

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Renan Cavenaghi Silva

**Uma Revisão do Método ERA
Aplicado à Identificação de Modos de
Trens de Pouso**

Ilha Solteira, SP
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Uma Revisão do Método ERA Aplicado à Identificação de Modos de Trens de Pouso

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade
de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP - como
parte dos requisitos para obtenção do título de
de Engenheiro Mecânico.

Renan Cavenaghi Silva
Discente

Prof. Douglas Domingues Bueno
Orientador

Ilha Solteira, SP
2020

Resumo

A identificação de sistemas dinâmicos é tópico de grande importância em diversos campos da ciência, especialmente na engenharia, uma vez que possibilita a obtenção de modelos físico-matemáticos a partir de dados experimentais. Em particular, no contexto da análise modal de sistemas, pode-se conhecer características modais como frequências naturais, amortecimento modal e modos de vibração através dos sinais coletados, ou simplesmente saída obtidos de campanhas de ensaios experimentais. Assim, este trabalho apresenta a formulação **ERA**, do inglês (*Eigensystem Realization Algorithm*) para a identificação dos parâmetros dinâmicos de um modelo que descreve a dinâmica de um trem de pouso suspenso. O escopo compreende a obtenção dos sinais temporais de resposta livre do sistema de trem de pouso utilizando sua representação analítica, para simular a sequência de dados experimentais. Com isso, aplicou-se o algoritmo **ERA** para a identificação da planta no espaço de estados e obteve-se os parâmetros modais de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração por meio da planta identificada, que foram comparados os parâmetros modais obtidos do sistema analítico e verificou-se a correta estimação das informações modais do sistema físico por meio do modelo matemático identificado. Por fim, discute-se a influência de parâmetros do algoritmo através de múltiplos ensaios e limitações do método de identificação empregado.

Palavras-chave: Identificação de Sistemas Dinâmicos. Algoritmo ERA. Modelo de Trem de Pouso.

Abstract

System Identification is a field of great importance in science, specially in engineering, since it allows the estimation of physical and mathematical models from experimental data. Particularly, in mechanical system modal analysis, it allows the calculation of natural frequencies, modal damping and mode shapes from the knowledge of input and output signals, obtained from the experimental studies. This work presents the **ERA**, the Eigensystem Realization Algorithm to obtain the dynamical parameters of a mathematical model that describes the dynamics of a overhead landing gear. The outline of this work is to obtain the analytic signal from the free-response vibration to simulate the experimental data. The **ERA** is utilized and the state space mathematical model obtained. From the state space model, it is calculated the modal parameters of natural frequency, modal damping and mode shapes and compared with the analytical modal parameters, showing adequate correspondence. At end, the algorithm parameters will be discussed from multiple tests and the limitations of this identification method.

Keywords: System Identification. Eigensystem Realization Algorithm. Landing Gear Model.

Lista de Figuras

1	Resposta temporal do sistema primeira ordem submetido a entrada degrau	14
2	Resposta temporal do sistema de segunda ordem submetido à condições iniciais desconhecidas	16
3	Modelo de um grau de liberdade de trem de pouso.	26
4	Mapa de estabilidade linear do trem de pouso.	29
5	Vista frontal de um avião e representação da flexibilidade lateral e torsional do trem de pouso dianteiro.	29
6	Valores Singulares em função da coluna da Matriz de Hankel.	32
7	Comparativo entre dados simulados e do sistema identificado referente ao experimento um.	34
8	Comparativo entre dados simulados e do sistema identificado referente ao experimento dois.	35
9	Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 1$ e $s = 1$ e dados do sistema analítico.	38
10	Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 100$ e $s = 1$ e dados do sistema analítico.	38
11	Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 1$ e $s = 100$ e dados do sistema analítico.	39
12	Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 2$ e $s = 2$ e dados do sistema analítico.	39
13	Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 100$ e $s = 100$ e dados do sistema analítico.	40
14	Saída do sistema na ausência e na presença de contaminação com ruído de medição. . .	41
15	Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado.	42
16	Valores singulares do sistema na presença de ruído.	42
17	Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado com $r = s = 20$. .	43
18	Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado com $r = s = 50$. .	43

Lista de Tabelas

1	Conjunto de dados do sistema estático linear	12
2	Parâmetros do modelo de trem de pouso utilizado para as simulações. . . .	31
3	Comparativo dos parâmetros modais obtidos de forma analítica e pela simulação do experimento.	36
4	Comparativo dos parâmetros modais do sistema analítico e identificado com dados contaminados.	44

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Identificação de Sistemas	7
1.2	Contribuições Alcançadas	10
1.3	Organização do Trabalho	10
2	Identificação de Sistemas	11
2.1	Sistema Estático Linear	11
2.1.1	Exemplo de uso	12
2.2	Sistema Dinâmico Linear	12
2.2.1	Sistema de primeira ordem	13
2.3	Sistema dinâmico de segunda ordem	14
2.4	Sistemas Mecânicos Lineares e Invariantes	17
2.5	ERA	18
2.5.1	Parâmetros de Markov	18
2.5.2	Resposta geral do sistema	19
2.5.3	Matriz de Hankel	21
2.5.4	Redução de ordem	22
2.5.5	ERA utilizando vibração livre	23
2.6	MAC	24
3	Identificação da Planta Estrutural do Trem de Pouso	26
3.1	Modelos de Trens de Pouso	26
3.2	Trem de Pouso com Flexibilidade Lateral	29
3.2.1	Planta Estrutural	31
3.3	Simulação do Experimento	31
3.3.1	Parâmetros Modais	35
3.3.2	Escolha da ordem da matriz de Hankel	37
3.3.3	Influência do ruído de medição	40
4	Considerações Finais	45
4.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	46
	Referências	47
A	Algoritmo ERA	49

1 Introdução

Este capítulo apresenta o contexto geral da realização deste trabalho. Também, apresenta sucintamente o campo de identificação de sistemas, discutindo os métodos estabelecidos na literatura e alguma de suas limitações práticas.

1.1 Identificação de Sistemas

O trem de pouso é um componente presente na maioria das aeronaves que, de acordo com Currey (1988), tem a função de sustentar o equipamento em solo, de freio e controle direcional. Adicionalmente, em equipamentos modernos, este sistema conta com amortecedores óleo-pneumáticos cujo objetivo é absorver e dissipar a energia potencial e cinética da aeronave durante o pouso. Além disso, por ser utilizado majoritariamente durante as operações em solo, muitas aeronaves contam com um mecanismo de retração para alocar o trem de pouso em um compartimento e diminuir a força de arrasto aerodinâmico durante o voo. Diante desses fatos, pode-se destacar que o trem de pouso é um equipamento, que, por ter diversas funções, apresenta grande complexidade e, dessa forma, sua análise durante todas as condições de operação é importante para garantir a segurança das pessoas e do equipamento.

Durante as operações em solo, trens de pouso podem apresentar uma vibração auto-excitada nos modos torsional, lateral e longitudinal, conhecida na literatura como shimmy de trem de pouso. Essa vibração ocorre devido à combinação das forças na zona de contato do pneu com o solo e das forças inerciais e elásticas da estrutura do trem de pouso e pode levar à perda de controlabilidade direcional da aeronave, além de prejudicar severamente os componentes devido aos elevados níveis de vibração que se propagam pela estrutura. Diante disso, o projeto de aeronaves envolve um esforço para identificar as condições de operação que ocorram shimmy e modificar as características estruturais do trem de pouso para eliminar, ou ao menos atenuar, a vibração. Assim, conhecer em detalhes a dinâmica do trem de pouso é etapa relevante, que pode ser realizada empregando métodos de identificação de sistemas, especialmente para os casos em que o shimmy é identificado na operação da aeronave, ou em campanhas de ensaios com protótipos.

De maneira geral, os parâmetros do modelo de um sistema, como em particular de trem de pouso, podem ser obtidos utilizando dados de representação direta da física, o que é tipicamente denominado na literatura como identificação tipo caixa branca conforme explicado em Aguirre (2015). Também, podem ser empregados dados que reproduzem relações de entrada e saída, sem necessariamente descrever explicitamente a física da dinâmica, o que é comumente denominado identificação tipo caixa preta. Por outro lado, para se utilizar as vantagens de ambas abordagens, a identificação de sistemas pode ser tratada como a área da modelagem matemática que permite obter e complementar modelos matemáticos a partir de dados, com algum conhecimento prévio do sistema em

análise. Essa estratégia é denominada identificação tipo caixa cinza.

Uma vez que a necessidade de modelar matematicamente os fenômenos leva conseqüentemente ao requisito de determinar os parâmetros do modelo matemático, diferentes áreas da ciência, como economia, biologia, finanças e engenharia, utilizam das técnicas de identificação de sistemas. Por exemplo, Guo e Tan (2010) utilizam uma única variável de estado mensurável para estimar os parâmetros dinâmicos de uma planta química, realizando múltiplos ensaios do sistema e comparando com a estratégia de utilizar múltiplos sensores para monitorar múltiplas variáveis de estado e em uma única realização.

No campo da engenharia, os modelos computacionais de sistemas mecânicos permitem, por exemplo, projetar controladores, monitorar a integridade de sistemas, entre outras aplicações. Em particular, no monitoramento estrutural, utilizando múltiplos sensores de deslocamento, velocidade ou aceleração, pode-se, através do acompanhamento dos parâmetros modais, estimar a quantidade dano que a estrutura sofreu em relação aos dados de referência, uma vez que estes parâmetros são função das propriedades físicas de massa, rigidez e amortecimento da estrutura conforme discutido por Doebling et al. (1996). Além disso, um sistema robusto de identificação de dano deve possibilitar, além de detectar a existência e localização do dano, a classificação da gravidade do dano e uma estimativa do tempo restante de vida do equipamento, tornando possível planejar as intervenções do setor de manutenção.

Com o emprego de técnicas de identificação de sistemas, pode-se obter modelos computacionais que são capazes de descrever o comportamento estático ou dinâmico do sistema, tal que correspondam as observações experimentais. Com um modelo matemático representativo, pode-se simular computacionalmente condições distintas das utilizadas nos testes experimentais, o que implica em redução da demanda de recursos para campanhas de ensaios, inclusive reduzindo riscos às pessoas envolvidas.

No contexto da identificação de sistemas dinâmicos, Juang e Pappa (1985) estabeleceu a formulação do **ERA**, acrônimo em inglês para ***E**igensystem **R**erealization **A**lgorithm*, baseado no trabalho de Ho e Kalman (1965), para a extração de parâmetros modais de sistemas mecânicos. Disponibilizando dados de entrada e saída da resposta ao impulso unitário, conhecidos como parâmetros de Markov, ou utilizando os dados de vibração livre do sistema dinâmico para o algoritmo, pode-se construir uma matriz de Hankel e realizar sua decomposição em valores singulares (**SVD**), para obter as inversas das matrizes de observabilidade e controlabilidade do sistema. Dessa forma, pode-se reduzir a ordem do modelo baseado nos valores singulares, resultando na identificação de um modelo linear e invariante no tempo na forma de espaço de estados de mínima ordem, cujas relações representam a causalidade de entrada-saída dos dados coletados nos experimentos.

Entretanto, a formulação utilizando a resposta ao impulso é limitante, uma vez que, de acordo com Quan (1994), além de ser complicado de realizar na prática, é desnecessário que se excite todos os modos da estruturas, uma vez que o sistema mecânico

normalmente irá operar em uma faixa limitada de frequências. Desse modo, o autor apresenta uma metodologia alternativa que consiste em obter a resposta ao impulso do sistema a partir de dados da resposta forçada do sistema. A obtenção dos parâmetros de Markov pode ser feita, como mostrado em Juang et al. (1993), utilizando um conjunto de dados de entrada e saída arbitrários, entretanto, este procedimento leva a necessidade de inverter matrizes de elevadas dimensões, que pode ser computacionalmente custoso para sistemas levemente amortecidos como estruturas espaciais. Baseado nisso, o autor impõe amortecimento ao sistema através da utilização de um observador de estados com o objetivo de obter os parâmetros de Markov do sistema e alimentar o algoritmo **ERA** através de um conjunto menor de dados.

Outro aspecto de grande relevância quanto ao algoritmo **ERA**, é que o mesmo não leva em consideração o ruído que pode estar presente nos sinais, pois o trata como parte da dinâmica do sistema. Dessa forma, Juang e Pappa (1986) apresenta uma formulação alternativa que permite eliminar dados defeituosos da matriz de Hankel, minimizando a influência de falhas do sistema de aquisição de dados sobre o sistema identificado através da utilização da correlação dos dados na montagem das matrizes de Hankel. Além disso, estabelece um critério para a escolha da ordem do sistema baseado no conhecimento da estrutura do ruído.

Dentre as hipóteses do **ERA**, tem-se a de que o sistema é invariante no tempo, tal hipótese leva a identificação de matrizes constantes que podem não gerar modelos capazes de representar sistemas aeroelásticos ou de massa variante como foguetes. Baseado nessa limitação, Cooper (1997) mostra uma versão recursiva do algoritmo para lidar com sistemas variantes, atribuindo peso maior em medidas mais recentes de forma a caracterizar a dinâmica de sistemas variantes no tempo.

Embora o algoritmo **ERA** em suas suposições iniciais esteja limitado à de modelos lineares, este possui grande aplicabilidade na prática, já que muitos sistemas não lineares podem ser tratados como lineares em uma faixa estreita de operação. Além disso, as vantagens associadas a disponibilidade do modelo matemático e dos parâmetros modais do sistema são inúmeras, já que o conhecimento da dinâmica de um sistema é essencial para outras áreas, como o projeto estrutural, projeto de controladores e manutenção dos sistemas.

Diante do exposto, o objetivo central deste trabalho é utilizar os dados de entrada e saída do sistema, simulados através da solução do sistema de equações diferenciais que modelam a dinâmica de um trem de pouso suspenso com dois graus de liberdade, para identificar os parâmetros modais deste sistema mecânico. Especificamente, será utilizado o algoritmo **ERA**, implementado pelo autor em linguagem Python, para realizar a identificação do sistema e obter os parâmetros modais de modos de vibração, frequências naturais e amortecimento modal.

1.2 Contribuições Alcançadas

Com este trabalho, espera-se que o leitor entenda alguns dos principais aspectos da identificação de sistemas e o contexto para sua aplicação em trens de pouso, além de ser capaz de reproduzir ou utilizar o algoritmo **ERA** desenvolvido em *Python* e disponibilizado no Apêndice A para identificar sistemas dinâmicos por meio de sua resposta livre.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está separado em quatro capítulos e um apêndice:

- introdução: neste capítulo é apresentado o contexto para a importância do estudo de técnicas de identificação de sistemas, além da pesquisa na literatura sobre os métodos desenvolvidos, hipóteses e limitações;
- identificação de sistemas: alguns dos métodos de identificação de sistemas serão apresentados brevemente, em seguida, a formulação do método de identificação de sistemas com múltiplas entradas e saídas utilizando o **ERA** será apresentada. Mostra-se também a forma de obter os parâmetros modais do sistema identificado. Apresenta-se ainda um indicador utilizando os modos de vibração identificados para auxiliar no processo de identificação de sistemas; e
- identificação da planta estrutural do trem de pouso: o algoritmo **ERA** será utilizado para a identificação dos parâmetros dinâmicos da planta estrutural de um trem de pouso. Para isso serão feitos diferentes experimentos de resposta livre cujos dados servirão como entrada para o algoritmo de identificação;
- considerações finais: uma retomada dos principais pontos sobre a identificação de sistemas além de sugestões para trabalhos futuros;
- apêndice A: o algoritmo de identificação de sistemas e análise modal utilizando o **ERA** implementado em linguagem **Python** é mostrado e as características principais dos métodos implementados comentados.

2 Identificação de Sistemas

Este capítulo tem como objetivo formular as equações fundamentais necessárias para elaborar o algoritmo de identificação de sistemas dinâmicos lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, referenciados na literatura como sistemas (**MIMO**). Além disso, mostra-se a formulação para o sistema estático linear e para o sistema dinâmico, partindo de sistemas simples com métodos consolidados na literatura de vibrações, para o caso geral, que engloba o objetivo deste trabalho.

2.1 Sistema Estático Linear

Um modelo de sistema estático ocorre em situações nas quais a variável dependente não é função do tempo. Este tipo de modelo, de acordo com Aguirre (2015), pode ser utilizado em situações em que o comportamento dinâmico do sistema é muito rápido ou muito lento em relação à escala de tempo de análise, de forma que temos a percepção de que a saída do sistema se atualiza instantaneamente a mudanças da sua variável independente. Considere o modelo da Equação 1, em que se considera que a medida y possa ser descrita como combinação linear das medidas de x .

$$y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n = \theta \mathbf{x} \quad (1)$$

com $y \in \Re^{1 \times 1}$, $\theta \in \Re^{1 \times n}$ e $\mathbf{x} \in \Re^{n \times 1}$. Tendo posse de medições de $\{\mathbf{x}, y\}$, o problema de identificação consiste em encontrar os parâmetros θ de forma a melhor representar o conjunto de medições de entrada e saída utilizadas para o cálculo dos parâmetros e ser capaz de generalizar para situações diferentes das fornecidas para a identificação dos parâmetros. Dessa forma, considere que estão disponíveis N medições de $y^{(i)}$ e $\mathbf{x}^{(i)}$ com $i = 1, 2, \dots, N$ e agrupados conforme mostra a Equação 2.

$$\begin{Bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \dots & x_n^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ou na notação matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\theta^T \quad (3)$$

onde $\mathbf{X} \in \Re^{N \times n}$ e $\mathbf{y} \in \Re^{N \times 1}$. Se o número de medições N for igual ao número de parâmetros necessários para descrever y , então pode-se obter os parâmetros multiplicando o vetor de medições y por X^{-1} , entretanto, se o número de medições for superior ao número de parâmetros, então pode-se calcular os parâmetros deste conjunto de dados a partir da

pseudo-inversa de matriz \mathbf{X} , denotado por \mathbf{X}^\dagger .

$$\hat{\theta}_{MQ} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{y} \quad (4)$$

A Equação 4 representa a solução que minimiza o somatório dos quadrados dos erros ao tentar aproximar estes parâmetros utilizando um sistema de equações com mais equações do que incógnitas. Com esta solução, dispõe-se então do modelo estático linear e seu conhecimento permite simular condições distintas das utilizadas para o ensaio através do uso da Equação 1 conforme será mostrado na Seção 2.1.1.

2.1.1 Exemplo de uso

De forma a exemplificar o uso das Equações 2 e 4, suponha o ensaio de uma mola linear cujos dados dos sensores de carga e de deslocamento, mostrados na Tabela 1, são utilizados para identificar os parâmetros do modelo estático e linear.

Tabela 1 – Conjunto de dados do sistema estático linear

F	2	4	6
Δx	1	2	3

Identificando os dados de entrada $\mathbf{X} = \{1, 2, 3\}^T$ e saída $\mathbf{y} = \{2, 4, 6\}$ e substituindo na Equação 4, obtem-se:

$$\theta_{MQ} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \left(\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix} = 2$$

Dessa forma, determinado o parâmetro $\theta_{MQ} = 2$, pode-se estimar o valor de y para entradas x não medidas, por exemplo, interpolar para $x = 1,2$, resultando em $y = 2,4$, ou até mesmo extrapolar para, por exemplo, $x = 3,7$, resultando em $y = 7,4$.

2.2 Sistema Dinâmico Linear

O uso de modelos dinâmicos ocorre em situações em que a perturbação do sistema depende além da variável dependente, mas também do tempo em que é observado. Modelos de sistemas dinâmicos podem representar fenômenos diversos como a transferência de calor, dinâmica de populações e no contexto deste trabalho, a dinâmica de sistemas mecânicos como o trem de pouso de uma aeronave.

2.2.1 Sistema de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem refere-se a aqueles sistemas em que a saída pode ser expressa através de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, *i.e.*, em que a saída possui apenas a primeira derivada, como:

$$a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_1 u(t) \quad (5)$$

em que a_i com $i = 1$, e 2 e b_1 são constantes arbitrárias. Tomando $a_2 \neq 0$ e dividindo todos os termos, obtém-se:

$$\frac{a_1}{a_2} \dot{y}(t) + y(t) = \frac{b_1}{a_2} u(t) \quad (6)$$

redefinindo

$$K = \frac{b_1}{a_2}$$

e

$$\tau = \frac{a_1}{a_2}$$

e substituindo na Equação 6, obtém-se:

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = K u(t) \quad (7)$$

A solução deste tipo de equação diferencial ordinária não-homogênea é discutida na literatura de equações diferenciais, como Boyce e DiPrima (2002), e é dada pela soma da solução homogênea com a não-homogênea. Aplicando a transformada de Laplace na Equação 7 e supondo condições iniciais nulas, obtém-se a relação da saída com a entrada no domínio de Laplace:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s\tau + 1} \quad (8)$$

Os parâmetros que caracterizam completamente este sistema são as constantes K e τ e uma das estratégias clássicas para obtê-los consiste em aplicar uma entrada $u(t)$ do tipo degrau de amplitude conhecida A , conforme Equação 9:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ A, & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

em que A representa a amplitude do sinal degrau. Dessa forma, tomando a transformada de Laplace da entrada degrau e isolando $Y(s)$, chega-se à Eq (10):

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \left(\frac{A}{s} \right) \quad (10)$$

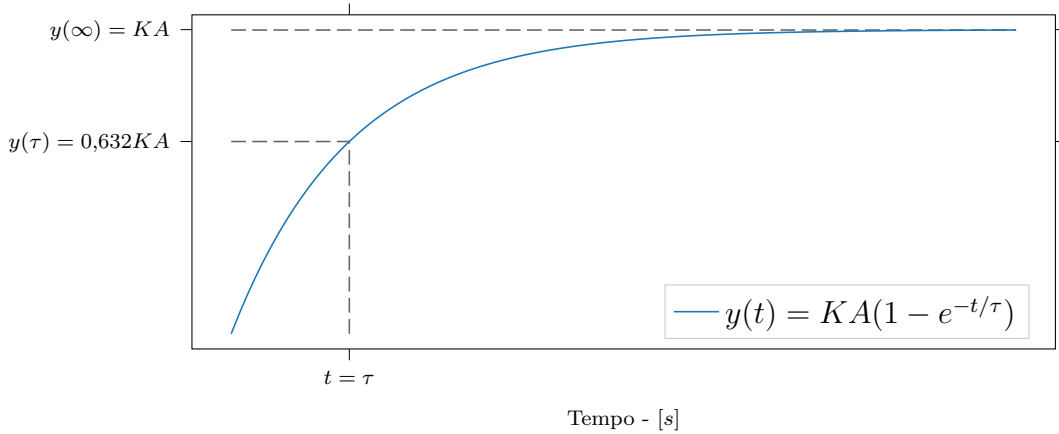
cuja transformada inversa leva a:

$$y(t) = KA(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (11)$$

O procedimento para a identificação dos parâmetros do sistema de primeira ordem consiste em medir a evolução de $y(t)$ e o sinal degrau aplicado para obter um gráfico como o mostrado na Figura 1. Mede-se $y(t = \infty)$, que corresponde ao valor em regime permanente e obtêm-se o valor de KA . Uma vez que A é conhecido em razão da medição do degrau, pode-se isolar o ganho do sistema K . Em $t = \tau$, obtêm-se uma amplitude equivalente a 63,2% da resposta em regime permanente e pode-se determinar a constante τ através da identificação do intervalo de tempo de corresponde a esse ponto.

Este método é útil para identificação dos parâmetros de um sistema de primeira ordem, *i.e.*, o ganho em regime permanente e a constante de tempo e pode ser utilizado, por exemplo, para identificar os parâmetros de um forno elétrico. Porém, é utilizado em contextos de altas relações sinal/ruído por não contabilizar o efeito do ruído e em sistemas de uma entrada e uma saída (**SISO**), do inglês *single-input single-output*.

Figura 1 – Resposta temporal do sistema primeira ordem submetido a entrada degrau



Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 Sistema dinâmico de segunda ordem

Sistemas dinâmicos como osciladores mecânicos com um grau de liberdade são descritos por equações diferenciais de segunda ordem. A equação dinâmica de um sistema massa-mola amortecido de um grau de liberdade é mostrada na Equação 12.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (12)$$

Definindo a frequência angular natural de vibração ω_n e o fator de amortecimento ξ como sendo respectivamente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (14)$$

e substituindo na Equação 12, obtem-se:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (15)$$

De forma resumida, o fator de amortecimento é a relação entre o amortecimento do sistema com o crítico, que representa a transição entre a resposta oscilatória e não-oscilatória. Já a frequência angular natural é a frequência de oscilação da resposta $x(t)$ do sistema dinâmico com os mesmos parâmetros de massa e rigidez e sem amortecimento. De acordo com o valor do fator de amortecimento, pode-se diferenciar três casos: em que o sistema apresenta valor menor que a unidade, igual e maior que a unidade que correspondem aos casos de um sistema subamortecido, criticamente amortecido e super amortecido respectivamente, mostrados na Equação 16.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \sin(\omega_d t) + \frac{x_0 + \xi\omega_n v_0}{\omega_d} \cos(\omega_d t) \right) & \text{para } \xi < 1 \\ e^{\omega_n t} [(v_0 + \omega_n x_0)t + x_0] & \text{para } \xi = 1 \\ c_1 e^{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n t} + c_2 e^{-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n t} & \text{para } \xi > 1 \end{cases} \quad (16)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ representa a frequência angular natural amortecida. c_1 e c_2 constantes que dependem das condições iniciais de deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial v_0 do sistema.

A identificação deste sistema consiste em obter os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento e, para sistemas subamortecidos de um grau de liberdade, uma das técnicas mais comuns em livros-texto de vibrações mecânicas é o método do decremento logarítmico, em que se determina o fator de amortecimento a partir do conhecimento da razão entre amplitudes sucessivas da variável monitorada $x(t)$ e a frequência natural angular amortecida a partir do intervalo de tempo entre os pontos medidos. Medindo a massa do sistema, pode-se determinar a rigidez e amortecimento utilizando as Equações 13 e 14, resolvendo o problema inicial.

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t + t_d)} \right) \quad (17)$$

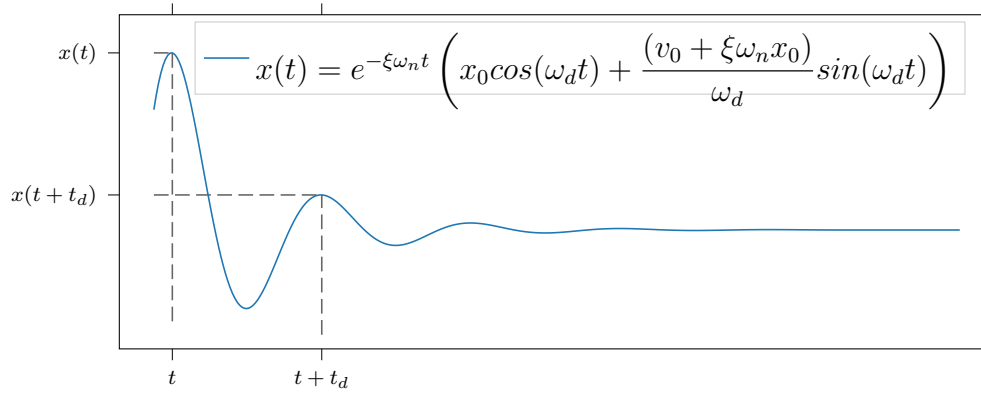
$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (18)$$

Na Figura 2 estão indicadas as medidas de $x(t)$ e $x(t + t_d)$, onde $t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ é o período de uma oscilação do sistema amortecido. Através da aplicação das Equações 17

e 18 determina-se o fator de amortecimento e dessa forma pode-se calcular a frequência angular natural substituindo na Equação 19.

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (19)$$

Figura 2 – Resposta temporal do sistema de segunda ordem submetido à condições iniciais desconhecidas



Fonte: Elaborado pelo autor

Através do método do decremento logarítmico, determina-se o fator de amortecimento e a frequência angular amortecida do sistema a partir dos dados da variável medida $x(t)$. Com o conhecimento destes valores, pode-se determinar os parâmetros de rigidez e amortecimento resolvendo o problema inicial.

Este método é aplicável em sistemas de um grau de liberdade, cujo sinal tenha relação sinal/ruído satisfatória, uma vez que um ruído excessivo pode acarretar em dificuldades para determinar adequadamente a razão de amplitudes. Mais detalhes quanto a este procedimento podem ser encontrados em bibliografias que tratam de vibrações de sistemas mecânicos como Rao (2009).

Determinados os parâmetros de frequência angular natural, fator de amortecimento e a massa do sistema mecânico, pode-se calcular a função de resposta ao impulso, **IRF**, mostrada na Equação 20 e analisar o comportamento do sistema para diferentes condições de excitação, como, por exemplo, forças estocásticas.

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad (20)$$

Através do cálculo desta propriedade, pode-se generalizar a resposta $x(t)$ para qualquer entrada $f(t)$ como sendo a convolução da resposta ao impulso com a entrada:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (21)$$

2.4 Sistemas Mecânicos Lineares e Invariantes

Embora a metodologia apresentada anteriormente tenha grande utilidade, está limitada a sistemas que possam ser descritos por um único grau de liberdade. Em casos gerais, pode ser necessário mais de um grau de liberdade para descrever adequadamente o comportamento dinâmico de uma estrutura de grande complexidade. Dessa forma, para uma estrutura contínua que tenha comportamento que possa ser modelado por um número finito de graus de liberdade, seja linear e invariante no tempo, o modelo matemático contínuo que descreve a dinâmica dos dados de entrada e saída, de acordo com Rao (2009), é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \quad (22)$$

em que \mathbf{M} representa a matriz de massa, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{B}_i a matriz de entrada e $\mathbf{u}(t)$ representa o vetor de entrada. Uma vez que este sistema é de segunda ordem, a redução de ordem pode ser feita através da definição uma nova variável $\mathbf{z}(t) = \left\{ \mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \right\}^T$. Reescrevendo o sistema na forma de espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (23)$$

em que as matrizes dinâmica \mathbf{A} e de entrada \mathbf{B} podem ser escritas como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (24)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

Supondo que este sistema seja monitorado por uma combinação de diversos sensores de aceleração, velocidade e de deslocamento. A leitura deste sistema de aquisição é representada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{\ddot{x}}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_{\dot{x}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_x\mathbf{x}(t) \quad (26)$$

em que $\mathbf{C}_{\ddot{x}}$, $\mathbf{C}_{\dot{x}}$ e \mathbf{C}_x são as matrizes de seleção de sensores de ordem $p \times n$, com p sendo o número de sensores e n o posto de \mathbf{M} . Note que $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ pode ser escrito em função de $\mathbf{z}(t)$ como:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \quad (27)$$

que substituindo na Equação 26, obtêm-se:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{\ddot{x}} \left(-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{u}(t) \right) + \mathbf{C}_{\dot{x}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_x\mathbf{x}(t) \quad (28)$$

que por sua vez pode ser escrito como função do vetor de estados $\mathbf{z}(t)$ e do vetor de

entradas como:

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \mathbf{C}_x & -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\dot{x}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_c} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_i}_{\mathbf{D}_c} \mathbf{u}(t) \quad (29)$$

resultado em

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (30)$$

As Equações 23 e 30 em conjunto expressam as relações de entradas e saídas de um sistema contínuo dinâmico linear e invariante no tempo utilizando sensores de deslocamento, velocidade e aceleração.

2.5 ERA

A Realização de Auto-sistemas (**ERA**), tradução do inglês para *Eigensystem Realization Algorithm*, é um algoritmo utilizado para a análise modal de estruturas utilizando os dados no domínio do tempo de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Em sua formulação, utiliza-se a informação da resposta ao impulso aplicado em cada entrada, conhecidos na literatura como parâmetros de Markov, para construir uma matriz de Hankel e identificar as matrizes que descrevem a dinâmica do sistema na forma de espaço de estados.

2.5.1 Parâmetros de Markov

De forma a deixar claro o que são os parâmetros de Markov, considere o modelo de sistema mecânico definido no domínio discreto na forma de espaço de estados abaixo:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \quad (31)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k] \quad (32)$$

Se aplicarmos um impulso unitário em cada entrada do sistema no instante $k = 0$, podemos reescrever o experimento da seguinte forma:

$$\mathbf{U}[k] = \begin{bmatrix} \delta[k] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta[k] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta[k] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta[k] \end{bmatrix} \quad (33)$$

com $\mathbf{U}[k] \in \Re^{m \times m}$ e o delta de Kronecker $\delta[k]$ definido como:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (34)$$

Dessa forma, considerando que o sistema saia do repouso, *i.e.*, $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$, pode-se reescrever o sistema como sendo:

$$\mathbf{X}[1] = \mathbf{B}_d \mathbf{U}[0] = \mathbf{B}_d \quad (35)$$

$$\mathbf{Y}[0] = \mathbf{D}_d \mathbf{U}[0] = \mathbf{D}_d \quad (36)$$

onde $\mathbf{X}[k]$ e $\mathbf{Y}[k]$ representam as matrizes de ordem $\Re^{n \times m}$ e $\Re^{p \times m}$ respectivamente cujas colunas $j = 1, 2, \dots, m$ correspondem aos vetores das medidas de $\mathbf{x}[k]$ e $\mathbf{y}[k]$ resultantes da aplicação do impulso unitário na entrada j . Substituindo para os instantes seguintes, obtêm-se:

$$\mathbf{X}[2] = \mathbf{A}_d \mathbf{X}[1] = \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad (37)$$

$$\mathbf{Y}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{X}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d \quad (38)$$

e

$$\mathbf{X}[3] = \mathbf{A}_d \mathbf{X}[2] = \mathbf{A}_d \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d = \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \quad (39)$$

$$\mathbf{Y}[2] = \mathbf{C}_d \mathbf{X}[2] = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad (40)$$

e generalizando para o instante discreto k têm-se:

$$\mathbf{X}[k+1] = \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d \quad (41)$$

$$\mathbf{Y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d \quad (42)$$

A sequência de matrizes $\mathbf{Y}[k]$ definidas nos instantes discretos k é chamada de parâmetros de Markov e representa a resposta do sistema ao impulso unitário em cada entrada. Os parâmetros de Markov dependem apenas dos parâmetros que descrevem o sistema na forma de espaço de estados, *i.e.*, as matrizes $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d$.

2.5.2 Resposta geral do sistema

De forma a generalizar o resultado anterior, considere o mesmo sistema dinâmico porém sujeito a uma excitação $\mathbf{u}[k]$ qualquer, nesse caso, de acordo com Phan, Juang e

Longman (1991), tem-se:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \quad (43)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k] \quad (44)$$

Suponha novamente que o sistema parta do estado de repouso $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Escrevendo as relações para o instante inicial têm-se:

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] \quad (45)$$

$$\mathbf{y}[0] = \mathbf{D}_d \mathbf{u}[0] \quad (46)$$

Para o próximo instante, segue que:

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[1] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1] = \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1] \quad (47)$$

$$\mathbf{y}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[1] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[1] = \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[1] \quad (48)$$

e

$$\mathbf{x}[3] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[2] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[2] = \mathbf{A}_d (\mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1]) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[2] \quad (49)$$

$$\mathbf{y}[2] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[2] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[2] = \mathbf{C}_d (\mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}[0] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[1]) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[2] \quad (50)$$

de forma que para o instante k , têm-se que:

$$\mathbf{x}[k+1] = \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k-i] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \quad (51)$$

$$\mathbf{y}[k] = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k-i] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}[k] \quad (52)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}[k] = \sum_{i=0}^k \mathbf{Y}[i] \mathbf{u}[k-i] \quad (53)$$

Através do desenvolvimento acima, observa-se que resposta do sistema dinâmico com múltiplas entradas e saídas a uma excitação qualquer corresponde à convolução dos parâmetros de Markov com a entrada aplicada, de modo análogo à resposta do sistema dinâmico com um grau de liberdade sujeito a entrada $f(t)$, mostrada na Equação 21. Diante disto, o algoritmo **ERA** têm como objetivo extrair os parâmetros de Markov por meio do conhecimento dos dados da entrada $\mathbf{u}[k]$ e saída $\mathbf{y}[k]$.

2.5.3 Matriz de Hankel

De posse dos parâmetros de Markov $\mathbf{Y}[k]$, a matriz de Hankel pode ser montada como:

$$\mathbf{H}_{rs}[k-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}[k] & \mathbf{Y}[k+1] & \dots & \mathbf{Y}[k+s] \\ \mathbf{Y}[k+1] & \mathbf{Y}[k+2] & \dots & \mathbf{Y}[k+s+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}[k+r] & \mathbf{Y}[k+r+1] & \dots & \mathbf{Y}[k+r+s] \end{bmatrix} \quad (54)$$

com ordem $[pr \times ms]$. Desse modo, a identificação do sistema tem como objetivo encontrar as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{D}_d , que reproduzam as matrizes \mathbf{Y} para todo instante k . De forma a obter estas matrizes, deve-se observar a relação mostrada na Equação 55.

$$\mathbf{H}_{rs}[k] = \mathbf{O} \mathbf{A}^k \mathbf{C} \quad (55)$$

em que \mathbf{O} e \mathbf{C} podem ser escritas como:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix} \quad (56)$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{s-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (57)$$

onde \mathbf{O} e \mathbf{C} representam as matrizes de observabilidade e controlabilidade respectivamente. Notando o caso particular da matriz de Hankel no instante $k = 0$:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \mathbf{O} \mathbf{C} \quad (58)$$

e avançando em uma unidade discreta de tempo, tem-se:

$$\mathbf{H}_{rs}[1] = \mathbf{O} \mathbf{A}_d \mathbf{C} \quad (59)$$

Diante disto, parte do algoritmo **ERA** consiste em extrair a matriz dinâmica \mathbf{A}_d da Equação 59. Este processo pode ser feito fatorando a matriz de Hankel utilizando a Decomposição em Valores Singulares (**SVD**), acrônimo do inglês para *Singular Value Decomposition*, conforme Equação 60, válida para matrizes no domínio dos números reais.

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T \quad (60)$$

cuas matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} são matrizes semi-unitárias tal que valem as relações $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Reescrevendo a Equação 60 como:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}}_{\mathbf{O}} \underbrace{\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{Q}^T}_{\mathbf{C}} \quad (61)$$

e multiplicando a Equação 59 por $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{P}^T$ obtem-se:

$$\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{P}^T\mathbf{H}_{rs}[1] = \mathbf{A}_d\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{Q}^T \quad (62)$$

e por $\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1/2}$, obtem-se a matriz dinâmica \mathbf{A}_d como:

$$\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{P}^T\mathbf{H}_{rs}[1]\mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1/2} = \mathbf{A}_d \quad (63)$$

e as matrizes \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d podem ser determinadas, de acordo com as fatorações mostradas nas Equações 56 e 57, através das relações:

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{Q}^T\mathbf{E}_m \quad (64)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{E}_p^T\mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2} \quad (65)$$

em que \mathbf{E}_m representa a extração das m primeiras colunas e \mathbf{E}_p^T as p primeiras linhas. A matriz de transmissão direta \mathbf{D}_d obtida diretamente do primeiro parâmetro de Markov:

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{Y}[0] \quad (66)$$

2.5.4 Redução de ordem

Caso a matriz de Hankel possua ordem elevada, os valores singulares podem ser utilizados para analisar o *rank* da matriz \mathbf{H}_{rs} e distinguir os modos físicos do sistema dos modos computacionais. Seja a matriz diagonal contendo os valores singulares:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n+1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (67)$$

caso o *rank* de \mathbf{H}_{rs} seja igual a n , os autovalores $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_N$ serão numericamente nulos. Portanto pode-se truncar as matrizes de forma a reduzir a ordem do modelo conforme:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \vdots & \mathbf{P}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{D}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} \\ \dots \\ \mathbf{Q}_t \end{bmatrix} \quad (68)$$

obtendo:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{Q}}^T \quad (69)$$

Com este dado, as matriz dinâmicas identificadas de ordem mínima são dadas por:

$$\mathbf{A}_d = \tilde{\mathbf{D}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{U}}^T\mathbf{H}_{rs}[1]\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{D}}^{-1/2} \quad (70)$$

$$\mathbf{B}_d = \tilde{\mathbf{D}}^{1/2}\tilde{\mathbf{Q}}^T\mathbf{E}_m \quad (71)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{E}_p^T\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{D}}^{1/2} \quad (72)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{Y}[0] \quad (73)$$

2.5.5 ERA utilizando vibração livre

Os parâmetros de Markov podem ser obtidos com uma formulação que utiliza a resposta livre do sistema, *i.e.*, na ausência de esforços externos com condições iniciais não nulas. Se perturbarmos o sistema do repouso impondo uma condição inicial $\mathbf{x}[0] \neq \mathbf{0}$, as equações que representam a situação descrita conforme:

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{A}_d\mathbf{x}[0] \quad (74)$$

$$\mathbf{y}[0] = \mathbf{C}_d\mathbf{x}[0] \quad (75)$$

a próxima iteração:

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A}_d\mathbf{x}[1] = \mathbf{A}_d^2\mathbf{x}[0] \quad (76)$$

$$\mathbf{y}[1] = \mathbf{C}_d\mathbf{x}[1] = \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d\mathbf{x}[0] \quad (77)$$

e assim por diante, dessa forma a observação da k -ésima iteração é dada por:

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^k\mathbf{x}[0] \quad (78)$$

Caso sejam realizadas m experimentos similares, pode-se montar os dados do experimento da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d A^k \mathbf{x}_1[0] & \mathbf{C}_d A^k \mathbf{x}_2[0] & \dots & \mathbf{C}_d A^k \mathbf{x}_m[0] \end{bmatrix} \quad (79)$$

onde ordem de $\mathbf{Y}[k] \in \mathbb{R}^{p \times m}$, com p representando o número de sensores utilizados. Montando a matriz de Hankel como:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \mathbf{O}\mathbf{C} \quad (80)$$

e fatorando de forma similar ao utilizando ao procedimento feito para a resposta ao impulso unitário em cada entrada, obtem-se:

$$\mathbf{H}_{rs}[0] = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{r-1} \end{Bmatrix} \left\{ \mathbf{B}_d \quad \mathbf{B}_d \mathbf{A}_d \quad \dots \quad \mathbf{B}_d \mathbf{A}_d^{s-1} \right\} \quad (81)$$

em que verifica-se que a matriz \mathbf{B}_d nesse caso será a identificação das condições iniciais do sistema dado por

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0[0] & \mathbf{x}_1[0] & \dots & \mathbf{x}_m[0] \end{bmatrix} \quad (82)$$

O algoritmo **ERA** permite a identificação de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (**MIMO**). Além disso, através da determinação do *rank* da matriz de Hankel, pode-se obter a mínima ordem do sistema capaz de representar as mesmas relações de entradas e saídas.

2.6 MAC

Uma vez que o sistema em estudo é desconhecido, determinar a ordem do sistema e distinguir os modos estruturais dos modos computacionais torna necessário a utilização de indicadores de qualidade da identificação. Um indicador comumente utilizado é o **MAC**, do inglês para *modal assurance criteria*. De acordo com Randall J. (2003), o objetivo deste indicador é avaliar a consistência entre estimativas de vetores modais obtidos de formas distintas. A definição do **MAC** é dada na Equação 83.

$$\text{MAC}(r, q) = \frac{|\{\psi_A\}_r^H \{\psi_B\}_q|^2}{\{\psi_A\}_r^H \{\psi_A\}_r \{\psi_B\}_q^H \{\psi_B\}_q} \quad (83)$$

em que o índice $(\cdot)^H$ indica o operador Hermitiano, que corresponde ao conjugado transposto do vetor. r e q as colunas das matrizes modais do sistema de referência e do sistema em análise. O valor do **MAC** assume valores entre 0, acusando a não correspondência

entre modos, e 1, no caso em que há correspondência dos modos. Entretanto, conforme Randall J. (2003), o uso indiscriminado deste indicador pode levar a conclusões incorretas, uma vez que, de acordo com Pastor, Binda e Harčarik (2012), o valor do **MAC** aproxima-se de 0 nos casos em que:

- o sistema é não estacionário. Em razão disto os modos de vibrar do sistema mudam e os vetores modais tornam-se não correspondentes;
- o sistema é não linear;
- há existência de ruído; e
- quando os modos de vibrar são independentes.

enquanto os valores de **MAC** próximos a 1 indicam:

- ruído afeta ambas as medidas dos vetores modais;
- o número de graus de liberdade é insuficiente, *i.e.*, a ordem assumida para o sistema não é representativa; e
- os modos de vibração são proporcionais.

Dessa forma, deve-se tomar cuidado para interpretar as razões que levam o **MAC** a assumir valores próximos a 0 ou 1. A partir deste indicador, pode-se estabelecer se o ensaio realizado será aceito ou propor modificações na arquitetura do experimento, de forma a melhorar os resultados obtidos.

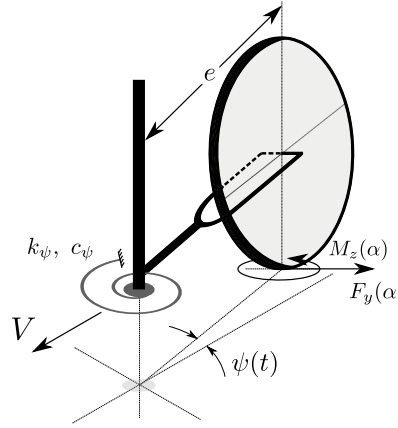
3 Identificação da Planta Estrutural do Trem de Pouso

O objetivo geral deste capítulo é utilizar o método **ERA** para identificar a planta estrutural de um trem de pouso. Para isto, será apresentado o contexto da aplicação da identificação de sistemas associados a análise de trens de pouso, posteriormente parte da resposta livre do modelo matemático do trem de pouso suspenso será utilizada como entrada para o algoritmo de identificação e os parâmetros dinâmicos do sistema estrutural de modos de vibração, frequências naturais e amortecimento modal serão obtidos e comparados com os parâmetros modais obtidos através do modelo analítico do sistema.

3.1 Modelos de Trens de Pouso

A Figura 3 mostra um modelo simplificado de trem de pouso de uma aeronave. Este modelo é composto por um pneu posicionado a uma distância e do eixo de rotação através de uma estrutura. Este eixo, é formado pelo pistão do amortecedor óleo-pneumático e pelas tesouras, cuja função é resistir à rotação do conjunto e permitir o deslocamento axial do pistão, considerado no modelo através da rigidez k_ψ . São mostrados ainda a força lateral $F_y(\alpha)$ e momento auto-alinhante $M_z(\alpha)$ na interface pneu/solo. Estes esforços são responsáveis pela controlabilidade direcional da aeronave em solo e também a origem da vibração auto-excitada.

Figura 3 – Modelo de um grau de liberdade de trem de pouso.



Fonte: Elaborado pelo autor

O modelo dinâmico linear de trem de pouso é caracterizado por dois regimes dinâmicos: um regime estável, em que as perturbações são atenuadas para que o sistema retorne à posição de equilíbrio, e um regime instável, em que as perturbações crescem exponencialmente de forma oscilatória ou divergente do equilíbrio. O shimmy ocorre quando os parâmetros do sistema mudam tornando-o instável, de forma oscilatória. Esta situação pode acontecer, por exemplo, durante a corrida de decolagem de uma aeronave,

em que a velocidade varia do repouso até a decolagem. A ocorrência do shimmy no trem de pouso durante as etapas em solo pode comprometer a controlabilidade da aeronave, reduzir a vida do trem de pouso por fadiga mecânica e em casos mais severos, a quebra de componentes.

O sistema de equações diferenciais que modela a dinâmica linear de shimmy de um trem de pouso principal é, de acordo com Besselink (2000) co'mposto pela Equação 84, que representa a dinâmica da estruturas associado aos esforços do pneu na zona de contato, e a Equação 85 que governa a dinâmica do pneu e dos esforços.

$$I_t \ddot{\psi}(t) + c_\psi \dot{\psi}(t) + k_\psi \psi(t) = -e C_{f\alpha} \alpha(t) + C_{m\alpha} \alpha(t) \quad (84)$$

$$\sigma \dot{\alpha}(t) + V \alpha(t) = (e - a) \dot{\psi}(t) + V \psi(t) \quad (85)$$

em que $\alpha(t)$ representa o ângulo de deriva do pneu, σ o comprimento de relaxação do pneu e a o comprimento da zona de contato do pneu com o solo. Tem-se ainda $C_{f\alpha}$ e $C_{m\alpha}$ que representam os coeficientes angulares da reta tangente às funções, essencialmente não lineares, $F_y(\alpha)$ e $M_z(\alpha)$ em torno do ponto de operação $\alpha = 0$. Tem-se ainda o coeficiente de rigidez k_ψ do termo que representa o momento restaurador elástico, o coeficiente de dissipação viscosa c_ψ do termo dissipativo e a inércia I_t do conjunto em relação ao eixo de rotação. Escrevendo este sistema de equações diferenciais na forma de espaço de estados obtêm-se a Equação 86.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (86)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ representa o vetor coluna com as variáveis de estado e é dado por

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \dot{\psi}(t) \quad \psi(t) \quad \alpha(t) \right\}^T \quad (87)$$

e \mathbf{A} a matriz dinâmica do sistema, cujos autovalores regem o regime dinâmico em que este sistema linear opera, sendo esta definida pela Equação 88.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-c_\psi}{I_t} & \frac{-k_\psi}{I_t} & \frac{F_z(-C_{f\alpha}e + C_{m\alpha})}{I_t} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{e-a}{\sigma} & \frac{V}{\sigma} & \frac{-V}{\sigma} \end{bmatrix} \quad (88)$$

A razão pela qual a matriz \mathbf{A} contém a informação do comportamento dinâmico do sistema se deve pelo fato da resposta do sistema linear ser dada como mostra a Equação 89.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \phi_1 e^{s_1 t} + c_2 \phi_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n \phi_n e^{s_n t} \quad (89)$$

onde n é a ordem do sistema, ϕ_i os autovetores e s_i os autovalores de \mathbf{A} . Tem-se ainda c_i

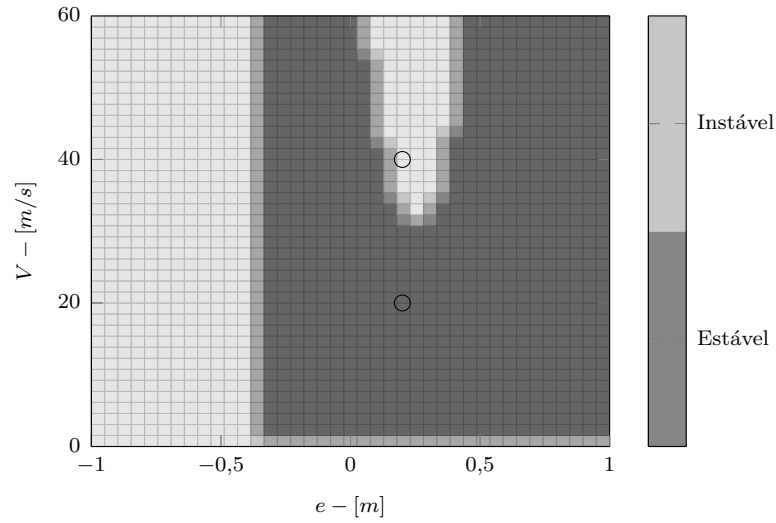
as constantes que dependem das condições iniciais do sistema, obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (90)$$

Caso os autovalores de \mathbf{A} apresentem parte real negativa, seus respectivos termos exponenciais tornam-se menores com o tempo até retornar ao estado de equilíbrio, esta situação corresponde ao regime dinâmico estável. A situação oposta, na qual ao menos um dos autovalores tem parte real positiva, o termo exponencial respectivo é crescente, e conseqüentemente a resposta total também é, levando-a ao afastamento do estado de equilíbrio. A situação descrita caracteriza o regime dinâmico instável. Caso estes sejam números puramente reais, trata-se do regime divergente, enquanto para o caso complexo, trata-se do caso oscilatório, sendo este último regime, particularmente para os trens de pouso, conhecido como shimmy de trem de pouso.

Uma vez que com o conhecimento dos autovalores do sistema de equações lineares torna-se possível determinar o regime dinâmico da resposta, pode-se variar os parâmetros do sistema e ter uma visão geral da estabilidade do trem de pouso em função dos espaço de parâmetros. Considerando o caso de variação da velocidade e de uma variável de projeto, pode-se construir mapas de estabilidade, conforme mostrado na Figura 4. As regiões estáveis e instáveis são identificadas de modo qualitativo, as regiões instáveis são representadas pela cor cinza claro, enquanto as regiões estáveis por cinza escuro. Dessa maneira, caso o sistema tenha os parâmetros e e V representados pelo ponto de coordenadas $(0,2; 20)$, o sistema é estável, ao aumentar a velocidade para um novo ponto de operação, $(0,2; 40)$, o sistema torna-se instável. Os marcadores \circ que representam estas condições de operação estão indicados na Figura 4.

Figura 4 – Mapa de estabilidade linear do trem de pouso.

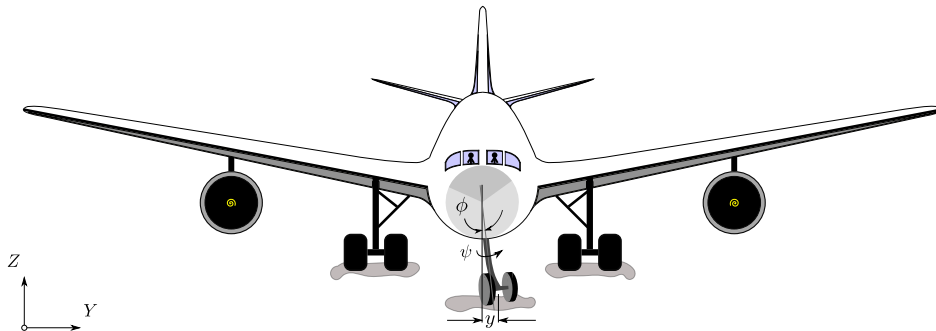


Fonte: Adaptado de Besselink (2000)

A discussão sobre a estabilidade do modelo linear em função da variação dos parâmetros é alvo de diversos trabalhos relacionados à ocorrência do shimmy em trens de pouso como em Besselink (2000), sendo este o primeiro passo adotado antes de refinar o modelo com a inclusão de mais graus de liberdade no modelo dinâmico, como o modo longitudinal e o movimento lateral, que será apresentado na próxima seção.

3.2 Trem de Pouso com Flexibilidade Lateral

Figura 5 – Vista frontal de um avião e representação da flexibilidade lateral e torsional do trem de pouso dianteiro.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 5 mostra um avião cujo trem de pouso está torcido por um ângulo ψ e defletido de uma distância y do plano de simetria da aeronave formado pelos versores \hat{i} e \hat{k} . Considerando um modelo simples de viga engastada com carga aplicada na extremidade livre, que representa a flexibilidade da estrutura do trem de pouso, tem-se que a deflexão

y do trem de pouso na extremidade é, conforme Hibbeler (2010), dado por:

$$y = \frac{L^3}{6EI}q = kq \quad (91)$$

onde I é o momento de inércia de área, E o módulo de elasticidade, L o comprimento do trem de pouso e q a carga aplicada. Associado a deflexão lateral, tem-se a torção ϕ da fuselagem no sentido do versor \hat{k} , que desloca o trem de pouso de ϕL na direção \hat{j} . Dessa forma, a rigidez lateral do trem de pouso pode ser tratada como uma rigidez equivalente k_y devido a influência tanto da flexibilidade lateral do trem de pouso quanto da flexibilidade torsional da fuselagem.

A rigidez lateral é de grande importância no modelo, uma vez que, conforme investigado em Howcroft et al. (2013), diferentes formas de instabilidade podem ocorrer em razão da variação de rigidez do trem de pouso. Já que a mudança de rigidez é inata ao funcionamento do amortecedor óleo-pneumático, pela variação do comprimento L , a investigação detalhada da dinâmica do trem de pouso para diferentes configurações de operação é essencial para evitar problemas de vibrações durante o funcionamento da aeronave.

O modelo matemático do trem de pouso com flexibilidade lateral, obtido através das equações dinâmicas do movimento de Newton-Euler em conjunto com o modelo de linear para o pneu é mostrado nas Equações 92 a 94.

$$m\ddot{y}(t) + c_y\dot{y}(t) + ec_y\dot{\psi}(t) + k_y y(t) + ek_y\psi(t) = C_{f\alpha}\alpha(t) \quad (92)$$

$$I_z\ddot{\psi}(t) + ec_y\dot{y}(t) + (e^2c_y + c_\psi)\dot{\psi}(t) + ek_y y(t) + (e^2k_y + k_\psi)\psi(t) = C_{m\alpha}\alpha(t) \quad (93)$$

$$\sigma\dot{\alpha}(t) = -\dot{y}(t) - a\dot{\psi}(t) + V\psi(t) - V\alpha(t) \quad (94)$$

Como uma etapa subsequente, a inclusão das não linearidades no modelo, mostrado em Atabay e Ibrahim (2012), permite um refino significativo para a análise, uma vez que o regime dinâmico de ciclo limite, observado em medidas experimentais, é obtido somente pela análise de sistemas não lineares. Este tópico é explorado utilizando sistemas *quasi*-lineares, como em Somieski (1997) e Somieski (2001), ou por meio de análise de bifurcação utilizando softwares dedicados, conforme mostrado em Terkovics et al. (2014).

Até então, as análises estavam condicionadas ao domínio computacional, contudo, para se ter um modelo computacional representativo, o conhecimento com exatidão dos parâmetros físicos e geométricos do modelo é fundamental. Para isso, propõe-se um experimento em que se suspende o trem de pouso do solo para extrair os parâmetros modais a partir dos dados experimentais do sistema.

3.2.1 Planta Estrutural

O sistema de equações diferenciais que representam a dinâmica do trem de pouso suspenso com flexibilidade lateral é obtido por meio da eliminação dos termos relativos à dinâmica do pneu das Equações 92 e 93. O resultado deste processo é mostrado nas Equações 95 e 96

$$-m\ddot{y}(t) + c_y\dot{y}(t) + ec_y\dot{\psi}(t) + k_y y(t) + ek_y\psi(t) = 0 \quad (95)$$

$$-I_z\ddot{\psi}(t) + ec_y\dot{y}(t) + (e^2c_y + c_\psi)\dot{\psi}(t) + ek_y y(t) + (e^2k_y + k_\psi)\psi(t) = 0 \quad (96)$$

Definindo o vetor coluna $\mathbf{x}^T(t) = \begin{Bmatrix} y(t) & \psi(t) \end{Bmatrix}$ e agrupando os termos, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_y & ec_y \\ ec_y & e^2c_y + c_\psi \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_y & ek_y \\ ek_y & e^2k_y + k_\psi \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} y(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad (97)$$

cuja ordem do sistema de equações é reduzida ao representar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem na forma de espaço de estados conforme Equações 23 e 24.

Para a simulação de um sistema real de trem de pouso suspenso, foram arbitrados parâmetros conforme mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros do modelo de trem de pouso utilizado para as simulações.

Parâmetro	Valor	Dimensão
e	0,3	m
k_ψ	100000	$N.rad^{-1}$
k_y	1000000	$N.m^{-1}$
c_ψ	50	$N.s.rad^{-1}$
c_y	25	$N.s.m^{-1}$
m	17,65	kg
I_z	0,66	$kg.m^2$

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a definição destes parâmetros, a resposta analítica $\mathbf{x}(t)$ do sistema pode obtida por meio das Equações 89 e 90.

3.3 Simulação do Experimento

Supondo que o sistema em estudo seja perturbado $m = 2$ vezes e monitorado por $p = 2$ sensores, medindo diretamente as variáveis de estado do deslocamento angular $\psi(t)$

e deslocamento lateral $y(t)$, tem-se que a matriz de saída é:

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi(t) \\ y(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad (99)$$

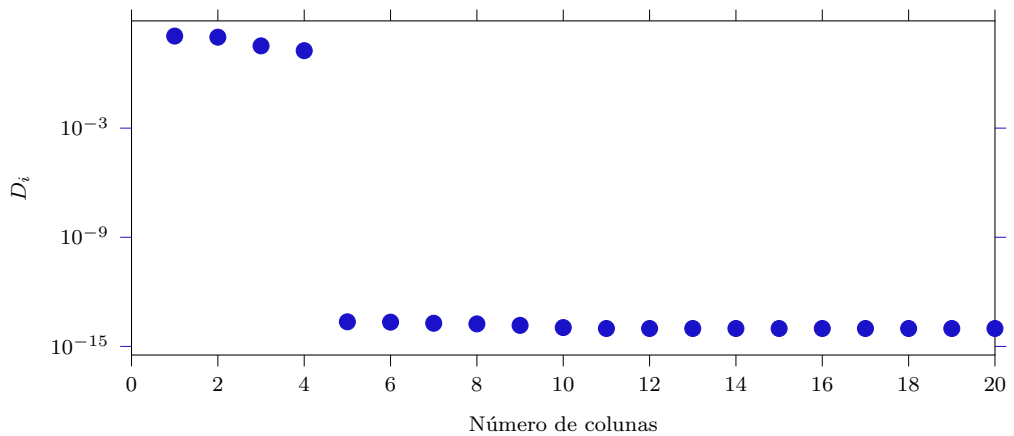
Os dados de saída do sistema contínuo são amostrados em tempo discreto com período de amostragem Δt , sendo que o resultado dessa amostragem é o sinal $\mathbf{y}[k]$, com $k \in [0, 1, \dots, N]$ com N sendo o número de amostras.

Utilizando os dados dos sensores de cada experimento, pode-se construir a matriz \mathbf{Y} como:

$$\mathbf{Y}[k] = \begin{bmatrix} \psi_1[k] & \psi_2[k] \\ y_1[k] & y_2[k] \end{bmatrix} \quad (100)$$

e de sua posse, pode-se montar a matriz de Hankel. Primeiramente, escolheu-se $r = s = 20$ e fez-se a decomposição **SVD**. Analisando os valores singulares, mostrados na Figura 6, observa-se que há 4 valores significativos, que apresentam ordem de grandeza superior aos demais, que podem ser considerados numericamente nulas. Diante deste cenário, pode-se representar a matriz de Hankel através de 4 colunas de \mathbf{P} e 4 linhas de \mathbf{Q} conforme procedimento da Equação 60.

Figura 6 – Valores Singulares em função da coluna da Matriz de Hankel.



Fonte: Elaborado pelo autor

Determinado o posto da matriz de Hankel, a identificação das matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d e

\mathbf{C}_d é feita utilizando as Equações 101, 102 e 103. Estas matrizes são mostradas abaixo:

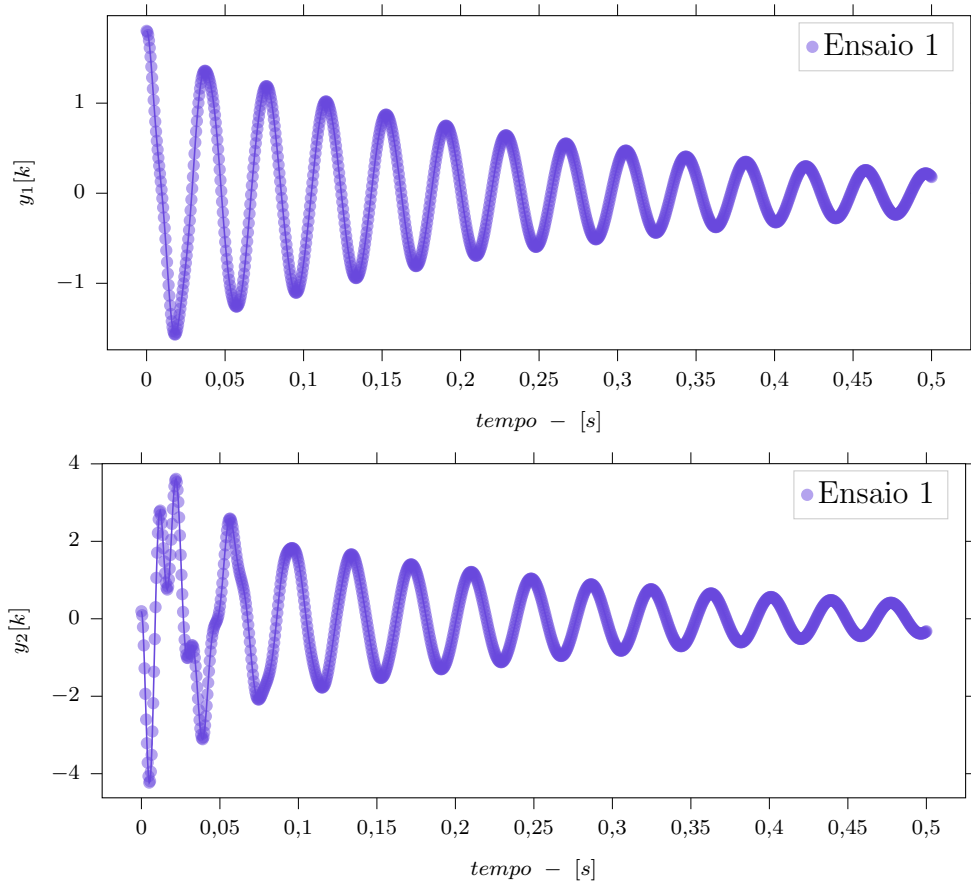
$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0,9830 & -0,2083 & 0,0634 & 0,0100 \\ 0,2165 & 0,9215 & 0,0112 & 0,0777 \\ -0,0775 & 0,0495 & 1,1139 & -0,1273 \\ -0,0256 & -0,0889 & 0,3219 & 0,8577 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} -0,6800 & -1,4173 \\ 0,8979 & 2,9848 \\ -0,1589 & -1,1696 \\ 1,1714 & 2,0026 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} -0,9224 & -0,0406 & -1,0511 & 0,8920 \\ 1,0222 & 3,2773 & -0,0341 & -1,7572 \end{bmatrix} \quad (103)$$

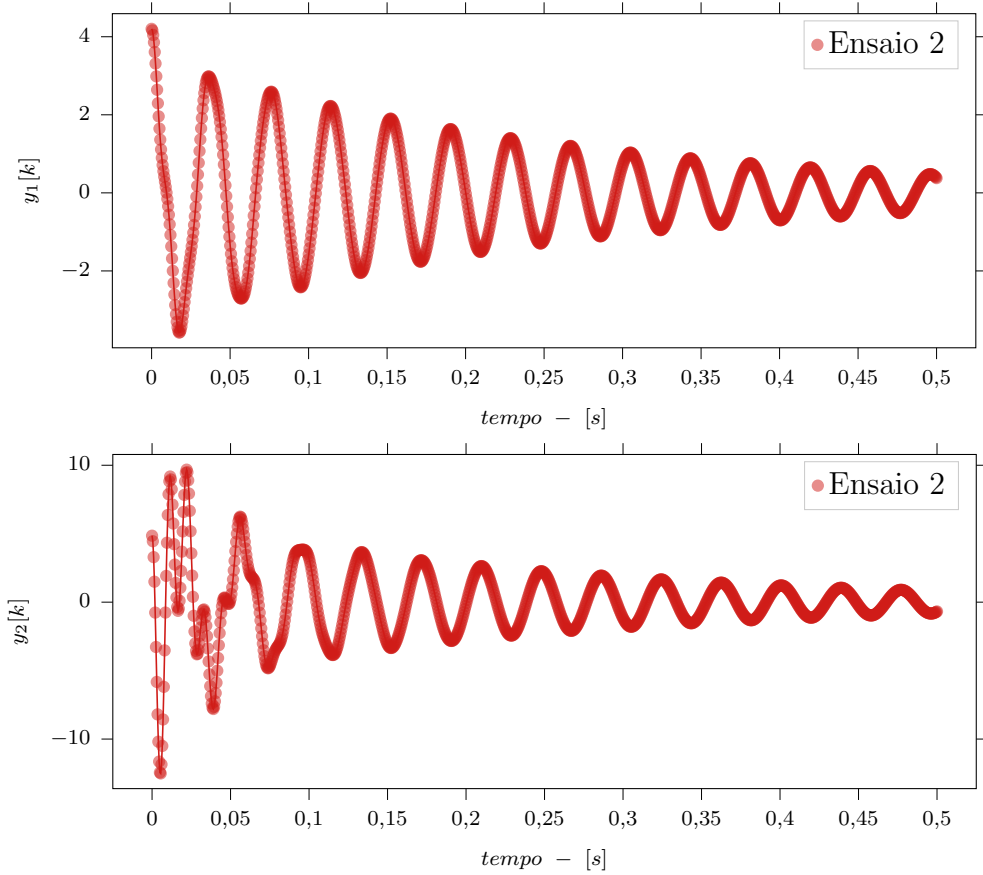
Utilizando este conjunto de matrizes identificadas, pode-se reconstruir a saída observada pelos sensores a partir da aplicação Equação 78 e comparar com os dados utilizados para identificar o sistema. A saída reconstruída é mostrada na Figura 7, reproduzindo adequadamente a observação do sensor para ambos os ensaios.

Figura 7 – Comparativo entre a resposta temporal do sistema simulado e do sistema identificado do ensaio um. Os marcadores \bullet representam o sistema identificado e a linha contínua os dados de entrada para o algoritmo.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8 – Comparativo entre a resposta temporal do sistema simulado e do sistema identificado do ensaio dois. Os marcadores \bullet representam o sistema identificado e a linha contínua os dados de entrada para o algoritmo.



Fonte: Elaborado pelo autor

3.3.1 Parâmetros Modais

O algoritmo **ERA** é utilizado para a identificação dos parâmetros modais do sistema. Estes parâmetros são obtidos a partir dos autovalores z da matriz dinâmica \mathbf{A}_d identificada. Cabe salientar, que uma vez que esta matriz é definida no domínio discreto, é preciso transformar seus autovalores para o domínio contínuo através da transformação $s_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t}$, em que Δt é o período de amostragem dos dados. Dessa forma, é possível comparar os autovalores do sistema identificado com o do sistema analítico.

Conforme mostrado na Tabela 3, ambas as abordagens analítica e numérica são capazes de fornecer a informação dos parâmetros modais de frequências naturais e fatores de amortecimento modal do sistema, sendo o valor obtido igual entre as abordagens.

Tabela 3 – Comparativo dos parâmetros modais obtidos de forma analítica e pela simulação do experimento.

	Analítico	Identificado
$z_{i,i+1}$	-	$0,9434 \pm 0,2725j$
	-	$0,9946 \pm 0,0820j$
$s_{i,i+1}$	$-36,2824 \pm 561,8390j$	$-36,2824 \pm 561,8390j$
	$-4,0091 \pm 164,5171j$	$-4,0091 \pm 164,5171j$
$\omega_{i,i+1}$	563,0093	563,0093
	164,5660	164,5660
$\zeta_{i,i+1}$	0,0644	0,0644
	0,0243	0,0243

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o sistema analítico descrito na forma de espaço de estados da Equação 23, os autovetores complexos contêm informação tanto da razão de deslocamento, ϕ_x , quanto da razão de velocidade $\phi_{\dot{x}}$ para cada autovalor do sistema.

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{x,i} \\ \phi_{\dot{x},i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{x,i} \\ \lambda_i \phi_{x,i} \end{Bmatrix} \quad (104)$$

Os modos de vibração relacionados ao deslocamento do sistema analítico são dados abaixo:

$$\phi_1 = \phi_2^* = \begin{Bmatrix} -2,3415e - 05 - 1,1301e - 04j \\ -4,9663e - 05 + 3,0236e - 03j \end{Bmatrix} \quad (105)$$

$$\phi_3 = \phi_4^* = \begin{Bmatrix} -1,1422e - 04 - 1,7687e - 03j \\ -1,2840e - 04 - 5,2690e - 03j \end{Bmatrix} \quad (106)$$

Para o sistema identificado, os modos de vibração dos sensores de deslocamento são dados pelas colunas de $\mathbf{C}_{id}\phi_{id}$, que são mostrados abaixo:

$$\mathbf{C}_{id}\phi_{id}(:,1) = \mathbf{C}_{id}\phi_{id}^*(:,2) = \begin{Bmatrix} -7,5392e - 02 - 1,2016e - 01j \\ -5,7259e - 01 + 4,0529e - 01j \end{Bmatrix} \quad (107)$$

$$\mathbf{C}_{id}\phi_{id}(:,3) = \mathbf{C}_{id}\phi_{id}^*(:,4) = \begin{Bmatrix} -8,8938e - 01 - 1,9886e + 00j \\ 9,6833e - 01 - 7,4648e - 01j \end{Bmatrix} \quad (108)$$

Utilizando os modos de vibração do sistema identificado e do sistema analítico, pode-se

calcular a correlação cruzada entre os modos através utilizando o **MAC**.

$$\text{MAC}_{\phi-\phi_{id}} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6951 \\ 0,6951 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad (109)$$

e o Auto-**MAC** dos modos, *i.e.*, a correlação dos modos consigo mesmos, mostrada nas Equações 110 e 111 para ambos os sistemas analítico e identificado respectivamente é:

$$\text{MAC}_{\phi-\phi} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6951 \\ 0,6951 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad (110)$$

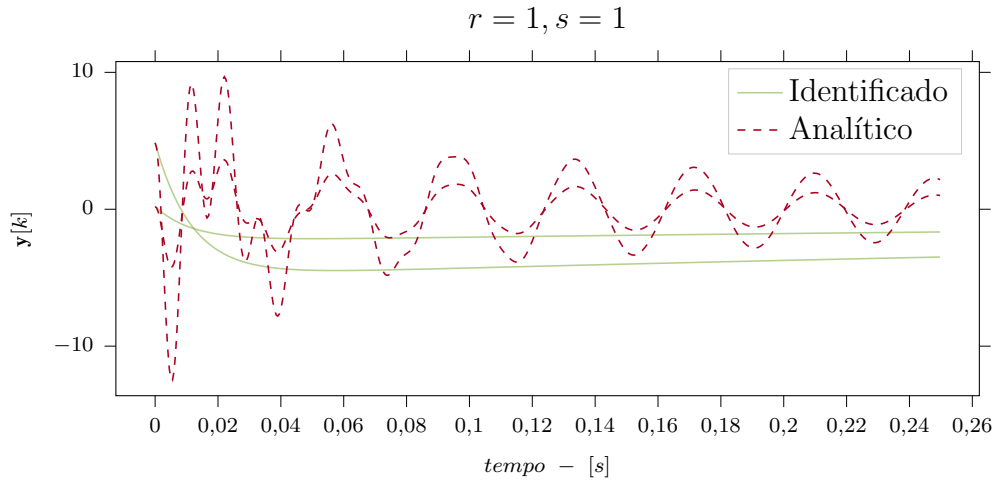
$$\text{MAC}_{\phi_{id}-\phi_{id}} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6951 \\ 0,6951 & 1,0000 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Uma vez que o sinal utilizado é isento de ruído e o sistema analítico cujos dados foram simulados é linear, pode-se assumir que os modos identificados e analíticos são proporcionais, indicando correspondência entre o sistema identificado com o analítico. Em conjunto com os parâmetros modais obtidos através dos autovalores identificados, mostrados na Tabela 3, pode-se assumir que o algoritmo **ERA** foi capaz de extrair os parâmetros modais do sistema a partir dos dados temporais de saída amostrados pelo sistema de aquisição de dados.

3.3.2 Escolha da ordem da matriz de Hankel

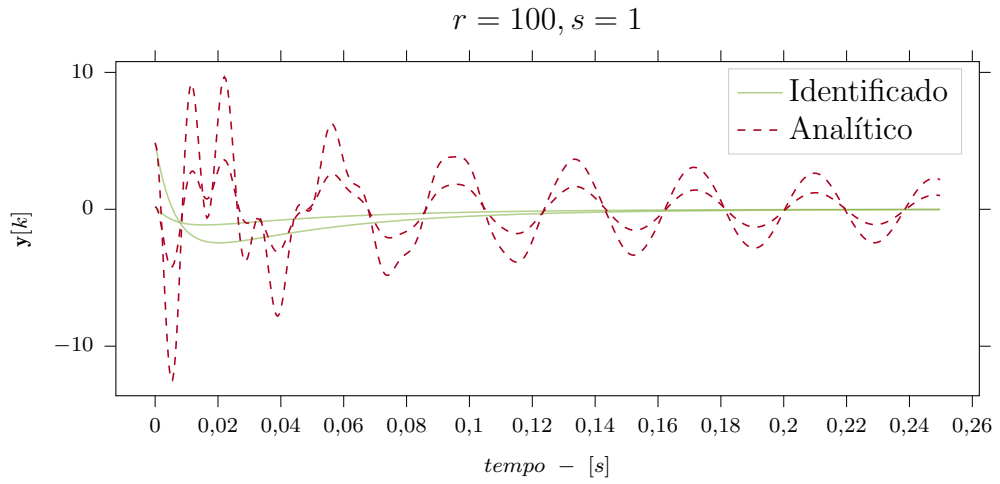
A influência de r e s na identificação do sistema pode ser feita arbitrando valores e comparando a reconstrução das saídas identificadas com os dados utilizados para alimentar o algoritmo. Nas Figuras 9, 11, 10, 12 e 13, pode-se verificar que a capacidade de reconstrução das saídas depende das escolhas de r e s , apresentando bons resultados combinando valores de $r \geq 2$ e $s \geq 2$.

Figura 9 – Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 1$ e $s = 1$ e dados do sistema analítico.



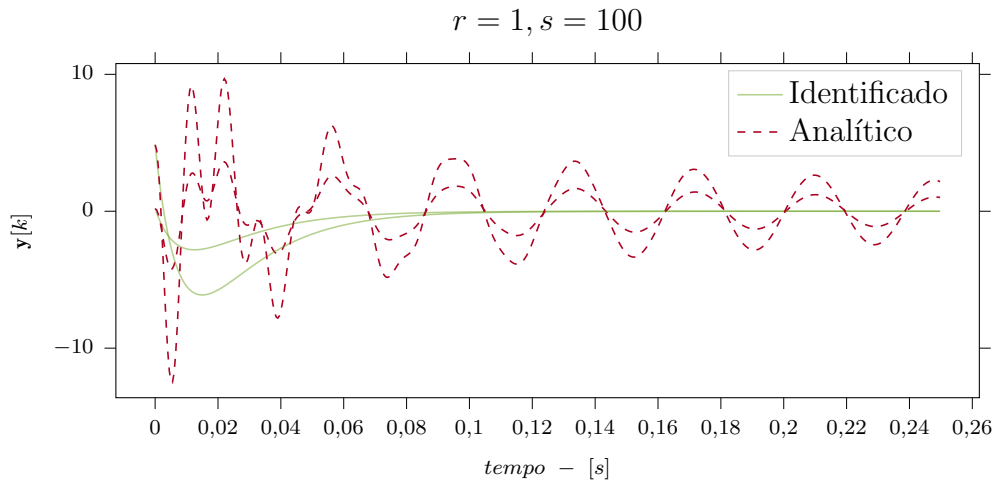
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 10 – Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 100$ e $s = 1$ e dados do sistema analítico.



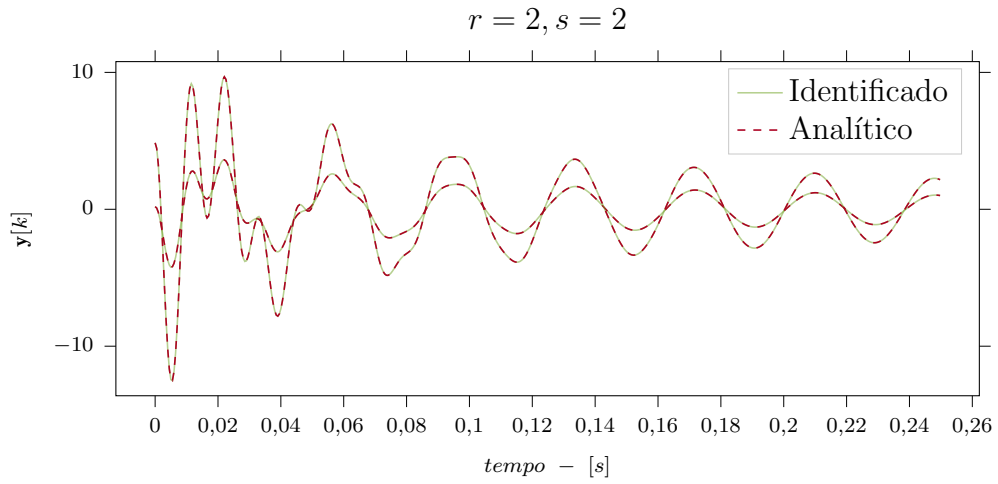
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 11 – Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 1$ e $s = 100$ e dados do sistema analítico.



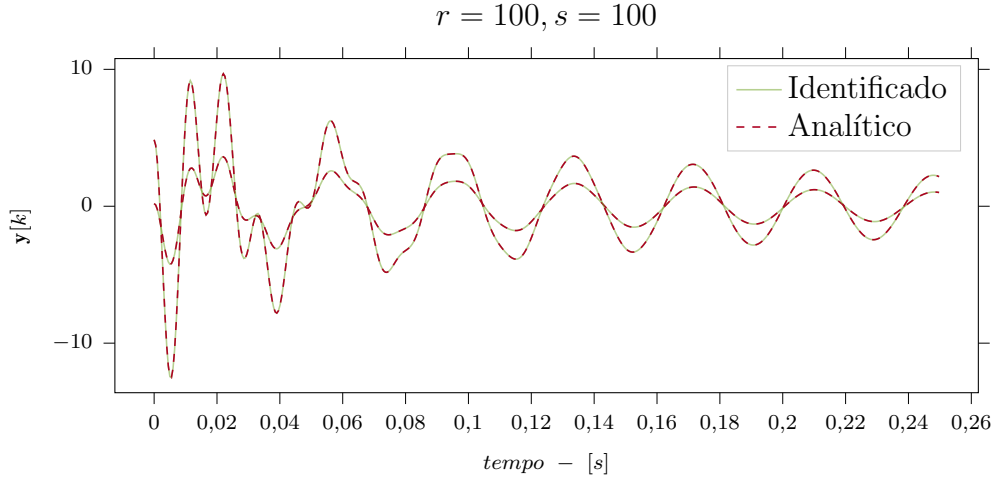
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12 – Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 2$ e $s = 2$ e dados do sistema analítico.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13 – Comparação entre a saída do sistema identificado com $r = 100$ e $s = 100$ e dados do sistema analítico.



Fonte: Elaborado pelo autor

Aumentando a quantidade de sensores para $p = 6$, assumindo que os sensores meçam uma combinação linear dos estados $\psi(t)$ e $y(t)$ e realizando procedimento idêntico de comparação dos dados identificados e analíticos, tem-se que os resultados são satisfatórios, assim como o caso anterior, para combinações de $r \geq 2$ e $s \geq 2$, independente da quantidade de realizações m do experimento.

Entretanto, assumindo que os sensores são função também das velocidades $\dot{\psi}(t)$ e $\dot{y}(t)$, e realizando o mesmo procedimento para o caso de $p = 6$ sensores, têm-se resultados satisfatórios para as combinações de $r \geq 2$ e $s \geq 2$ com $m = 2$, porém com $m = 3$, a combinação adequada é $r \geq 1$ e $s \geq 2$. Aumentando o número de experimentos para, por exemplo, $m = 10$, com $p = 2$, as combinações de $r \geq 2$ com $s \geq 1$ tornam-se adequadas.

3.3.3 Influência do ruído de medição

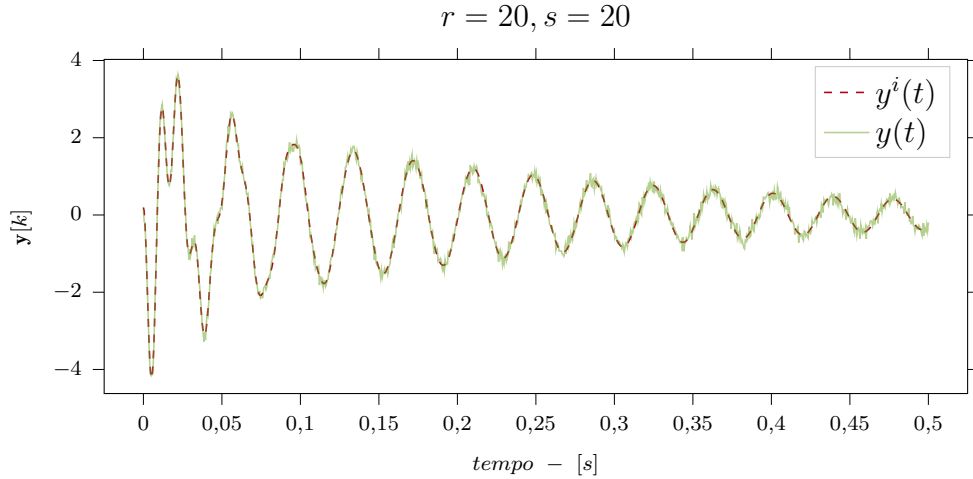
Uma das considerações no desenvolvimento das equações da Seção 3.3.1 é que os sensores capturam o comportamento determinístico do sistema. Essa hipótese pode levar o algoritmo a ser inadequado do ponto de vista prático, em que há contaminação do sinal com ruído, por tentar modelar matematicamente o ruído como parte da dinâmica do sistema.

De forma a avaliar o comportamento do algoritmo implementado quando o sinal contém ruído, é feita a suposição de que o sinal de saída esteja contaminado, sendo composto de uma parcela determinística, chamada de $\mathbf{y}^i[k]$, originada pela dinâmica do sistema, e uma estocástica $\mathbf{e}[k]$, que ocorre devido às interferências durante a transmissão, armazenamento e processamento dos sinais dentre outros, a Equação 112 representa essas considerações:

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{y}^i[k] + \mathbf{e}[k] \quad (112)$$

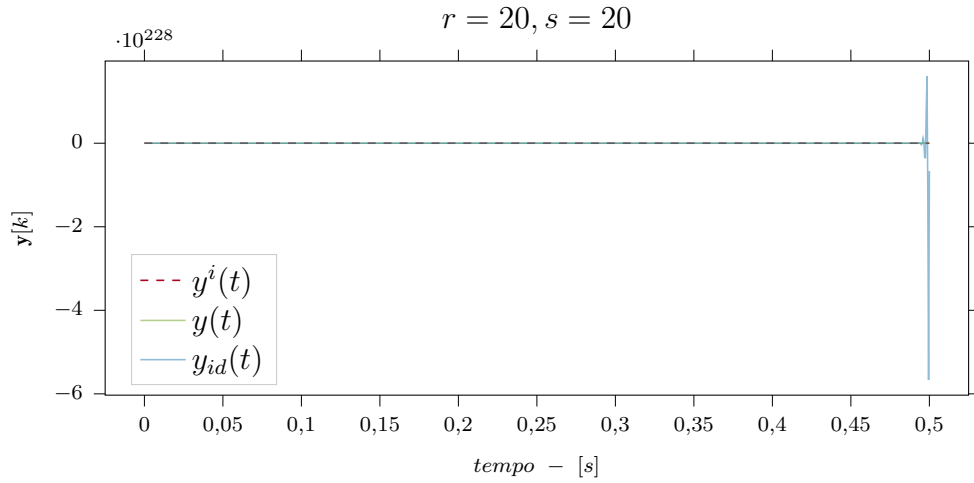
Suponha a realização de um experimento com $p = 1$, $q = 1$, cuja amostragem do sinal $\mathbf{y}[k]$ seja contaminado por uma sinal de natureza aleatória $\mathbf{e}[k]$ com comportamento característico de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de média nula $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 0,1$. O sinal isento de ruído e o sinal contaminado são mostrados na Figura 14. Observe que o sinal contaminado ainda preserva as características dinâmicas do sistema, entretanto, aplicando o algoritmo de identificação com o método **ERA** em condições semelhantes dos casos anteriores, salvo a quantidade de experimentos e sensores, observa-se que a reprodução dos estados é inadequada, conforme mostra-se na Figura 15. Isto ocorre em razão da ordem do sistema identificado ser superior à ordem do sistema físico, fazendo com que modos computacionais instáveis, *i.e.*, com parte real do autovalor positiva, sejam identificados e incorrendo em problemas de instabilidade numérica na reprodução da saída do sistema.

Figura 14 – Saída do sistema na ausência e na presença de contaminação com ruído de medição.



Fonte: Elaborado pelo autor

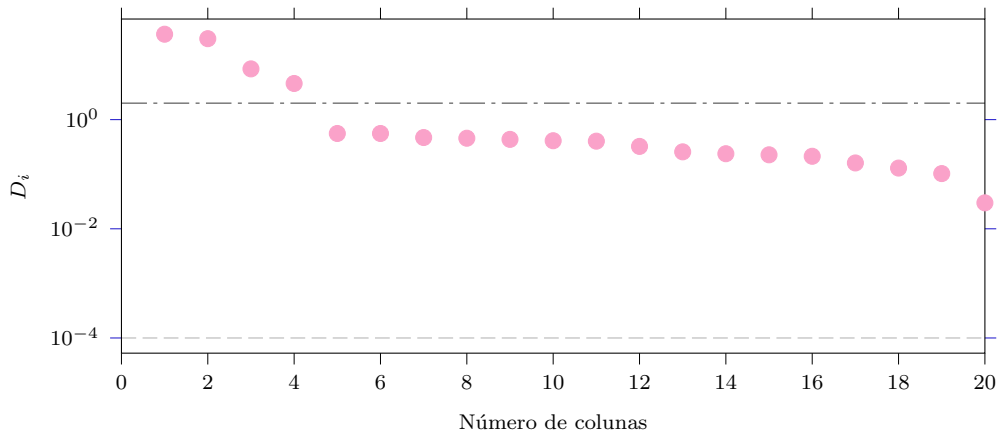
Figura 15 – Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado.



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse comportamento é dado em razão do algoritmo tentar reproduzir o ruído do mesmo modo que o faz com o sinal determinístico, dando importância a contribuição do ruído, este efeito leva a um aumento da contribuição dos valores singulares devido ao ruído, fazendo com que o limite estabelecido de $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ adotado nos casos anteriores para truncar a matriz de Hankel, mostrado em linha tracejada na Figura 16, fosse inadequado para estimar a ordem do sistema físico com sinal contaminado. Este efeito é intensificado quando se eleva a variância σ^2 do ruído aleatório.

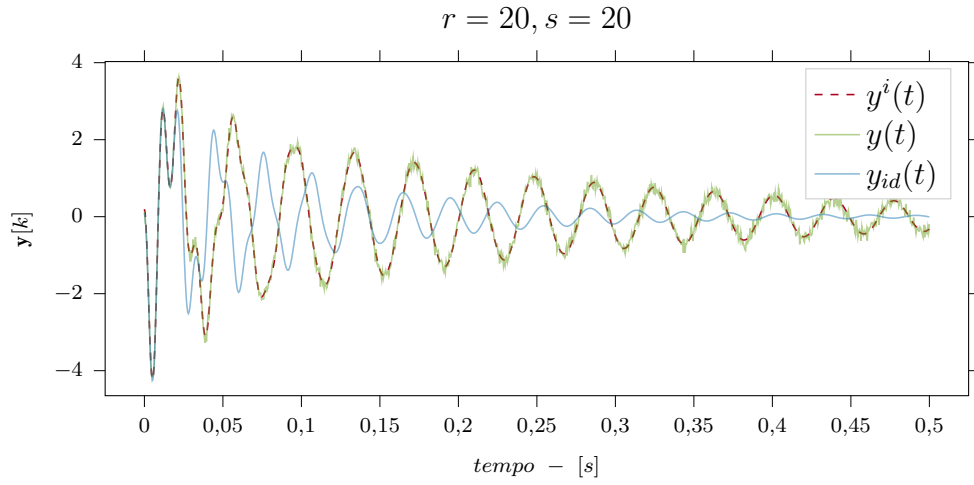
Figura 16 – Valores singulares do sistema na presença de ruído.



Fonte: Elaborado pelo autor

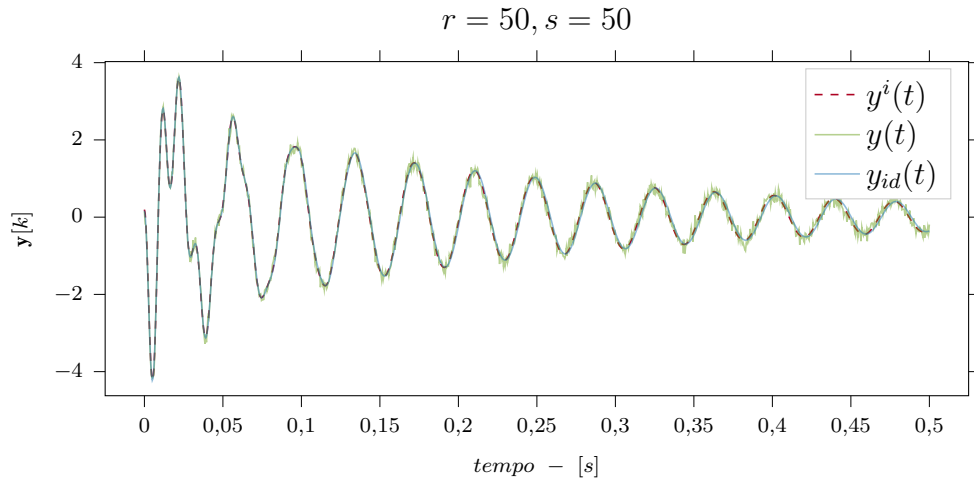
Modificando o limite para $\epsilon = 2 \times 10^0$, mostrado em linha tracejada e pontilhada, verifica-se que, conforme mostrado na Figura 17, o sistema identificado é incapaz de reproduzir os dados de ensaio. Alterando os parâmetros do algoritmo para $r = 50$ e $s = 50$, consegue-se reproduzir adequadamente os dados para o intervalo avaliado.

Figura 17 – Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado com $r = s = 20$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 18 – Comparação entre a saída do sistema identificado com o sinal contaminado com $r = s = 50$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, observa-se que os parâmetros modais do sistema com ruído, mostrado na Tabela 4, são representativos do sistema real, apresentando erro relativo para os primeiro e segundo modo de 0,27% e 0,32% para as frequências naturais e 1,09% e 1,65% para os amortecimentos modais quando comparados aos parâmetros modais obtidos do sistema analítico.

Tabela 4 – Comparativo dos parâmetros modais do sistema analítico e identificado com dados contaminados.

	Analítico	Identificado + ruído
$s_{i,i+1}$	$-36,2824 \pm 561,8390j$	$-35,7529 \pm 560,3178j$
	$-4,0091 \pm 164,5171j$	$-4,050 \pm 163,9878j$
$\omega_{i,i+1}$	563,0093	561,4573
	164,5660	164,0378
$\zeta_{i,i+1}$	0,0644	0,0637
	0,0243	0,0247

Fonte: Elaborado pelo autor

Através da variação dos parâmetros do algoritmo e da introdução de contaminação no sinal, pode-se verificar a influência da escolha dos parâmetros na identificação do sistema. Verificou-se que o algoritmo funciona adequadamente mesmo em condição de sinal ruidoso, entretanto, nessas condições, torna-se difícil determinar a ordem física do sistema através dos valores singulares, principalmente quando a relação de sinal/ruído é baixa. Dessa forma, formulações alternativas utilizando a correlação de sinais devem apresentar um desempenho superior ao método apresentado.

4 Considerações Finais

A identificação de sistemas é uma área de grande abrangência utilizada como elo entre os domínios experimental e computacional. Isto se deve ao fato de poder complementar modelos matemáticos utilizando dados de entrada e saída de forma que os resultados apresentados no modelo correspondam às observações experimentais. A disposição de modelos computacionais traz inúmeras possibilidades para o analista, que vão desde a praticidade de simular condições diferentes das utilizadas durante a campanha de ensaios, até o monitoramento de estruturas de grande responsabilidade.

Dentre os métodos de identificação de sistemas, o algoritmo **ERA** permite a obtenção de um modelo de mínima ordem que represente a dinâmica de um sistema a partir do conhecimento da resposta ao impulso do sistema. Além disso, pode-se extrair os parâmetros modais de frequência natural, modos de vibrar e fatores de amortecimento do sistema dinâmico utilizando as matrizes dinâmicas identificadas pelo algoritmo. Embora o método seja utilizado para obter modelos lineares e invariantes no tempo na forma de espaço de estados, inúmeros sistemas podem ser descritos de tal forma, inclusive sistemas não lineares apresentam faixas de operação que podem ser linearizadas e expressas de maneira linear. Diante disso, são inúmeras as situações em que se pode aplicar o algoritmo para obter modelos matemáticos ou parâmetros modais.

Diante disso, neste trabalho foram utilizados dados simulados de um modelo matemático de um sistema mecânico de trem de pouso na configuração suspensa com o objetivo de determinar seus parâmetros modais através da resposta livre do sistema. Essa situação representa um ensaio experimental em que se têm à disposição dados dos sensores de deslocamento, velocidade e aceleração, obtidos após perturbar o sistema mecânico de seu estado de equilíbrio. Por meio dos dados amostrados adequadamente, pode-se construir a matriz de Hankel com os chamados parâmetros de Markov do sistema, e fatorizá-la utilizando o algoritmo de decomposição em valores singulares. Este passo é de grande importância, pois através dos valores singulares, pode-se estimar a ordem real do sistema, mesmo em condições em que os dados dos sensores estão contaminados com ruído de medição, além disso, torna-se possível reduzir a ordem do sistema através da truncagem das matrizes identificadas e, desse modo, obter uma representação de ordem mínima.

O resultado deste procedimento são as matrizes dinâmicas identificadas de ordem mínima, que representam a causalidade entrada-saída. Através destas matrizes, foi possível extrair os parâmetros modais de frequências naturais e fator de amortecimento, além dos modos de vibração, que apresentaram boa correspondência, de acordo com o critério **MAC**, com os modos do sistema obtidos de forma analítica. Além disto, foram simuladas configurações distintas de ensaios para discutir a influência de parâmetros como a escolha da ordem da matriz de Hankel e a influência do ruído na identificação do sistema. Diante

de todo o exposto, pode-se concluir que o método **ERA** apresenta grande utilidade para a análise modal experimental de estruturas, pois possibilita o conhecimento dos parâmetros modais pela via experimental, sendo uma ferramenta de grande relevância para o leque de conhecimentos necessários no campo da análise modal de sistemas mecânicos.

4.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Uma vez que os métodos apresentados lidam com o tratamento de dados experimentais, o próximo passo para a pesquisa naturalmente envolve a utilização de dados coletados de um sistema real de trem de pouso. Esta etapa tem grandes desafios, relacionados ao condicionamento do sistema de aquisição de dados, processamento e a análise dos sinais, além, é claro, das dificuldades que envolvem a identificação de um modelo representativo, como a análise da ordem do sistema, a diferenciação dos modos físicos dos computacionais e a extração dos parâmetros modais do modelo. Resolvidos estes problemas, pode-se estudar o fenômeno de shimmy de trens de pouso em detalhes, tornando possível a análise de estratégias para eliminar ou atenuar a vibração do trem de pouso como: mudança da geometria, instalação de amortecedores ou sistemas de controle.

Referências

- AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2015. ISBN 978-85-423-0079-6.
- ATABAY, E.; IBRAHIM, O. On Dynamics of a Landing Gear Mechanism With Torsional Freeplay. *Global Journal of researches in engineering*, v. 12, p. 16, 2012.
- BESSELINK, I. *Shimmy of Aircraft Main Landing Gears*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 2000.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Livros Técnicos e Científicos, 2002. ISBN 9788521613121. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=LMXtAAAACAAJ>>.
- COOPER, J. E. On-line version of the eigensystem realization algorithm using data correlations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 20, n. 1, p. 137–142, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.4007>>.
- CURREY, N. *Aircraft Landing Gear Design: Principles and Practices*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988. (AIAA education series). ISBN 9781601192103. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VxSbtAEACAAJ>>.
- DOEBLING, S. et al. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review. *Technical Report No. LA-13070-MS*, v. 30, 05 1996.
- GUO, Y.; TAN, J. Identification of linear time-invariant systems based on initial condition responses. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 18, n. 2, p. 217–226, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17415970903545108>>.
- HIBBELER, R. *Resistência dos materiais*. Prentice Hall Brasil, 2010. ISBN 9788576053736. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=eLOJQwAACAAJ>>.
- HO, . L.; KALMAN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. In: *Proceedings of the 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*. [S.l.]: Regelungstechnik, 1965.
- HOWCROFT, C. et al. Influence of Variable Side-Stay Geometry on the Shimmy Dynamics of an Aircraft Dual-Wheel Main Landing Gear. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, v. 12, n. 3, p. 1181–1209, 2013.
- JUANG, J.; PAPPA, R. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, v. 8, 11 1985.
- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 9, n. 3, p. 294–303, maio 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.20106>>.

JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters - theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 16, n. 2, p. 320–329, mar 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.21006>>.

PASTOR, M.; BINDA, M.; HARČARIK, T. Modal assurance criterion. *Modelling of Mechanical and Mechatronics Systems*, v. 48, p. 543–548, jan. 2012. ISSN 1877-7058. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812046140>>.

PHAN, M.; JUANG, J.; LONGMAN, R. On markov parameters in system identification. In: . NASA Langley Research Center, 1991. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/citations/19920004241>>.

QUAN, R. System identification using frequency scanning and the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 17, n. 4, p. 670–675, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.21254>>.

RANDALL J., A. The modal assurance criterion – twenty years of use and abuse. *Sound and Vibration*, p. 14–21, Agosto 2003.

RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. Prentice Hall Brasil, 2009. ISSN 9788576052005. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3DSNPgAACAAJ>>.

SOMIESKI, G. Shimmy Analysis of a Simple Aircraft Nose Landing Gear Model Using Different Mathematical Methods. *Aerospace Science and Technology*, p. 545–555, 1997.

SOMIESKI, G. An eigenvalue method for calculation of stability and limit cycles in nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, v. 26, n. 1, p. 3–22, Sep 2001. ISSN 1573-269X.

TERKOVICS, N. et al. Bifurcation analysis of a coupled nose-landing-gear-fuselage system. *Journal of Aircraft*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 51, n. 1, p. 259–272, jan. 2014. ISSN 0021-8669. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/1.C032324>>.

A Algoritmo ERA

O algoritmo para identificação utilizando o **ERA** é apresentado e os principais detalhes comentados:

Bibliotecas

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Acima estão mostradas as principais bibliotecas necessárias para tratamento de matrizes multidimensionais e visualização dos resultados.

Matriz de Hankel

```
def Hankel_free(Y,r,s):
    q,k,p = np.shape(Y)
    H = np.zeros((r*p,q*s))
    H_star = np.zeros_like(H)
    for rows in range(0,r):
        for cols in range(0,s):
            for _q in range(0,q):
                H[rows*p:(rows+1)*p,cols*q+_q] = Y[_q][rows+cols,:]
                H_star[rows*p:(rows+1)*p,cols*q+_q] = Y[_q][rows+cols+1,:]
    return H,H_star
```

Esta função utiliza como argumento os dados formatados como uma matriz multidimensional de ordem $[q \times N \times p]$, onde q é a quantidade de experimentos realizados, N o número de amostras e p o número de sensores. Além disso, os valores de r e s devem ser arbitrados. Estes parâmetros representam a ordem da matriz de Hankel e deve ser grande o suficiente para que toda a dinâmica do sistema esteja contida nesta matriz.

ERA

```
def Free_response_experiment(t,y,r,s,epsilon=1e-4):
    p,q = np.shape(y)[2],np.shape(y)[0]
    H,H_star = Hankel_free(y,r,s)
    input_number = q
    output_number = p
    P,D_vector,Qh = np.linalg.svd(H,full_matrices=False)
    D = np.diag(D_vector)
    Q = Qh.conj().T
    P_d = P@D
    n_orders = [D_vector>=epsilon][0]
    P_tilde = P[:,n_orders]
    D_tilde = np.diag(D[n_orders])
    Q_tilde = Q[:,n_orders]
    P_d_tilde = P_d[:,n_orders]
    D_tilde_half_neg = np.diag(D_vector[n_orders]**-0.5)
```

```

D_tilde_half_pos = np.diag(D_vector[n_orders]**0.5)
E_m = (np.eye(input_number,M=np.shape(Q_tilde)[0])).T
E_p = np.eye(output_number,M=np.shape(P_tilde)[0]).T
A_id = (D_tilde_half_neg @ P_tilde.T) @ H_star @ (Q_tilde
                                                @D_tilde_half_neg)

B_id = D_tilde_half_pos@Q_tilde.T@E_m
C_id = E_p.T@P_tilde@D_tilde_half_pos
Matrice_acumulada = np.eye(N=np.shape(A_id)[0],M=np.shape(A_id)[1])
id_states = np.zeros((q,len(t),p))
lambdas,psi = np.linalg.eig(A_id)
A_d = np.diag(lambdas)
B_d = np.linalg.inv(psi)@B_id
C_d = C_id@psi

k =np.arange(0,len(t))
for _k in k:
    for _q in range(0,q):
        [_q][_k,:]= (C_id@Matrice_acumulada@B_id)[:,_q]
        Matrice_acumulada=Matrice_acumulada@A_id
return {
'A_id':A_id,
'B_id': B_id,
'C_id': C_id,
'Reconstructed_states':id_states,
'A_d':A_d,
'B_d':B_d,
'C_d':C_d,
'phi':psi,
'lambda_i':lambdas,
'P':P,
'D':D,
'Qh':Qh,
}

```

Esse método é o principal componente do algoritmo. A partir do fornecimento adequado dos dados em conjunto com a ordem da matriz de Hankel obtêm-se a realização mínima das matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d e \mathbf{C}_d e a reconstrução dos estados do sistema.

Exemplo de uso do Algoritmo

```

t,T = np.linspace(0,5,150,retstep=True)
eta = 0.3
x = np.zeros((1,len(t),1))
x[0][:,0] = 2*np.exp(-eta*t)*np.sin(25*t)
ERA = Free_response_experiment(t,x,5,5)

Reconstructed_states= ERA['Reconstructed_states']

```

```

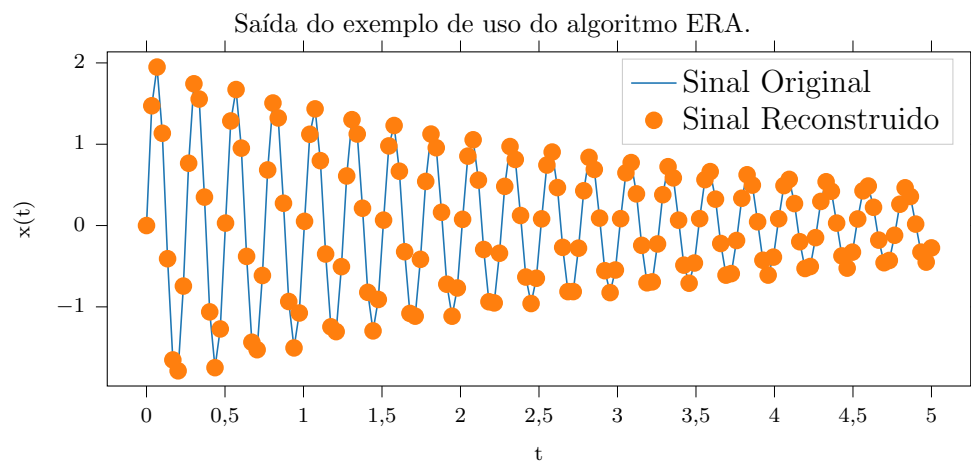
Reconstructed_states[:,0:10,0],x[:,0:10,0]

fig,ax = plt.subplots()
ax.plot(t,x[0,:,0],label='Sinal Original')
ax.plot(t,Reconstructed_states[0,:,0],label='Sinal Reconstruido',
        linestyle=' ',marker='o')

ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('x(t)')
ax.legend()

```

Nesse exemplo de uso, a saída esperada é mostrada abaixo.



Fonte: Elaborado pelo autor