准则:单调有界数列必有极限,
收剑必有界,有界不一定收剑.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

这里一定是"+"号.

这里必须是1

例: $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\boxed{-x}}\right)^{\boxed{-x}}\right)^{-1}=e^{-1}$$

例: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$$

这里要把外面的2x变成3x

例: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5}$$

$$=e^{5}$$

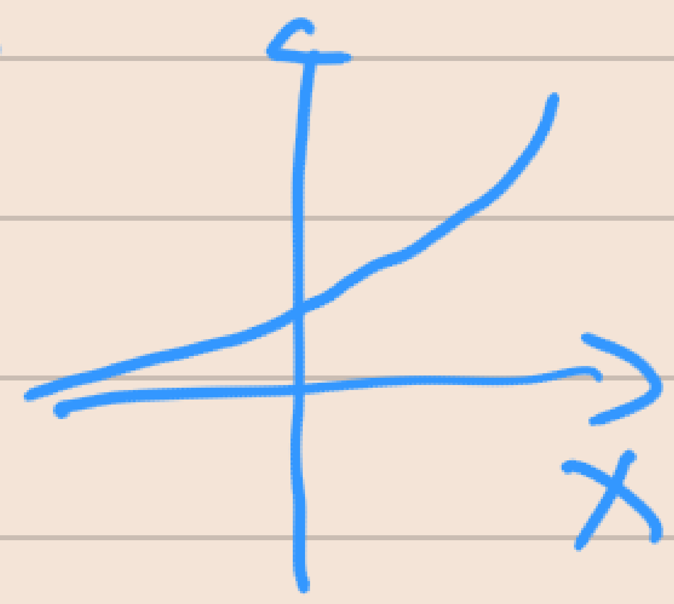
例

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

这里必须是1.

$$=\lim_{x\to\infty} 2^{x}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}_{e^{\frac{1}{2}}}$$

2^{x}



如果 $x\to-\infty$，
则为0，
如果 $x\to+\infty$，
则为 $+\infty$，
所以我们不知道

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

✓

例4. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

减号移到分母.

$$=e^{-1}$$

例：

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}$$

$$= e^{-1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e.$$

$$\boxed{\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = e.$$

例：

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

$$= \lim_{x\to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$$

$$= e^{2}.$$

柯西准则

某项　　该项后任取两项.

$\{x_n\}$收敛，$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon$，$\exists N$，$m>N$，$n>N$.

$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

任给一个小的正数，都存在某一项N, 使得这项之后，任取两项，(m>N, n>N, m和n都在N之后， 则这两项之间的距离比 ε 小)