## V47

# Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern

 $\label{eq:polina_stecher} Polina\ Stecher\\ polina.stecher A@tu-dort mund. de$ 

Ramona-Gabriela Kallo ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.18 Abgabe: 03.12.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	setzung und Motivation	3						
2	Theorie								
	2.1	Die klassische Theorie der Molwärme	3						
	2.2	Die Einstein-Theorie	3						
	2.3	Debye-Modell	4						
	2.4	Vergleich der drei Modelle	5						
3	Versuchsaufbau und Durchführung								
	3.1	Versuchsaufbau	5						
	3.2	Durchführung	6						
4	Aus	wertung	7						
	4.1	Bestimmung der Molwärme von Kupfer	7						
	4.2	Berechnung von der spezifischen Molwärme von Kupfer							
	4.3	4.3 Berechnung der Debye-Temperatur							
	4.4	Debye-Frequenz und theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur $$	13						
5	Disk	kussion	13						
Lit	teratı	ır	14						

## 1 Zielsetzung und Motivation

Ziel des Versuches ist es, die spezifische Molwärme von Kupfer in Abhängigkeit der Temperatur zu untersuchen. Desweiteren wird aus den gewonnenen Ergebnissen die sogenannte Debye-Temperatur  $\Theta_D$  bestimmt und mit dem theoretischen Ansatz verglichen. Insgesamt existieren drei Modelle, die die Abhängigkeit der Molwärme und der Temperatur beschreiben. Zum einem gibt es die klassische Theorie, das Einsteins-Modell und das Debye-Modell.

### 2 Theorie

#### 2.1 Die klassische Theorie der Molwärme

Die klassische Betrachtung besagt, dass die thermische Energie, die in einen Körper eingebracht wird, sich gleichmäßig auf die Freiheitsgrade der Atome des Festkörpers verteilt. Die Atome sind durch Gitterkräfte an feste Plätze gebunden und können in drei Richtungen schwingen und haben somit drei Freiheitsgrade. Die Atome führen eine harmonische Schwingung um ihre Ruhelage aus und haben somit eine mittlere kinetische Energie, die mit der potentiellen Energie identisch ist. Die mittlere Energie eines Atoms beträgt:

$$E = 6\frac{1}{2}k_BT\tag{1}$$

mit der Boltzmann-Konstante  $k_B$  und der Temperatur T. In einem Kristall betrachtet, ergibt sich daraus mit der Loschmidt-Konstante  $N_L$  (Teilchendichte eines idealen Gases):

$$E = 3k_B N_L T. (2)$$

Unter Voraussetzung eines konstanten Volumens folgt für die spezifische Wärmekapazität:

$$C_V = (\frac{\delta E}{\delta T})_V = 3R. \tag{3}$$

Somit ist die spezifische Molwärme nach der Gleichung (3) material-und temperaturunabhängig. In der Realität trifft diese Annahme nur für hohe Temperaturen  $(T\gg\Theta_D)$  zu.

#### 2.2 Die Einstein-Theorie

Im Einsteinschen-Modell wird im Gegensatz zur klassischen Theorie die Quantelung der Schwingungsenergie der Atome berücksichtigt. Dabei wird angenommen, dass alle Atome im Festkörper jeweils mit der gleichen Frequenz  $\omega$  schwingen und nur Energien von ganzzahligen Vielfachen des Wertes  $\hbar\omega$  aufnehmem bzw. abgeben. Mittels der Boltzmannschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(n) = \exp\left(\frac{-n\hbar\omega}{k_B T}\right) \tag{4}$$

wird die Wahrscheinlichkeit eines sich im thermischen Gleichgewicht befindenen Oszillators mit der Energie  $n\hbar\omega$  bei einer Temperatur T angegeben. Aus der Verteilung ergibt sich die Einstein-Energie:

$$E_{\text{Einstein}} = \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1}.$$
 (5)

Die Molwärme berechnet sich somit zu:

$$C_V = 3R \left(\frac{\hbar\omega}{k_B}\right)^2 \frac{1}{T^2} \frac{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T})}{(\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1)^2} \tag{6}$$

mit der Einstein-Temperatur  $\Theta_E=\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}$ . Auch bei diesem Modell gilt eine Annäherung an 3R bei sehr hohen Temperaturen.

### 2.3 Debye-Modell

Zu den Modellen, die das Verhalten der Abhängigkeit der Molwärme und der Temperatur am nähesten beschreibt, zählt das Debye-Modell. Das Modell basiert darauf, dass die Eigenschwingung aller Oszillatoren in einem Festkörper eine spektrale Frequenzverteilung  $Z(\omega)$  mit der Grenzfrequenz  $\omega_D$  besitzt. Bis zur Grenzfrequenz ist die lineare Dispersionsrelation (Frequenz und Wellenvektor proportional) gegeben. Durch Verknüpfen von klassischem und quantenmechanischem Modell, ergibt sich eine Näherung mit der Form für die spektrale Verteilung von

$$Z(\omega)d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2}\omega^2 \left(\frac{1}{v_{long}^3} + \frac{2}{v_{trans}^3}\right)d\omega. \tag{7}$$

Mit der Debye-Grenzfrequenz wird diese Gleichung zu:

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3}\omega^2d\omega. \tag{8}$$

Damit kann die Molwärme im Debye-Modell berechnet werden über

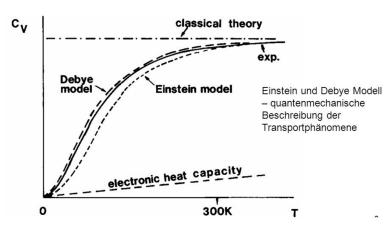
$$C_{V,Debye} = \frac{d}{dT} \frac{9N_L}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \tag{9}$$

Wie bei den anderen Modellen, nähert sich auch die Debye-Kurve im hohen Temperatur Bereich dem Wert 3R an.

## 2.4 Vergleich der drei Modelle

In der Abbildung 1 werden die Verläufe der drei Modelle mit dem experimentellem Befund verglichen. Zunächst ist zu erkennen, dass für hohe Temperaturen (ab  $300\,\mathrm{K}$ ) das Einstein- und das Debye Modell sich dem Wert von  $3\mathrm{R}$  annähern. Für niedrige Temperaturen ( $0\,\mathrm{K}\text{-}300\,\mathrm{K}$ ) hingegen nimmt der Verlauf der speziellen Molwärme nach Einstein exponentiell mit der Temperatur zu, wohingegen es bei dem Debye-Modell eine  $T^3$ -Abhängigkeit für tiefe Temperaturen gibt. Anhand der Abbildung lässt sich erkennen, dass das Debye-Modell sich dem experimentellen Verlauf am meisten nähert.

## Spezifische Wärme (Wärmekapazität)



**Abbildung 1:** Vergleich der drei Graphiken von der klassischen Theorie, des Einstein-Modells und des Debye-Modells, [5].

## 3 Versuchsaufbau und Durchführung

#### 3.1 Versuchsaufbau

Die Abbildung 2 zeigt die Apparatur, die zur Bestimmung der Molwärme von Kupfer verwendet wird.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Dewar-Gefäß. In dieses Gefäß wird im Laufe des Experiments flüssiges Stickstoff gefüllt. Im Inneren des Gefäßes befindet sich das Rezipient, in dem die Kupferprobe eingelagert ist. Diese Kupferprobe besitzt eine eigene Heizwicklung, welche ihrerseits von einem Kupfer-Zylinder mit Heizwicklung umgeben ist. An der Probe und dem Zylinder sind jeweils ein PT-100 Messwiderstand befestigt, der zur Bestimmung der Temperatur benötigt wird. Weiterhin ist der Rezipient an einer Vakuumpumpe und Heliumflasche angeschlossen ist. Die Erhitzung der Probe und des Zylinders erfolgen über die verbundene Stromversorgung und Heizspannung U.

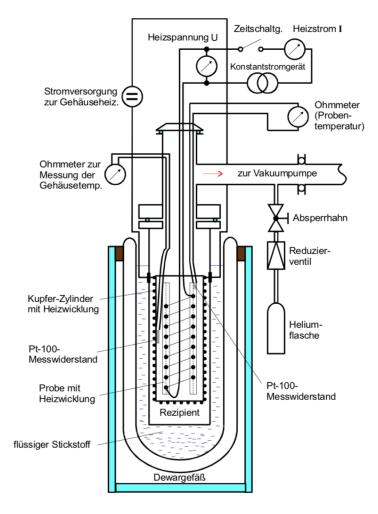


Abbildung 2: Versuchsapparatur, [6].

## 3.2 Durchführung

Zunächst wird das Rezipient evakuiert, damit kein Wärmeverlust durch die Konvektion über die Gasmoleküle geschieht. Anschließend wird Helium bei Barometerdruck in den Rezipient gefüllt und mit Hilfe des flüssigen Stickstoffs im Dewar Gefäß wird die Probe auf 80 K abgekühlt. Helium eignet sich deshalb so gut, weil es einen niedrigeren Schmelzpunkt als Luft besitzt und sich bei der Abkühlung nicht verflüssigt im Gegensatz zu Luft. Nach ca. einer Stunde ist die Endtemperatur erreicht und das Rezipient wird evakuiert, um den Innendruck zu veringern. Anschließend wird der abgekühlten Probe elektrische Energie über die Heizwicklung zugeführt. Die Temperaturerhöhung  $\Delta T$  wird über die Widerstände gemessen. Der Kupfer-Zylinder sollte während des gesamten Versuches die gleiche Temperatur wie die Probe aufweisen, um so den Wärmeverlust aufgrund der Wärmübertragung durch einen Temperaturgradienten zu verhindern. Um dies zu ermöglichen, ist der Kupfer Zylinder an eigener Stromversorgung angeschlossen, damit

elektrische Energie zugeführt werden kann. Ziel der Messung ist es die Molwärme von Kupfer für verschiedene Temperaturen zwischen 80 bis 300 Kelvin zu ermitteln. Dazu wird die Probe im Zeitabstand von fünf Minuten regelmäßig über die Stromstärke erhitzt. Währenddessen wird die Temperatur, die Messzeit, die Spannung und der Heizstrom bei konstantem Volumen notiert.

## 4 Auswertung

## 4.1 Bestimmung der Molwärme von Kupfer

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Molwärme  $C_P$ .

$R/\Omega$	$T/^{\circ}\mathrm{C}$	T/K	$\Delta T/{ m K}$	$\Delta t/\mathrm{s}$	U/V	$I/\mathrm{mA}$	$E/\mathrm{J}$	$C_P / \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol K}}$
25,0	-184,78	88,37	0	0	15,80	149,5	0	0
26,8	$-180,\!52$	$92,\!63$	$4,\!26$	300	16,01	152,8	$733,\!89$	$32,\!51$
28,3	-176,97	$96,\!18$	$3,\!55$	300	15,95	152,4	$729,\!23$	38,76
29,3	-156,14	$117,\!01$	20,83	300	16,28	154,9	$756,\!53$	6,85
30,3	-172,22	100,93	16,08	300	$16,\!36$	155,9	$765,\!15$	8,98
31,2	-170,09	103,06	$2,\!13$	300	16,43	156,1	$769,\!41$	68,17
31,7	-168,90	$104,\!25$	1,19	300	16,43	156,5	$771,\!38$	122,34
32,4	$-167,\!23$	105,92	1,67	300	16,48	156,8	$775,\!21$	87,60
33,0	$-165,\!80$	$107,\!35$	1,43	300	$16,\!54$	157,2	780,02	102,94
33,8	-163,89	$109,\!26$	1,91	300	16,92	160,7	815,71	80,60
35,3	-160,31	112,84	3,58	300	17,01	161,8	$825,\!66$	$43,\!52$
37,1	-156,00	$117,\!15$	$4,\!31$	300	17,25	164,2	849,73	37,20
$38,\!5$	$-152,\!64$	$120,\!51$	3,36	300	17,72	168,4	$895,\!21$	50,28
40,0	-149,04	$124,\!11$	3,60	300	18,09	171,6	$931,\!27$	48,82
41,6	-145,19	127,96	$3,\!85$	300	$18,\!53$	175,3	974,49	47,77
43,2	-141,34	131,81	3,85	300	$18,\!56$	176,2	981,08	48,09
47,3	-131,40	141,75	9,94	300	$18,\!57$	176,3	982,16	18,64
50,5	-123,90	$149,\!25$	7,50	300	18,66	177,2	$991,\!96$	24,96
53,8	-115,60	$157,\!55$	8,30	300	18,88	178,6	$1011,\!59$	23,00
57,1	$-107,\!50$	$165,\!65$	8,10	300	18,99	179,8	$1024,\!32$	23,86
60,4	-99,46	173,69	8,04	300	18,11	180,9	1037,09	24,34
64,1	-90,28	$182,\!87$	9,18	300	19,28	182,2	$1053,\!84$	21,66
68,8	-78,04	$195,\!11$	$12,\!24$	300	19,40	183,3	$1066,\!80$	16,44
73,1	-68,03	$205,\!12$	10,01	300	19,58	184,8	$1085,\!51$	20,46
77,2	-57,79	$215,\!36$	$10,\!24$	300	19,63	185,8	$1094,\!17$	20,16
81,4	$-47,\!25$	$225,\!90$	$10,\!54$	300	19,76	186,9	1107,94	19,83
84,5	-39,45	233,70	7,80	300	19,79	187,4	$1112,\!59$	26,92
88,9	$-28,\!32$	$244,\!83$	11,13	300	19,94	188,7	1128,80	19,14
, 93,0	-17,91	$255,\!24$	10,41	300	20,01	189,6	1143,28	20,72

Die berechneten und aufgenommenen Messwerte befinden sich in der Tabelle 1. Es werden alle diese Daten sowie die Temperatur der Probe und des Kupfer-Zylinders aufgenommen. Die Temperaturen werden über PT-100 - Widerstände gemessen. Aufgrund dessen müssen die beobachteten Werte der Widerstände noch in die entsprechende Temperatur umgerechnet werden. Die Temperatur der Probe bzw. des Kupferzylinders wird mithilfe des gemessenen Widerstands über Gleichung 10 bestimmt:

$$T = 0,00134 \cdot R^2 + 2,296 \cdot R - 243,02 \tag{10}$$

Hierbei handelt es sich um eine empirische Gleichung aus der Versuchsanleitung [6]. Die Ergebnisse sind jedoch in Grad Celsius angegeben, weshalb die Temperatur noch in Kelvin umgewandelt werden muss. Dabei entspricht  $0^{\circ}=273,\!15\,\mathrm{K}$ . Im Laufe des Versuchs wird der Probe Energie zugeführt, die von der Spannung, dem Strom und der Heizzeit abhängig ist. Mit den im Temperaturbereich von  $80\,\mathrm{K}$  bis  $300\,\mathrm{K}$  lässt sich die zugeführte elektrische Energie:

$$E = U \cdot I \cdot \Delta t \tag{11}$$

berechnen. Aus der Energie lässt sich dann die gesucht Molwärme bei konstantem Druck wie folgt berechnen:

$$C_P = \frac{M}{m} \cdot \frac{E}{\Delta T},\tag{12}$$

wobei  $M=63{,}546\,\frac{\rm g}{\rm mol}$  [3] die Molare Masse von Kupfer,  $m=342\,{\rm g}$  [6, S. 6] die Masse der Probe, E die Energie und  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen zwei Messungen sind.

## 4.2 Berechnung von der spezifischen Molwärme von Kupfer

Mithilfe der Molwärme bei konstantem Druck, die sich in der Tabelle 1 befindet, lässt sich über die Korrekturformel 13 die spezifische Molwärme nach Debye bei konstantem Volumen bestimmen:

$$C_V = C_P - 9\alpha^2 \kappa V_0 T, \tag{13}$$

wobei  $\alpha$  das lineare Ausdehnungskoeffizient,  $\kappa$  das Kompressionsmodul und  $V_0$  das Molvolumen sind. Das Molvolumen  $V_0$  und das Kompressionsmodul  $\kappa$  werden wie folgt angegeben:

$$\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} [7],$$
 
$$V_0 = \frac{M}{\rho} = 7,092 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

und

$$\kappa = 137.8 \, \text{GPa}[4].$$

Da das Ausdehnungskoeffizient stark temperaturabhängig ist, muss er für jeden Wert der Molwärme  $C_V$  bzw. für jede gemessene Temperatur mithilfe von der Abbildung 3 separat berechnet werden. Die so berechneten Werte für  $C_V$  sind in der Tabelle 2

aufgelistet und in Abb. 4 gegen die Temperatur aufgetragen. Aus der Tabelle 1 werden die Temperaturen in Kelvin übernommen und mit diesen werden auch die Werte für  $\alpha$  durch lineare Interpolation bestimmt. Die Abschätzung wird dann über der Gleichung:

$$\alpha(T) = \frac{\alpha_i - \alpha_{\text{i-1}}}{T_i - T_{\text{i-1}}} (T - T_{\text{i-1}}) + \alpha_{\text{i-1}}$$
 (14)

vorgenommen, wobei i die obere Klassenschranke und i-1 die untere Klassenschranke bezeichnet.

т [к]	70	80	90	100	110	120	130	140
$\alpha$ [10 <sup>-6</sup> grd <sup>-1</sup> ]	7,00	8,50	9,75	10,70	11,50	12,10	12,65	13,15
т [к]	150	160	170	180	190	200	210	220
$\alpha$ [10 <sup>-6</sup> grd <sup>-1</sup> ]	13,60	13,90	14,25	14,50	14,75	14,95	15,20	15,40
т [к]	230	240	250	260	270	280	290	300
$\alpha$ [10 <sup>-6</sup> grd <sup>-1</sup> ]	15,60	15,75	15,90	16,10	16,25	16,35	16,50	16,65

Abbildung 3: Das lineare Ausdehnungskoeffizient von Kupfer, [6, S. 5].

**Tabelle 2:** Berechnete Werte für  $C_V$ .

T/K	$\alpha/10^{-6} \frac{1}{K}$	$C_V / \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol K}}$	T/K	$\alpha/10^{-6} \frac{1}{K}$	$C_V / \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol K}}$
88,37	8,97	6,28	131,81	13,52	48,10
$92,\!63$	11,72	$32,\!55$	141,75	13,93	18,60
$96,\!18$	9,92	38,88	149,25	13,62	24,85
$117,\!01$	11,38	$6,\!85$	157,55	14,01	23,00
100,93	14,05	8,97	165,55	14,38	23,90
103,06	14,99	$68,\!20$	173,69	14,67	24,30
$104,\!25$	$13,\!56$	122,2	182,87	14,86	21,70
105,92	13,21	87,60	195,11	15,07	$16,\!42$
$107,\!35$	$12,\!33$	103,0	205,12	15,29	$20,\!52$
$109,\!26$	13,75	80,60	215,36	$15,\!48$	20,23
$112,\!84$	13,01	43,50	225,90	15,67	19,84
$117,\!15$	$12,\!56$	37,20	233,70	15,83	26,92
$120,\!51$	13,96	$50,\!30$	244,83	15,99	19,14
124,11	13,41	48,88	255,24	16,09	20,34
127,96	12,91	47,80	_	-	-

## 4.3 Berechnung der Debye-Temperatur

Im nächsten Auswertungsteil soll für die Wertepaare  $(C_V, T)$  eine geeignete Debye-Temperatur  $\theta_D$  bestimmt werden. Es werden nur die Messwerte von  $80\,\mathrm{K}$  bis  $170\,\mathrm{K}$  berücksichtigt. Für die einzelnen errechneten  $C_V$  Werte aus der Tabelle 2 werden anhand

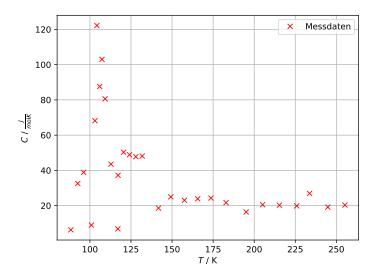


Abbildung 4: Messdaten zu  $C_V$  in Abhängigkeit von der Temperatur T.

der Abbildung 5 die zugehörigen  $\frac{\theta_{\rm D}}{T}$  Werte verglichen und bestimmt. Die so erhaltenden Werte werden mit der entsprechenden Temperatur multipliziert, um diese dann in Abbildung 6 gegen die Temperatur aufzutragen.

$\theta_{D}/T$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24,9430	24,9310	24,8930	24,8310	24,7450	24,6340	24,5000	24,3430	24,1630	23,9610
1	23,7390	23,4970	23,2360	22,9560	22,6600	22,3480	22,0210	21,6800	21,3270	20,9630
2	20,5880	20,2050	19,8140	19,4160	19,0120	18,6040	18,1920	17,7780	17,3630	16,9470
3	16,5310	16,1170	15,7040	15,2940	14,8870	14,4840	14,0860	13,6930	13,3050	12,9230
4	12,5480	12,1790	11,8170	11,4620	11,1150	10,7750	10,4440	10,1190	9,8030	9,4950
5	9,1950	8,9030	8,6190	8,3420	8,0740	7,8140	7,5610	7,3160	7,0780	6,8480
6	6,6250	6,4090	6,2000	5,9980	5,8030	5,6140	5,4310	5,2550	5,0840	4,9195
7	4,7606	4,6071	4,4590	4,3160	4,1781	4,0450	3,9166	3,7927	3,6732	3,5580
8	3,4468	3,3396	3,2362	3,1365	3,0403	2,9476	2,8581	2,7718	2,6886	2,6083
9	2,5309	2,4562	2,3841	2,3146	2,2475	2,1828	2,1203	2,0599	2,0017	1,9455
10	1,8912	1,8388	1,7882	1,7393	1,6920	1,6464	1,6022	1,5596	1,5184	1,4785
11	1,4400	1,4027	1,3667	1,3318	1,2980	1,2654	1,2337	1,2031	1,1735	1,1448
12	1,1170	1,0900	1,0639	1,0386	1,0141	0,9903	0,9672	0,9449	0,9232	0,9021
13	0,8817	0,8618	0,8426	0,8239	0,8058	0,7881	0,7710	0,7544	0,7382	0,7225
14	0,7072	0,6923	0,6779	0,6638	0,6502	0,6368	0,6239	0,6113	0,5990	0,5871
15	0,5755	0,5641	0,5531	0,5424	0,5319	0,5210	0,5117	0,5020	0,4926	0,4834

Abbildung 5: Zahlenwerte der Debye-Funktion, [6, S. 5].

 $\textbf{Tabelle 3:} \ \ \textbf{Debye-Temperatur}.$ 

T/K	$C_V / \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kmol}}$	$\frac{\theta_{\mathrm{D}}}{T}$	$\theta_{\mathrm{D}}/\mathrm{K}$
88,37	6,28	6,2	547,89
$92,\!63$	$32,\!55$	-	-
$96,\!18$	38,88	-	-
$117,\!01$	$6,\!85$	5,8	$678,\!65$
100,93	8,97	5,0	$504,\!05$
103,06	$68,\!20$	-	-
$104,\!25$	122,2	-	-
105,92	87,60	-	-
$107,\!35$	103,0	-	-
$109,\!26$	80,60	-	-
$112,\!84$	$43,\!50$	-	-
$117,\!15$	37,20	-	-
$120,\!51$	50,30	-	-
124,11	48,88	-	-
127,96	$47,\!80$	-	-
131,81	48,10	-	-
141,75	18,60	$^{2,5}$	$354,\!37$
$149,\!25$	24,85	0,3	44,77
$157,\!55$	23,00	1,3	204,81
$165,\!55$	23,90	0,9	148,99

Der Mittelwert  $\bar{\theta_{\rm D}}$  aus n Stichproben  $\theta_{\rm Di}$ ergibt sich aus:

$$\bar{\theta}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \theta_{\mathrm{Di}}.\tag{15}$$

Die Standardabweichung errechnet sich nach:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\theta_{\rm Di} - \bar{\theta_{\rm D}})^2} \tag{16}$$

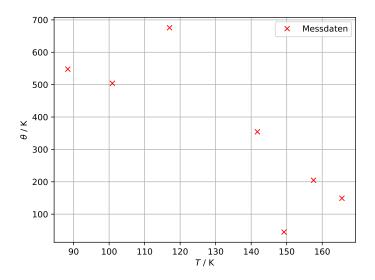
mit zufälligen Fehlern behafteten Werten  $\theta_{\mathrm{Di}}$ mit i=1,...,n.

Der aus der Standardabweichung aus der Gleichung 16 resultierende Fehler des Mittelwertes ergibt sich nach:

$$\Delta \bar{\theta_{\mathrm{D}}} = \frac{s_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\theta_{\mathrm{Di}} - \bar{\theta_{\mathrm{D}}})^2}{n(n-1)}}.$$
 (17)

Aus dem Mittelwert 15 und Fehler des Mittelwerts 17 der in der Tabelle 3 angegebenen Werte für die Debye-Temperatur ergibt sich:

$$\bar{\theta_{\mathrm{D}}} = (354,79 \pm 88,02)\,\mathrm{K}$$



**Abbildung 6:** Messdaten zu  $\theta_D$ .

## 4.4 Debye-Frequenz und theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur

Zuletzt werden die Debye-Frequenz  $\omega_{\rm D}$  und die Debye-Temperatur  $\theta_{\rm D}$  theoretisch bestimmt. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt und umgeschrieben:

$$\omega_{\rm D}^3 = \frac{18\pi^2 N_{\rm A}}{V_0} \left(\frac{1}{v_{\rm l}^3} + \frac{2}{v_{\rm tr}^3}\right)^{-1}.$$
 (18)

wobei  $V_0$  das Molvolumen,  $v_{\rm l}=4.7\cdot 10^3\,\frac{\rm m}{\rm s}$  [6, S. 5] die Phasengeschwindigkeit einer longitudinalen Welle,  $v_{\rm tr}=2.26\cdot 10^3\,\frac{\rm m}{\rm s}$  [6, S. 5] die Phasengeschwindigkeit einer transversalen Welle und  $N_{\rm A}=6.022\cdot 10^{23}\,\frac{\rm 1}{\rm mol}$  die Avogadro-Konstante [1] sind. Es ergibt sich:

$$\omega_{\rm D} = 4.349 \cdot 10^{13} \, \frac{1}{\rm s}$$

Damit lässt sich über der Gleichung:

$$\theta_{\rm D} = \frac{\hbar \omega_{\rm D}}{k_{\rm B}} \tag{19}$$

den theoretischen Wert für die Debye-Temperatur bestimmen. Die  $k_{\rm B}$ -Konstante wird als Boltzmann-Konstante [8] bezeichnet. Es folgt:

$$\theta_{\text{theo-D}} = 332,18 \,\text{K}.$$

## 5 Diskussion

In Tabelle 4 sind vergleichend Werte für die Debye-Temperaturen aus Literatur [2], theoretisch berechneten und aus Messwerten berechneten aufgeführt und die prozentuale Abweichung zwischen experimentell bestimmten Werten und den Werten aus der Literatur.

**Tabelle 4:** Vergleich zwischen Werten für die Debye-Temperaturen aus Literatur, theoretisch berechneten und aus Messwerten berechneten. Die Abweichung zwischen Literaturwert und experimentell bestimmten in Prozent.

$ heta_{ m D,lit}/ m K$	$ heta_{ m D,exp}/ m K$	Abweichung $/\%$	$\theta_{\mathrm{D,theo}}/\mathrm{K}$	Abweichung $/\%$
345	$354,79 \pm 88,02$	$2,\!54$	332,18	6,37

Der Literaturwert für die Debye-Temperatur von Kupfer liegt bei 345 K. Das experimentelle Ergebnis weicht davon zu 2,54 %, wohingegen der theoretisch bestimmte Werte nur um 6,37 % abweicht.

Es lassen sich viele Gründe für die möglichen Abweichungen finden. Zuerst gibt es in der Tabelle 1 einen kleinen Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur der Probe und des Kupfer-Zylinders. Die Temperaturunterschiede zwischen den Messungen hätten bei 7 K bis 11 K liegen müssen. Diese haben dadurch ergeben, dass es schwierig war, ein konstant gleiches Erwärmen des Kupfer-Zylinders und der Probe zu gewährleisten, war daran lag,

dass das Aufheizen des Kupfer-Zylinders langsam verlief. Zudem werden die Spannungs- und Stromgeräte manuell verstellt, wodurch der Zylinder und die Probe in unregelmäßigen Zeitintervallen erhitzt wurden. Außerdem ergeben sich noch andere Fehler wie z.B. das Vergessen die Zeit per Stoppuhr zu starten und mit Stickstoff weiter zu füllen. Dadurch, dass es nur kleine Unterschiede gaben, wurde den Wert für die Molwärme  $C_V$  sehr groß(s. Tabelle 4). Die dazu berechneten Werte für die Molwärme sind auch in der Abbildung 4 ersichtlich. In dem Plot der Molwärme gegen die Temperatur ist es auch zu sehen, dass die erste Hälfte der Messung durch diese kleinen Temperaturunterschiede große Werte für die Molwärme ergeben hat. Es lässt sich nicht erkennen, dass die berechneten Werte dem universellen Wert 3R entsprechen, der aus dem klassischen und dem Einstein-Modell folgt.

Trotz der vielen Fehlerquellen hat sich letztendlich einen guten experimentellen Wert für die Debye-Temperatur ergeben. Es wurden nur bestimmte Werte aus der Abbildung 5 abgelesen, da für größere Werte als > 24,9 die zugehörigen  $\frac{\theta_{\rm D}}{T}$  nicht mehr abgelesen werden konnten. Hier sollte ja nur einen bestimmten Bereich für die Temperaturen betrachtet werden und zwar von 80 K bis 170 K. Deshalb haben sich in der Tabelle 3 nur 7 möglichen Werte ergeben, die weiterhin in die Abbildung 6 gegen die Temperatur aufgetragen wurden. Hier ist auch nicht zu erkennen, dass die Werte für die Debye-Temperatur auf einer geraden parallel zur x-Achse liegen. Ein Vorschlag wäre z.B. den ganzen Bereich zu betrachten, also die Temperaturen von 80 K bis 300 K um eine bessere Aussage für die Debye-Temperatur zu treffen.

Außerdem ist der Messaufbau nicht komplett gegen äußere Einflüsse abgeschirmt, da das Dewargefäß nach oben offen war und so ein Austausch der Luft stattfinden konnte, die die Probe umgibt, was zu einer schnelleren Erwärmung der Probe führt. Weitere Fehlerquellen, die bei der Berechnung nicht berücksichtigt wurden, sind Ungenauigkeiten der Widerstandsmessung, über die sich dann die Temperatur berechnet.

Abschließend lässt sich sagen, dass der Versuch zur Bestimmung der Molwärme von Kupfer geeignet ist und sollte jedoch verstärkt darauf geachtet werden, dass das Gehäuse und die Probe etwa dieselbe Temperatur haben, damit es nicht zu größeren Abweichungen kommt.

## Literatur

- [1] Chemie.de. AvogradoKonstante. 2018. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Avogadro-Konstante.html (besucht am 01.12.2018).
- [2] Chemie.de. Debye-Modell. 2018. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Debye-Modell.html (besucht am 01.12.2018).
- [3] Chemie.de. Kupfer. 2018. URL: http://www.chemie.de/lexikon/Kupfer.html (besucht am 30.11.2018).
- [4] Goodfellow. Kupfer Materialinformationen. 2018. URL: http://www.goodfellow.com/G/Kupfer.html (besucht am 30.11.2018).

- [5] Siegfried Leffel. Thermische Eigenschaften von Werkstoffen. 2018. URL: https://slideplayer.org/slide/209739/ (besucht am 02.12.2018).
- [6] TU Dortmund: Physikalisches Praktikum. Versuch 47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern. 2018. URL: http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V47.pdf (besucht am 30.11.2018).
- [7] Chemnitzer Schulmodell. *Dichte fester Stoffe*. 2018. URL: https://www.schulmodell.eu/index.php/physik/503-dichte-fester-stoffe.html (besucht am 30.11.2018).
- [8] Spektrum.de. Lexikon der Physik: Boltzmann-Konstante. 2018. URL: https://www.spektrum.de/lexikon/physik/boltzmann-konstante/1844 (besucht am 01.12.2018).