißt f ist konstant. \square

Satz 7.3.4. Sei f eine ganze Funktion und für ein $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $A, B \geq 0$ mit $|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. $k = 0$ ist Satz 7.3.3.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dann ist g eine ganze Funktion

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} & (|z| \geq 1) \\ &\leq \frac{A + B|z|^k + |f(0)|}{|z|} \leq \tilde{A} + B|z|^{k-1} \\ |g(z)| &\leq C & (|z| \leq 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq \max(\tilde{A}, C) + B|z|^{k-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Per Induktionsvoraussetzung ist g ein Polynom vom Grad $\leq k - 1$. Dann ist $f(z) = zg(z) + f(0)$ ein Polynom vom Grad $\leq k$. \square

Satz 7.3.5. Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat (mindestens) eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis.

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n| \\
 &= |z^n| \underbrace{\left| a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_2 z^{2-n} + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n} \right|}_{\geq |a_n| - |a_{n-1}| |z|^{-1} - \dots - |a_1| |z|^{1-n} - |a_0| |z|^{-n}} \\
 &\geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n
 \end{aligned}$$

Das heißt $P(z) \rightarrow \infty$ für $|z| \rightarrow \infty$. Wenn P keine Nullstelle hat, dann ist

$$h(z) = \frac{1}{P(z)}$$

wohldefiniert und $h(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. Damit ist h eine beschränkte analytische Funktion und nach Satz 7.3.3 ist h konstant. Das heißt P war bereits konstant. \square

Bemerkung 7.3.6. Satz 7.3.5 erweitert sich wie folgt: Sei $g(z) := \frac{P(z)}{z - a_1}$ für P ein Polynom mit Nullstelle a_1 . Dann ist

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &\leq A + B |z|^n \\
 \Rightarrow |g(z)| &\leq \tilde{A} + \tilde{B} |z|^{n-1}
 \end{aligned}$$

Das heißt g ist ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$ und nach Satz 7.3.3 gilt $P(z) = (z - a_1) g(z)$. Das heißt wir können ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor vollständig in seine Nullstellen aufspalten.

8 [*] Eindeutigkeit, Mittelwert & Max, Modulus-Sätze

Satz 8.1.1 (Eindeutigkeit). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Sei $S \subseteq U$ mit Häufungspunkt in U und $f(z) = 0 \ \forall z \in S$. Dann ist $f = 0$ in U .

Beweis. Sei $\alpha \in U$ Häufungspunkt von S . Dann existiert ein $R > 0$, sodass $D_R(\alpha) \subseteq U$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \quad \forall z \in D_R(\alpha)$$

Das heißt es existiert eine Folge $z_k \in S$ mit $z_k \neq \alpha$, $z_k \rightarrow \alpha$ mit $f(z_k) = 0 \ \forall k$. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Potenzreihen folgt damit

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= 0 \text{ auf } D_R(\alpha) \\ A &:= \{z \in U : z \text{ ist Häufungspunkt von Nullstellen von } f\} \\ B &= U \setminus A \end{aligned}$$

Behauptung 1: A ist offen. Sei $z_0 \in A$, existieren $R > 0$, sodass

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \quad \forall z \in D_r(z_0) \\ \Rightarrow D_r(z_0) &\subseteq A \end{aligned}$$

Das heißt A ist offen. Behauptung 2: B ist offen. Sei $w \in B$. Dann hat w einen Sicherheitsabstand von der Nullstelle von f

$$\Rightarrow \exists r > 0 : D_r(w) \subseteq B$$

Damit ist B offen. Daraus, dass U zusammenhängend ist, folgt, dass A oder B leer ist. Da $\alpha \in A$ folgt also $B = \emptyset$

$$\Rightarrow A = U$$

Da f stetig ist, folgt $f(z) = 0 \ \forall z \in U$. □

Korollar 8.1.2. Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, U offen und zusammenhängend. Seien $f(z) = g(z)$ für alle $z \in S$, wobei S hat Häufungspunkt in U . Dann gilt bereits $f = g$ auf U .

Beweis. Betrachte $f - g$ und wende vorherigen Satz an. □

Beispiel 8.1.3. $\sin(z) = 0$ für $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 8.1.4 (Mittelwertsatz). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und U offen. Sei $\alpha \in U$, $R > 0$, $D_R(\alpha) \subseteq U$. Dann folgt

$$\forall 0 < r < R : f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt$$

Beweis. Sei $C_r(\alpha) : w(t) = re^{it} + \alpha$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(w)}{w - \alpha} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + \alpha)}{re^{it}} \cdot re^{it} dt \end{aligned}$$

□