

Uma Revisão do Método ERA Aplicado à Identificação de Modos de Trens de Pouso

Renan Cavenaghi Silva¹
Graduando de Engenharia Mecânica

Douglas Domingues Bueno²
Prof. Orientador

¹ ✉: cavenaghi.silva@unesp.br

² ✉: douglas.bueno@unesp.br

25 de Setembro de 2020

Escopo

1. Introdução;
2. Metodologia;
3. Resultados;
4. Considerações Finais; e
5. Referências



- ▶ Qual o motivo para determinar o modelo matemático de um sistema mecânico?
 - ▶ aplicações;
 - ▶ comportamento do sistema;
 - ▶ vantagens;

- ▶ Como determinar o modelo matemático?
 - ▶ como escolher o tipo de modelo;
 - ▶ determinação dos parâmetros;
 - ▶ associar características do modelo ao sistema real.



- ▶ Informações mensuráveis do sistema físico do trem de pouso;
- ▶ Identificação do modelo matemático na forma de espaço de estados com o **ERA** (*Eigensystem Realization Algorithm*); e
- ▶ Determinar as propriedades dinâmicas do sistema através do modelo matemático.



(a)

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k]$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k]$$

(b)

Figura 1: (a) Sistema físico e (b) modelo matemático do trem de pouso



- ▶ Algoritmo **ERA**¹ desenvolvido para identificar os parâmetros modais de estruturas:
 - ▶ frequências naturais;
 - ▶ fatores de amortecimento modal; e
 - ▶ modos de vibração.
- ▶ Determinação da ordem do sistema através da Decomposição em Valores Singulares (**SVD**).

¹J.N. Juang e Richard Pappa. "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction". Em: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 8 (nov. de 1985). DOI: 10.2514/3.20031.



- ▶ Uma das formas de se determinar as matrizes consiste em aplicar um impulso unitário em cada entrada e obter os chamados **parâmetros de Markov** do sistema mecânico:
- ▶ Aplicando um impulso unitário em uma entrada $\mathbf{u}_j[0] = 1$, com o sistema partindo do repouso, *i.e.*, $\mathbf{x}_j[0] = \mathbf{0}$ e coletando a sequência de dados $\mathbf{y}_j[k]$.



Para a primeira entrada, $j = 1$, obtem-se que:

$$\mathbf{x}_1[1] = \underbrace{\mathbf{A}_d \mathbf{x}_1[0]}_0 + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_1[0]$$

$$\mathbf{x}_1[1] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d|_1$$

$\mathbf{B}_d|_1$ corresponde a primeira coluna da matriz \mathbf{B}_d . Se repetirmos o procedimento para as demais entradas:



pode-se montar a seguinte matriz:

$$\mathbf{X}[0] = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{x}_1[0]}_{\mathbf{B}_{d|1}} & \underbrace{\mathbf{x}_2[0]}_{\mathbf{B}_{d|2}} & \dots & \underbrace{\mathbf{x}_m[0]}_{\mathbf{B}_{d|m}} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_d$$

em que as colunas $j = 1, 2, \dots, m$ correspondem ao vetor da resposta das variáveis de estado à aplicação de um impulso na entrada j no instante discreto k .



Repetindo o mesmo desenvolvimento para as observações dos sensores, tem-se que:

$$\mathbf{y}_1[0] = \mathbf{D}_d \mathbf{u}_1[0] = \mathbf{D}_d|_1$$

e montando a matriz das observações referentes a aplicação do impulso em cada entrada,

$$\mathbf{Y}[0] = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{y}_1[0]}_{\mathbf{D}_d|_1} & \underbrace{\mathbf{y}_2[0]}_{\mathbf{D}_d|_2} & \cdots & \underbrace{\mathbf{y}_m[0]}_{\mathbf{D}_d|m} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_d$$



Iterando para os instantes seguintes, obtêm-se que

$$\mathbf{X}[2] = \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d$$

$$\mathbf{Y}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d$$

e para um instante k

$$\mathbf{X}[k] = \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d$$

$$\mathbf{Y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d$$



Considerando o caso de uma excitação qualquer $\mathbf{u}[k]$ no instante inicial $k = 0$ tem-se que:

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0]$$

$$\mathbf{y}[0] = \mathbf{D}_d \mathbf{u}[0]$$

para o instante $k = 1$:

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1]$$

$$\mathbf{y}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[1]$$

para o instante $k = 2$:

$$\mathbf{x}[3] = \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[2]$$

$$\mathbf{y}[2] = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[2]$$



E para um instante qualquer k tem-se que a observação é:

$$\mathbf{y}[k] = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k-i] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k]$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}[k] = \sum_{i=0}^k \mathbf{Y}[i] \mathbf{u}[k-i] = (\mathbf{Y} * \mathbf{u})[k]$$

A observação $\mathbf{y}[k]$ corresponde a convolução da entrada com a informação referente à resposta ao impulso do sistema aplicada em cada entrada, conhecida na literatura como parâmetros de Markov.



Com os parâmetros de Markov $\mathbf{Y}[k]$, pode-se definir uma matriz de Hankel da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{rs}[k-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}[k] & \mathbf{Y}[k+1] & \dots & \mathbf{Y}[k+s] \\ \mathbf{Y}[k+1] & \mathbf{Y}[k+2] & \dots & \mathbf{Y}[k+s+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}[k+r] & \mathbf{Y}[k+r+1] & \dots & \mathbf{Y}[k+r+s] \end{bmatrix}$$

em que r e s indicam a ordem da matriz de Hankel.



Que pode ser representada em termos das matrizes do sistema como:

$$\mathbf{H}_{rs}[k-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^k \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+s-2} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^k \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+1} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+s-1} \mathbf{B}_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r-2} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r-1} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r+s-3} \mathbf{B}_d \end{bmatrix}$$

e sua versão deslocada em um instante discreto

$$\mathbf{H}_{rs}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^k \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+1} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+s-1} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+1} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+2} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+s} \mathbf{B}_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k+r+s-2} \mathbf{B}_d \end{bmatrix}$$



Que pode ser escrita em termos das matrizes

$$\mathbf{H}_{rs}[k] = \mathbf{O} \mathbf{A}_d^k \mathbf{C}$$

onde

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{s-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix}$$



Para os caso particulares das matrizes de Hankel definidas nos instantes $k = 0$ e $k = 1$, tem-se:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \mathbf{O}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{H}_{rs}[1] = \mathbf{O}\mathbf{A}_d\mathbf{C}$$

Se multiplicarmos $\mathbf{H}_{rs}[1]$ pelas inversas das matrizes \mathbf{O}^{-1} e \mathbf{C}^{-1} :

$$\mathbf{O}^{-1}\mathbf{H}_{rs}[1]\mathbf{C}^{-1} = \underbrace{\mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}}_{\mathbf{I}}\mathbf{A}_d\underbrace{\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}}_{\mathbf{I}}$$

que resulta em:

$$\mathbf{O}^{-1}\mathbf{H}_{rs}[1]\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}_d$$



Fatorando a matriz $\mathbf{H}_{rs}[0]$ utilizando a decomposição em valores singulares, obtém-se que:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$$

em que valem as relações $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e a matriz \mathbf{D} é diagonal e contém os valores singulares λ_i de $\mathbf{H}_{rs}[0]$. Dessa forma, podemos reescrever:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}}_{\mathbf{O}} \underbrace{\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{Q}^T}_{\mathbf{C}}$$



Dessa forma, as inversas das matrizes **O** e **C** tornam-se:

$$\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^T$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1/2}$$

e a matriz dinâmica do sistema mecânico pode ser finalmente calculada através de:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_{rs}[1] \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1/2}$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_m$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{E}_p^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2}$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{Y}[0]$$

em que $\mathbf{E}_m = [\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_m, \dots, \mathbf{0}_m]$ e $\mathbf{E}_p = [\mathbf{I}_p, \mathbf{0}_p, \dots, \mathbf{0}_p]$ com \mathbf{I}_j e $\mathbf{0}_j$ as matrizes identidade e nula de ordem j .



Uma vez explicado o procedimento para a identificação das matrizes do sistema dinâmico, a redução de ordem do modelo é feita através da análise dos valores singulares de $\mathbf{H}_{rs}[0]$.

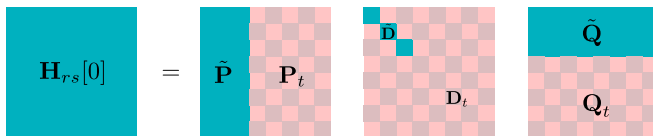


Figura 2: Visualização da Decomposição em Valores Singulares

Em que $\mathbf{H}_{rs}[0]$ pode ser expresso por:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Q}}^T$$



O algoritmo **ERA** pode ser descrito pela aplicação dos seguintes passos:

- ▶ Obter os parâmetros de Markov;
- ▶ Montar a matriz de Hankel com os parâmetros de Markov;
- ▶ Aplicar a Decomposição em Valores Singulares sobre a matriz de Hankel;
- ▶ Reduzir a ordem do sistema;
- ▶ Obter os parâmetros dinâmicos \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{D}_d ; e
- ▶ Extrair os parâmetros modais do sistema a partir da matriz identificada \mathbf{A}_d .



Simulação do Trem de Pouso

O de trem de pouso simulado consiste de uma representação com dois graus de liberdade, um torsional e um lateral, conforme:

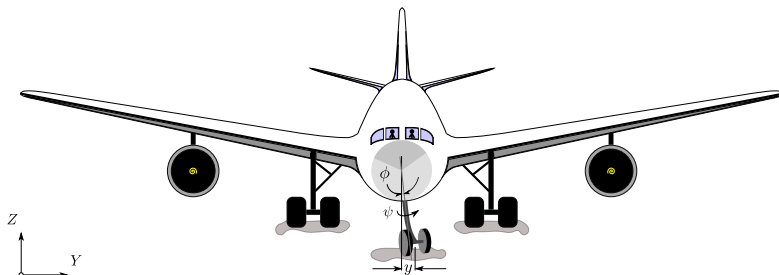


Figura 3: Vista frontal de um avião e representação da flexibilidade lateral e torsional do trem de pouso dianteiro.



A dinâmica deste modelo é dado por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_y & ec_y \\ ec_y & e^2c_y + c_\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_y & ek_y \\ ek_y & e^2k_y + k_\psi \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} y(t) & \psi(t) \end{Bmatrix}^T$$



- Simulação de resposta livre do trem de pouso.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi(t) \\ y(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$$

Dessa forma, foram simulados dois ensaios utilizando a vibração livre do sistema com condições iniciais não nulas e distintas, *i.e.*, $\mathbf{x}_1[0] \neq \mathbf{x}_2[0]$:

$$\left\{ \mathbf{y}_1[k] \quad \mathbf{x}_1[0] \quad \mathbf{y}_2[k] \quad \mathbf{x}_2[0] \right\}$$

em que $\mathbf{y}_i[k]$ é uma sequência das amostras do sinal contínuo $\mathbf{y}(t)$



Montando as matrizes $\mathbf{H}_{rs}[0]$ e $\mathbf{H}_{rs}[1]$, considerando $r = s = 20$ e com os parâmetros de Markov determinados como:

$$\mathbf{Y}[k] = \begin{bmatrix} \psi_1[k] & \psi_2[k] \\ y_1[k] & y_2[k] \end{bmatrix}$$

pode-se realizar a decomposição em valores singulares de $\mathbf{H}_{rs}[0]$ e determinar a ordem do sistema por meio da análise dos valores singulares.



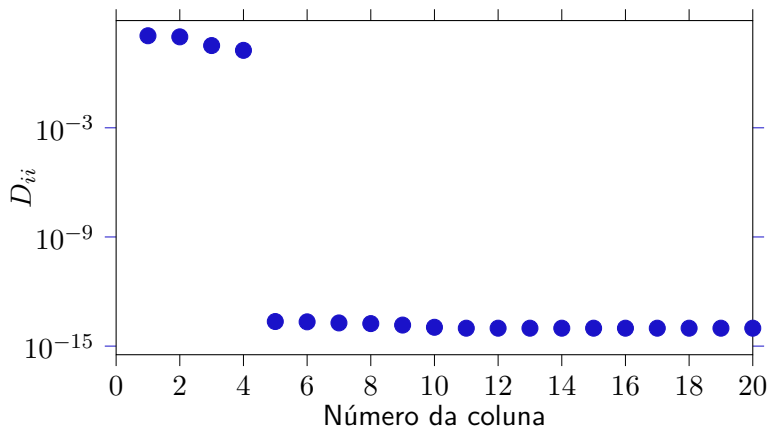


Figura 4: Valores Singulares da Matriz de Hankel



- Reduzindo a ordem do sistema, identifica-se as matrizes do sistema:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0,9830 & -0,2083 & 0,0634 & 0,0100 \\ 0,2165 & 0,9215 & 0,0112 & 0,0777 \\ -0,0775 & 0,0495 & 1,1139 & -0,1273 \\ -0,0256 & -0,0889 & 0,3219 & 0,8577 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} -0,6800 & -1,4173 \\ 0,8979 & 2,9848 \\ -0,1589 & -1,1696 \\ 1,1714 & 2,0026 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} -0,9224 & -0,0406 & -1,0511 & 0,8920 \\ 1,0222 & 3,2773 & -0,0341 & -1,7572 \end{bmatrix}$$



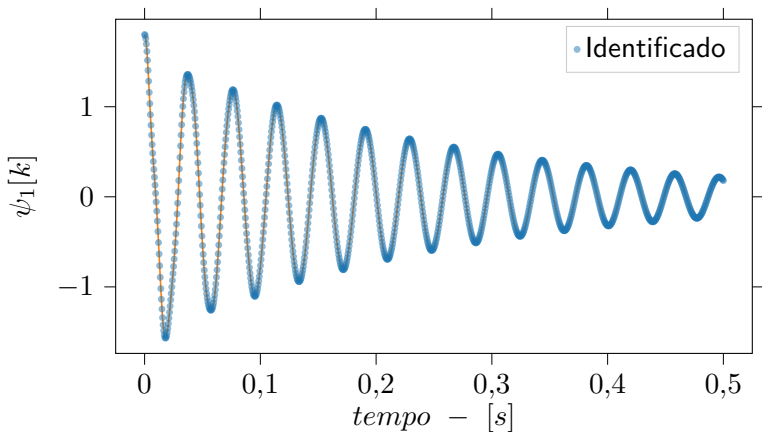


Figura 5: Comparativo entre $\psi_1[k]$ do sistema simulado e do sistema identificado para $r = 20$ e $s = 20$.



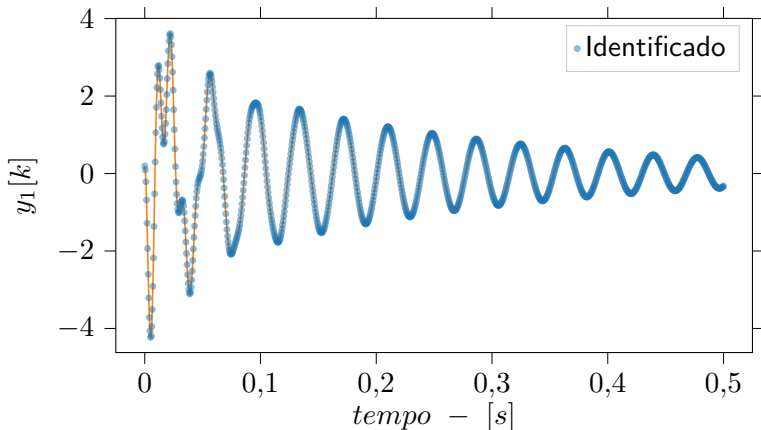


Figura 6: Comparativo entre $y_1[k]$ do sistema simulado e do sistema identificado para $r = 20$ e $s = 20$.



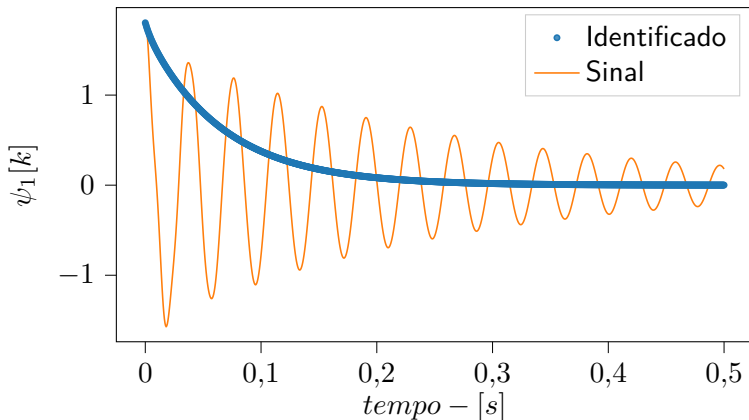


Figura 7: Comparativo entre $\psi_1[k]$ do sistema simulado e do sistema identificado para $r = 3$ e $s = 1$.



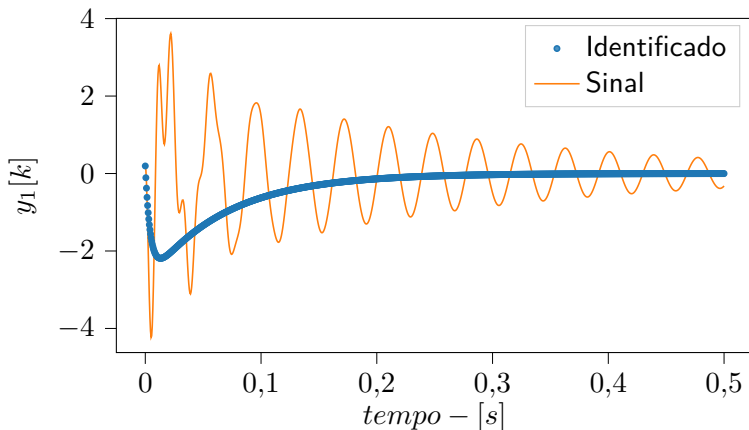


Figura 8: Comparativo entre $y_1[k]$ do sistema simulado e do sistema identificado para $r = 3$ e $s = 1$.



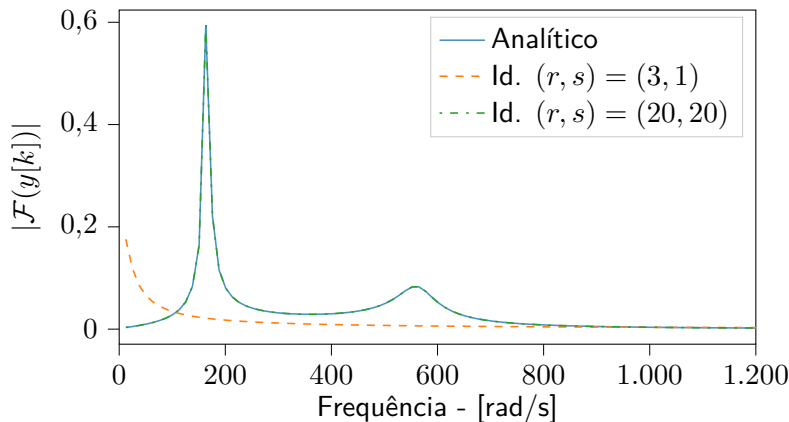


Figura 9: Comparativo do módulo da transformada rápida de Fourier dos sinais identificados com parâmetros de identificação distintos com o sinal analítico.



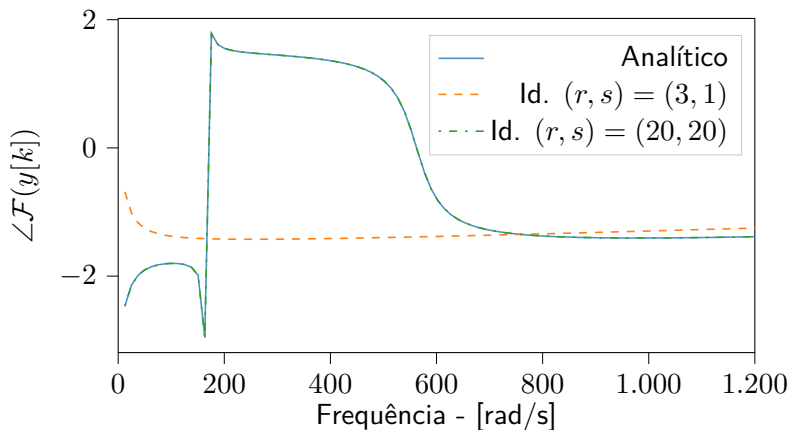


Figura 10: Comparativo da fase da transformada rápida de Fourier dos sinais identificados com parâmetros de identificação distintos com o sinal analítico.



Através da reprodução adequada dos estados pelas matrizes identificadas, a matriz dinâmica \mathbf{A}_d pode ser utilizada para determinar os parâmetros modais do trem de pouso. Resolvendo o problema de autovalor e autovetor:

$$\Phi^{-1} \mathbf{A}_d \Phi = z$$

em que Φ é a matriz de autovetores e z a matriz dos autovalores.



Tabela 1: Comparativo dos parâmetros modais obtidos de forma analítica e pela simulação do experimento.

	Analítico	Identificado
$z_{i,i+1}$	-	$0,9434 \pm 0,2725j$
	-	$0,9946 \pm 0,0820j$
$s_{i,i+1}$	$-36,2824 \pm 561,8390j$	$-36,2824 \pm 561,8390j$
	$-4,0091 \pm 164,5171j$	$-4,0091 \pm 164,5171j$
$\omega_{i,i+1}$	563,0093	563,0093
	164,5660	164,5660
$\zeta_{i,i+1}$	0,0644	0,0644
	0,0243	0,0243

Fonte: Elaborado pelo autor



Correlação entre modos do sistema identificado com o do sistema analítico

$$\text{MAC}_{\phi_{id}-\phi} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6951 \\ 0,6951 & 1,0000 \end{bmatrix}$$



- ▶ importância da modelagem matemática dos fenômenos;
- ▶ conhecer algoritmos que permitam determinar parâmetros do modelo e a influência dos parâmetros do algoritmo na correta identificação do sistema;
- ▶ avaliar criticamente os resultados do modelo identificado por meio de indicadores.



Sugestões para trabalhos futuros

- ▶ Utilizar o **ERA** para tratar de sistemas envolvendo dados experimentais;
- ▶ Comparar com outros métodos de identificação de sistemas mecânicos.





Juang, J.N. e Richard Pappa. “An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction”. Em: *Journal of Guidance Control and Dynamics* 8 (nov. de 1985). DOI: 10.2514/3.20031.



Obrigado pela atenção

Para acesso ao trabalho e aos códigos desenvolvidos:
<https://github.com/rkavenaghi/ERA>

