Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MOQ-13:
Probabilidade e Estatística

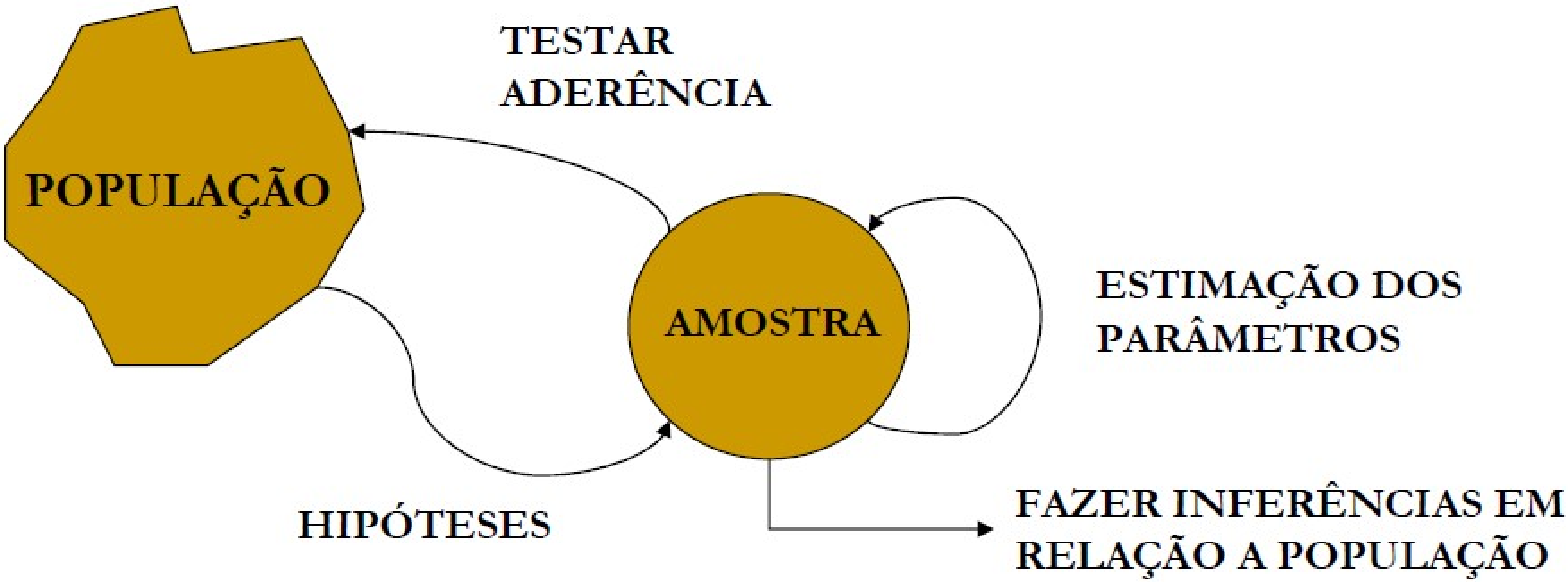
Prof. Mauri Aparecido de Oliveira

mauri@ita.br

2019

Testes de Hipóteses

O Processo de Inferência



- Hipóteses: - iid ⇒ Amostra aleatória

  - Distribuições populacional e amostral (TLC)

  - Parâmetros conhecidos ou não (σ)

Teste de Hipóteses: Princípios

- O teste de hipóteses é utilizado quando objetiva-se decidir qual de duas alegações contraditórias, sobre o valor de um parâmetro, está correta.
- Hipótese estatística (hipótese) é uma afirmação sobre os valores de parâmetros ou sobre a forma de uma distribuição de probabilidade.
- Em um teste de hipóteses há sempre 2 hipóteses contraditórias sendo consideradas.
    - Ex: Tempo médio de atendimento = 300h ou ≠ 300h

      Fatia de mercado ≥ 15% ou < 15%.

OBJETIVO: DEFINIR, A PARTIR DAS INFORMAÇÕES AMOSTRAIS, QUAL DAS DUAS ESTÁ CORRETA.

Teste de Hipóteses: Princípios

- Def: Hipótese nula (H_0) é a afirmação assumida inicialmente como verdadeira e Hipótese alternativa (H_A) é a afirmação que contradiz H_0.
- Como H_0 é considerada verdadeira, se não houver alguma evidência forte na amostra que a contradiga, as duas conclusões possíveis são: Rejeitar H_0 ou Não Rejeitar H_0.
- Em síntese: utilizaremos dados amostrais para decidir se H_0 deve ou não ser rejeitada.

Teste de Hipóteses: Procedimento

- Se θ representar o parâmetro de interesse:

i. Definir as hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_A : \theta \neq \theta_0 \qquad\quad H_A : \theta < \theta_0 \qquad\quad H_A : \theta > \theta_0$$

ii. Cálculo da estatística do teste;

iii. Verificar as regiões de rejeição (valores para os quais H_o será rejeitada);

iv. Tomar a decisão (rejeitar ou não H_0).

Assim, a hipótese nula será rejeitada se, e somente se, o valor da estatística do teste cair na região de rejeição.

Teste de Hipóteses: Média

- Os conceitos básicos do teste de hipóteses são introduzidos mais facilmente enfocando primeiro uma situação simples (CASO A):
  - O parâmetro de interesse é a média populacional (μ)
  - A distribuição da população é normal
  - O valor do desvio-padrão (σ) é conhecido.
- Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com $E[x] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$. Neste caso, independentemente do tamanho da amostra (n):

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu \\ \sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

Teste de Hipóteses: CASO A

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z(0,1) \longrightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

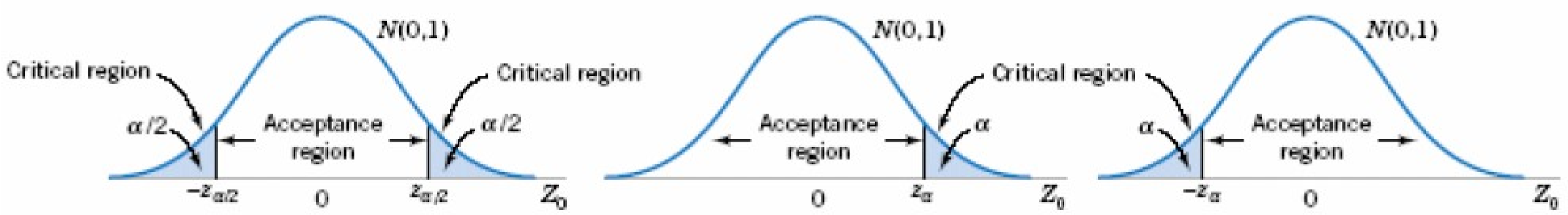
$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu \neq \mu_0$

ou

$H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

ou

$H_0: \mu \geq \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$



SIGNIFICÂNCIA	$Z_{\alpha/2}$	Z_{α}
10%	1,645	1,285
5%	1,96	1,645
1%	2,575	2,328

Teste de Hipóteses: CASO A

Embora a suposição de que o valor do σ seja conhecido, raramente isso acontece na prática, este caso fornece um bom ponto de partida devido à facilidade com que os procedimentos gerais e suas propriedades podem ser desenvolvidos.

As hipóteses nulas em todos os três casos indicarão que o μ possui um valor numérico particular, que denotaremos por μ_0.

De uma população normal com variância 36, toma-se uma amostra aleatória de tamanho 16, obtendo-se $\overline{x} = 43$. Ao nível de 10%, testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 45 \\ H_a : \mu \neq 45 \end{cases}$$

Temos $\alpha = 10\%$, $n = 16$ e $\overline{x} = 43$. Como o teste é realizado para média de populações normais com variâncias conhecidas, usaremos a variável $Z : N(0,1)$ como critério. Assim temos que

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_{\overline{x}}},$$

sendo

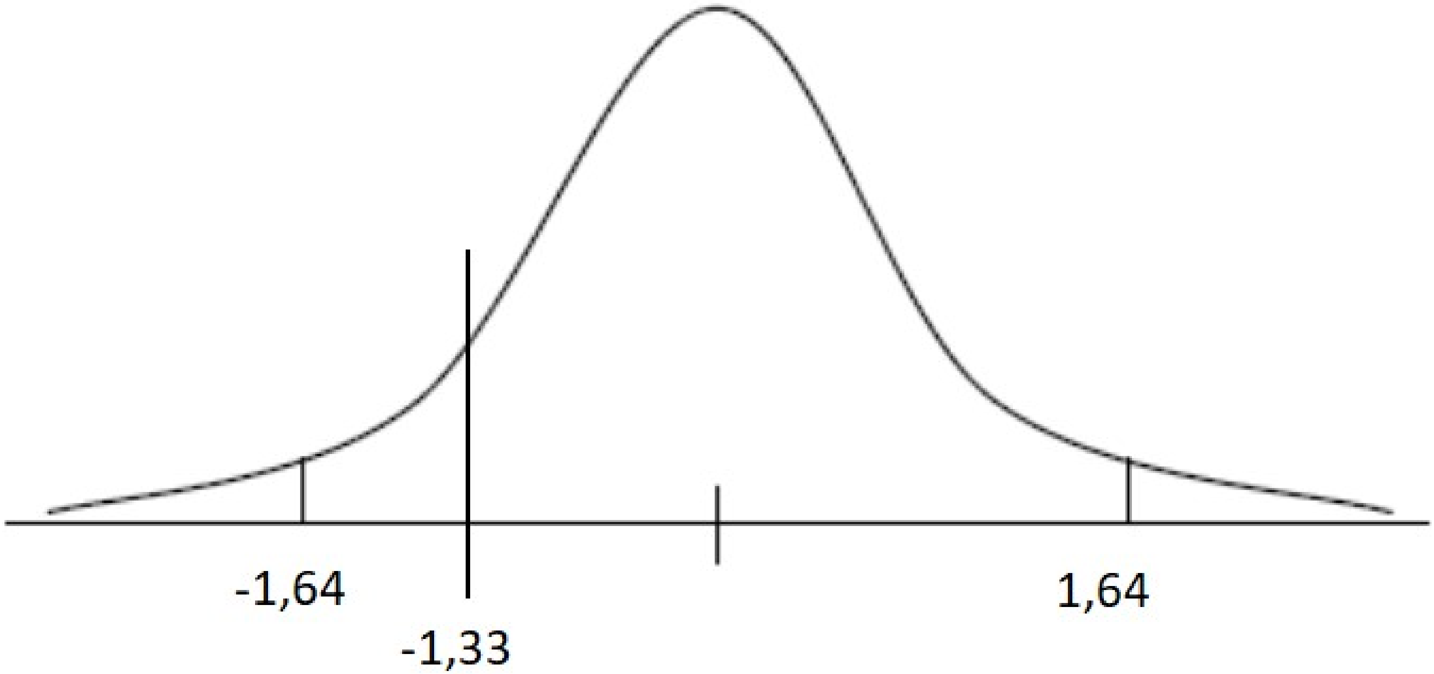
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{16}} = 1,5,$$

produz

$$Z = \frac{43 - 45}{1,5},$$

$$Z = -1,33.$$

Como o teste é bilateral e $\alpha = 10\%$, a região de não rejeição é dada por $P(-1,64 < Z < 1,64)$.



Logo a decisão é não rejeitarmos H_0.

Teste de Hipóteses: Média

- **Teorema Limite Central :** Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição qualquer com média μ e com variância σ^2. Se n é suficientemente grande, então:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu \\ \sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

$$To \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Obs: qto. maior for o valor de n, melhor será a aproximação (n>30)

→ **CASO B :** Se σ^2 não é conhecido e n é grande

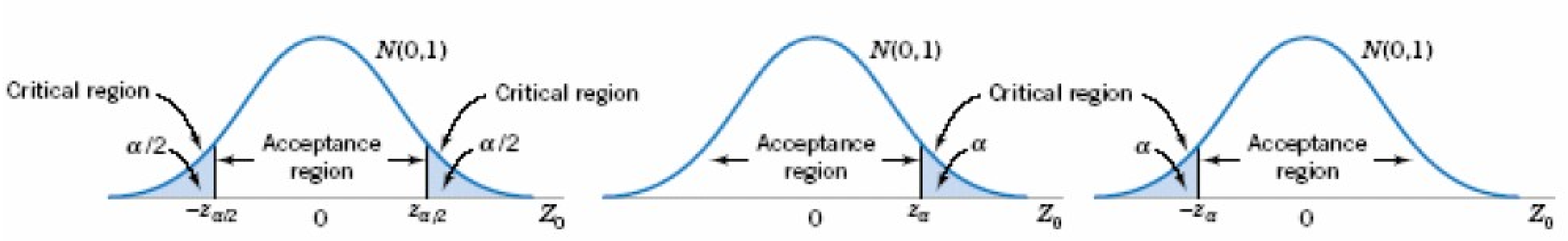
→ **CASO C:** Se σ^2 não é conhecido e n é pequeno

Teste de Hipóteses: CASO B

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim Z \longrightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

$H_0: \mu = \mu_0$ ou $H_0: \mu \leq \mu_0$ ou $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$



SIGNIFICÂNCIA	$Z_{\alpha/2}$	Z_{α}
10%	1,645	1,285
5%	1,96	1,645
1%	2,575	2,328

Quando o tamanho da amostra é grande, os testes *z* do **Caso A** são facilmente modificados para produzir procedimentos de teste válidos sem exigir uma distribuição de população normal ou um σ conhecido.

O resultado chave foi usado para justificar intervalos de confiança de amostras grandes. Um *n* grande implica que a variável padronizada

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tem aproximadamente uma distribuição normal padrão.

A substituição do valor μ_0 no lugar de μ produz a estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

que tem aproximadamente uma distribuição normal padrão quando H_0 é verdadeira.

O uso de regiões de rejeição dadas anteriormente para o **Caso A** resulta em procedimentos de teste para os quais o nível de significância é aproximadamente (em vez de exatamente) α.

A regra geral $n>30$ será usada novamente para caracterizar um tamanho de amostra grande.

Teste de Hipóteses: CASO B

- Exemplo: um fabricante de pneus afirma que o tempo médio de vida de seu produto é de 40.000 km. Uma amostra de n=64 pneus foram testados obtendo-se um tempo médio de vida de 38.000 km com desvio-padrão de 16.000 km. Esses dados contradizem a afirmação do fabricante (significância de 1%)?
- Passos: 1. Definir H_o e H_1

  2. Fixar α

  3. Determinar as regiões de rejeição

  4. Calcular a estatística do teste

  5. Conclusão

Teste de Hipóteses: CASO C

- **Quando n é pequeno e a distribuição é aproximadamente Normal**

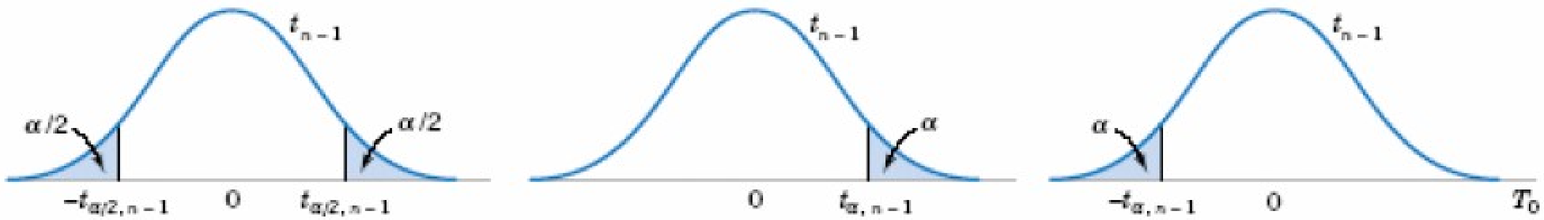
$$\bar{x} \sim t\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right) \longrightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$,se distribui conforme uma t com k = n-1 g.l.

The One-Sample t-Test

Null hypothesis: $H_0: \mu = \mu_0$

Test statistic: $T_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Alternative hypothesis	Rejection criteria
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
$H_1: \mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
$H_1: \mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$



Quando *n* é pequeno, o Teorema Limite Central não pode ser invocado para justificar o uso de um teste de amostra grande.

Enfrentamos essa mesma dificuldade na obtenção de um intervalo de confiança de amostra pequena para μ.

Nossa abordagem aqui será a mesma usada lá:

- Assumiremos que a distribuição da população é pelo menos aproximadamente normal e descrevemos os procedimentos de teste cuja validade se baseia nessa suposição.

Teste de Hipóteses: CASO C

t Distribution

	α					
Degrees of freedom	.005 (one tail) .01 (two tails)	.01 (one tail) .02 (two tails)	.025 (one tail) .05 (two tails)	.05 (one tail) .10 (two tails)	.10 (one tail) .20 (two tails)	.25 (one tail) .50 (two tails)
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	.683
Large (z)	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	.675

Exemplo

O glicerol é o principal subproduto da fermentação do etanol na produção de vinhos e contribui com a doçura, consistência e plenitude dos vinhos. O artigo " *A rapid and simple method for simultaneous determination of glycerol, fructose, and glucose in wine*" (American J. of Enology and Viticulture, 2007: 279-283) inclui as seguintes observações sobre a concentração de glicerol (mg/ml) para amostras de vinhos brancos de qualidade padrão (não certificados): 2,67, 4,62, 4,14, 3,81, 3,83. Suponhamos que o valor da concentração desejada seja 4. Os dados amostrais sugerem que a concentração média real é diferente do valor desejado? A ilustração do gráfico normal de probabilidade do Minitab fornece forte sustentação para presumir que a distribuição populacional da concentração de glicerol seja normal. Vamos realizar um teste com as hipóteses adequadas usando um teste t de uma amostra com nível de significância 0,05.

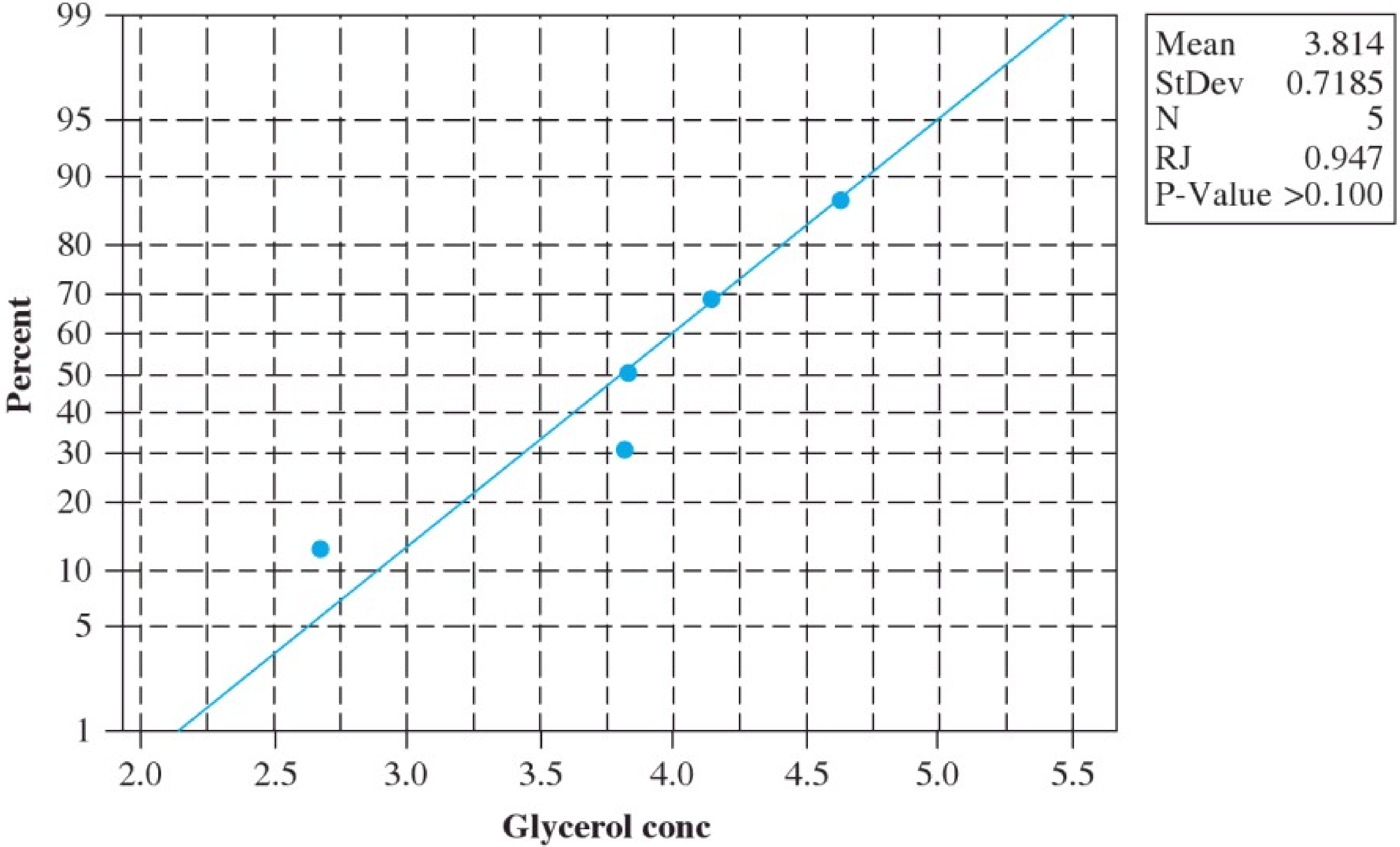


Figure 8.4 Normal probability plot for the data of Example 8.9

```
> glicerol <- c(2.67, 4.62, 4.14, 3.81, 3.83)
> shapiro.test(glicerol)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  glicerol
W = 0.91652, p-value = 0.5077
```

1. μ = concentração média real de glicerol.

2. H_o: μ = 4.

3. H_o: μ ≠ 4.

4. $t = \frac{\bar{x}-4}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

5. A desigualdade em H_o implica dizer que um teste bilateral é adequado, que necessita de $t_{\alpha/2;n-1} = t_{0,025;4} = 2{,}776$. Assim, H_o será rejeitada se t ≥ 2,776 ou t ≤ -2,776.

6. $\sum x_i = 19{,}07$ e $\sum x_i^2 = 74{,}7979$, a partir do qual $\bar{x} = 3{,}814$, s = 0,718 e o erro padrão estimado da média é $s/\sqrt{n} = 0{,}321$. Então, o valor da estatística do teste é t = (3,814 – 4)/0,321 = – 0,58.

7. Claramente t = 0,58 não cai na região de rejeição para um nível de significância de 0,05. Ainda é plausível que μ = 4. O desvio da média amostral 3,814 de seu valor esperado 4 quando H_o é verdadeira pode ser atribuído à variabilidade da amostra, em vez de H_o ser falsa.

O resultado do Minitab, partindo de uma solicitação para realizar um teste t bilateral de uma amostra, apresenta valores idênticos aos que acabamos de calcular. O fato de que o último número do resultado, o "valor p", excede 0,05 (e qualquer outro nível de significância razoável) implica dizer que a hipótese nula não pode ser rejeitada. Isso será descrito em detalhes nas seções a seguir.

```
Test of mu = 4 vs not = 4
Variable     N   Mean   StDev  SE Mean  95% CI               T      P
glyc conc    5  3.814   0.718    0.321  (2.922, 4.706)   -0.58  0.594
```

```
> glicerol <- c(2.67, 4.62, 4.14, 3.81, 3.83)
> t.test(glicerol,mu = 4,alternative = "two.sided")

        One Sample t-test

data:  glicerol
t = -0.57886, df = 4, p-value = 0.5937
alternative hypothesis: true mean is not equal to 4
95 percent confidence interval:
 2.921875 4.706125
sample estimates:
mean of x
    3.814
```

Teste de Hipóteses: CASO C

- Exemplo: um fabricante de sprinklers afirma que a temperatura média de ativação de seu produto é de 130º F. Uma amostra de n=9 produtos foram testados obtendo-se uma temperatura média de ativação de 131,08º F com desvio-padrão de 1,5º F. Esses dados contradizem a afirmação do fabricante (significância de 5%)?

Erros de Decisão

Erros em Testes de Hipóteses

- Def: Um erro tipo I consiste em rejeitar H_o quando ela é verdadeira e P(erro tipo I) = α
- Def: Um erro tipo II consiste em não rejeitar H_o quando ela é falsa e P(erro tipo II) = β

Proposição: Suponha que um experimento e o tamanho da amostra sejam fixos. Então, reduzir o tamanho da região de rejeição para obter um valor menor de α resulta em um valor maior de β. Portanto, não há como tornar, simultâneamente, α e β menores.

Teste de Hipóteses: Erros Tipo I e II

		Estado Real da Natureza	
		H_o V	H_o F
Decisão	Rej. H_o	Erro Tipo I	Decisão Correta
	Não Rej. H_o	Decisão Correta	Erro Tipo II

Teste de Hipóteses: Poder do Teste

O Poder do Teste é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula H_o, dado que ela é falsa.

$$Poder = 1 - P\left(Erro\ Tipo\ II\right) = 1 - \beta$$

Suponha que coletamos uma amostra aleatória de 36 valores de uma população normalmente distribuída, onde σ = 21 mas μ é desconhecida. Vamos realizar o teste:

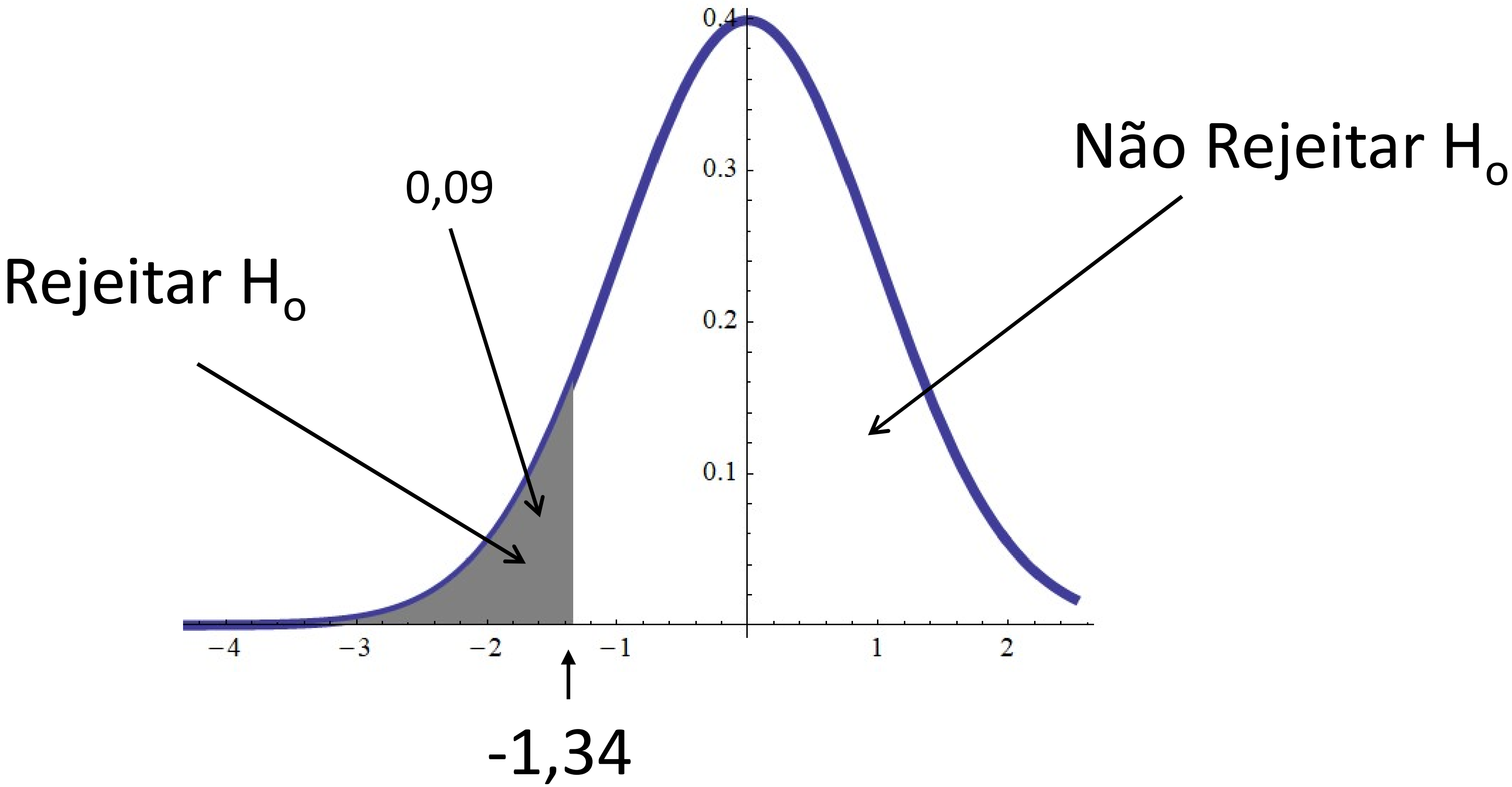
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_a : \mu < 50 \end{cases}$$

Com nível de significância α = 9%.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Para quais valores de Z rejeitaremos H_o ?

Para $H_0 : \mu = 50,\ H_a : \mu < 50$ e $\alpha = 0,09$ temos



NORMAL

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$\frac{1}{1*\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

1

$$\frac{1}{1*\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.34} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

Out[159]=

0.0901227

Para quais valores de $\bar{X}$ rejeitaremos H_o?

Sabendo que $H_0: \mu = 50,\ H_a: \mu < 50$ e

$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ com $\sigma = 21$ e $n = 36$ produz

$$\bar{X} = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$$

$$\bar{X} = 50 + \frac{21}{\sqrt{36}}(-1,34)$$

$$\bar{X} = 45,31$$

Dessa forma,

Rejeitamos H_0 se

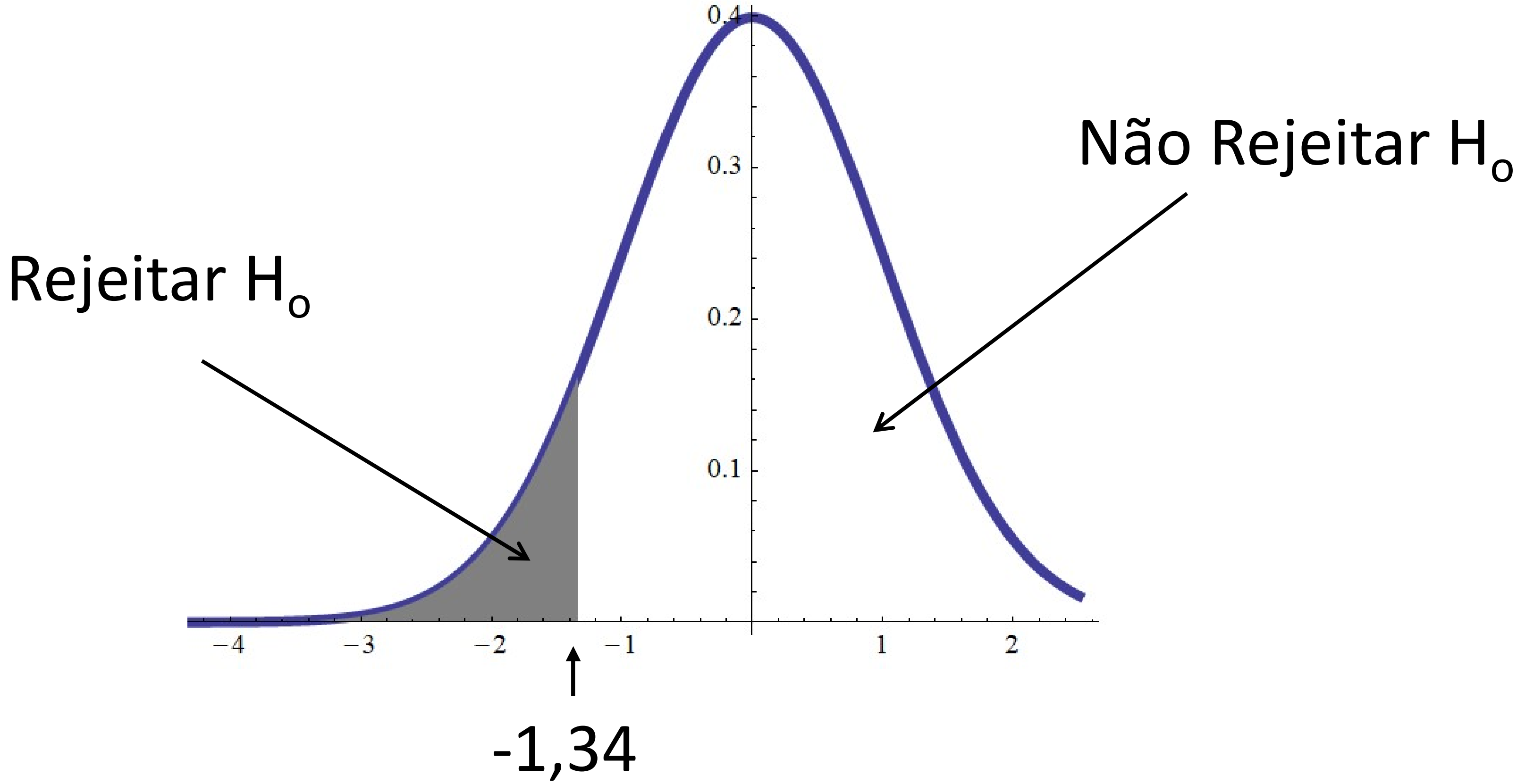
$$Z \leq -1{,}34$$

ou

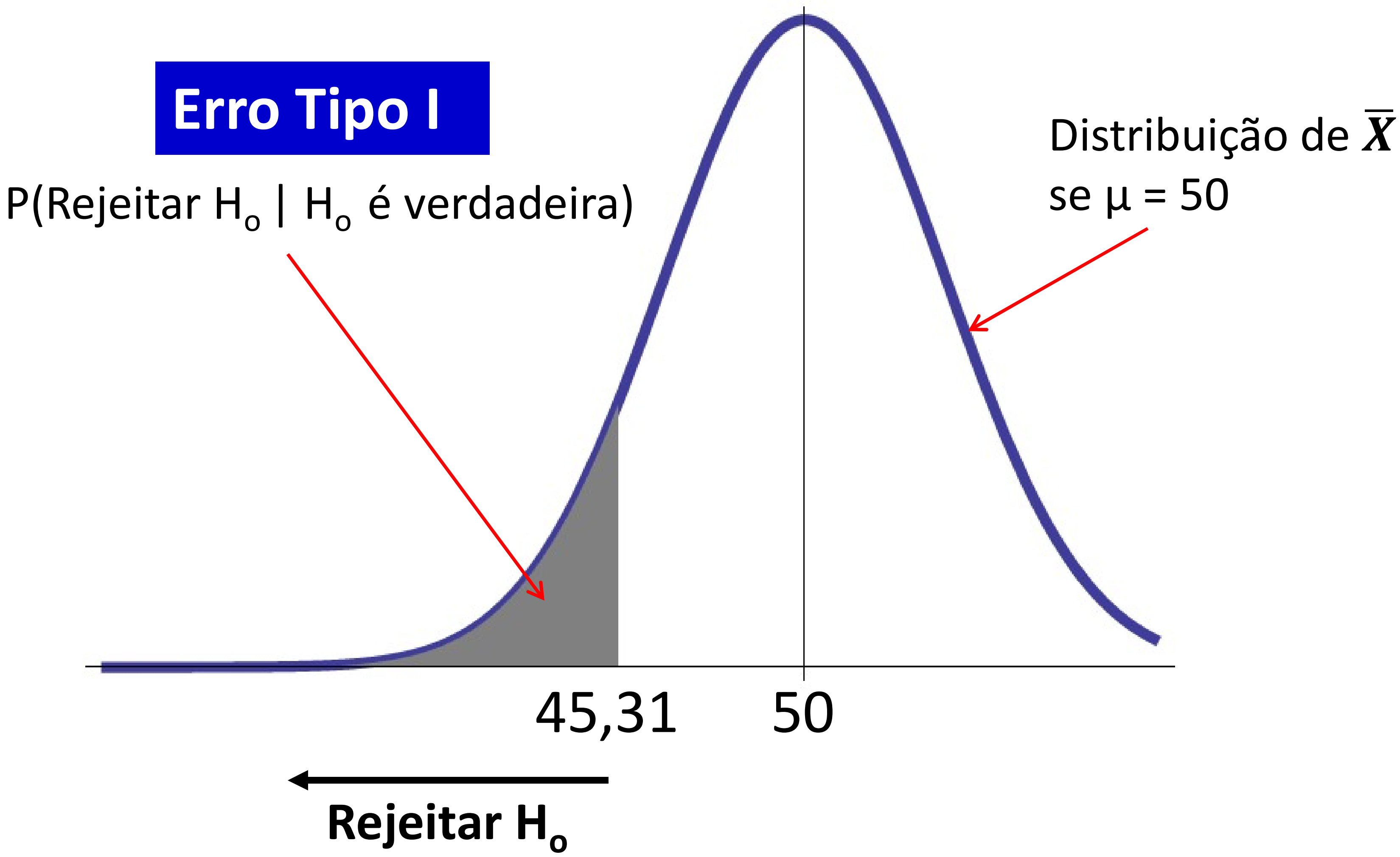
Rejeitamos H_0 se

$$\bar{X} \leq 45{,}31$$

Para quais valores de $\overline{X}$ rejeitaremos $\boldsymbol{H_o}$?



Para quais valores de $\bar{X}$ rejeitaremos H_o?



Posteriormente e por caminhos diferentes do teste, verificamos que H_o é falsa.

Não rejeitar H_o quando ela é falsa

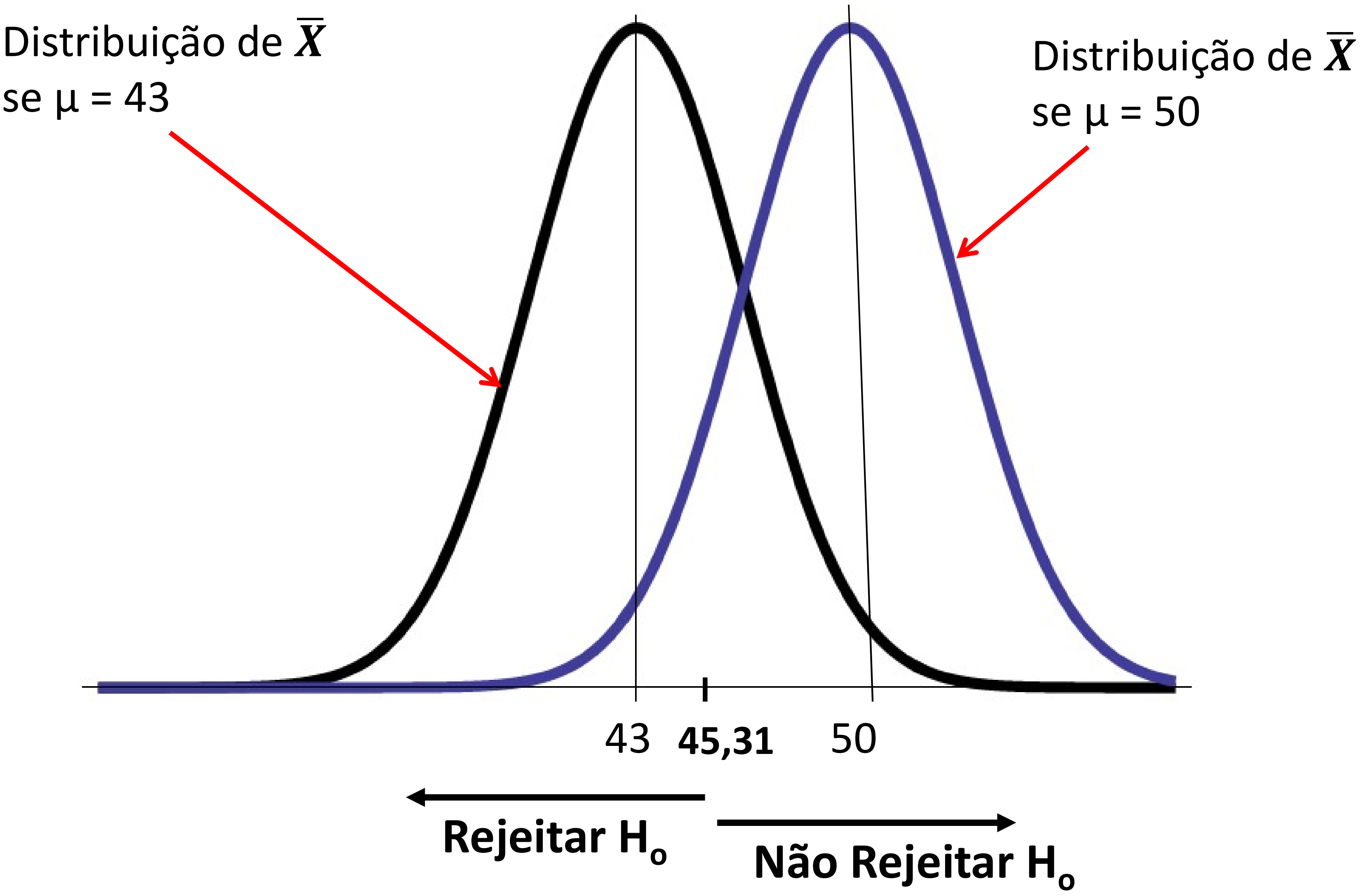
$$\text{Se } \mu = 43, \text{ qual é a } P\left(Erro\ Tipo\ II\right)?$$

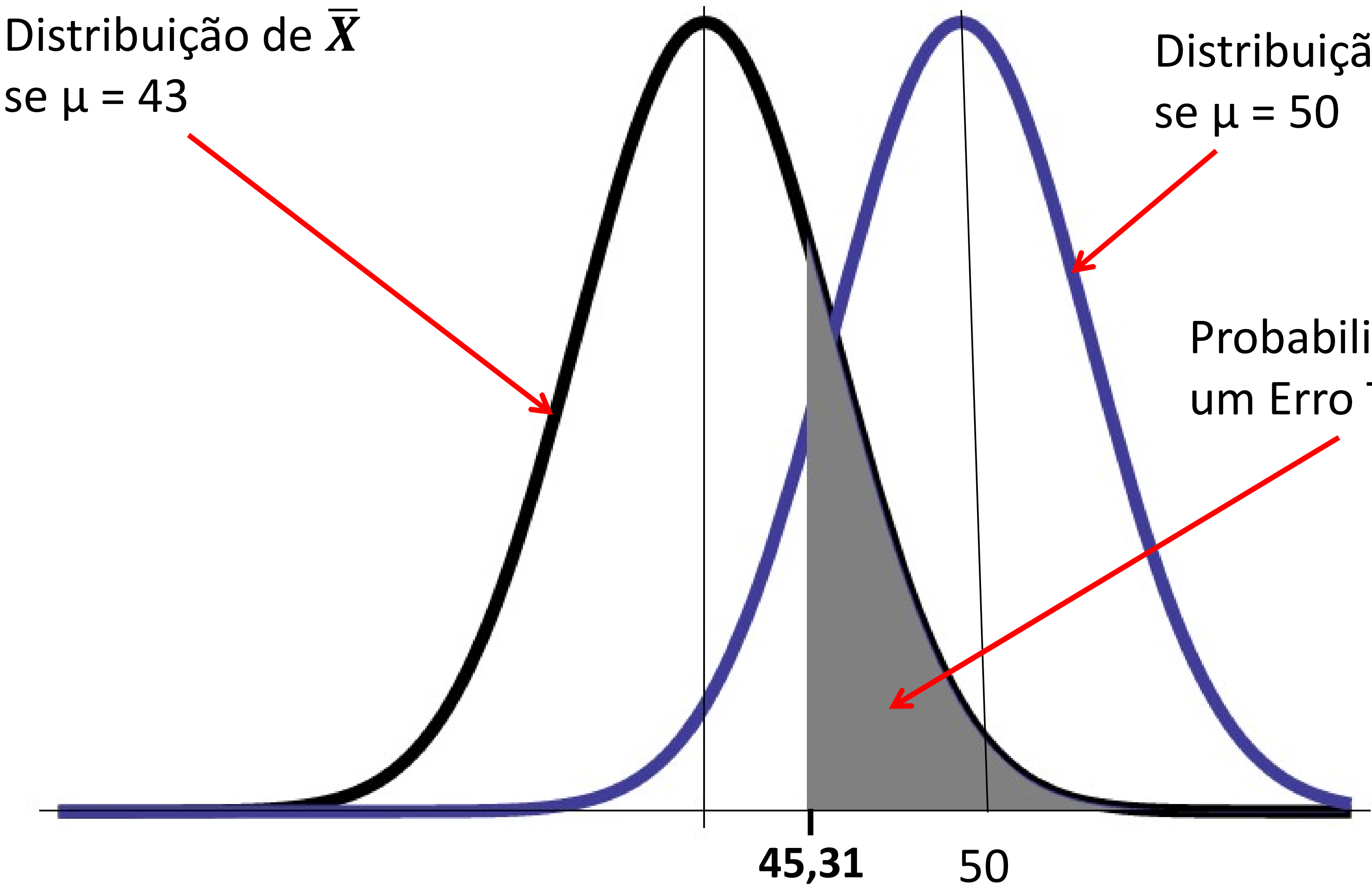
$$\text{Para } H_0 : \mu = 50, \ H_a : \mu < 50 \text{ temos}$$

Rejeitamos H_o se $\bar{X} \leq 45{,}31$

$$P\left(Não\ rejeitar\ H_0 \middle| \mu = 43\right) =$$

$$P\left(\bar{X} > 45{,}31 \middle| \mu = 43\right)$$


Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 43
Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 50
43
45,31
50
Rejeitar H_o
Não Rejeitar H_o


Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 43
Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 50
Probabilidade de
um Erro Tipo II
45,31
50

Dessa forma,

$$P\left(\bar{X} > 45{,}31 \middle| \mu = 43\right) =$$

$$P\left(Z > \frac{45{,}31 - 43}{\frac{21}{\sqrt{36}}}\right) = P\left(Z > 0{,}66\right) \cong 0{,}255 = \beta$$

Portanto, o Poder do Teste é dado por

$$Poder = 1 - 0{,}255 = 0{,}745$$

O Poder do Teste é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula H_o, dado que ela é falsa.

NORMAL

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$\frac{1}{1 * \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

1

In[209]:=

$$\frac{1}{1 * \sqrt{2\pi}} \int_{0.66}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

Out[209]=

0.254627

Probabilidade de rejeitar H_o, dado que H_o é falsa

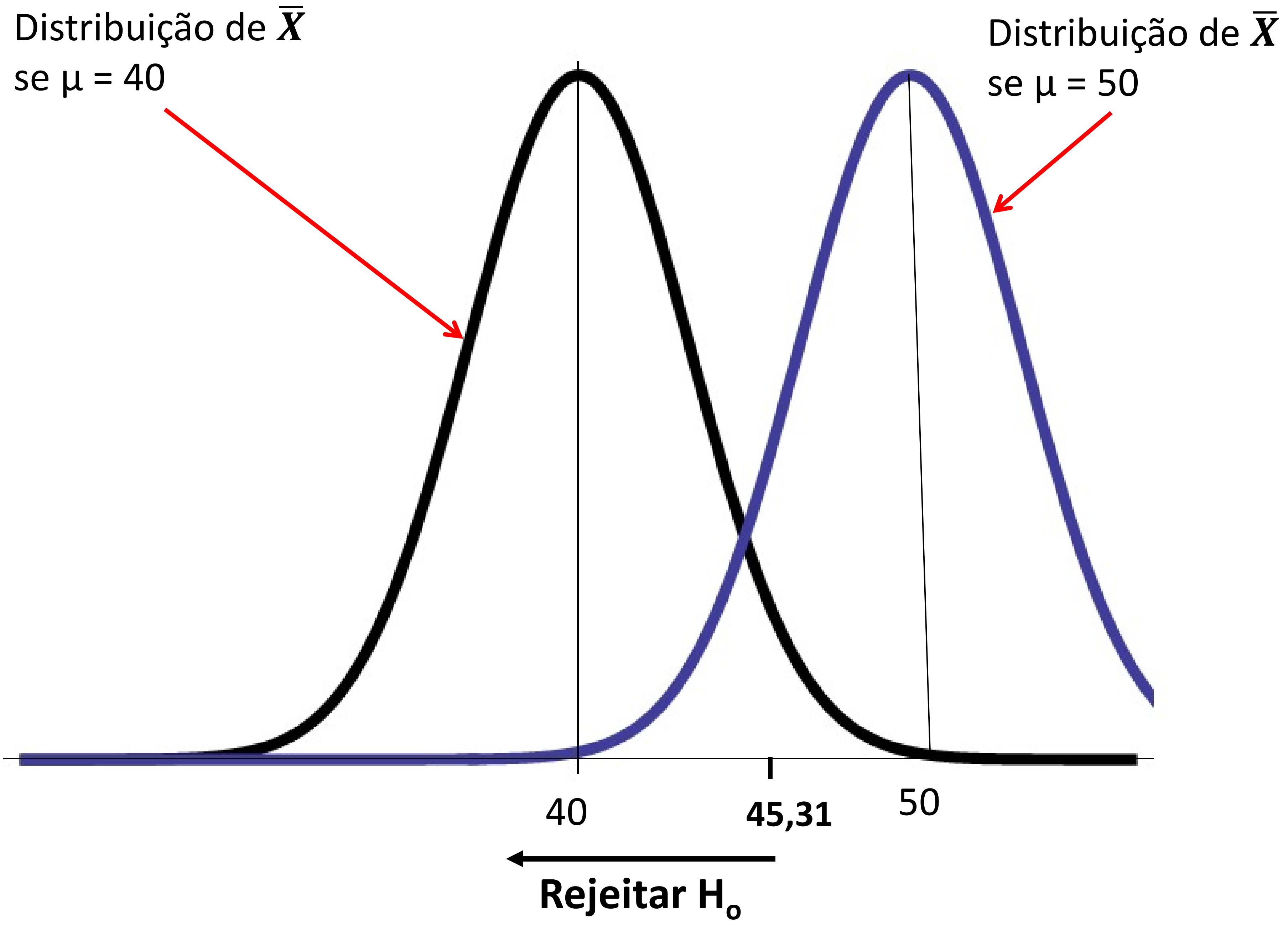
$$\text{Se } \mu = 40, \text{ qual é o poder do teste?}$$

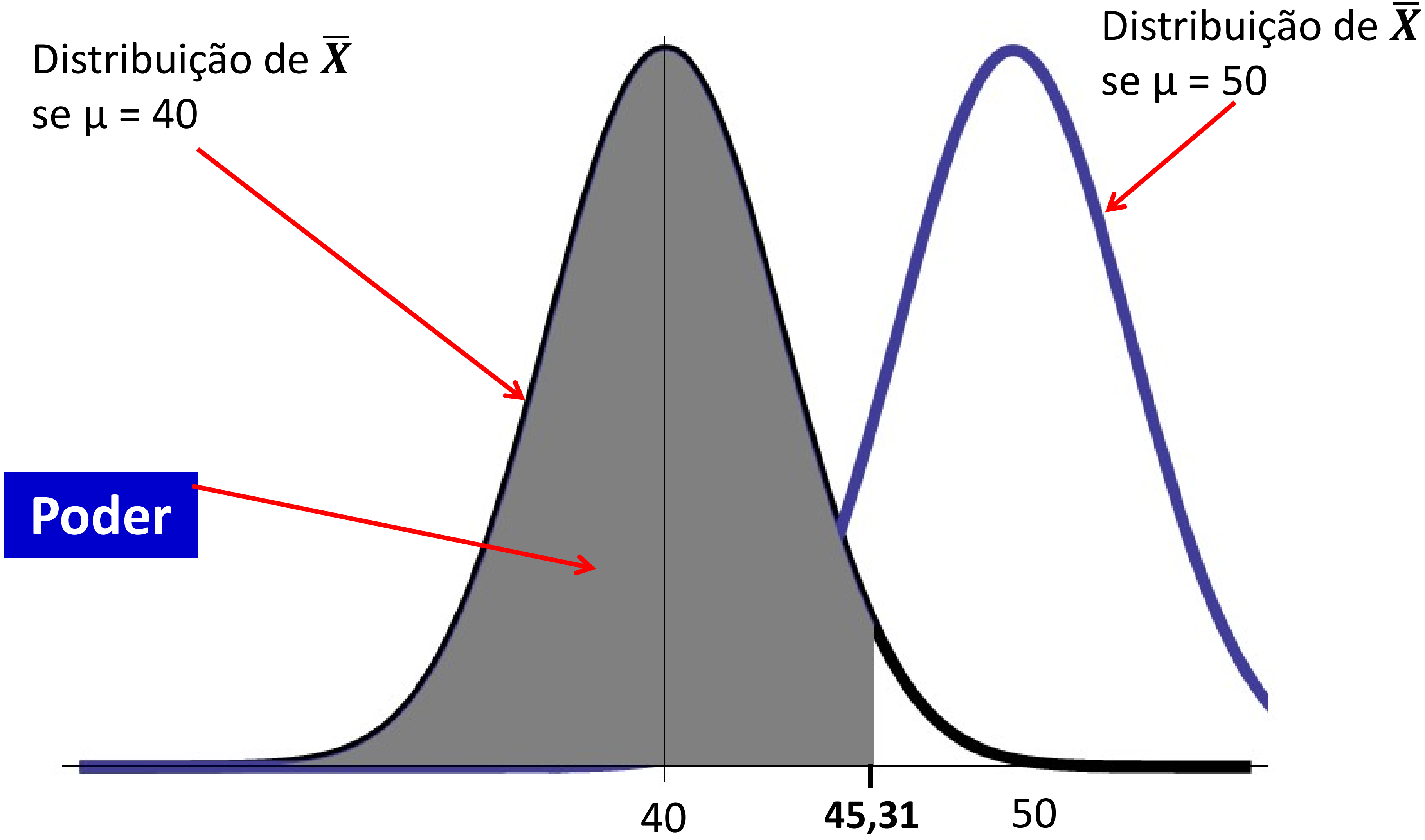
$$\text{Para } H_0 : \mu = 50, \ H_a : \mu < 50 \text{ temos}$$

Rejeitamos H_o se $\bar{X} \leq 45{,}31$

$$Poder = P\left(Rejeitar \ H_0 \middle| \mu = 40\right) =$$

$$P\left(\bar{X} \leq 45{,}31 \middle| \mu = 40\right)$$


Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 40
Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 50
40
45,31
50
Rejeitar H_o


Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 40
Distribuição de $\overline{X}$
se μ = 50
Poder
40
45,31
50

$$Poder = P\left(\bar{X} \leq 45,31 \middle| \mu = 40\right) =$$

$$P\left(Z \leq \frac{45,31 - 40}{\frac{21}{\sqrt{36}}} \right) = P\left(Z \leq 1,5171\right)$$

$$Poder = 0,935$$

NORMAL

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$\frac{1}{1*\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

1

In[218]:=

$$\frac{1}{1*\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.5171} \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2\right] dx$$

Out[218]=

0.935379

$$\beta = P\left(Erro\ Tipo\ II \right) =$$

$$P\left(\bar{X} > 45{,}31 \middle| \mu = 40 \right)$$

$$P\left(Z > \frac{45{,}31 - 40}{\frac{21}{\sqrt{36}}} \right) = P\left(Z > 1{,}5171 \right)$$

$$\beta = 0{,}065 = 6{,}5\%$$

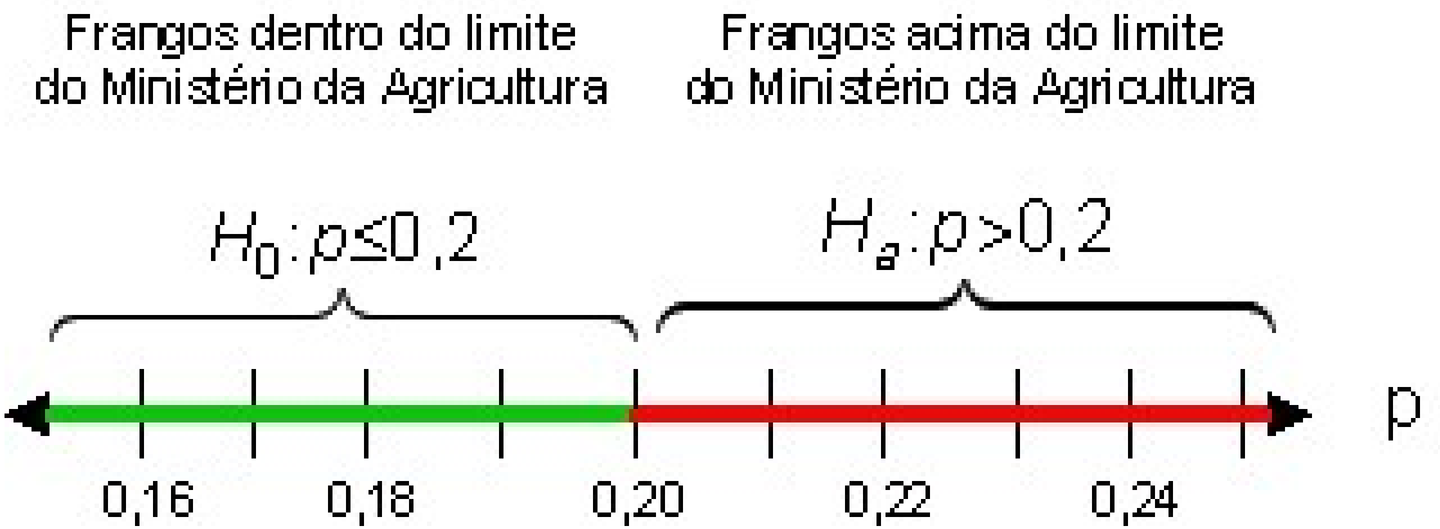
- Podemos reduzir β aumentando a região crítica

  ... pagando-se o preço de aumentar α
- Para um determiado tamanho de amostra *n* fixo, a probabilidade de um erro diminui com o aumento da probabilidade do outro erro.
- Só podemos diminuir a probabilidade de cometer os dois erros, aumentando o tamanho da amostra *n*.

Seja p a proporção de frangos contaminados. A granja alega que a proporção dos contaminados é "menor ou igual a 20%". Você pode então escrever as hipóteses nula e alternativa da seguinte maneira.

$H_0 : p \leq 0,2$ **(Alegação)** **A proporção é menor ou igual a 20%.**

$H_a : p > 0,2$ **A proporção é maior do que 20%.**



Um erro do Tipo I ocorrerá se a proporção real dos frangos contaminados for menor ou igual a 0,2, mas você decide rejeitar H_0.

Um erro Tipo II ocorrerá se a proporção real de frangos contaminados for maior do que 0,2, mas você não rejeita H_0.

Com um erro do Tipo I, pode-se criar um modelo de contaminação e baixar as vendas do frango, apesar de eles estarem dentro dos limites do Ministério da Agricultura.

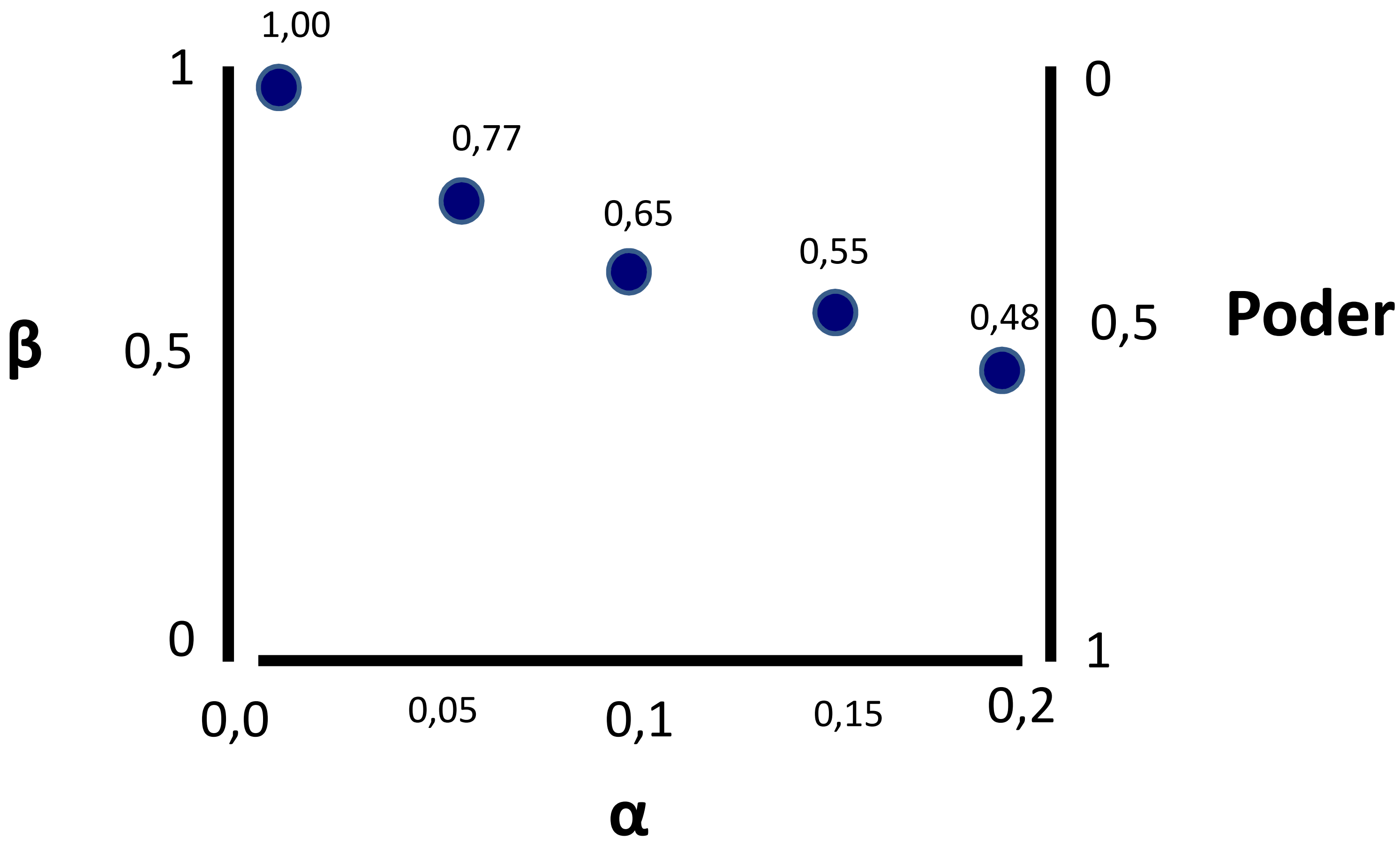
Com um erro do Tipo II, pode-se permitir que frangos que excederam os limites de contaminação do Ministério da Agricultura sejam vendidos aos consumidores.

Um erro Tipo II, portanto, pode resultar em doença e até mesmo morte.

Se escolhemos um valor muito pequeno de α, estamos tornando mais difícil rejeitar a hipótese nula H_o . Assim, os Erros Tipo II serão comuns.

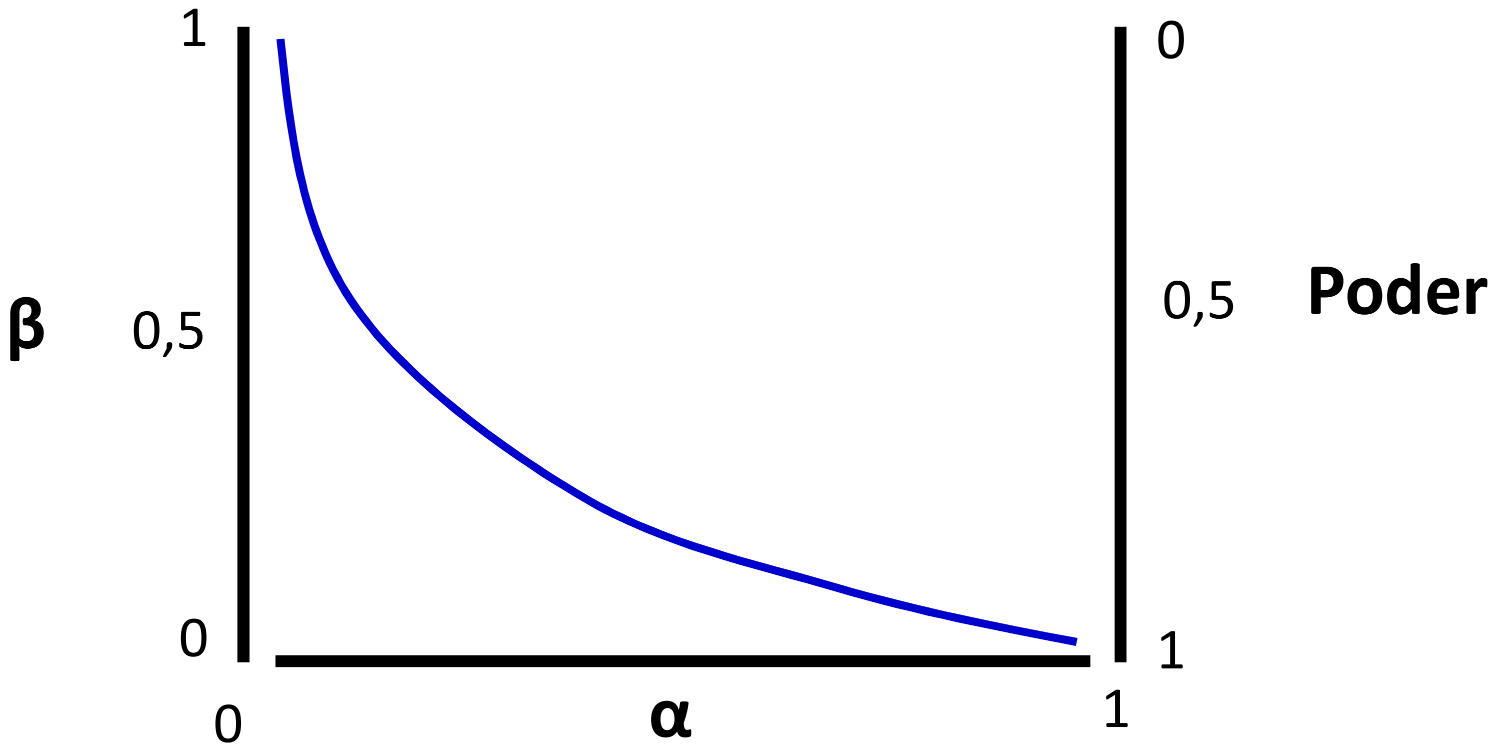
Se escolhemos um valor muito grande de α, os Erros Tipo II serão menos comuns.

Relacionamento entre α e β para um teste de $H_o: \mu=0$



$$\beta \text{ calculado para } H_a: \mu > 0,\ \mu = 1,\ \sigma = 5 \text{ e } n = 20$$

Relacionamento entre α e β para um teste de H_o =0:

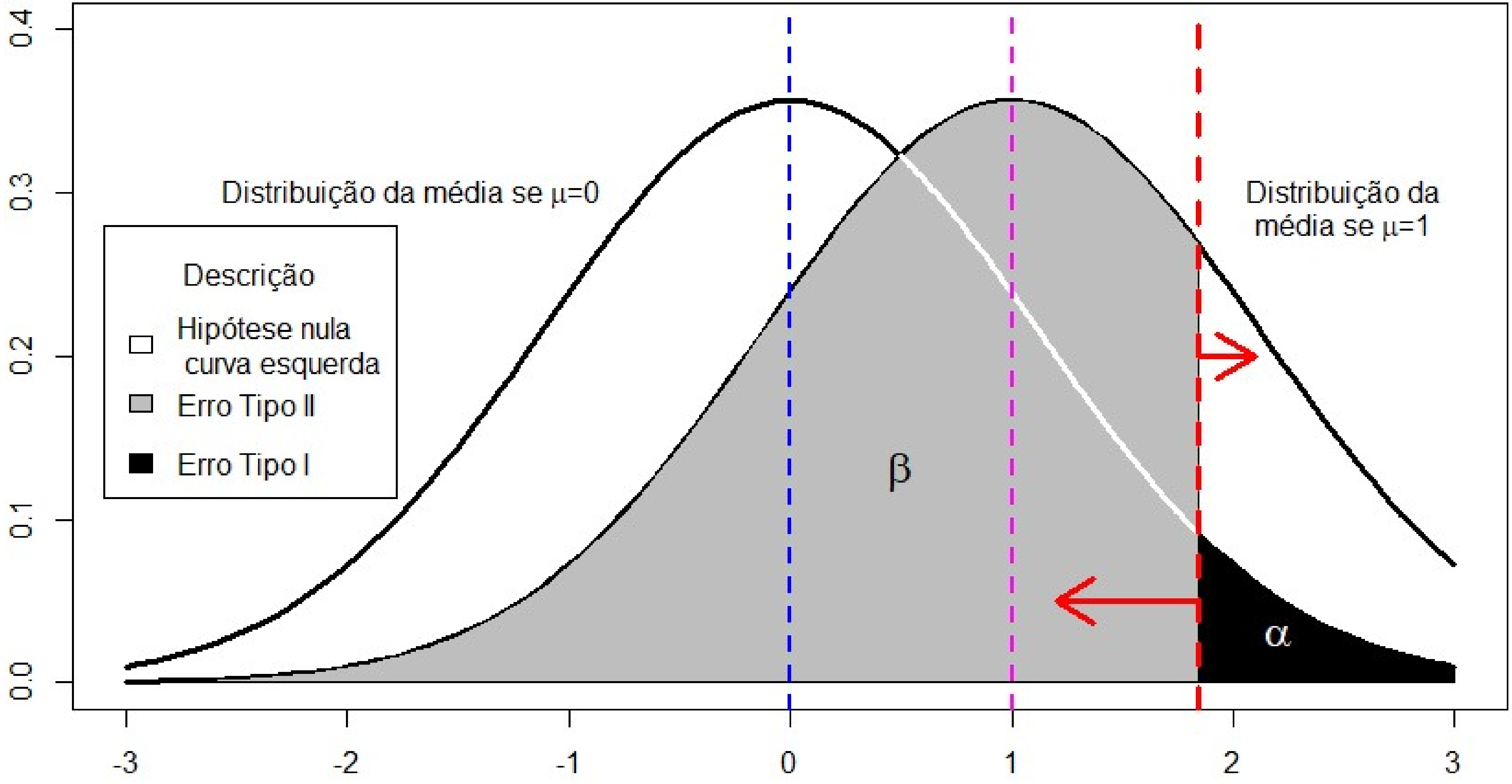


```
######################################## PONTO 0,77 ##########################################

dev.off(dev.list()["RStudioGD"])
rm(list=ls())
cat("\f")

mi1 <- 0;
sigma1 <- 5/(20^0.5)

mi2 <- 1;
sigma2 <- 5/(20^0.5)

alpha <- 0.05

# z <- (x.bar - mi)/(sigma/n^0.5)
# x.bar <- mi + (sigma/n^0.5)*z

x.bar <- qnorm(alpha, mi1, sigma1,lower.tail = FALSE)

# Plota a curva de média 0 e variância 5/(20^0.5)
phi1 <- function(x) (1/(sigma1*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi1)/sigma1)^2)
plot(phi1,-3,3, type="l", lwd=3,ylab = "",xlab = "",ylim=c(0,0.4))
polygon(x=c(x.bar,seq(x.bar,3,l=100),3), y=c(0,phi1(seq(x.bar,3,l=100)), 0), col="black")

# Plota a curva de média 1 e variância 5/(20^0.5)
phi2 <- function(x) (1/(sigma2*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi2)/sigma2)^2)
plot(phi2,-3,3, type="l", lwd=3,ylab = "",xlab = "", add=TRUE)
polygon(x=c(-3,seq(-3,x.bar,l=100),x.bar), y=c(0,phi2(seq(-3,x.bar,l=100)), 0), col="gray")
```

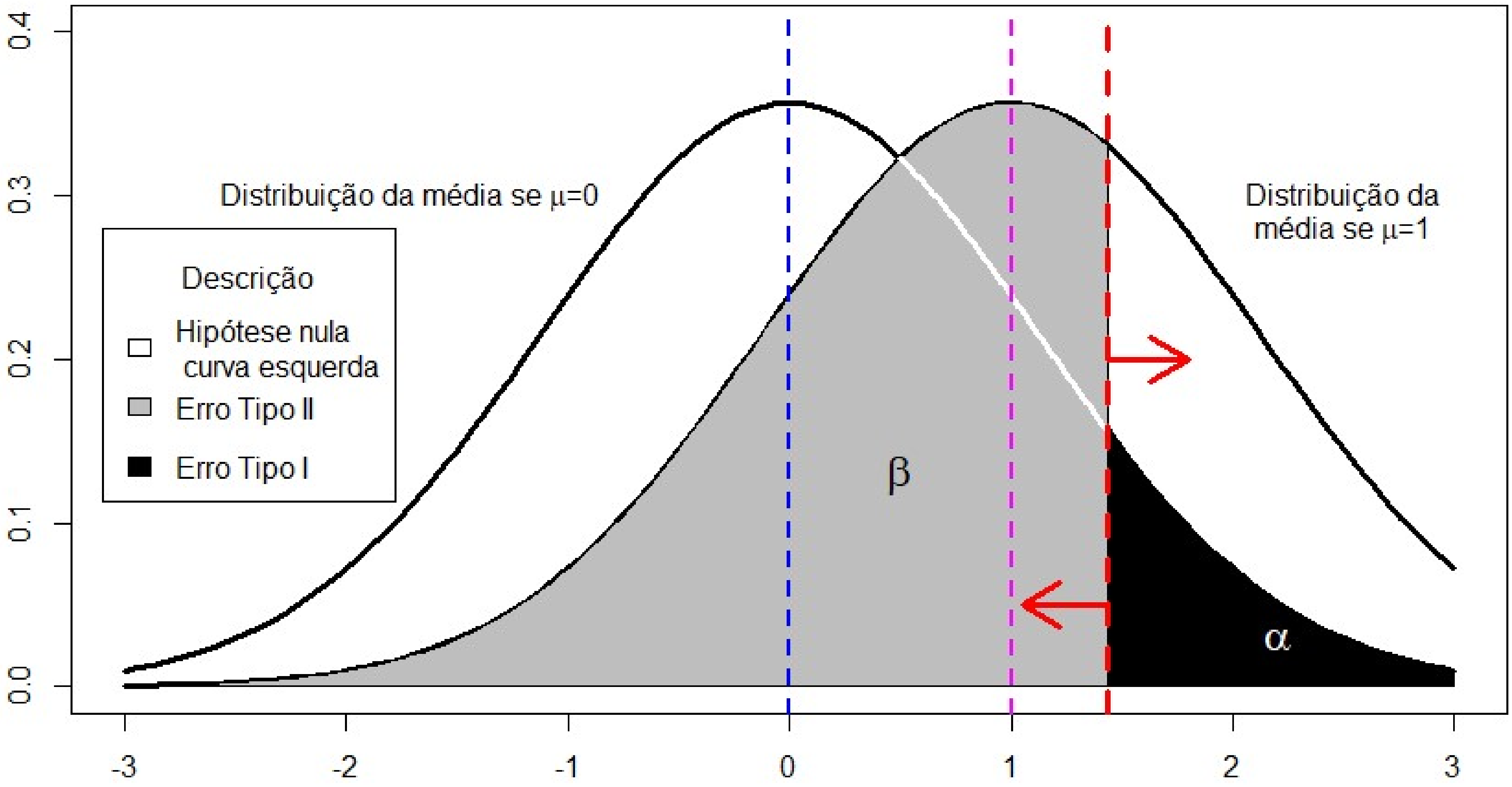
```
# Essa curva é somente para mostrar a linha de intersecção entre as duas distribuições
# na área sombreada
curve(dnorm(x,mean=mi1, sd=sigma1), xlim=c(0.5,x.bar),ylim=c(0,0.4),lwd=3, col="white",
      ylab = "",xlab = "",add=TRUE)

abline(v=c(mi1,x.bar,mi2), col=c("blue","red","magenta"), lty=c(2,2,2), lwd=c(2,3,2))

text(-1.7, 0.3, expression(paste("Distribuição da média se ", mu, "=0 ")))
text(2.5, 0.3, "Distribuição da")
text(2.5, 0.28, expression(paste("média se ", mu,"=1")))
text(0.5, 0.13, expression(beta), cex=1.5)
text(2.2, 0.03, expression(alpha),col="white", cex=1.5)

arrows(x.bar, 0.2, 2.1, 0.2, length = 0.25, angle = 30, code = 2,
       col = "red", lty = 1,lwd=3, xpd = FALSE)
arrows(x.bar, 0.05, 1.2, 0.05, length = 0.25, angle = 30, code = 2,
       col = "red", lty = 1, lwd=3,xpd = FALSE)

legend(-3.1,0.28, inset=.05, title="Descrição",
       c("Hipótese nula \n curva esquerda","Erro Tipo II", "Erro Tipo I"),
       fill=c("white", "gray", "black"),horiz=FALSE)
```

```
# Áreas envolvidas
# Na curva de média 0 e variância 5/(20^0.5)
pnorm(x.bar,0,5/(20^0.5),lower.tail = FALSE)    # Alpha
1-as.numeric(integrate(phi1,-Inf,x.bar)[[1]])   # Alpha
                                                # Observe que usamos 'as.numeric(...[[1]])' para ter um número
# Na curva de média 1 e variância 5/(20^0.5)
pnorm(x.bar,1,5/(20^0.5),lower.tail = TRUE)     # Beta
as.numeric(integrate(phi2,-Inf,x.bar)[[1]])     # Beta
```

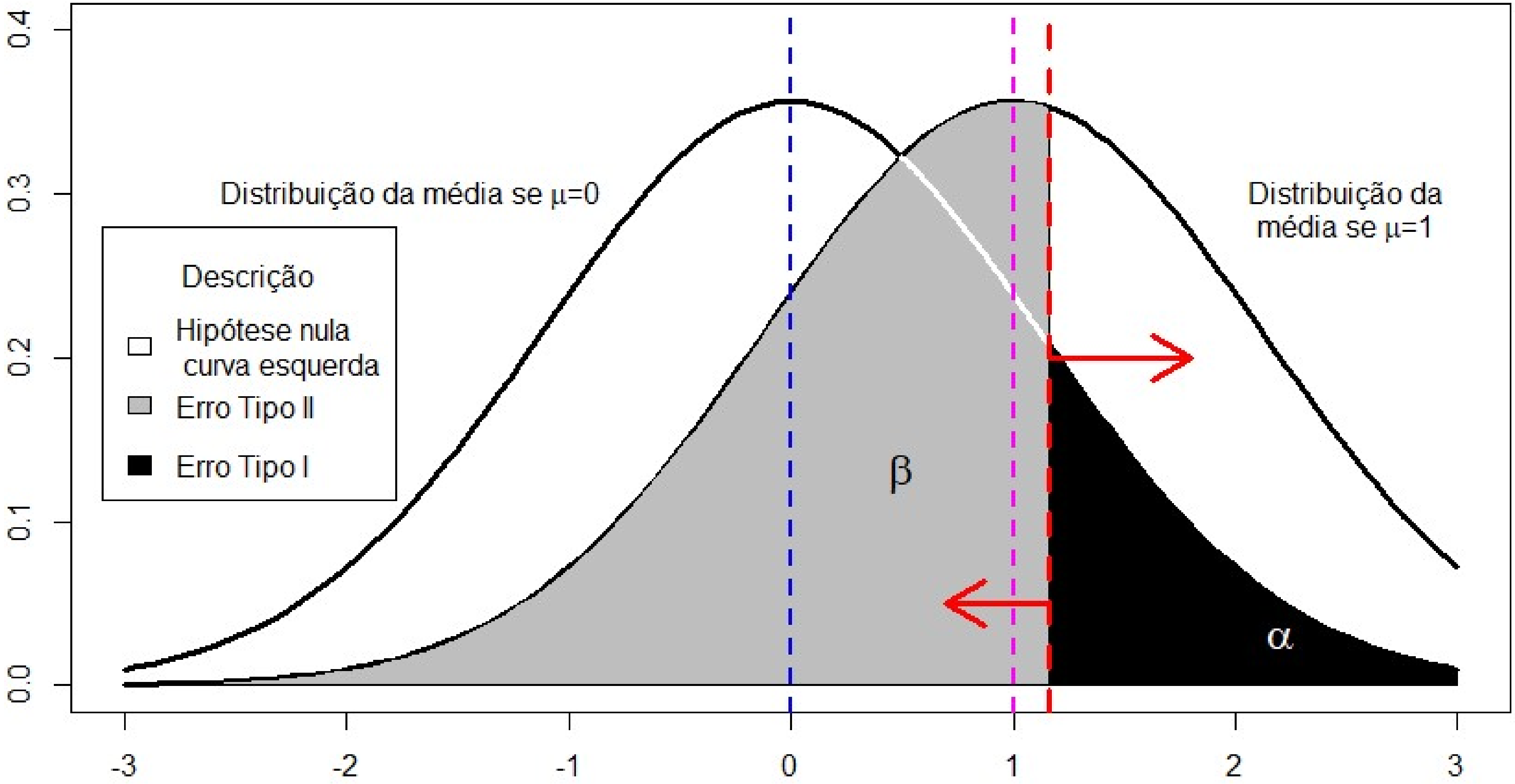
```
> # Áreas envolvidas
> # Na curva de média 0 e variância 5/(20^0.5)
> pnorm(x.bar,0,5/(20^0.5),lower.tail = FALSE)     # Alpha
[1] 0.05
> 1-as.numeric(integrate(phi1,-Inf,x.bar)[[1]])    # Alpha
[1] 0.05
>                                                  # Observe que usamos 'as.numeric(...[[1]])' para ter um número
> # Na curva de média 1 e variância 5/(20^0.5)
> pnorm(x.bar,1,5/(20^0.5),lower.tail = TRUE)      # Beta
[1] 0.773501
> as.numeric(integrate(phi2,-Inf,x.bar)[[1]])      # Beta
[1] 0.773501
```

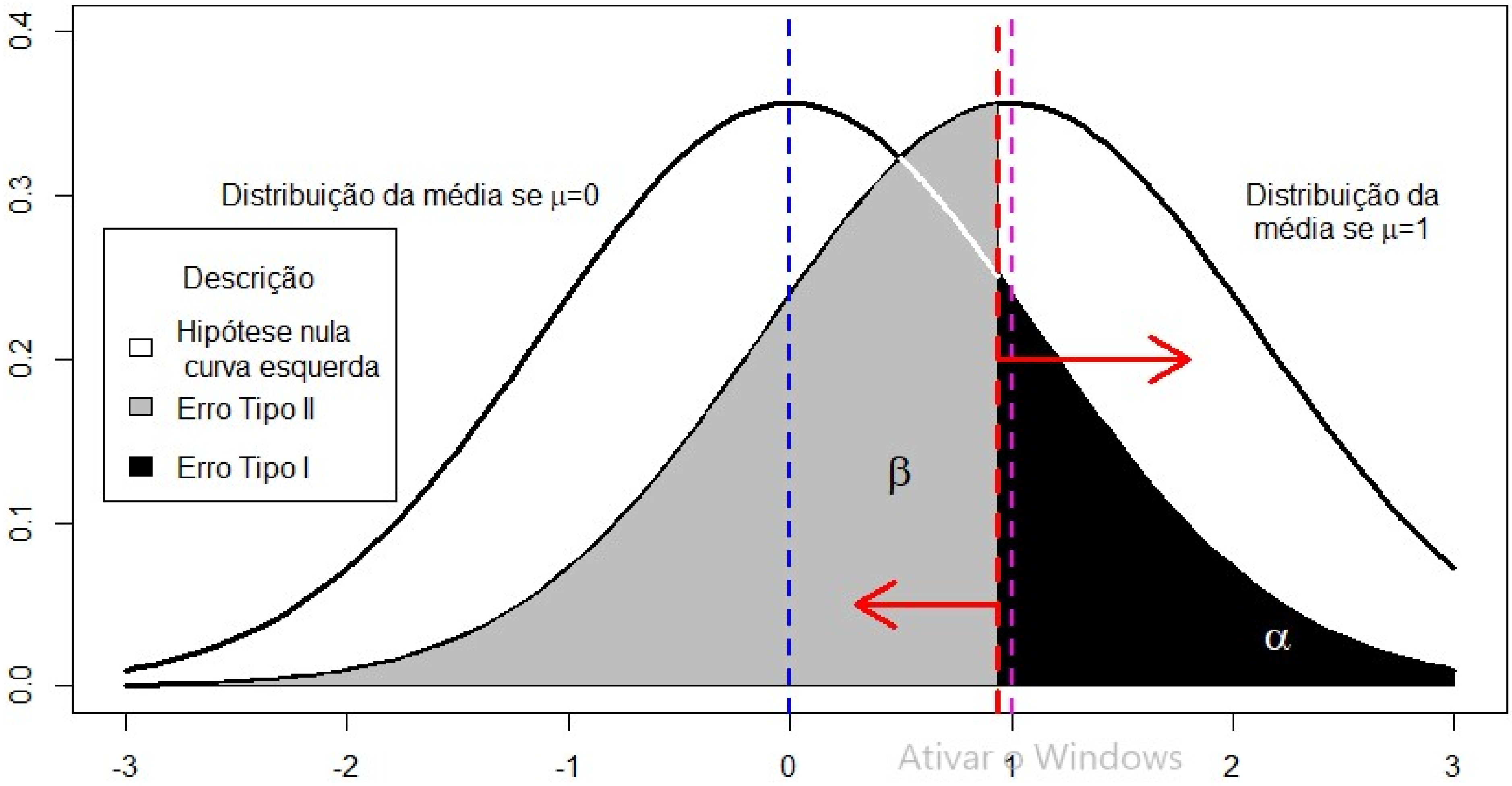


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Distribuição da média se μ=0
Distribuição da média se μ=1
Descrição
Hipótese nula curva esquerda
Erro Tipo II
Erro Tipo I
β
α
-3
-2
-1
0
1
2
3

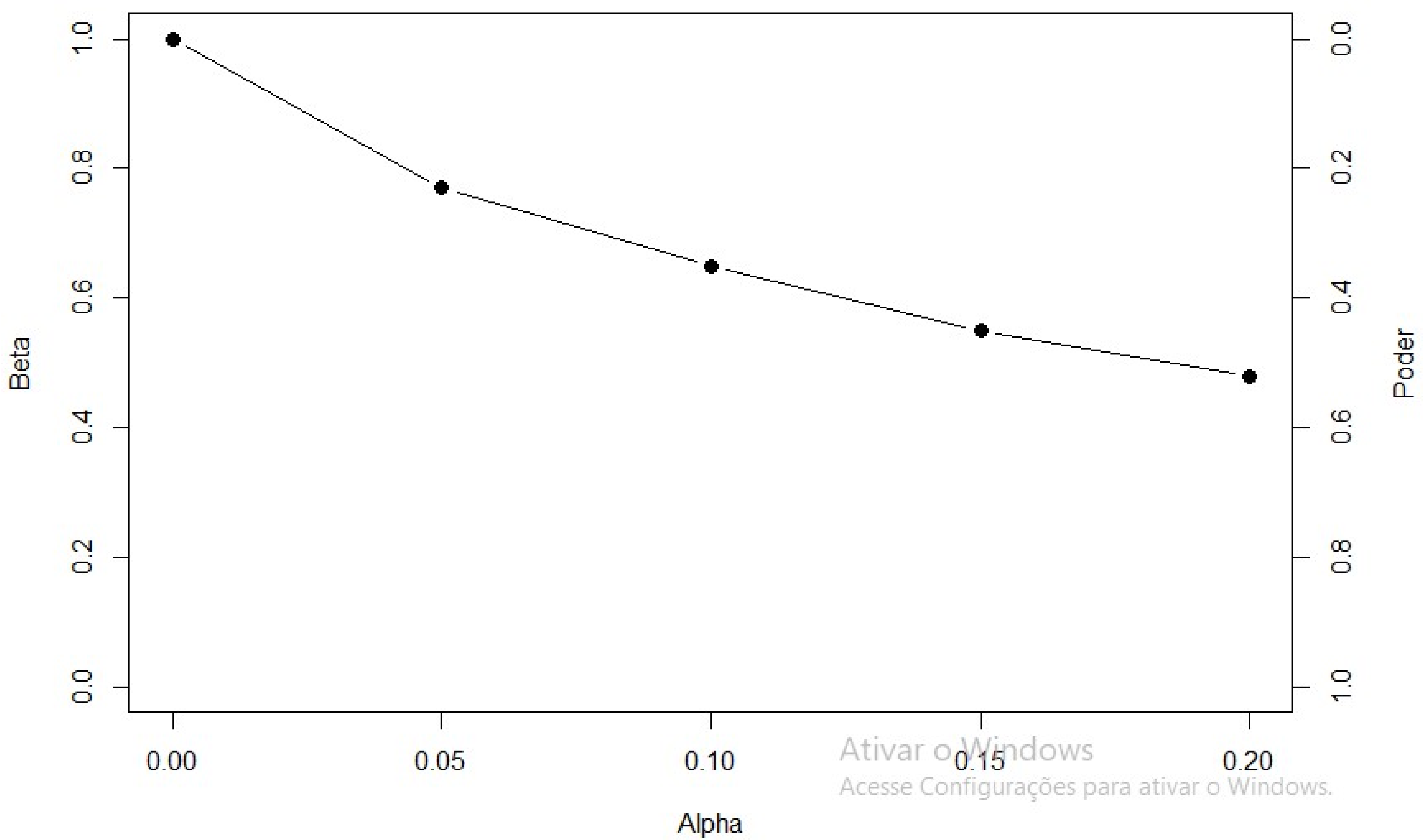


Distribuição da média se μ=0
Distribuição da média se μ=1
Descrição
Hipótese nula curva esquerda
Erro Tipo II
Erro Tipo I
β
α
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3


Distribuição da média se μ=0
Distribuição da média se μ=1
Descrição
Hipótese nula curva esquerda
Erro Tipo II
Erro Tipo I
β
α
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3



Distribuição da média se μ=0
Distribuição da média se μ=1
Descrição
Hipótese nula curva esquerda
Erro Tipo II
Erro Tipo I
β
α
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-3
-2
-1
0
1
2
3



Ativar o Windows
Acesse Configurações para ativar o Windows.

```
######################################## Gráfico ##########################################

dev.off(dev.list()["RStudioGD"])
rm(list=ls())
cat("\f")

dados = data.frame(Alpha = c(0.0,0.05,0.10,0.15,0.20),
                   Poder = c(0.00,0.23,0.35,0.45,0.52),   # Valores de Poder e Beta arredondados
                   Beta = c(1.00,0.77,0.65,0.55,0.48))

dados

par(mar = c(5,5,2,5))
with(dados, plot(Alpha, Beta, type="b", col="black",
             ylab="Beta",
             ylim=c(0,1)))

par(new = TRUE)
with(dados, plot(Alpha, Poder, pch=16, axes=F, xlab=NA, ylab=NA, cex=1.2,
                 ylim=c(1,0)))
axis(side = 4)
mtext(side = 4, line = 3, 'Poder')
```

Exemplo

Suponha que os dados abaixo são as horas de vida de uma amostra aleatória de lâmpadas. Supondo que o desvio padrão populacional seja de 120 horas, podemos rejeitar a afirmação de um fabricante de que as lâmpadas duram mais de 10.000 horas a um nível de significância de 0,05?

9899 9991 9933 9854
9808 9815 10024 10056
9850 9942 9923 9937
9861 9875 9868 9938
9822 9981 10097 9961
9934 10009 10115 9798
9958 9800 10007 9787
9721 9803

Calculamos o valor-p e verificamos se podemos rejeitar a hipótese nula de que $\mu = 10000$.

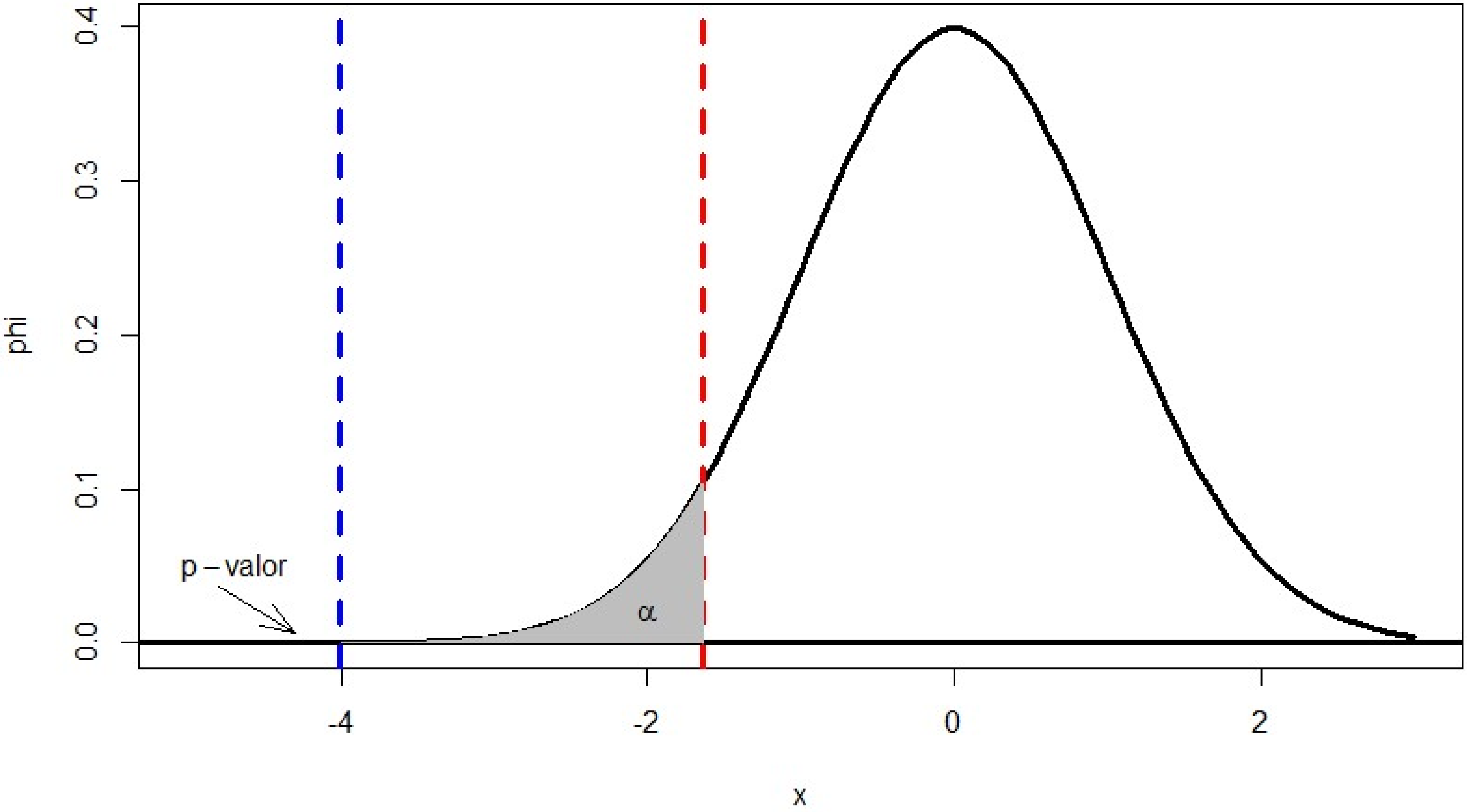
```
dev.off(dev.list()["RStudioGD"])
rm(list=ls())
cat("\f")

duracao <- c(9899,9991,9933,9854,9808,9815,10024,10056,9850,9942,9923,9937,9861,9875,9868,9938,
             9822,9981,10097,9961,9934,10009,10115,9798,9958,9800,10007,9787,9721,9803)

duracao.bar = mean(duracao) # Média Amostral
mi0 = 10000                 # Hipótese
sigma = 120                 # Desvio-padrão da População
n = length(duracao)         # Tamanho da Amostra
z = (duracao.bar-mi0)/(sigma/sqrt(n))
z
pval = pnorm(z)
pval
```

```
> pval
[1] 3.088019e-05
```

```
library(TeachingDemos)

teste <- z.test(duracao, mu=mi0, stdev=sigma, alternative="less")
teste
teste$p.value
```

```
> teste

        One Sample z-test

data:  duracao
z = -4.006, n = 30.000, Std. Dev. = 120.000, Std. Dev. of the sample mean = 21.909, p-value = 3.088e-05
alternative hypothesis: true mean is less than 10000
95 percent confidence interval:
    -Inf 9948.27
sample estimates:
mean of duracao
       9912.233

> teste$p.value
[1] 3.088019e-05
```

```
# FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE
mi <- 0;
sigma <- 1
phi <- function(x) (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2)

plot(phi,-5,3, lwd=3)
abline(h=0, col="black", lwd=3, lty=1)
abline(v=z, col="BLUE", lwd=3, lty=2)

f.critico <- qnorm(0.05,0,1, lower.tail = TRUE)
f.critico

abline(v=(f.critico), col="red", lwd=3, lty=2)

seq1 <- seq(-5, f.critico, 0.001)
lines(seq1, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((seq1-mi)/sigma)^2), type = "h", col="grey")

seq2 <- seq(-5, z, 0.001)
lines(seq2, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((seq2-mi)/sigma)^2), type = "h", col="black")

text(c(-2, -4.7), c(0.02, 0.05), c(expression(alpha,p-valor)))

arrows(-4.8, 0.037, -4.3, 0.007,length=0.2,angle=20)
```


phi
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
p – valor
α
-4
-2
0
2
x

Qual das seguintes opções é verdadeira?

a) p-valor>0,05 é a probabilidade de que a hipótese nula seja verdadeira.

b) 1 menos o p-valor é a probabilidade de que a hipótese alternativa seja verdadeira.

c) Um resultado de teste estatisticamente significante ($P \leq 0,05$) significa que a hipótese do teste é falsa ou deve ser rejeitada.

d) Um p-valor superior a 0,05 significa que nenhum efeito foi observado.

e) A probabilidade, segundo um modelo estatístico especificado, de que um resumo estatístico dos dados (por exemplo, a diferença média da amostra entre dois grupos comparados) seja igual ou mais extremo do que o valor observado.

O conceito de significância estatística é realmente muito simples, mas tem um nome muito infeliz. Se os dados nos permitirem rejeitar a hipótese nula, dizemos que "o resultado é estatisticamente significante", que geralmente é reduzido para "o resultado é significante".

Essa terminologia é bastante antiga e remonta a uma época em que "significante" significava algo como "indicado", em vez de seu significado moderno, muito mais próximo de "importante".

Como resultado, muitos leitores modernos ficam muito confusos quando começam a aprender estatística, porque acham que um "resultado significante" deve ser importante. Não significa nada disso.

Tudo o que significa "estatisticamente significante" é que os dados nos permitiram rejeitar uma hipótese nula. Se o resultado é realmente importante ou não no mundo real é uma questão muito diferente e depende de todo tipo de coisa.

[*Learning Statistics with R* – Daniel Joseph Navarro, Pág. 311 (2013)]