

V47

# **Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern**

Polina Stecher  
polina.stecherA@tu-dortmund.de

Ramona-Gabriela Kallo  
ramonagabriela.kallo@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.18

Abgabe: 03.12.18

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung und Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Die klassische Theorie der Molwärme . . . . .	3
2.2	Die Einstein-Theorie . . . . .	4
2.3	Debye-Modell . . . . .	4
2.4	Vergleich der drei Modelle . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>6</b>
3.1	Versuchsaufbau . . . . .	6
3.2	Durchführung . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>8</b>
4.1	Bestimmung der Molwärme von Kupfer . . . . .	8
4.2	Berechnung von der spezifischen Molwärme von Kupfer . . . . .	10
4.3	Berechnung der Debye-Temperatur . . . . .	12
4.4	Debye-Frequenz und theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur . .	14
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>16</b>

# 1 Zielsetzung und Motivation

Ziel des Versuches ist es, die spezifische Molwärme von Kupfer in Abhängigkeit der Temperatur zu untersuchen. Die Molwärme  $C$  ist die Menge der Wärme, die benötigt wird um ein 1 Mol eines Stoffes um 1 K zu erhitzen. Die allgemeine Formel lautet

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T} \quad (1)$$

Außerdem ist zu berücksichtigen, unter welchen Bedingungen die Wärme zu-oder abgeführt wird. Dabei wird unterschieden zwischen der Molwärme bei konstantem Volumen  $C_V$  und der Molwärme bei konstantem Druck  $C_p$ . In diesem Versuch wird die Molwärme  $C_V$  gemessen, da sich die Kupferprobe in einem geschlossenen Behälter mit konstanten Volumen befindet. Desweiteren wird aus den gewonnenen Ergebnissen die sogenannte Debye-Temperatur  $\Theta_D$  bestimmt und mit dem theoretischen Ansatz verglichen. Insgesamt werden drei Modelle untersucht, die die Abhängigkeit der Molwärme von der Temperatur beschreiben.

## 2 Theorie

### 2.1 Die klassische Theorie der Molwärme

Die klassische Betrachtung besagt, dass die thermische Energie, die in einen Körper eingebracht wird, sich gleichmäßig auf die Freiheitsgrade der Atome des Festkörpers verteilt. Die Atome sind durch Gitterkräfte an feste Plätze gebunden und können in drei Richtungen schwingen und haben somit drei Freiheitsgrade. Die Atome führen eine harmonische Schwingung um ihre Ruhelage aus und haben somit eine mittlere kinetische Energie, die mit der potentiellen Energie identisch ist. Pro Freiheitsgrad besitzt jedes Atom die Energie  $\frac{1}{2}k_B T$ . Die mittlere Energie eines Atoms ist die Summe der potentiellen und kinetischen Energie und beträgt

$$E = 6\frac{1}{2}k_B T \quad (2)$$

mit der Boltzmann-Konstante  $k_B$  und der Temperatur  $T$ . In einem Kristall betrachtet, ergibt sich daraus mit der Loschmidt-Konstante  $N_L$  (Teilchendichte eines idealen Gases)

$$E = 3k_B N_L T. \quad (3)$$

Unter Voraussetzung eines konstanten Volumens folgt für die spezifische Wärmekapazität

$$C_V = \left( \frac{\delta E}{\delta T} \right)_V = 3R. \quad (4)$$

Somit ist die spezifische Molwärme nach der Gleichung (3) material-und temperaturunabhängig. In der Realität trifft diese Annahme nur für hohe Temperaturen ( $T \gg \Theta_D$ ) zu.

Bei niedrigen Temperaturen kommt es zu einer sehr starken Abweichung. Zusätzlich zeigt sich in den Messungen, dass die Molwärme materialabhängig ist, was mit der klassischen Theorie nicht übereinstimmt. Die klassische Theorie ist deshalb unzureichend, weil die Quantenmechanik nicht berücksichtigt wird.

## 2.2 Die Einstein-Theorie

Im Einsteinschen-Modell wird im Gegensatz zur klassischen Theorie die Quantelung der Schwingungsenergie der Atome berücksichtigt. Dabei wird angenommen, dass alle Atome im Festkörper jeweils mit der gleichen Frequenz  $\omega_E$  schwingen und nur Energien von ganzzahligen Vielfachen des Wertes  $\hbar\omega$  aufnehmen bzw. abgeben. Mittels der Boltzmannschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$W(n) = \exp\left(\frac{-n\hbar\omega_E}{k_B T}\right) \quad (5)$$

wird die Wahrscheinlichkeit eines sich im thermischen Gleichgewicht befindenen Oszillators mit der Energie  $n\hbar\omega$  bei einer Temperatur  $T$  angegeben. Anschließend wird über alle Energien  $n\hbar\omega$  von  $n = 0$  bis  $\infty$  multipliziert, mit der Wahrscheinlichkeit  $W(n)$  ihres Auftretens summiert und das Ergebnis durch die Summe aller  $W(n)$  geteilt. Daraus ergibt sich die Einstein-Energie

$$E_{Einstein} = \frac{\hbar\omega_E}{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}} - 1}. \quad (6)$$

Die Molwärme berechnet sich somit zu

$$C_V = 3R \left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B}\right)^2 \frac{1}{T^2} \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right) - 1\right)^2} \quad (7)$$

mit der Einstein-Temperatur  $\Theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k_B T}$ , die mit der Einstein Frequenz zusammenhängt.

Auch bei diesem Modell gilt eine Annäherung an  $3R$  bei sehr hohen Temperaturen. Bei einer Abnahme der Temperatur nimmt die Molwärme ebenfalls ab. Für tiefe Temperaturen zeigt sich, dass der Verlauf der speziellen Molwärme mit der Temperatur exponentiell zunimmt. Auch in diesem Modell tritt für tiefe Temperaturen eine Abweichung zu experimentellen Werten auf aufgrund der Annahme, dass alle Atome mit gleicher Frequenz schwingen.

## 2.3 Debye-Modell

Eine bessere Annäherung an die experimentellen Messwerte bietet das Debye-Modell. Das Modell basiert darauf, dass die Eigenschwingungen aller Oszillatoren in einem

Festkörper eine spektrale Frequenzverteilung  $Z(\omega)$  mit der Grenzfrequenz  $\omega_D$  besitzt. Ein Kristall besitzt aufgrund endlicher Dimension nur endlich viele Eigenschwingungen. Diese beträgt  $3N_L$ , wobei  $N_L$  die Loschmidt-Konstante ist und die Anzahl der Moleküle pro Volumen eines idealen Gases angibt. Daher existiert eine Grenzfrequenz  $\omega_D$ , die auch Debye-Frequenz genannt wird und über die Formel

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega) d\omega = 3N_L \quad (8)$$

berechnet wird. Bis zur dieser Grenzfrequenz ist die lineare Dispersionsrelation (Frequenz und Wellenvektor proportional) gegeben. Durch Verknüpfen der klassischen und des quantenmechanischen Modells, ergibt sich eine Näherung mit der Form für die spektrale Verteilung von

$$Z(\omega) d\omega = \frac{L^3}{2\pi^2} \omega^2 \left( \frac{1}{v_{long}^3} + \frac{2}{v_{trans}^3} \right) d\omega. \quad (9)$$

Dabei wird angenommen, dass die Phasengeschwindigkeit einer elastischen Welle nicht von ihrer Frequenz und ihrer Ausbreitungsrichtung abhängt. Sodass  $Z(\omega)$  sich berechnen lassen kann durch Abzählen der Eigenschwingungen in einem Würfel mit Kantenlänge  $L$ . Mit der Debye-Grenzfrequenz wird diese Gleichung zu

$$Z(\omega) d\omega = \frac{9N_L}{\omega_D^3} \omega^2 d\omega. \quad (10)$$

Die freie Schwingungsenergie berechnet sich über die Formel:

$$U = \int_0^{\omega_D} \frac{Z(\omega) d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (11)$$

Die Wärmekapazität  $C_v$  ergibt durch Ausführung des Integrals und der Differentiation nach der Temperatur.

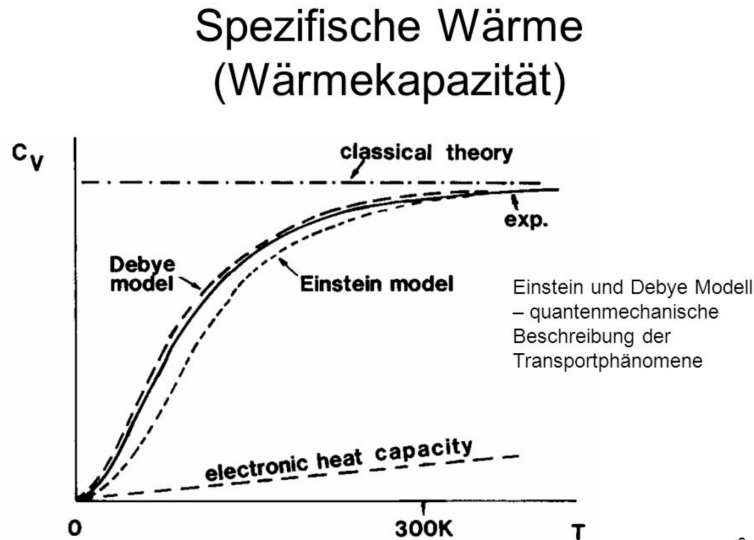
$$C_{V,Debye} = \frac{d}{dT} \frac{9N_L}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (12)$$

Wie bei den anderen Modellen, nähert sich auch die Debye Kurve im hohen Temperatur Bereich dem Wert  $3R$  an. Und für niedrige Temperaturen ( $T \rightarrow 0$ ) ergibt sich eine  $T^3$ -Abhängigkeit.

## 2.4 Vergleich der drei Modelle

In der Abbildung 1 werden die Verläufe der drei Modelle mit dem experimentellem Befund verglichen. Zunächst ist zu erkennen, dass für hohe Temperaturen (ab 300 K) das Einstein- und das Debye Modell sich dem Wert von  $3R$  annähern. Für niedrige

Temperaturen (0-300K) hingegen nimmt der Verlauf der speziellen Molwärme nach Einstein exponentiell mit der Temperatur zu, wohingegen es bei dem Debye-Modell eine  $T^3$ -Abhängigkeit für tiefe Temperaturen gibt. Anhand der Abbildung lässt sich erkennen, dass das Debye-Modell sich dem experimentellen Verlauf am meisten nähert. Außerdem ist in der Abbildung der Verlauf der der Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur für das freie Elektronengas abgebildet. Es ergibt sich eine lineare Abhängigkeit. Es zeigt sich, dass der Beitrag der spezifischen Wärme der Elektronen zur gesamten Wärmekapazität nur in sehr niedrigen Temperaturen ( $T \rightarrow 0$ ) eine wichtige Rolle spielt. Wohingegen für höhere Temperaturen der Beitrag nur sehr gering ist.



**Abbildung 1:** Vergleich der drei Graphiken von der klassischen Theorie, des Einstein-Modells und des Debye-Modells, [5].

### 3 Versuchsaufbau

#### 3.1 Versuchsaufbau

Die Abbildung 2 zeigt die Apparatur, die zur Bestimmung der Molwärme von Kupfer verwendet wird.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Dewar-Gefäß. In dieses Gefäß wird im Laufe des Experiments flüssiges Stickstoff gefüllt. Im Inneren des Gefäßes befindet sich der Rezipient, in dem die Kupferprobe eingelagert ist. Diese Kupferprobe besitzt eine eigene Heizwicklung, welche ihrerseits von einem Kupfer-Zylinder mit Heizwicklung umgeben ist. An der Probe und dem Zylinder sind jeweils ein PT-100 Messwiderstand befestigt, der zur Bestimmung der Temperatur benötigt wird. Deren Widerstand ist eine monotone Funktion der Temperatur, diese lässt sich über die Gleichung  $T = 0,00134R^2 + 2,296R - 243,02$  bestimmen. Beim Widerstandsthermometer variiert der elektrische Widerstand

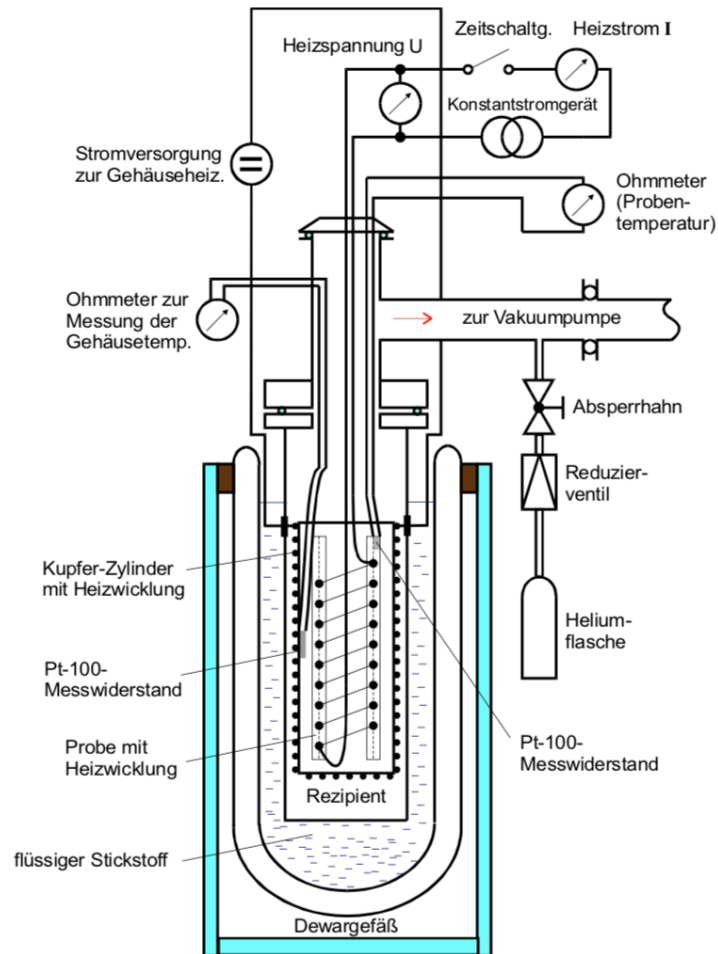


Abbildung 2: Versuchsapparatur, [6].

eines elektrischen Leiters mit der Temperatur. Weiterhin ist der Rezipient an einer Vakuumpumpe und Heliumflasche angeschlossen. Der Rezipient wird während des Abkühlens der Probe mit Helium befüllt. Die Erhitzung der Probe und des Zylinders erfolgen über die verbundene Stromversorgung und Heizspannung  $U$ .

### 3.2 Durchführung

Zunächst wird der Rezipient evakuiert. Da Luft aus ca. 80 % Stickstoff besteht und die Probe mit flüssigem Stickstoff abgekühlt wird, würde sich der Stickstoff aus der Luft verflüssigen. Anschließend wird Helium bei Barometerdruck in den Rezipient gefüllt, da es eine gute thermische Leitfähigkeit aufweist, und mit Hilfe des flüssigen Stickstoffs im Dewar Gefäß wird die Probe auf 80 K abgekühlt. Helium eignet sich deshalb so gut, weil es einen niedrigeren Siedepunkt als Luft besitzt und sich bei der Abkühlung nicht verflüssigt im Gegensatz zu Luft. Nach ca. einer Stunde ist die Endtemperatur erreicht

und das Rezipient wird evakuiert, um den Innendruck zu verringern, um Wärmeverluste zu vermeiden. Die Wärmeverluste können dabei Konduktion, Konvektion, Evaporation oder Strahlung sein. Anschließend wird der abgekühlten Probe elektrische Energie über die Heizwicklung zugeführt. Die Temperaturerhöhung  $\Delta T$  wird über die Widerstände gemessen. Dabei soll  $\Delta T$  zwischen  $7^\circ$  und  $11^\circ$  betragen. Der Kupfer-Zylinder sollte während des gesamten Versuches die gleiche Temperatur wie die Probe aufweisen, um so den Wärmeverlust aufgrund der Wärmeübertragung durch einen Temperaturgradienten zu verhindern. Um dies zu ermöglichen, ist der Kupfer Zylinder an eigener Stromversorgung angeschlossen, damit elektrische Energie zugeführt werden kann. Ziel der Messung ist es die Molwärme von Kupfer für verschiedene Temperaturen zwischen 80 bis 300 Kelvin zu ermitteln. Dazu wird die Probe im Zeitabstand von fünf Minuten regelmäßig über die Stromstärke erhitzt. Währenddessen wird die Temperatur, die Messzeit, die Spannung und der Heizstrom bei konstantem Volumen notiert.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Molwärme von Kupfer

Die berechneten und aufgenommenen Messwerte befinden sich in der Tabelle 1. Es werden alle diese Daten sowie die Temperatur der Probe und des Kupfer-Zylinders aufgenommen. Die Temperaturen werden über PT-100 - Widerstände gemessen. Aufgrund dessen müssen die beobachteten Werte der Widerstände noch in die entsprechende Temperatur umgerechnet werden. Die Temperatur der Probe bzw. des Kupferzylinders wird mithilfe des gemessenen Widerstands über Gleichung 13 bestimmt:

$$T = 0,00134 \cdot R^2 + 2,296 \cdot R - 243,02 \quad (13)$$

Hierbei handelt es sich um eine empirische Gleichung aus der Versuchsanleitung [6]. Die Ergebnisse sind jedoch in Grad Celsius angegeben, weshalb die Temperatur noch in Kelvin umgewandelt werden muss. Dabei entspricht  $0^\circ = 273,15 \text{ K}$ . Im Laufe des Versuchs wird der Probe Energie zugeführt, die von der Spannung, dem Strom und der Heizzeit abhängig ist. Mit den im Temperaturbereich von 80 K bis 300 K lässt sich die zugeführte elektrische Energie:

$$E = U \cdot I \cdot \Delta t \quad (14)$$

berechnen. Aus der Energie lässt sich dann die gesuchte Molwärme bei konstantem Druck wie folgt berechnen:

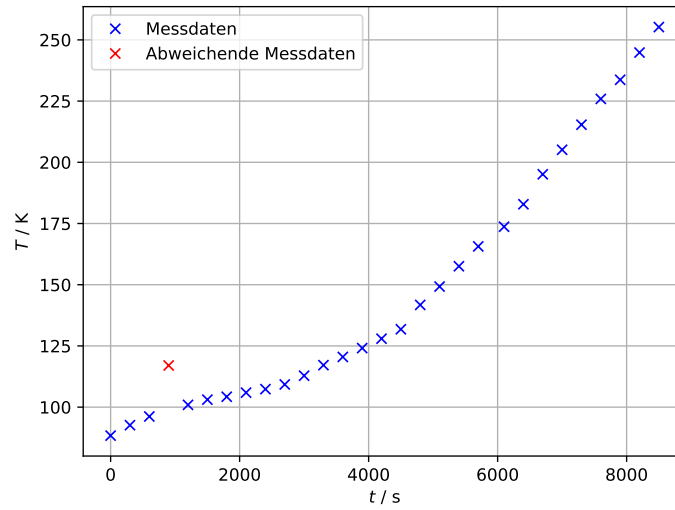
$$C_P = \frac{M}{m} \cdot \frac{E}{\Delta T}, \quad (15)$$

wobei  $M = 63,546 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  [3] die Molare Masse von Kupfer,  $m = 342 \text{ g}$  [6, S. 6] die Masse der Probe,  $E$  die Energie und  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen zwei Messungen sind. In der Abbildung 3 werden die Messdaten der berechneten Temperaturen in Abhängigkeit der Zeit  $t$  aufgetragen, um den linearen Verlauf ersichtlich zu machen.



**Tabelle 1:** Messwerte zur Bestimmung der Molwärme  $C_P$ .

$R/\Omega$	$T/^{\circ}\text{C}$	$T/\text{K}$	$\Delta T/\text{K}$	$\Delta t/\text{s}$	$U/\text{V}$	$I/\text{mA}$	$E/\text{J}$	$C_P/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$
25,0	-184,78	88,37	0	0	15,80	149,5	0	0
26,8	-180,52	92,63	4,26	300	16,01	152,8	733,89	32,51
28,3	-176,97	96,18	3,55	300	15,95	152,4	729,23	38,76
29,3	-156,14	117,01	20,83	300	16,28	154,9	756,53	6,85
30,3	-172,22	100,93	16,08	300	16,36	155,9	765,15	8,98
31,2	-170,09	103,06	2,13	300	16,43	156,1	769,41	68,17
31,7	-168,90	104,25	1,19	300	16,43	156,5	771,38	122,34
32,4	-167,23	105,92	1,67	300	16,48	156,8	775,21	87,60
33,0	-165,80	107,35	1,43	300	16,54	157,2	780,02	102,94
33,8	-163,89	109,26	1,91	300	16,92	160,7	815,71	80,60
35,3	-160,31	112,84	3,58	300	17,01	161,8	825,66	43,52
37,1	-156,00	117,15	4,31	300	17,25	164,2	849,73	37,20
38,5	-152,64	120,51	3,36	300	17,72	168,4	895,21	50,28
40,0	-149,04	124,11	3,60	300	18,09	171,6	931,27	48,82
41,6	-145,19	127,96	3,85	300	18,53	175,3	974,49	47,77
43,2	-141,34	131,81	3,85	300	18,56	176,2	981,08	48,09
47,3	-131,40	141,75	9,94	300	18,57	176,3	982,16	18,64
50,5	-123,90	149,25	7,50	300	18,66	177,2	991,96	24,96
53,8	-115,60	157,55	8,30	300	18,88	178,6	1011,59	23,00
57,1	-107,50	165,65	8,10	300	18,99	179,8	1024,32	23,86
60,4	-99,46	173,69	8,04	300	18,11	180,9	1037,09	24,34
64,1	-90,28	182,87	9,18	300	19,28	182,2	1053,84	21,66
68,8	-78,04	195,11	12,24	300	19,40	183,3	1066,80	16,44
73,1	-68,03	205,12	10,01	300	19,58	184,8	1085,51	20,46
77,2	-57,79	215,36	10,24	300	19,63	185,8	1094,17	20,16
81,4	-47,25	225,90	10,54	300	19,76	186,9	1107,94	19,83
84,5	-39,45	233,70	7,80	300	19,79	187,4	1112,59	26,92
88,9	-28,32	244,83	11,13	300	19,94	188,7	1128,80	19,14
, 93,0	-17,91	255,24	10,41	300	20,01	189,6	1143,28	20,72



**Abbildung 3:** Messdaten der Temperatur  $T$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  aufgetragen.

## 4.2 Berechnung von der spezifischen Molwärme von Kupfer

Mithilfe der Molwärme bei konstantem Druck, die sich in der Tabelle 1 befindet, lässt sich über die Korrekturformel 16 die spezifische Molwärme nach Debye bei konstantem Volumen bestimmen:

$$C_V = C_P - 9\alpha^2 \kappa V_0 T, \quad (16)$$

wobei  $\alpha$  das lineare Ausdehnungskoeffizient,  $\kappa$  das Kompressionsmodul und  $V_0$  das Molvolumen sind. Das Molvolumen  $V_0$  und das Kompressionsmodul  $\kappa$  werden wie folgt angegeben:

$$\rho = 8960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} [7],$$

$$V_0 = \frac{M}{\rho} = 7,092 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

und

$$\kappa = 137,8 \text{ GPa} [4].$$

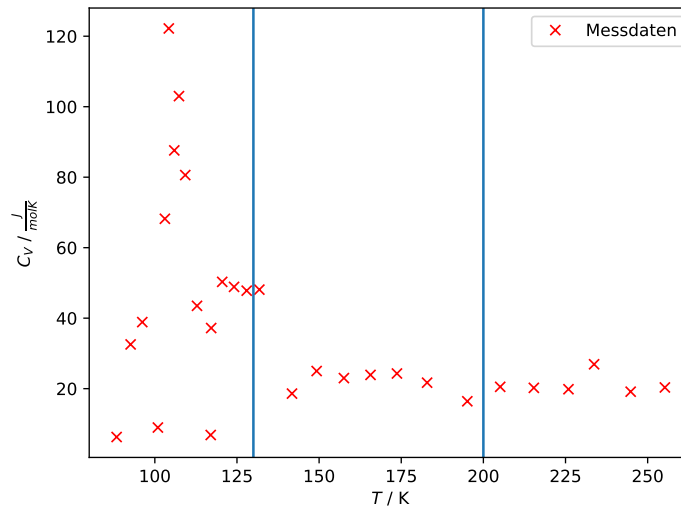
Da der Ausdehnungskoeffizient stark temperaturabhängig ist, muss er für jeden Wert der Molwärme  $C_V$  bzw. für jede gemessene Temperatur mithilfe der Abbildung 5 separat berechnet werden. Die so berechneten Werte für  $C_V$  sind in der Tabelle 2 aufgelistet und in Abb. 4 gegen die Temperatur aufgetragen. Aus der Tabelle 1 werden die Temperaturen in Kelvin übernommen und mit diesen werden auch die Werte für  $\alpha$  durch lineare Interpolation bestimmt. Die Abschätzung wird dann über der Gleichung:

$$\alpha(T) = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} (T - T_{i-1}) + \alpha_{i-1} \quad (17)$$

**Tabelle 2:** Berechnete Werte für  $C_V$ .

$T/\text{K}$	$\alpha/10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$	$C_V/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$	$T/\text{K}$	$\alpha/10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$	$C_V/\frac{\text{J}}{\text{molK}}$
88,37	8,97	6,28	131,81	13,52	48,10
92,63	11,72	32,55	141,75	13,93	18,60
96,18	9,92	38,88	149,25	13,62	24,85
117,01	11,38	6,85	157,55	14,01	23,00
100,93	14,05	8,97	165,55	14,38	23,90
103,06	14,99	68,20	173,69	14,67	24,30
104,25	13,56	122,2	182,87	14,86	21,70
105,92	13,21	87,60	195,11	15,07	16,42
107,35	12,33	103,0	205,12	15,29	20,52
109,26	13,75	80,60	215,36	15,48	20,23
112,84	13,01	43,50	225,90	15,67	19,84
117,15	12,56	37,20	233,70	15,83	26,92
120,51	13,96	50,30	244,83	15,99	19,14
124,11	13,41	48,88	255,24	16,09	20,34
127,96	12,91	47,80	-	-	-

vorgenommen, wobei  $i$  die obere Klassenschranke und  $i - 1$  die untere Klassenschranke bezeichnet.



**Abbildung 4:** Messdaten zu  $C_V$  in Abhängigkeit der Temperatur  $T$ . Die blauen Linien markieren die Zeitpunkte an denen evakuiert und Stickstoff nachgefüllt wurde.

T [K]	70	80	90	100	110	120	130	140
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	7,00	8,50	9,75	10,70	11,50	12,10	12,65	13,15
T [K]	150	160	170	180	190	200	210	220
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	13,60	13,90	14,25	14,50	14,75	14,95	15,20	15,40
T [K]	230	240	250	260	270	280	290	300
$\alpha$ [ $10^{-6}$ grd $^{-1}$ ]	15,60	15,75	15,90	16,10	16,25	16,35	16,50	16,65

Abbildung 5: Der lineare Ausdehnungskoeffizient von Kupfer, [6, S. 5].

### 4.3 Berechnung der Debye-Temperatur

Im nächsten Auswertungsteil soll für die Wertepaare  $(C_V, T)$  eine geeignete Debye-Temperatur  $\theta_D$  bestimmt werden. Es werden nur die Messwerte von 80 K bis 170 K berücksichtigt. Für die einzelnen errechneten  $C_V$  Werte aus der Tabelle 2 werden anhand der Abbildung 6 die zugehörigen  $\frac{\theta_D}{T}$  Werte verglichen und bestimmt. Die so erhaltenen Werte werden mit der entsprechenden Temperatur multipliziert, um diese dann in Abbildung 7 gegen die Temperatur aufzutragen.

$\theta_D/T$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24,9430	24,9310	24,8930	24,8310	24,7450	24,6340	24,5000	24,3430	24,1630	23,9610
1	23,7390	23,4970	23,2360	22,9560	22,6600	22,3480	22,0210	21,6800	21,3270	20,9630
2	20,5880	20,2050	19,8140	19,4160	19,0120	18,6040	18,1920	17,7780	17,3630	16,9470
3	16,5310	16,1170	15,7040	15,2940	14,8870	14,4840	14,0860	13,6930	13,3050	12,9230
4	12,5480	12,1790	11,8170	11,4620	11,1150	10,7750	10,4440	10,1190	9,8030	9,4950
5	9,1950	8,9030	8,6190	8,3420	8,0740	7,8140	7,5610	7,3160	7,0780	6,8480
6	6,6250	6,4090	6,2000	5,9980	5,8030	5,6140	5,4310	5,2550	5,0840	4,9195
7	4,7606	4,6071	4,4590	4,3160	4,1781	4,0450	3,9166	3,7927	3,6732	3,5580
8	3,4468	3,3396	3,2362	3,1365	3,0403	2,9476	2,8581	2,7718	2,6886	2,6083
9	2,5309	2,4562	2,3841	2,3146	2,2475	2,1828	2,1203	2,0599	2,0017	1,9455
10	1,8912	1,8388	1,7882	1,7393	1,6920	1,6464	1,6022	1,5596	1,5184	1,4785
11	1,4400	1,4027	1,3667	1,3318	1,2980	1,2654	1,2337	1,2031	1,1735	1,1448
12	1,1170	1,0900	1,0639	1,0386	1,0141	0,9903	0,9672	0,9449	0,9232	0,9021
13	0,8817	0,8618	0,8426	0,8239	0,8058	0,7881	0,7710	0,7544	0,7382	0,7225
14	0,7072	0,6923	0,6779	0,6638	0,6502	0,6368	0,6239	0,6113	0,5990	0,5871
15	0,5755	0,5641	0,5531	0,5424	0,5319	0,5210	0,5117	0,5020	0,4926	0,4834

Abbildung 6: Zahlenwerte der Debye-Funktion, [6, S. 5].

Aus dem Mittelwert und Fehler des Mittelwerts der in der Tabelle 3 angegebenen Werte für die Debye-Temperatur ergibt sich:

$$\bar{\theta}_D = (354,79 \pm 88,02) \text{ K}$$

**Tabelle 3:** Debye-Temperatur.

$T/\text{K}$	$C_V/\frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$	$\frac{\theta_D}{T}$	$\theta_D/\text{K}$
88,37	6,28	6,2	547,89
92,63	32,55	-	-
96,18	38,88	-	-
117,01	6,85	5,8	678,65
100,93	8,97	5,0	504,05
103,06	68,20	-	-
104,25	122,2	-	-
105,92	87,60	-	-
107,35	103,0	-	-
109,26	80,60	-	-
112,84	43,50	-	-
117,15	37,20	-	-
120,51	50,30	-	-
124,11	48,88	-	-
127,96	47,80	-	-
131,81	48,10	-	-
141,75	18,60	2,5	354,37
149,25	24,85	0,3	44,77
157,55	23,00	1,3	204,81
165,55	23,90	0,9	148,99

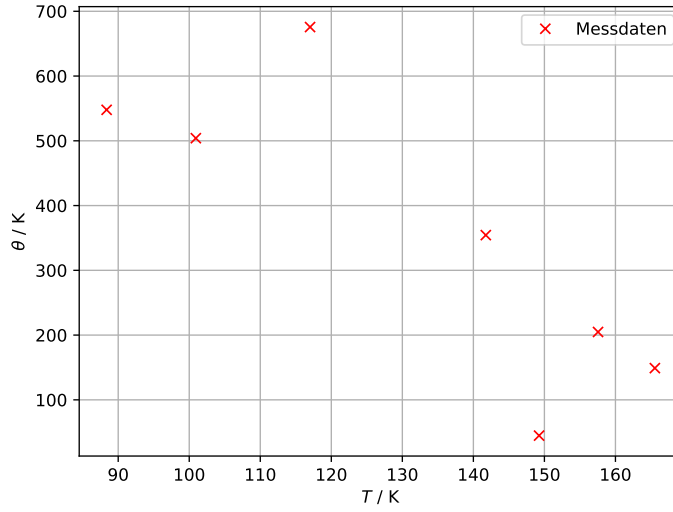


Abbildung 7: Messdaten zu  $\theta_D$ .

#### 4.4 Debye-Frequenz und theoretische Bestimmung der Debye-Temperatur

Zuletzt werden die Debye-Frequenz  $\omega_D$  und die Debye-Temperatur  $\theta_D$  theoretisch bestimmt. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt und umgeschrieben:

$$\omega_D^3 = \frac{18\pi^2 N_A}{V_0} \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_{tr}^3} \right)^{-1}. \quad (18)$$

wobei  $V_0$  das Molvolumen,  $v_l = 4,7 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$  [6, S. 5] die Phasengeschwindigkeit einer longitudinalen Welle,  $v_{tr} = 2,26 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$  [6, S. 5] die Phasengeschwindigkeit einer transversalen Welle und  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$  die Avogadro-Konstante [1] sind. Es ergibt sich:

$$\omega_D = 4,349 \cdot 10^{13} \frac{1}{s}$$

Damit lässt sich über der Gleichung:

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \quad (19)$$

den theoretischen Wert für die Debye-Temperatur bestimmen. Die  $k_B$ -Konstante wird als Boltzmann-Konstante [8] bezeichnet. Es folgt:

$$\theta_{\text{theo-D}} = 332,18 \text{ K.}$$

## 5 Diskussion

In Tabelle 4 sind vergleichend Werte für die Debye-Temperaturen aus Literatur [2], theoretisch berechneten und aus Messwerten berechneten aufgeführt und die prozentuale Abweichung zwischen experimentell bestimmten Werten und den Werten aus der Literatur.

**Tabelle 4:** Vergleich zwischen Werten für die Debye-Temperaturen aus Literatur, theoretisch berechneten und aus Messwerten berechneten. Die Abweichung zwischen Literaturwert und experimentell bestimmten in Prozent.

$\theta_{D,\text{lit}}/\text{K}$	$\theta_{D,\text{exp}}/\text{K}$	Abweichung /%	$\theta_{D,\text{theo}}/\text{K}$	Abweichung /%
345	$354,79 \pm 88,02$	2,54	332,18	6,37

Der Literaturwert für die Debye-Temperatur von Kupfer liegt bei 345 K. Das experimentelle Ergebnis weicht davon zu 2,54 %, wohingegen der theoretisch bestimmte Wert nur um 6,37 % abweicht. Zu dem experimentellen Wert liegt ein relativer Fehler von 24,80 % und ist damit deutlich größer als die Abweichungen vom Theorie- und Literaturwert. Für die Entstehung dieser Abweichungen werden unten mögliche Fehlerquellen beschrieben.

Zuerst gibt es in der Tabelle 1 eine kleine Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur der Probe und des Kupfer-Zylinders. Die Temperaturunterschiede zwischen den Messungen hätten bei 7 K bis 11 K liegen müssen. Die Abweichungen hiervon haben sich dadurch ergeben ist, dass es schwierig war, ein konstant gleiches Erwärmen des Kupfer-Zylinders und der Probe zu gewährleisten. Dies lag daran, dass das Aufheizen des Kupfer-Zylinders langsam verlief. Das langsame Aufheizen kann so erklärt werden, dass am Anfang vergessen wurde das Helium abzupumpen, um den Wärmeverlust der Probe z.B. durch Konvektion über die Gasmoleküle zu verhindern bzw. zu minimieren. Jedoch können Wärmeverluste durch Wärmestrahlung nicht verhindert werden, weshalb der Kupfer-Zylinder die gleiche Temperatur wie die Probe aufweisen sollte. Helium ist ein guter Wärmeleiter und es wird verwendet, da das in Luft enthaltende Wasser bei tiefen Temperaturen bei ca. 273,15 K gefrieren würde, Helium hingegen besitzt einen Schmelzpunkt von 0,95 K. Zudem werden die Spannungs- und Stromgeräte manuell verstellt, wodurch der Zylinder und die Probe in unregelmäßigen Zeitintervallen erhitzt wurden. Außerdem ergeben sich noch andere Fehler wie z.B. weil vergessen wurde die Stoppuhr zu starten sowie Stickstoff nachzufüllen.

Für die Berechnung der spezifischen Molwärme von Kupfer(s. Tabelle 4) haben sich sehr große Werte ergeben. Zuerst wurde die Molwärme bei konstantem Druck berechnet, wobei es sich hier abweichende Ergebnisse ergeben haben. Mögliche Ursachen für die Entstehung der abweichenden Ergebnisse sind die Temperaturdifferenz  $\Delta T$ , die am Anfang der Messung sehr klein war, die Zeitdifferenz  $\Delta t$ , die viel zu lang für die Messung war und der Strom  $I$ . Während des Messvorgangs wird der Probe über die Heizwicklung elektrische Energie in Form von Wärme hinzugeführt. Die zugeführte Energie ist abhängig von dem anliegenden Strom, der Spannung und Heizzeit. Da der Strom bei jeder einzelnen Messung geändert wird, wird die zugeführte Leistung nicht mehr über  $P = U \cdot I$  berechnet, weil der Strom dann auch nicht für die 300 s konstant ist. Weil  $C_V$  nach Gleichung 16 abhängig von  $C_P$  ist, ergibt sich auch eine ähnlich große Abweichung, die auch in der Abbildung 4

ersichtlich ist. Bei dem Plot ist zu sehen, dass die erste Hälfte der Messung(im Bereich von 88 K bis 127 K) sehr viel von den am Ende gemessenen Werte abweicht. Es lässt sich nicht erkennen, dass die berechneten Werte dem universellen Wert  $3R$  entsprechen, der aus dem klassischen und dem Einstein-Modell folgt.

Die Abbildung 3 stellt die Messdaten der gemessenen Temperaturen  $T$  in Abhängigkeit der Zeit  $t$  dar. Hier ist zu erkennen, dass der Anfang die Messung ein konstanter Verlauf zeigt und sich erst gegen Ende ein zunehmender Verlauf der Temperaturen ergibt. Dadurch dass es am Anfang nur konstante Werte für die Temperatur gab, haben sich auch nur kleine Temperaturdifferenzen ergeben.

Trotz der vielen Fehlerquellen hat sich letztendlich ein guter experimenteller Wert für die Debye-Temperatur ergeben. Es wurden nur bestimmte Werte aus der Abbildung 6 abgelesen, da für größere Werte als  $> 24,9$  die zugehörigen  $\frac{\theta_D}{T}$  nicht mehr angegeben waren. Hier sollte ja nur einen bestimmten Bereich für die Temperaturen betrachtet werden und zwar von 80 K bis 170 K. Deshalb haben sich in der Tabelle 3 nur 7 möglichen Werte ergeben, die weiterhin in die Abbildung 7 gegen die Temperatur aufgetragen wurden. Hier ist auch nicht zu erkennen, dass die Werte für die Debye-Temperatur auf einer geraden parallel zur x-Achse liegen. Ein Vorschlag wäre z.B. den ganzen Bereich zu betrachten, also die Temperaturen von 80 K bis 300 K um eine bessere Aussage für die Debye-Temperatur zu treffen.

Außerdem ist der Messaufbau nicht komplett gegen äußere Einflüsse abgeschirmt, da das Dewargefäß nach oben offen war und so ein Austausch der Luft stattfinden konnte, die die Probe umgibt, was zu einer schnelleren Erwärmung der Probe führt. Weitere Fehlerquellen, die bei der Berechnung nicht berücksichtigt wurden, sind Ungenauigkeiten der Widerstandsmessung, über die sich dann die Temperatur berechnet. Dieser Fehler ist allerdings klein im Gegensatz zu den oben beschriebenen Problemen, deshalb wird sie bei der Berechnung auch vernachlässigt.

Abschließend lässt sich sagen, dass der Versuch zur Bestimmung der Molwärme von Kupfer geeignet ist und sollte jedoch verstärkt darauf geachtet werden, dass das Gehäuse und die Probe etwa dieselbe Temperatur haben, damit es nicht zu größeren Abweichungen kommt.

## Literatur

- [1] Chemie.de. *AvogadroKonstante*. 2018. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Avogadro-Konstante.html> (besucht am 01.12.2018).
- [2] Chemie.de. *Debye-Modell*. 2018. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Debye-Modell.html> (besucht am 01.12.2018).
- [3] Chemie.de. *Kupfer*. 2018. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Kupfer.html> (besucht am 30.11.2018).
- [4] Goodfellow. *Kupfer - Materialinformationen*. 2018. URL: <http://www.goodfellow.com/G/Kupfer.html> (besucht am 30.11.2018).



- [5] Siegfried Leffel. *Thermische Eigenschaften von Werkstoffen*. 2018. URL: <https://slideplayer.org/slide/209739/> (besucht am 02.12.2018).
- [6] TU Dortmund: Physikalisches Praktikum. *Versuch 47: Temperaturabhängigkeit der Molwärme von Festkörpern*. 2018. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/FP/SKRIPT/V47.pdf> (besucht am 30.11.2018).
- [7] Chemnitzer Schulmodell. *Dichte fester Stoffe*. 2018. URL: <https://www.schulmodell.eu/index.php/physik/503-dichte-fester-stoffe.html> (besucht am 30.11.2018).
- [8] Spektrum.de. *Lexikon der Physik: Boltzmann-Konstante*. 2018. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/boltzmann-konstante/1844> (besucht am 01.12.2018).