- 문제 1: 다음 명제들이 항진명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

① $\sim(\sim p \wedge q) \vee q$

② $(\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$

p	q	~p	$(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \wedge q) \vee q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

- 문제 2: 다음 명제들이 모순명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

① $(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$

② $(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$

p	q	~p	$(\sim p \vee q)$	~q	$(p \wedge \sim q)$	$(\sim \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q})$
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F

- 문제 3: 다음 명제의 쌍 들에 대해서 두 명제가 동등한지를 진리표를 이용해 확인하시오

① $p \wedge (p \vee q)$와 p

② $\sim p \vee \sim q$와 $\sim(p \vee q)$

p	q	$(p \vee q)$	$\boldsymbol{p \wedge (p \vee q)}$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

- 문제 4: 명제식의 변형을 통하여 다음 명제를 간소화하시오.

① $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

② $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

① $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \wedge (\sim q \vee q)$

$\equiv p \wedge T$

$\equiv p$

② $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$\equiv (p \wedge \sim p) \vee \sim q$

$\equiv F \vee \sim q$

$\equiv \sim q$

- 문제 5: 다음 명제들이 참인지 확인하시오. 단, R은 실수의 집합을 의미하고, Z는 정수의 집합을 의미한다.

① $\forall x \in R, x^2 \geq x$

② $\forall x \in Z, x^2 \geq x$

③ $\exists x \in R, x^2 < x$

④ $\exists x \in Z, x^2 < x$

① 반례, $0 < x < 1$ 일 때

② ①의 반례 중에서 $0 < x < 1$ 에 속하는 $\mathbb{Z}$가 없으므로 "참"

③ $x = \frac{1}{2}$

④ ②의 명제가 참인 명제이므로 명제의 부정은 거짓.

- 문제 7: n이 홀수이면 n^2+n은 짝수임을 증명하라.

$n = 2k+1$ (단, $k \in \mathbb{Z}$)이라 하자.

$$\begin{aligned} n^2+n &= (2k+1)^2+(2k+1) \\ &= 4k^2+6k+2 \\ &= 2(2k^2+3k+1) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 문제 9: (대우를 증명) 자연수 n에 대해, $n^2 + 5$가 홀수이면 n은 짝수임을 증명하라

(힌트: 명제 대신, n이 홀수이면 $n^2 + 5$은 짝수임을 증명한다)

$n = 2k-1$ (단, $k \in \mathbb{N}$) 이라 하자.

$$n^2+5 = (2k-1)^2+5$$
$$= 4k^2-4k+6$$
$$= 2(2k^2-2k+3)$$

따라서, 자연수 n에 대하여,

n 이 홀수일 때, n^2+5가 짝수이므로

대우 명제인 n^2+5가 홀수이면 n은 짝수이다. ■

- 문제 10: n^2이 짝수이면 n은 짝수임을 증명하라.

n이 홀수이면 n^2이 홀수이다.

$n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ 이라 하자.

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2+2k)+1$

대우명제가 참이므로 n^2이 짝수이면 n은 짝수이다.

- **문제 11:** (경우를 나누어 증명) 자연수 n에 대해 $n^2 + 5n + 3$은 항상 홀수임을 증명하라.

(힌트: n이 짝수인 경우와 홀수인 경우를 따로 증명한다)

$k \in \mathbb{N}$ 에 대하여

i) $n = 2k$ 일 경우

$$\begin{aligned} n^2+5n+3 &= (2k)^2+5(2k)+3 \\ &= 4k^2+10k+3 \\ &= 2(2k^2+5k+1)+1 \end{aligned}$$

ii) $n = 2k-1$ 일 경우

$$\begin{aligned} n^2+5n+3 &= (2k-1)^2+5(2k-1)+3 \\ &= 4k^2+6k-1 \\ &= 2(2k^2+3k-1)+1 \end{aligned}$$

따라서 자연수 n에 대하여 n^2+5n+3은 항상 홀수이다.

- 문제 12: n^2이 3의 배수이면 n은 3의 배수임을 증명하라.

n이 3의 배수가 아니라면, $k \in \mathbb{N}$에 대하여

i) $n = 3k-2$ ii) $n = 3k-1$ 인 경우를 나누어 생각해보면

i) $n = 3k-2$ 일 경우

$$n^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 6k + 4$$
$$= 3(3k^2 - 2k + 1) + 1$$

ii) $n = 3k-1$ 일 경우

$$n^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1$$
$$= 3(3k^2 - 2k) + 1$$

명제 'n이 3의 배수가 아니면 n^2이 3의 배수가 아니다.'가 참인 명제이므로 대우 명제인 'n^2이 3의 배수이면 n이 3의 배수이다.'가 참이다.