Properties of set complement and their proofs

Proposition (Properties of set complement)**.** *Let U be the universal set. Then for every $A, B \subseteq U$ the following hold:*

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = U$;
3. $\overline{U} = \emptyset$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5. $A \cup \overline{A} = U$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Properties 7. and 8. are the so called De Morgan's laws.

Proof.

1. $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \neg x \in \overline{A} \Leftrightarrow .\neg(\neg x \in A) \Leftrightarrow x \in A$
2. $x \in \overline{\emptyset} \Leftrightarrow \neg x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in U$
3. $x \in \overline{U} \Leftrightarrow \neg x \in U \Leftrightarrow x \in \emptyset$
4. $x \in A \cap \overline{A} \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in A \Leftrightarrow x \in \emptyset$
5. $x \in A \cup \overline{A} \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A \Leftrightarrow x \in U$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x : \neg x \in B \Rightarrow \neg x \in A) \Leftrightarrow (\forall x : x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
7. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \neg x \in A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg x \in A \wedge \neg x \in B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
8. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \neg x \in A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg x \in A \wedge \neg x \in B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$\square$