Skript zur Vorlesung Analysis IV bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2025

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

Alle mit [*] markierten Kapitel sind noch nicht Korrektur gelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

1 [*] Erinnerungen/Rückblick

1.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

[22. Apr] **Bemerkung 1.1.1** ($\mathbb{C}$ ist ein Körper)**.** Wir kennen bereits die komplexen Zahlen. Wir betrachten eine komplexe Zahl als Tupel $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

sowie Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass $\mathbb{C}$ so die Körperaxiome erfüllt, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ die neutralen Elemente bezüglich Addition bzw. Multiplikation sind. Für die herkömmliche Darstellung der komplexen Zahlen definieren wir außerdem $i := (0, 1)$. Visualisieren lässt sich das dann in der *Gaußschen Zahlenebene.*

Bemerkung 1.1.2. Sei $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gilt $z = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Wir können also alle komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ schreiben.

Definition 1.1.3 (Komplexe Konjugation)**.** Wir definieren außerdem die komplexe Konjugation: Sei wieder $z = a + bi$. Dann ist die komplexe Konjugation von z definiert durch $\overline{z} := a - bi$. Damit ergibt sich die multiplikative Inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, die sich leicht durch Nachrechnen bestätigen lässt. Die additive Inverse $(-a, -b)$ ergibt sich direkt aus der Definition der Addition.

Definition 1.1.4 (Real- und Komplexteil)**.** Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $\mathrm{Re}(z) = a$ sowie $\mathrm{Im}(z) = b$. Außerdem gilt dann

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{i}(z - \overline{z})$$

Satz 1.1.5 (Cauchy-Schwarz für $\mathbb{C}$)**.** Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\mathrm{Re}(\overline{z}w) \leq |z|\,|w|$.

Beweis. (fehlt) □

1.2 Konvergenz

Definition 1.2.1 (Konvergenz)**.** Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Dann konvergiert diese gegen z, falls

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon\ |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Definition 1.2.2 (Cauchy-Folgen)**.** Wir nennen $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon\ |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

Satz 1.2.3 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)**.** Die Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(z_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. (Nicht hier, siehe Ana 3) . □

Bemerkung 1.2.4 (Konvergenz von Reihen)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert per Definition, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$, $s_n := \sum_{j=1}^{n} z_j$ konvergiert. Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ ist dabei, dass $z_n \to 0$. Hinreichend ist z.B., dass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert. In diesem Fall sprechen wir von absoluter Konvergenz.

1.3 Ein paar Definitionen

Definition 1.3.1 (Topologische Grundlagen: Offene und abgeschlossene Mengen, Rand und Abschluss)**.** Wir definieren die (offene) ε-Scheibe um z

$$D_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

sowie den ε-Kreis um z

$$C_\varepsilon(z) := \{w : |z - w| = \varepsilon\}$$

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt damit offen, falls

$$\forall z \in S\ \exists r > 0\colon D_r(z) \subseteq S$$

Es sei $S^{\mathrm{C}} := \mathbb{C} \setminus S$. Dann nennen wir S abgeschlossen, falls S^{C} offen ist. Wir definieren außerdem noch den Rand von S

$$\partial S := \left\{z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0\colon S \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing \wedge S^{\mathrm{C}} \cap D_\varepsilon(z) \neq \varnothing\right\}$$

Damit definieren wir außerdem den Abschluss von S

$$\overline{S} := S \cup \partial S$$

Wir sagen S ist beschränkt, falls $S \subseteq D_R(0)$ für ein $R > 0$. Außerdem ist S kompakt, falls S sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.
S ist nicht-zusammenhängend, falls es offene disjunkte Mengen A, B gibt mit $S \subseteq A \cup B$ mit $S \cap A \neq \varnothing$, $S \cap B \neq \varnothing$. S ist zusammenhängend, falls es nicht nicht-zusammenhängend ist.

Definition 1.3.2. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $[z, w] := \{(1 - \Theta)\, z + \Theta w : 0 \leq \Theta \leq 1\}$ als die Strecke zwischen z und w. Wir sagen eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist polygonal zusammenhängend, falls es einen polygonalen Weg zwischen jeder Kombination von zwei Punkten $a, b \in S$ gibt. Das heißt es gibt $z_{1,\dots,n}$ sodass

$$[a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \cup [z_n, b] \subseteq S$$

Definition 1.3.3. Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Satz 1.3.4. Sei U offen. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn es polygonal zusammenhängend ist.

2 [*] Analytische Polynome

Motivation. Sei $P(x,y) = \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Wir sagen P ist analytisch, wenn es ein Polynom in $x + yi$ ist. Das heißt $P(x,y) = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n (x+iy)^n =: f(x+yi)$ für passende a_n. Frage: Wann ist ein Polynom analytisch?

[28. Apr] **Beispiel 2.1.1.**

(i) Das Polynom $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist analytisch, da $P(x,y) = (x+iy)^2$.

(ii) $P(x,y) = x^2 - y^2 - 2ixy$ ist nicht analytisch.

Beweis für (ii). Angenommen

$$x^2 - y^2 - 2ixy = \sum_{k=0}^{N} a_k (x+iy)^k$$

Dann gilt für $y = 0$

$$x^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

Damit gilt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_N \\ &\alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.2 (Partielle Ableitung)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = u(x,y) + v(x,y)i$$

Dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f wie folgt

$$\begin{aligned} f_x &\coloneqq \partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = u_x + iv_x \\ f_y &\coloneqq \partial_y f = \partial_y u + i\partial_y v = u_y + iv_y \end{aligned}$$

Satz 2.1.3. Ein Polynom $P(x,y)$ ist genau dann analytisch, wenn

$$\partial_y P = i\partial_x P \tag{2.1.1}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} a_n (x+iy)^n \\ \partial_x P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_x (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n (x+iy)^{n-1} \\ \partial_y P &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \partial_y (x+iy)^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n n i (x+iy)^{n-1} \end{aligned}$$

„⇐“ Sei $\partial_x P = i\partial_y P$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{r=0}^{N_1}\sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \sum_{\substack{0\le r\le N_1 \\ 0\le s\le N_2 \\ s+r=n}} \alpha_{r,s} x^r y^s \\ &= \sum_{n=0}^{N_1+N_2} \underbrace{\sum_{t=0}^{N_1+N_2} \alpha_{n,t} x^{n-t} y^t}_{=:G_n(x,y)} \\ \Rightarrow G_n(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^n G_n(x,y) \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung gilt (2.1.1) auch für die G_n. Das heißt für festes n

$$\partial_y G_n(x,y) = \sum_{t=1}^{n} t\alpha_t x^{n-t} y^{t-1}$$

$$\|$$

$$i\partial_x G_n(x,y) = i\left(\sum_{t=0}^{n-1} (n-t)\,\alpha_t x^{n-t-1} y^t\right)$$

Da die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, gilt auch

$$c_1 x^{n-1} + 2c_2 x^{n-2} y + \ldots + nc_n y^{n-1} = i\left(nc_0 x^{n-1} + (n-1)\,c_1 x^{n-2} y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1}\right)$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt damit

$$\begin{aligned} c_1 &= inc_0 = i\binom{n}{1} c_0 \\ c_2 &= i^2 \frac{n\,(n-1)}{2} c_0 = i^2 \binom{n}{2} c_0 \end{aligned}$$

Induktiv setzt sich das fort zu

$$c_k = i^k \binom{n}{k} c_0$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} G_n(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} c_0 x^{n-k} y^k \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,(iy)^k = c_k\,(x+iy)^n \\ \Rightarrow P(x,y) &= \sum_{n=0}^{N} G_n(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,0}\,(x+iy)^n \end{aligned}$$

Das heißt P ist analytisch. □

Bemerkung 2.1.4. Beispiel 2.1.1 lässt sich jetzt mit Satz 2.1.3 auch direkter ohne Koeffizientenvergleich nachrechnen.

3 [*] Stenographische Projektion

Motivation. Es sei $\sum := \left\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Dann lässt sich eine Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \in \sum \setminus \{(0,0,1)\} \mapsto z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren. Wobei z der Schnittpunkt der Geraden durch Nordpol und (ξ, η, ζ) ist.
Sei

$$\lambda\left((\xi, \eta, \zeta) - (0,0,1)\right) = (x, y, 0) - (0,0,1) = (x, y, -1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda\xi = x,\ \lambda\eta = y, \lambda(\zeta - 1) = -1\\ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1-\zeta}\\ \Rightarrow \frac{x}{\xi} = \lambda = \frac{y}{\eta}\\ \Rightarrow x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}\end{aligned}$$

Sind x, y gegeben. Dann gilt

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \tag{3}$$

(Selber machen).

Definition 3.1.1. Sei $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$. Wir schreiben $z_n \to \infty$, falls $|z_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ sowie $f(z_n) \to \infty$, falls $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Bemerkung 3.1.2 (Zusammenhang von Kreisen in $\sum$ und $\mathbb{C}$)**.** Ein Kreis in $\sum$ ist ein Schnitt von $\sum$ mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ der Form $A\xi + B\eta + C\xi = D$. Dann folgt nach (1)-(3)

$$\begin{aligned}D = A\frac{x}{x^2+y^2+1} + B\frac{y}{x^2+y^2+1} + C\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\\ \Leftrightarrow D = (C - D)\left(x^2 + y^2\right) + Ax + By\end{aligned}$$

Fall 1: $C = D$. Dann ist $Ax + By = D$ eine Linie in $\mathbb{C}$.
Fall 2: $C \neq D \Rightarrow$ Kreis in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Damit wäre der folgende Satz bewiesen:

Satz 3.1.3. (*Sinngemäß: Kreise in $\sum$ werden stenographisch auf Geraden projeziert.*)

4 [*] Komplexe Differenzierbarkeit

4.1 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Definition 4.1.1. Wir sagen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist (komplex) differenzierbar in z_0, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existiert. (Dabei ist zu beachten, dass h in $\mathbb{C}$ gegen 0 konvergiert)

Folgerung 4.1.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung)**.**

1. Setze $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (das heißt wir wählen eine Folge von h, die in den reellen Zahlen gegen 0 konvergiert) und $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \to \partial_x f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(z_0)\end{aligned}$$

2. Setze $h = it$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + iy + it) - f(x_0 + y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \frac{f(x_0, y_+ t) - f(x_0, y_0)}{t} \to \frac{1}{i} \partial_y f(z_0)\end{aligned}$$

Ist die Funktion f (komplex) diffbar, dann müssen die Grenzwerte übereinstimmen und es muss gelten

$$\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0)$$

Wenn $f = u + iv$ für Funktionen u und v, dann lässt sich äquivalent auch fordern

$$\partial_y u = -\partial_x v \quad \text{und} \quad \partial_y v = \partial_x u$$

Wir formulieren das nochmal formal als Satz:

[29. Apr] **Satz 4.1.3.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist f in $z \in U$ (komplex) differenzierbar, so existiert die partielle Ableitung $f_x(z)$ und $f_y(z)$ und es gilt

$$f_y(z) = i f_x(z)$$

Bemerkung 4.1.4. Die Umkehrung von Satz 4.1.3 gilt nicht. Als Beispiel betrachten wir

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x + i0) = 0 = f(0 + iy) \\ \partial_x f(0) = 0 = \partial_y f(0) \end{aligned}$$

Allerdings gilt

$$\frac{f(x + \alpha i x) - f(0)}{x + \alpha i x} = \ldots = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Satz 4.1.5 (Ableitung von Kompositionen komplexe Funktionen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und f, g in z differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(z) \neq 0$) in z differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\
(fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}
\end{aligned}$$

Beweis. (Lässt sich mit Differenzenquotient nachrechnen, siehe Analysis 1) . □

Satz 4.1.6 (Ableitung von komplexen Polynomen)**.** Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Dann gilt $P'(z) = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1}$.

Beweis. Wir betrachten nur die Monome. Es gilt

$$\begin{aligned}
(z+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\
\Rightarrow\ (z+h)^n - z^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k = n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \\
\Rightarrow\ \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(n z^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) = n z^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.7 (Ableitung von komplexen Potenzreihen)**.** Satz 4.1.6 überträgt sich auch auf komplexe Potenzreihen. Das heißt sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f differenzierbar innerhalb der Kreisscheibe mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Bemerkung 4.1.8 (Alternative Herleitung von Cauchy-Riemann)**.** Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann können wir diese auch intepretieren als Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Wir erinnern uns, dass f dann im Punkt (x, y) differenzierbar ist, sofern es eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x+h_1, g+h_2) = f(x,y) + Ah + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0 \text{ für } h \to 0} \cdot h \qquad \left(h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right)$$

Wir spalten f zwei Funktionen auf. Das heißt es sei

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dann gilt (sofern f differenzierbar ist)

$$A = (\partial_x f, \partial_y f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Frage: Wann entspricht A der Multiplikation mit einer komplexen Zahl?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = Ah = f'(z) \cdot h = (a+ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2)$$

Das entspricht gerade

$$\begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt muss für (komplexe) Differenzierbarkeit also gelten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow u_x = v_y \quad &\text{und} \quad u_y = -v_x \end{aligned}$$

Satz 4.1.9. Angenommen die partiellen Ableitungen f_x, f_y in einer Umgebung von z existieren und sind stetig (und erfüllen damit die Cauchy-Riemann'sche-Differentialgleichung). Dann ist f komplex differenzierbar in z und es gilt

$$f'(z) = f_x(z)$$

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Wir müssen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &\to f_x(z) \text{ für } h \to 0 \\ u(z) = u(x,y) \qquad & v(z) = v(x,y) \\ f(z+h) - f(z) &= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) + i\left(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)\right) \\ \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y) + u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_1\eta)}_{=:z_1} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x \underbrace{(x+\Theta_2\xi, y)}_{=:z_3} \qquad (0 < \Theta_i < 1) \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y \underbrace{(x+\xi, y+\Theta_3\eta)}_{=:z_2} + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x \underbrace{(x+\Theta_4\eta\xi, y)}_{=:z_4} \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y)}{\xi + i\eta} + i\frac{v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta}\left(u_y(z_1) + iv_y(z_2)\right) + \frac{\xi}{\xi + i\eta}\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4)\right) \end{aligned}$$

Außerdem

$$f_x(z) = \frac{h}{h} f_x(z) = \frac{\xi + i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) = \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} i f_x(z)$$

Nach der Cauchy-Riemann'schen-DG gilt jetzt

$$\begin{aligned} &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ \Rightarrow \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_1) + iv_y(z_2) - f_y(z)\right)}_{\to 0} + \frac{\xi}{\xi - i\eta} \underbrace{\left(u_x(z_3) + iv_x(z_4) - f_x(z)\right)}_{\to 0} \end{aligned}$$

Wobei die beiden Konvergenzen gegen 0 die Stetigkeit der partiellen Ableitungen benötigt. Zusätzlich gilt

$$\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\xi}{\xi}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right| \leq \left|\frac{\eta}{i\eta}\right| = 1$$

Das heißt die Vorfaktoren sind begrenzt und damit folgt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f_x(z) \to 0$$

Womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Beispiel 4.1.10. Es sei $f(z) = x^2+y^2 = z\overline{z}$. Dann gilt $f_x = 2x$ sowie $f_y = 2y$. Das heißt $f_y = if_x$ gilt nur für $z = 0$. Ist f dann differenzierbar?

Definition 4.1.11. Wir sagen f ist analytisch in z, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer Umgebung von z. f ist außerdem analytisch auf $S \subseteq \mathbb{C}$, falls f (komplex) differenzierbar ist in einer offenen Umgebung von S.

Satz 4.1.12. Sei $f = u + iv$ analytisch in einer offenen zusammenhängenden Menge D (D Umgebung). Ist u konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. u ist konstant auf D. Das heißt $u_x = u_y = 0$ auf D. Nach Satz 4.1.3 ist auch $v_x = v_y = 0$ auf D. Da D zusammenhängend ist, ist also auch v konstant und damit ist $f = u+iv$ konstant. □

Satz 4.1.13. Sei $f = u + iv$ analytisch auf einer Umgebung D. Ist $|f|$ konstant auf D, so ist f konstant.

Beweis. Sei o.B.d.A. $|f| > 0$. Dann gilt $|f|^2 = u^2 + v^2 = C > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \left(u^2+v^2\right) = 2uv_x + 2vu_x \\ 0 &= \partial_y \left(u^2+v^2\right) = 2uu_x + 2vv_y \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Riemann folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 0 = uu_x - vu_y \\ 0 = uu_y + vu_x \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 = u^2u_x - uvu_y \\ 0 = uvu_y + v^2u_x \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 = \left(u^2+v^2\right)u_x = C \cdot u_x \\ &\Rightarrow u_x = 0 \\ &\Rightarrow v_y = u_x = 0 \end{aligned}$$

Analog zeigt man $u_y = -v_x = 0$. Damit sind u, v und somit f konstant. □

4.2 Die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$

Wir hatten bereits

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z &= e^z \\
e^{i\varphi} &= \sum_{n \text{ gerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(-1)^n \varphi^n}{n!} \\
&= \cos\varphi + \sin\varphi \\
\overline{e^z} &= e^{\overline{z}} \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2i} \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} \left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin\varphi &\coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i} \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)
\end{aligned}$$