109 學年度普通型高級中等學校
資訊學科能力競賽決賽
模擬賽

2020.12.12　09:00-14:00

請確認隨身電子設備（手機等）已關機。

請等待監考人員宣布測驗開始才翻頁作答。

系統資訊

評分主機：https://judge.nhspc.cc

帳號：< 如通知信所示 >

密碼：< 如通知信所示 >

題目列表

題目名稱	時間限制	記憶體限制
A 蘋果與橘子 / A_Apple_Orange	1.0 秒	512 MiB
B 典獄長與斯芬克斯 / B_Sphinx	1.0 秒	512 MiB
C 橢圓曲線 / C_Elliptic	2.0 秒	512 MiB
D 和尚端湯上塔堂 / D_Tower	1.0 秒	512 MiB
E 量子糾纏 / E_Entanglement	1.5 秒	512 MiB
F 鬧鐘設置 / F_Alarm_Clock	1.0 秒	512 MiB
G 白銀柵欄 / G_Fence	1.0 秒	512 MiB
H 螞蟻捷運 / H_Ant_MRT	3.5 秒	512 MiB

説明事項

1. 本測驗採電腦線上自動評分，程式必須依規定上傳至評分主機。請嚴格遵守每一題目所規定之輸出格式。若未遵守，該題將以 0 分計算。

2. 本測驗採取全面回饋機制，程式上傳至評分主機後，將自動編譯並進行測試。視等待評分題數多寡，該題測試結果及該題得分數將可於短時間內得知。程式可重複上傳及評分，但同一題兩次上傳之間必須間隔二分鐘以上。每題的每個子題之最終分數以該子題所有單次評分結果之最高分計算，每題之最終分數為所有子題最終分數之總和。

3. 程式執行時，每筆測試資料執行時間個別計時（以評分主機執行時間為準）。執行時間限制如前頁所示。程式執行超過執行時間視同未完成，該組測試資料得分將以 0 分計算。每題可使用記憶體空間，除非題目另有規定，以 512 MB 為限。

4. 本次測驗程式送審時須上傳原始程式碼 (.c, .cpp, .java)，輸出入皆以標準輸入、標準輸出進行。注意：所有讀寫都在執行檔的工作目錄下進行，請勿自行增修輸出入檔的等名或路徑，若因此造成評分程式無法評分，該次評分結果將以 0 分計算。

5. 若使用 C++ 撰寫程式，請在程式碼開頭加上 `#include<cstdio>` ，並利用 `scanf()` 讀入資料。使用 `cin` 讀入資料可能會因為讀入效率太差以致於程式執行時間超過限制。`scanf()` 常用的讀入方式如下：

   `scanf("%d", &x);` 讀入一個有號整數至 int 型態變數 x 。
   `scanf("%lld", &y);` 讀入一個有號整數至 long long 型態變數 y 。
   `scanf("%u", &x);` 讀入一個有號整數至 unsigned int 型態變數 x 。
   `scanf("%llu", &y);` 讀入一個有號整數至 unsigned long long 型態變數 y 。

本頁留白

第一題：蘋果與橘子 (A_Apple_Orange)

問題敘述

現在是清澄高校的午餐時間，校長準備很多蘋果、橘子來當作營養午餐的水果。

清澄高校總共有 N 個學生，第 i 個學生被分配到了 a_i 個蘋果，以及 b_i 個橘子。而現在，校長很好奇。有多少對學生，可以成功平分彼此的 **蘋果、橘子**。

準確來講，你要算出有多少個 (i, j)，滿足：

- $1 \leq i < j \leq N$。
- 第 i 個學生跟第 j 個學生可以成功平分彼此的蘋果、橘子。

輸入格式

每筆測資的第一行包含一個正整數 N，代表清澄高校的學生數量。

接下來的 N 行，每行包含兩個正整數 a_i, b_i，代表第 i 個學生擁有的蘋果、橘子數量。

輸出格式

請輸出一個非負整數，代表可以成功平分彼此的蘋果、橘子的學生對數。

測資限制

- $1 \leq N \leq 10^5$。
- $1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$。

輸入範例 1

```
2
1 1
2 2
```

輸出範例 1

```
0
```

輸入範例 2

```
3
1 1
2 2
3 3
```

輸出範例 2

```
1
```

評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	10	$N = 2$。
2	30	$N \leq 1000$。
3	60	無額外限制。

第二題：典獄長與斯芬克斯 (B_Sphinx)

問題敘述

從前從前，一個典獄長在森林裡迷路了，斯芬克斯突然出現在他的面前，斯芬克斯對典獄長說：「旅人啊，我將考驗你的智慧，倘若你能規劃出一個方案將監獄裡的犯人全部重新教育回正常人，我就不吃你，並指引你回家的路。」

典獄長所掌管的監獄為一個矩形區域，並以一單位長寬的方格劃分為 $N \times M$ 個牢房，可以視為一個 $N \times M$ 的二維矩陣 A。每一個矩陣元素就是這個犯人的「道德感」。考慮到道德感太高的人可能會成為正義魔人，而道德感太低的人可能會成為罪犯，只有道德感恰好為 0 的人可以被放出監獄重返社會。

一個方案是有很多次的「感化」（ㄎㄨㄥˇㄏㄜˋ）組成，典獄長每次可以選擇 2×2 方格內的四個犯人交給斯芬克斯「感化」，並且典獄長可以要求斯芬克斯採取兩種方式「感化」犯人：

1. 使左上角和右下角的犯人道德感增加 1，並且使左下角和右上角的犯人道德感減少 1。
2. 使左上角和右下角的犯人道德感減少 1，並且使左下角和右上角的犯人道德感增加 1。

順帶一提，因為釋放犯人是一件很麻煩的事情，即使在過程中某個犯人的道德感變成 0 了，依然可以讓其繼續參加之後的「感化」。

請你幫忙典獄長預測有沒有辦法在數次「感化」之後使得所有犯人都可以被放出監獄，或者是他注定要被斯芬克斯吃掉。

輸入格式

每筆測資的第一行有兩個正整數 N, M，代表監獄的長和寬。

接下來，由上而下，從左至右，有 N 行輸入，每一行有 M 個整數，第 i 行第 j 列的數字是 A_{ij}，代表住在該牢房的犯人的道德感，同一行的整數間以空格隔開。

輸出格式

如果可以在感化完畢之後讓所有犯人都能被放出監獄，請輸出一行 Yes，否則輸出一行 No。

測資限制

- $2 \le N, M \le 2000$。
- $|A_{ij}| \le 10^9$。

輸入範例 1

```
2 3
1 2 3
3 2 1
```

輸出範例 1

```
No
```

輸入範例 2

```
3 3
2 -1 -1
-2 -1 3
0 2 -2
```

輸出範例 2

```
Yes
```

備註

在範例輸出 1 中，無論如何「感化」都無法使得每一個犯人都可以被釋放。

在範例輸出 2 中，可以透過以下步驟使得每一個犯人的道德感都變成 0：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

你能想到空間複雜度不到 $O(NM)$ 的作法嗎？

評分說明

本題共有 2 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	17	$N = M = 2$。
2	83	無額外限制。

本頁留白

第三題：橢圓曲線 (C_Elliptic)

建議印出題本或開兩份以上題本頁面來模擬實際比賽翻頁體驗

問題敘述

小明想報名參加 WOW (Worst Of Worst) 程式選拔賽，最近在準備的過程中看了許多數學書，其中一題看到了跟模逆元相關的東西。他發現在模 p 底下，每個**不是 0** 的餘數 a，都存在另一個餘數 b，使得 $ab \equiv 1 \pmod p$。這個數字被稱為 a 的模逆元，記為 $b = a^{-1}$。他又發現根據費馬小定理 $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod p$，因為 $a \cdot a^{p-2} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$。

小明後來又看到一題跟橢圓曲線有關的題目。橢圓曲線指的一條光滑、射影、虧格為 1 的代數曲線，以及曲線上的一個有理點。書上寫道，根據 *Riemann-Roch* 定理，這些曲線都會是三次曲線（請見下方的橢圓曲線小教室），亦即形如

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0$$

若將那個有理點設為坐標原點，則 $J = 0$。

小明現在想要知道這條曲線在 F_p 中有哪些點，也就是有多少 $0 \le x, y < p$ 滿足

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy \equiv 0 \pmod p$$

小明發現如果 $y \neq 0$，做 $x \equiv wz^{-1} \pmod p$，$y \equiv z^{-1} \pmod p$ 的變數代換（$w \equiv xy^{-1} \pmod p$，$z \equiv y^{-1} \pmod p$），並將兩邊同乘 z^3，會得到

$$Aw^3 + Bw^2 + Cw + D + Ew^2z + Fwz + Gz + Hwz^2 + Iz^2 \equiv 0 \pmod p$$

整理一下就會是

$$(Hw + I)z^2 + (Ew^2 + Fw + G)z + (Aw^3 + Bw^2 + Cw + D) \equiv 0 \pmod p$$

小明只需要枚舉 w，方程式就變成一個 z 的二次方程式了！不過小明開始煩惱，現在給定一個二次方程式

$$az^2 + bz + c \equiv 0 \pmod p$$

要如何去解他呢？他想起國中時老師教的配方法，得到

$$(2az + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod p$$

小明發現**在 $a = 0$ 或 $a = b = 0$ 或 $a = b = c = 0$ 的時候都有特別的情況要處理**，而在 $a \neq 0$ 時他只要處理好模 p 的每個餘數是否可以開根號就好，也就是把所有

$0^2 \bmod p, 1^2 \bmod p, 2^2 \bmod p, \ldots, (p-1)^2 \bmod p$ 存起來，再檢查 $b^2 - 4ac$ 是哪些數的平方即可。

開完根號後會得到

$$2az + b \equiv d \pmod p$$

解就會是 $z \equiv (2a)^{-1}(d-b) \pmod p$。

小明於是拿 $x^3 + 2xy^2 + 2y^3 + xy + y^2 + y \equiv 0 \pmod 3$ 試了一遍。

在模三底下，我們有

	0	1	2
根號	0	$1, 2$	無
逆元	無	1	2

若 $y = 0$，則 $x^3 \equiv 0 \pmod 3$，枚舉以後發現解只有 $x = 0$。

若 $y \neq 0$，則用一樣的變數代換可以得到

$$z^2 + (w+1)z + (w^3 + 2w + 2) \equiv 0 \pmod 3$$

$w = 0$ 時 $z^2 + z + 2 \equiv 0 \pmod 3$，亦即 $(2z+1)^2 \equiv 2 \pmod 3$。但是 2 不能開根號，因此無解。

$w = 1$ 時 $z^2 + 2z + 2 \equiv 0 \pmod 3$，亦即 $(z+1)^2 \equiv 2 \pmod 3$。但是 2 不能開根號，因此無解。

$w = 2$ 時 $z^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$，亦即 $z^2 \equiv 1 \pmod 3$。此時 $z = 1, 2$。推回得到 $(x, y) = (2 \cdot 1^{-1}, 1^{-1}), (2 \cdot 2^{-1}, 2^{-1}) = (2, 1), (1, 2)$。

故所有解只有 $(0, 0), (1, 2), (2, 1)$。

請你幫助小明撰寫一個程式解決上述問題吧！

橢圓曲線小教室

以下簡述為何橢圓曲線都是三次曲線。

首先是名詞定義：

- 體：一個可以做加減乘除的結構。例如有理數、複數、文中提到的 F_p（模 p 底下的整數）。

  以下假定給定一個體 F。

- n 維射影空間（$\mathbb{FP}^n$, *projective space*）：你可以想像為 F^n 加上了每個方向的無窮遠形成的空間（注意：往上和往下視為同一個方向，因為他們平行。例如往上和往左就是不同的方向）。數學上來說，是將 $F^{n+1}-\{0\}$ 中，將相對原點同樣方向的點視為同一個點形成的集合。

  例如在 $\mathbb{RP}^2$ 中 $(1,-2,0)$ 與 $(-2,4,0)$ 是同一個點。
- （射影）代數集合（*projective algebraic set*）：一些 n 元齊次（每一項的次方和相同）多項式（係數在 F 中）在 $\mathbb{FP}^n$ 中的零點（根）集合。

  例如 $\{(x,0,1)|x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y,1)|y\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,1,0),(1,0,0)\}$ 就是一個在 $\mathbb{RP}^2$ 的代數集合，因為他是 $P(x,y,z)=xy=0$ 的集合。

  又或著每個點 $p=(p_1,\ldots,p_{n+1})\in\mathbb{FP}^n$ 都是一個代數集合，因為他是滿足所有 $P_{i,j}(x_1,\ldots,x_{n+1})=p_ix_j-p_jx_i=0$ 的集合。

  要求齊次的原因是我們定義射影空間時，要求同樣方向的點要是同一個點，因此當 $(x_1,\ldots x_{n+1})$ 是一組解時，$(kx_1,\ldots,kx_{n+1})$ 也要是一組解。
- 可約的（代數集合）（*reducible*）：可以表示成兩個代數（嚴格子）集合的聯集的代數集合。

  例如 $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$ 是可約的，因為他可以表示成 x 軸和 y 軸的聯集。
- （射影）代數簇（*algebraic variety*）：一個不可約代數集合。
- （代數簇的）維度（dim, *dimension*）：一條遞降的代數簇鍊指的是 $X_0\supsetneq X_1\supsetneq\cdots\supsetneq X_n$。$n$ 稱為這條鏈的長度。一個代數簇的維度是所有從他開始的遞降的代數簇鍊中最長的那條的長度。

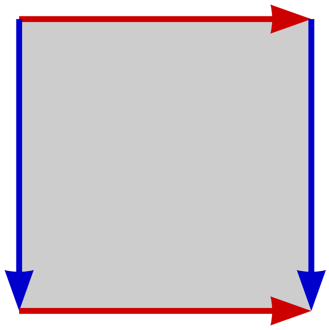
  直觀上來看，一個曲面包含一個曲線，一個曲線包含一個點，這條鏈的長度是 2，因此一個曲面的維度是 2。這應該跟一般對維度的想像很類似。
- 代數曲線（*algebraic curve*）：一維的代數簇。
- 奇異點（*singular point*）：比較不可微的點。嚴格來說是雅可比矩陣的零化度（*nullity*）大於代數簇的維度的點。例如自交的地方或尖點就是奇異點。
- 光滑（*smooth, non-singular*）：沒有奇異點的代數簇。
- 微分形式 (*differential form*)：在這裡我們只考慮一維的情形，亦即 differential 1-form。一個 differential 1-form 是一個路徑打到純量的線性函數。例如在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\gamma\mapsto\int_\gamma \mathrm{d}x$ 是一個 differential 1-form，記為 $\mathrm{d}x$。又或者 $xy\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y$ 也是一個 differential 1-form，因為他可以把 $\gamma\mapsto\int_\gamma xy\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y$。

  給定局部的一個座標 $(x_1,\ldots,x_n)$，一個 1-form 長得像 $f_1(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n$。如果每個 f_i 都是全純的，則將這個形式稱為全純形式 (*holomorphic 1-form*)。
- 虧格（*genus*）：你們可能在拓樸或哪裡聽過這個名字。基本上指的是一個表面有幾個「洞」，例如球面有零個，甜甜圈有一個。數學上來說，如果底下的體是 $\mathbb{C}$ 且 $n=\dim X$，那 $g(X)=\dim H^0(X,\Omega^n)$，亦即所有 global holomorphic n-form 形成的線性空間的維度。這可以利用 *Kähler differential* 推廣到在任何代數封閉體上面的代數簇的虧格，或是任何體上的代數曲線的虧格，變成 $g=\dim\Gamma(X,\Omega^1_X)$。
- 橢圓曲線（*elliptic curve*）：光滑、射影、虧格為 1 的代數曲線，以及其上的一個點。

於是我們終於解釋完橢圓曲線的定義了。

我們終於可以來介紹橢圓曲線了。先從最簡單的 $\mathbb{C}$ 上開始。

一個 $\mathbb{C}$ 上的橢圓曲線就是一個甜甜圈（他相對實數是二維的，但相對複數是一維的，因此是曲線），也就是把一個正方形的上緣跟下緣（A）用同樣方向黏住，左緣跟右緣（B）用同樣方向黏住，如下圖。



於是這等價於 $\mathbb{C}/\Lambda$，其中 Λ 是一個網格（$\Lambda = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$）。這上面的 holomorphic 1-form 一定是 $f\,\mathrm{d}z$，其中 f 是 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上的全純函數（*holomorphic function*）。但這上面的全純函數（會是有界的，根據劉維爾定理）一定是常數函數。因此所有 holomorphic 1-form 一定是常數乘上 $\mathrm{d}z$，故的確 $g = \dim H^0(X, \Omega^1) = 1$。

接著考慮這上面的亞純函數（*meromorphic function*），亦即所有全純的 $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{CP}^1$。Weierstrass 給出了一個亞純函數

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

這個函數是雅可比橢圓函數的特例，而雅可比橢圓函數是橢圓積分的反函數，也因此這個函數 $\wp$ 被稱為 *Weierstrass's elliptic function*。這也是為什麼橢圓曲線叫橢圓曲線（對，歷史脈絡事實上是反過來的）。注意到 $\wp$ 在 0 有一個二階極點（pole of order 2，亦即在 0 的泰勒（其實是 Laurent）展開有一個 z^{-2} 的項）。而且 $\wp$ 是無限次可微的，而 $\wp'(z)$ 在 0 有一個三階極點。

一個曲線 X 上的除子（*(Weil) divisor*）指的是曲線上的點的形式線性組合（*formal linear combination*, i.e. free abelian group），亦即所有長得像 $\sum_{finite} a_i P_i$ 的東西，其中 P_i 是 X 上的點。

每個 X 上的函數都可以對應到一個除子，定義為

$$(f) = \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_f(P) P$$

其中 ord 指的是 P 的泰勒（Laurent）展開的第一個非零項的次數。例如 $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1, f(z) = z - 1/z$ 的除子就是 $(f) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (0) + 1 \cdot (1) - 1 \cdot (\infty)$。另外，若一個除子的所有係數都非負，則稱這個除子為有效除子（*effective divisor*, ≥ 0），而一個除子的度數（*degree*, deg）指的是他的係數和。

給定一個除子 D，我們就可以定義他對應的一個函數的空間

$$\mathscr{L}(D) = \{f : X \to \mathbb{CP}^1 | (f) - D \geq 0\}$$

他其實就是在取所有極點不比 D 還差的函數集合。

這會是一個線性空間，因此我們可以定義他的維度 $\ell(D) = \dim \mathscr{L}(D)$。

這時 Riemann-Roch 終於出場了。定理告訴我們

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g + 1$$

其中 K 是任意一個 global holomorphic 1-form 的除子。

在 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的情形，我們剛剛已經提到 global holomorphic 1-form 是常數函數，因此 $K = 0$。

現在考慮原點 P，我們有 $\ell(nP) - \ell(-nP) = \deg(nP) - g + 1 = n$。

如果 $n = 0$，則 $\ell(nP) = \ell(0) + n = 1$。否則 $nP > 0$，此時 $\ell(-nP) = 0$（只有 0 函數具有零點但不具極點，故 $\mathscr{L}(-nP) = \{0\}$）。因此此時 $\ell(nP) = n$。

取差分，這告訴我們只在原點恰好有一個 n 階極點的亞純函數（在縮放以後）只有一個，除了 $n = 1$ 的時候沒有（不存在 $n = 1$ 的情況也可以很直接地透過留數定理看出）。

$n = 0$ 時是 $f(z) = 1$；

$n = 2$ 時是 $\wp$；

$n = 3$ 時是 $\wp'$；

$n = 4$ 時有 $\wp^2$；

$n = 5$ 時有 $\wp\wp'$；

$n = 6$ 時有 $\wp^3, \wp'^2$，因此我們有 $\wp'^2 = a\wp^3 + c\wp\wp' + d\wp^2 + e\wp' + f\wp + g$。（事實上 $\wp'^2 = 4\wp^3 - g2\wp - g_3$）。

因此我們可以考慮一個全純映射 $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{CP}^2, z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$，他的軌跡會是一個三次曲線（想想看為什麼他會單/滿射）。

事實上任何橢圓曲線 X 都可以透過一樣的方式取一個有二階極點的函數 $x : X \to \mathbb{CP}^1, x \in \mathscr{L}(2P)$ 與有三階極點的函數 $y : X \to \mathbb{CP}^1, y \in \mathscr{L}(3P)$，並取映射 $f : X \to \mathbb{CP}^2, z \mapsto (x(z), y(z))$，他也會是一條三次曲線。

至此，我們已經（很不嚴謹的）證明所有橢圓曲線都可以被視為平面上的三次曲線。

至於 Riemann-Roch 的證明需要用到更高深的數學概念，有興趣的讀者可以自行上網尋找相關書籍與資料來閱讀。

輸入格式

每筆測資的輸入只有一行，包含用空白隔開的十個整數 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, p$，意義如題目所示。

輸出格式

若

$$\begin{cases} Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy \equiv 0 \pmod{p} \\ 0 \le x, y < p \end{cases}$$

有 k 組解，請輸出 k 行，每行有兩個以空白隔開的整數 x, y，滿足以上的方程式。

注意解的順序必須按照 x 的大小排序。若兩組解有相同的 x，請先輸出較小 y 的那組。

測資限制

- $p \le 5 \times 10^5$。
- p 是質數。
- $0 \le A, B, C, D, E, F, G, H, I < p$。
- $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ 至少有一個數字非 0。

輸入範例 1

```
1 0 2 2 0 1 1 0 1 3
```

輸出範例 1

```
0 0
1 2
2 1
```

輸入範例 2

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 7
```

輸出範例 2

```
0 0
0 2
0 4
2 0
2 4
3 5
4 0
4 2
5 3
```

評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	7	$p = 2$。
2	22	$3 \le p < 10^3$。
3	71	無額外限制。

本頁留白

第四題：和尚端湯上塔堂 (D_Tower)

問題敘述

「和尚端湯上塔堂，塔滑湯灑湯燙塔。」

現在有很多和尚要進行端湯任務，可是若和尚們把湯灑成一團，會害整個場面慘不忍睹，因此你決定規劃出若干個不會讓他們把湯灑出來的任務派送給若干個和尚來讓他們進行端湯任務。

所謂端湯任務，就是要讓和尚從 N 座排成一直線的高塔中，選出一個區間 $[l, r]$ $(1 \leq l \leq r \leq N)$ 讓和尚將湯從 l 端到 r。但你知道若這個區間的高度全距，也就是最高的高塔和最低的高塔的高度差，超過 K 的話，和尚就會因為崎嶇的路線而把湯灑出來。

你希望能夠讓盡量多的和尚做到任務，但又不希望有兩個和尚做到同樣的任務（也就是選出來的區間一樣），也不希望有和尚在任務中把湯灑出來，請問你至多能讓幾個和尚進行端湯任務呢？

輸入格式

每筆測資的輸入共有兩行。

第一行有兩個正整數 N 與 K，代表高塔的個數以及和尚不會把湯灑出來的高度全距極限，兩數字以一空白間隔。

接下來的一行包含 N 個正整數 $h_1 \sim h_N$，代表由左數過來第 i 座高塔的高度是 h_i。

輸出格式

請輸出一個非負整數，代表你最多可以讓幾個和尚進行端湯任務。

測資限制

- $1 \leq N \leq 5 \times 10^5$。
- $1 \leq K \leq 10^9$。
- $1 \leq h_i \leq 10^9$。

輸入範例 1

```
6 6
1 7 3 8 2 1
```

輸出範例 1

```
15
```

輸入範例 2

```
5 1
1 2 3 1 2
```

輸出範例 2

```
8
```

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	6	$N \leq 500$。
2	19	$N \leq 5000$。
3	28	$\forall 1 \leq i < N$，$h_i \leq h_{i+1}$。
4	47	無額外限制。

第五題：量子糾纏 (E_Entanglement)

問題敘述

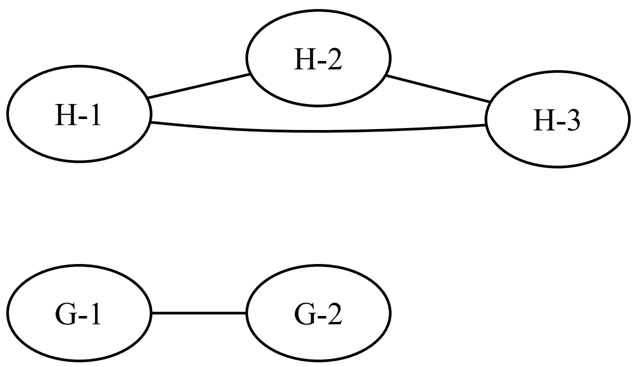
當東北風挾著細雨擊落最後一隻鳴叫的蟬，寒冷的時節隨之到來。此刻，正適合談一場量子糾纏式的戀愛。

何謂量子糾纏式的戀愛？觀看某部影片之後，小 E 有感而發：「她喝一杯咖啡，我也喝一杯咖啡；她交一位男朋友，我也交一位男朋友；她在全國模擬賽中 AC，我也在全國模擬賽中 AC。即使分隔兩地，和對方做同樣的事情，就是我們相愛的方式。」

小 E 和戀愛對象小 C 分別在 G 大學和 H 大學就讀，由於距離遙遠，無法時常見面。明晚，小 E 想和小 C 來場遠距約會。G 大學和 H 大學校地廣大，但適合約會的地點有限—G 大學有 N 個合適地點，H 大學則有 M 個。對於一所大學，有些地點間會有小路連接，為了方便起見，我們假設任兩個地點間至多有一條小路，且任兩個地點一定可以經由若干條小路往來。

除此之外，每個約會地點有各自的特徵，例如：

- G 大學的地點 1 （簡記為 $\text{G}-1$）有咖啡店
- $\text{G}-2$ 是運動場
- $\text{H}-1$ 有咖啡店
- $\text{H}-2$ 和 $\text{H}-3$ 是運動場



圖一、範例輸入 3 圖示。

為了能同時做同樣的事，對於約會的任何時間點，小 E 和小 C 所在的地點必須有相同特徵。行程以下列方式描述：

- L 是約會行程的長度。
- 小 E 經過的地點是 $\text{G}-e_1, \text{G}-e_2, \ldots, \text{G}-e_L$。地點可以重複。
- 小 C 經過的地點是 $\text{H}-c_1, \text{H}-c_2, \ldots, \text{H}-c_L$。地點可以重複。

- 對於 $1 \leq i \leq L$，$\text{G} - e_i$ 和 $\text{H} - c_i$ 的特徵一樣。
- 約會開始時（時間點 1），小 E 待在 $\text{G} - e_1$，小 C 待在 $\text{H} - c_1$。對於時間點 $1 < i \leq L$，小 E 和小 C 必須能從 $\text{G} - e_{i-1}$ 和 $\text{H} - c_{i-1}$ 分別經由 **恰** 一條小路移動到 $\text{G} - e_i$ 和 $\text{H} - c_i$。
- 為了避免行程過於單調，小 E 和小 C 不能同時返回前一個地點，意即對於 $1 < i < L$，$e_{i-1} \neq e_{i+1}$ 和 $c_{i-1} \neq c_{i+1}$ 至少有一項成立。

安排約會行程相當費心，因此小 E 想請你幫忙找出 L 的最大可能值以利後續規劃，例如要是 L 的最大值等於 0 ，小 E 便知道這次計畫完全不可行。以圖一為例，L 的最大值是 3，約會路線為 $\text{G} - 2 \to \text{G} - 1 \to \text{G} - 2$（小 E）和 $\text{H} - 2 \to \text{H} - 1 \to \text{H} - 3$（小 C）。注意到 $\text{G} - 2 \to \text{G} - 1 \to \text{G} - 2$ 和 $\text{H} - 2 \to \text{H} - 1 \to \text{H} - 2$ 的搭配違反最後一項限制。

輸入格式

第 1 行有一個正整數 N 表示 G 大學的合適地點數。

第 2 行有 N 個正整數 $g_1 \sim g_N$ 分別代表 $\text{G} - 1, \text{G} - 2, \ldots, \text{G} - N$ 的特徵。

第 3 行至第 $2 + N$ 行是一個 $0/1$ 矩陣，矩陣的第 i 行第 j 列是 1 代表 $\text{G} - i$ 和 $\text{G} - j$ 之間有一條小路。

第 $3 + N$ 列行有一個正整數 M 表示 H 大學的合適地點數。

第 $4 + N$ 行有 M 個正整數 $h_1 \sim h_M$ 分別代表 $\text{H} - 1, \text{H} - 2, \ldots, \text{H} - M$ 的特徵。

第 $5 + N$ 行至第 $4 + N + M$ 行是一個 $0/1$ 矩陣，矩陣的第 i 行第 j 列是 1 代表 $\text{H} - i$ 和 $\text{H} - j$ 之間有一條小路。

保證任何地點和自己間都沒有小路，且小路皆為雙向通行（矩陣對稱）。

輸出格式

如果約會行程可以無限長，輸出 `INF`，否則輸出 L 的最大值。

測資限制

- $1 \leq N, M \leq 2000$。
- $1 \leq g_i \leq 2000$。
- $1 \leq h_i \leq 2000$。

輸入範例 1

```
3
1 1 1
011
101
110
4
1 1 1 1
0100
1010
0101
0010
```

輸出範例 1

```
INF
```

輸入範例 2

```
3
1 2 2
010
101
010
4
1 2 3 2
0100
1010
0101
0010
```

輸出範例 2

```
2
```

輸入範例 3

```
2
1 3
01
10
3
1 3 3
011
101
110
```

輸出範例 3

```
3
```

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	12	$\forall 1 \le i \le N$，$g_i = 1$，$\forall 1 \le i \le M$，$h_i = 1$，同所大學的任兩個地點間存在唯一一條路徑，且任何地點最多與 2 個地點間有小路。
2	20	$\forall 1 \le i \le N$，$g_i = 1$，$\forall 1 \le i \le M$，$h_i = 1$。
3	26	$1 \le N, M \le 60$，$\forall 1 \le i \le N$，$1 \le g_i \le 60$，$\forall 1 \le i \le M$，$1 \le h_i \le 60$。
4	42	無額外限制。

第六題：鬧鐘設置 (F_Alarm_Clock)

問題敘述

小明在經過區賽的廝殺後，終於晉級夢寐以求的全國賽了！為了在全國賽當天能夠以最好的狀態上場，小明與他的朋友一共 N 個人在比賽會場附近訂了一間 N 人房，以養精蓄銳一番。

當他們進了房，鋪好床要設定鬧鐘時，突然發現一個問題：每個人想起床的時間都不一樣，但是每個人如果都設定自己的鬧鐘，早響起的鬧鐘勢必會吵醒晚起的人，而每個人都希望自己的睡眠時間愈長愈好。

經過一番調查後, 他們發現其中第 i 個人想要起床的時間在第 a_i 分鐘後，會睡在由左至右第 i 張床上。他們的鬧鐘的影響範圍是 K，也就是說，如果第 x 個人設置的鬧鐘響起，則第 x−K 個人到第 $x+K$ 個人都會起來。

他們可以設定任意多個鬧鐘，設定在任何時間點響起，但是需要滿足一些條件。假設他們一共設置了 M 個鬧鐘，第 j 個鬧鐘由第 b_j 個人設置，在第 c_j 分鐘後響起，則需要滿足以下條件：

1. 為了避免吵到其他寢室的人們，第 1 到第 K、第 N−$K+1$ 到第 N 個人都**不能**設置鬧鐘。也就是說對於所有 $1 \leq j \leq M$ ，$K+1 \leq b_j \leq N-K$ 。
2. 每個人至少要被一個鬧鐘叫醒。也就是說對於所有 $1 \leq i \leq N$ ，至少存在一個 j 滿足 $i-K \leq b_j \leq i+K$ 。
3. 每個人在被一個鬧鐘叫醒後，就不會再入睡。此時他起來的時間點不能在第 a_i 分鐘後。也就是說，對於所有 $1 \leq i \leq N$，令 P 為所有滿足 $i-K \leq b_j \leq i+K$ 的 j 中，c_j 的最小值。則需滿足 $P \leq a_i$，其中 P 就是第 i 個人會起來的時間點。

舉例來說，如果有 $N=5$ 個人，鬧鐘的影響範圍是 $K=1$，他們起來的時間點分別是 $a=[3,1,2,5,4]$。注意到在這種情形下，第 1 個人與第 5 個人不能設定鬧鐘。考慮以下三種情形：

1. 如果第 2 個人設定鬧鐘在第 1 分鐘響，第 4 個人設定鬧鐘在第 4 分鐘響，則他們起來的時間會是 $[1,1,1,4,4]$，符合鬧鐘的設置條件，睡的長度時間總和是 $1+1+1+4+4=11$。
2. 如果第 2 個人設定鬧鐘在第 1 分鐘響，第 3 個人設定鬧鐘在第 4 分鐘響，則不符合鬧鐘的設置條件，因為第 5 個人不會被任何鬧鐘叫醒。
3. 如果第 2 個人設定鬧鐘在第 1 分鐘響，第 4 個人設定鬧鐘在第 5 分鐘響，也不符合鬧鐘的設置條件，因為他們起來的時間點分別為 $[1,1,1,5,5]$，第 5 個人起來的時間點超過 $a_5=4$。

請問如果適當的設置鬧鐘，他們能睡的長度時間總和最大可以是多少？

輸入格式

每筆測資的輸入共有兩行。

第一行有兩個整數 N, K，代表寢室的人數及鬧鐘的影響範圍大小。

接下來的一行包含 N 個正整數 $a_1 \sim a_N$，代表第 i 個人最多還能再睡 a_i 分鐘。

輸出格式

輸出一個正整數於一行，代表如果適當的設置鬧鐘，能睡的長度時間總和最大可以是多少。

測資限制

- $1 \leq N \leq 500$。
- $K \geq 0$。
- $2K + 1 \leq N$。
- $1 \leq a_i \leq 10^6$。

輸入範例 1

```
5 1
3 1 2 5 4
```

輸出範例 1

```
11
```

輸入範例 2

```
1 0
12
```

輸出範例 2

```
12
```

輸入範例 3

```
16 3
10 2 17 26 2 23 31 13 9 21 4 4 12 13 19 10
```

輸出範例 3

```
80
```

備註

請注意，每個人即使在起來以後，也不會關掉他之前設置的鬧鐘。

範例輸入 1 中，其中一種最佳解已於題目敘述中描述。注意到可能存在多種鬧鐘設置方式達到最佳解。比方說，可以讓第 3 個人多設置一個鬧鐘在第 5 分鐘後響，則同樣是最佳解，但是這個多設置的鬧鐘不會叫醒任何人。

範例輸入 3 中，其中一種最佳解如下：

- 讓第 4 個人設置鬧鐘在第 10 分鐘後響。
- 讓第 5 個人設置鬧鐘在第 2 分鐘後響。
- 讓第 9 個人設置鬧鐘在第 4 分鐘後響。
- 讓第 13 個人設置鬧鐘在第 10 分鐘後響。

睡眠時間長度總和為 $10 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 80$ 。

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	11	$\forall 1 \le i < N$，$a_i \le a_{i+1}$。
2	23	$1 \le a_i \le 2$。
3	27	$1 \le N \le 100$。
4	39	無額外限制。

本頁留白

第七題：白銀柵欄 (G_Fence)

問題敘述

繼三年前的金牌後，蘭德又代表草原王國贏得了該國史上第一面資訊奧林匹亞競賽的銀牌。

國王這次也非常開心，決定將草原上的 N 棵智慧果樹作為獎勵送給他。如果將草原王國視為二維的直角座標，則這些樹分別位於 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$（長度的單位為公尺），其中 **所有 y 座標皆非負**，且沒有任何樹位於 $(0, 0)$。國王對蘭德說：「孩子，只要你依照我的規定，用柵欄圍住所有智慧果樹，我就把它們都賞給你。」

他的規定有下列幾條：

- 每條柵欄皆可視為平面上的一條線段（長度可為 0 公尺）。
- 柵欄數量為 4 條，其中 2 條為長度相等的木製柵欄，而另外 2 條為長度相等的白銀柵欄。
- 這 4 條柵欄要在平面上形成一個矩形，且其 4 條邊依序為白銀柵欄、木製柵欄、白銀柵欄、木製柵欄。
- 所有 N 棵智慧果樹都在該矩形的內部或邊界上。
- 為了不破壞草原的對稱性與美感，原點 $(0, 0)$ 必須是其中一條白銀柵欄的 **中點**。

蘭德發現，白銀柵欄的價格十分昂貴，若使用總長度 l 公尺的白銀柵欄，就要花費 l 個銀幣；木製柵欄則非常便宜，無論使用多長都不需花費銀幣。聰明的他又立即發現：必定存在一種方法滿足國王的規定，且其中必有一種做法使得花費有最小值。於是，他寫了一支程式，能在 1 秒內幫他計算出最小的花費。

你也想要參加資訊奧林匹亞拿銀牌（或是金牌），因此想跟銀牌選手蘭德一決勝負，來比誰的花費少。

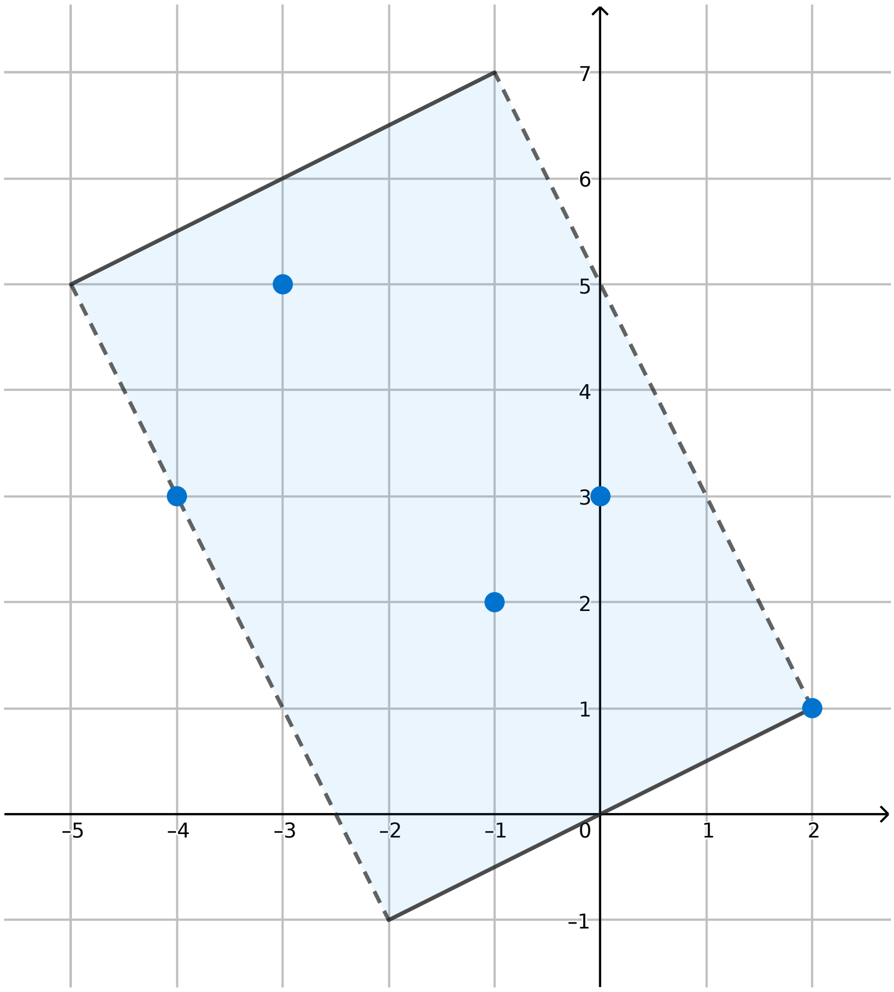
假設蘭德的答案為 A、你輸出的答案為 B，若 A, B 滿足 $\frac{|A-B|}{max(1,A)} \leq 10^{-6}$（即絕對誤差或相對誤差在 10^{-6} 以內），則國王就會將你的答案評為正確，否則為錯誤。你可以假設蘭德的程式算出的答案與最小花費的相對誤差至多為 10^{-12}。

你能寫出一支讓國王評為正確的程式，證明自己至少有銀牌國手的實力嗎？

輸入格式

每筆測資的第一行有一個正整數 N。

接下來有 N 行，其中第 i 行有兩個用空白隔開的整數 x_i, y_i。



圖一、範例輸入 1 中，滿足花費為最小的一種做法。其中每個圓點代表一棵智慧果樹，實線代表白銀柵欄，虛線代表木製柵欄，塗色區域為柵欄圍出的矩形。

輸出格式

請輸出一個實數，表示所需的最小花費（單位為銀幣）。

測資限制

- $4 \leq N \leq 4 \times 10^5$。
- $|x_i| \leq 10^8$。
- $0 \leq y_i \leq 10^8$。
- $(x_i, y_i) \neq (0, 0)$。

輸入範例 1

```
5
2 1
-1 2
-4 3
-3 5
0 3
```

輸出範例 1

```
8.944272
```

輸入範例 2

```
4
-1 0
-2 2
3 1
1 0
```

輸出範例 2

```
12
```

輸入範例 3

```
4
0 1
1 0
1 2
2 1
```

輸出範例 3

```
2.828427
```

輸入範例 4

```
4
1 1
2 2
3 3
2 2
```

輸出範例 4

```
0
```

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	10	$N \leq 400$，且有兩棵智慧果樹分別在 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$。
2	22	$N \leq 400$。
3	37	$N \leq 40000$。
4	31	無額外限制。

第八題：螞蟻捷運 (H_Ant_MRT)

問題敘述

小華是一個生態學家，平常的興趣是研究各種昆蟲生態。而最近，他發現了一個很不尋常的螞蟻窩。這群螞蟻擁有可以與人類匹敵的科技與文明，其中交通技術更是比人類發達。為了更深入研究他們的交通技術，小華決定從他們最常使用的交通工具 — 捷運開始著手。

這群螞蟻的捷運系統有 N 個捷運站，由 $N-1$ 條捷運軌道相互連接，且車站從 1 開始編號。每條捷運軌道連接兩個相異的車站 s_i 和 t_i，任意兩個捷運站都能透過一或多條捷運軌道相互抵達。

螞蟻捷運公司（負責這個捷運系統的公司）一共在這個系統設置了 M 條捷運路線。每條捷運路線可以以三個參數 a_i, b_i, c_i 來表示，代表捷運會在捷運站 a_i 和 b_i 的最短路徑之間往返運行。捷運公司採用了一種特殊的計價方式：a_i 和 b_i 的最短路徑上的任意兩個車站之間，不論距離長短，需要付的錢都是 c_i 塊餅乾屑（螞蟻之間使用的貨幣）。也就是說，螞蟻們可以選擇第 i 條捷運路線上任意選兩個捷運站，並且花 c_i 塊餅乾屑從其中一站搭到另一站。

小華為了研究這個捷運系統的運輸效率，他找來了正要搭捷運的 Q 隻螞蟻，第 i 隻螞蟻要從捷運站 u_i 搭到捷運站 v_i。螞蟻們想要知道他們最少需要付多少塊餅乾屑，才能透過一或多條捷運路線抵達目的地。

小華想請你寫一支程式回答這個問題，你能幫他嗎？

輸入格式

輸入第一行包含三個正整數 N, M, Q，分別代表捷運站的數量、捷運路線的數量及詢問螞蟻隻數。

接下來 $N-1$ 行，每行包含兩個正整數 s_i, t_i，代表第 i 條捷運軌道連結的兩端車站。

接下來 M 行，每行包含三個整數 a_i, b_i, c_i，代表第 i 條捷運路線的三個參數。

接下來 Q 行，每行包含兩個正整數 u_i, v_i，代表第 i 隻螞蟻要從捷運站 u_i 搭捷運到 v_i。

輸出格式

輸出總共有 Q 行，第 i 行代表第 i 隻螞蟻最少要付多少餅乾屑才能從 u_i 到達 v_i。如果他無法透過一或多條捷運路線抵達，請輸出 -1。

測資限制

- $2 \leq N, M, Q \leq 10^5$。
- $1 \leq s_i, t_i, a_i, b_i, u_i, v_i \leq N$。
- $0 \leq c_i \leq 6$。

輸入範例 1

```
5 2 8
1 2
1 3
1 4
4 5
2 3 1
2 4 2
1 1
1 2
1 3
1 4
2 3
2 4
3 4
3 5
```

輸出範例 1

```
0
1
1
2
1
2
3
-1
```

評分說明

本題共有 6 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	9	$N \le 1000$。
2	20	$N, M \le 4000$。
3	22	捷運站 a_i 位於捷運站 1 至捷運站 b_i 的最短路徑上。
4	18	$c_i \le 1$。
5	27	$c_i \le 5$。
6	4	無額外限制。

本頁留白