

射电天文工具-第四版
(2019最新为第六版)
姜碧沔译
Reading Note

Renkun Kuang

September 30, 2019

Contents

1	射电天文学基础	4
1.1	射电天文在天体物理中的地位	4
1.2	射电窗口	5
1.3	一些基本定义	5
1.4	辐射转移	5
1.5	黑体辐射和亮温度	5
1.6	Nyquist原理和噪声温度	7
2	电磁波传播基础	8
2.1	麦克斯韦方程组	8
2.2	能量守恒和坡印亭矢量	8
2.3	复数场矢量	8
2.4	波动方程	8
2.5	绝缘介质中的平面波	8
2.6	波包和群速度	9
2.7	耗散介质中的平面波	9
2.8	稀薄等离子体的频散量	9
3	波的偏振	12
3.1	矢量波	12
3.2	庞加莱球和斯托克斯参量	13
3.3	准单色平面波	14
3.4	准单色波的斯托克斯参数	15
3.5	法拉第旋转	16
4	信号处理和接收机	19
4.1	信号处理和平稳随机过程	19
4.1.1	概率密度, 期望值和遍历性	19
4.1.2	自相关和功率谱	20
4.1.3	线性系统	22
4.1.4	高斯随机变量	24

4.1.5	平方律检波器	24
4.2	接收机的极限灵敏度	26
4.2.1	相干系统的可能最小噪声	28
4.2.2	基本噪声极限	29

译者序

译者：北京师范大学 关于射电天文比较好的书：《射电望远镜》陈建生译，《射电天体物理学》王绶译，分别就射电仪器和射电天文进行系统阐述，译文准确流畅，但不能反映此后射电天文日新月异的发展。

第4版前言

孔径综合现在是观测天文中最重要成像技术，提供了适用于各波段的获取极高分辨率和质量图像的唯一方法。

旧版前言

这本书描述了射电天文学家完成他们的工作所需要的工具。一方面，这些工具包括了作为分析射电信号所需要的射电望远镜和不同种类的接受机；另一方面，包括了连续谱和谱线辐射的物理机制。

Chapter 1

射电天文学基础

1.1 射电天文在天体物理中的地位

1931年之前，地面的观测主要在光学波段，1930年有了紫外红外波段，其他波段因大气阻挡或探测器的缺失在地面不能进行。1931年，Jansky用一个方向敏感的天线在14.6米波长处接收到了来自地球之外、非太阳的辐射。

二战期间在开发高灵敏度、高效率雷达设备方面所做的努力带来了无线电物理的长足进步。

战后研究者开始注意来自地外的无线电“噪声”。

射电天文改变着我们对许多天体的看法，因为射电观测的结果需要与光学天文经常用到的解释完全不同的新的机制：天体的光学辐射经常是热辐射，可以用热物理来解释；而在射电波段，绝大部分辐射是非热辐射，必须用不同的物理机制。

不仅天文学不同分支的波长不同，发射这些波段辐射的天体也不同：有些天体只在某些窗口可见，如：弥漫的冷气体只能从它所发射的21厘米超精细结构禁线被探测到，任何其他方式都不可以；比较稠密的气体几乎只有CO可以示踪，它们只能由原子或者分子谱线和宽带尘埃辐射探测。

今天几乎没有射电天文学家自己做望远镜和接收机了，一般来讲，现在的研究者始于某个科学问题，然后寻求能够解决问题的观测方式，而在早期，研究往往始于采集数据的仪器，而观测的结果常常奇怪而令人激动，必须发展新的理论来解释。

今天，射电天文学是使用仪器收集数据并且分析它们的性质，优势和限制的**科学**，不再是简单的数据收集，天文学家的主要任务是以挑剔的眼光监视仪器的功能。虽然使用者不用独自提高仪器的功能，知道仪器是怎样工作的以及它

们的限制是什么对研究是有益的。

1.2 射电窗口

射电窗口大致从低频限 15 MHz(20m) 到高频限 1300 GHz(0.3mm)。

高频端截断源自对流层中分子的最低转动带的共振吸收。

射电天文学家总是热衷于把高频截断尽可能地推向更高的频率，因为星际分子吸收和发射的强线在较高的频率范围内。

鉴于决定这一截断频率之一是水蒸气分子，在空气中水蒸汽含量少的地方进行观测可以扩展观测频率的范围。而对 O_2 所引起的吸收在地球上几乎无能为力。

对星际氧分子和水蒸气分子谱线的观测最好使用地球大气以外的卫星。

在低频端，地球大气由于电离层的自由电子吸收低于等离子体频率 ν_p 的电磁辐射而变得不透明，之后将证明(见2.8)，这一等离子体频率为：

$$\frac{\nu_p}{kHz} = 8.97 \sqrt{\frac{N_e}{cm^{-3}}}$$

因此，射电窗口的低频限在晚上接近 4.5MHz, 在白天接近 11MHz，而且电离层的电子密度依赖于太阳活动。kHz频率范围的射电天文必须在地球电离层之上用卫星来完成。

近些年来，对射电天文另一个有害的效应来自人为的电磁干扰，从工业到通讯信号，卫星通讯系统的干扰等等。

1.3 一些基本定义

亮度 I_ν 的定义，辐射流量密度，源的辐射总流量 S_ν ，辐射能量密度 u_ν

1.4 辐射转移

I_ν 的变化由辐射转移方程描述，在几种极限情形下，辐射转移方程的解是特别简单的。

在光学厚的情况下观测到的亮度等于Plank亮度，不依赖于物质。

1.5 黑体辐射和亮温度

热动平衡态下的辐射能谱分布由 Plank 公式给出

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

它给出单位频率范围内的功率。
积分可得黑体辐射的总亮度：

$$B(T) = \sigma T^4, \sigma = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3}$$

此即Stefan-Boltzman定律，在Plank辐射定律之前，1879年从实验中发现，1884年由LBoltzman从理论推导出来。

此外，对 $B_\nu(T)$ 求导并分析可得 $B_\nu(T)$ 的极大值：

$$\left(\frac{\lambda_{max}}{cm}\right)\left(\frac{T}{K}\right) = 0.28978$$

此即韦恩位移定律。

如果 $x = h\nu/kT$ 远离极大值，Plank辐射定律公式可以由更简单的表达式近似：

1. $h\nu \ll kT$:瑞利-金斯定律，由 $e^{h\nu/kT}$ 的级数展开得到。

$$B_R J(\nu, T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

此式为Plank定律的经典近似。在毫米和亚毫米范围内，人们常常定义辐射温度 $J(T)$ 为（将上面的公式里的 T 算出来即可）：

$$J(T) = \frac{c^2}{2k\nu^2} I = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$h\nu \ll kT$ 中代入 h, k 的值，可以得到瑞利-金斯定律适用的频率范围为：

$$\frac{\nu}{GHz} \ll 20.84 \frac{T}{K}$$

因此它可以应用于所有的热射电源，除了在毫米或亚毫米波段的低温情况。

2. $h\nu \gg kT$:维恩定律，此时 $e^x \gg 1$,所以

$$B_W(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

这个极限在可见和紫外波段对恒星的测量非常有用，在射电天文相关性不大。

瑞利-金斯定律的一个重要特征是辐射黑体的亮度和热力学温度严格地成正比，这个特征非常有用，使得在射电天文人们习惯使用亮温度 T_b 来度量展源的亮度。把亮温度 T_b 代入瑞利-金斯公式中就会得到给定的亮度 B_ν ：

$$T_b = \frac{c^2}{2k} \frac{1}{\nu^2} B_\nu = \frac{\lambda^2}{2k} B_\nu$$

如果 B_ν 是黑体发出的辐射，并且 $h\nu \ll kT$,那么上式实际上就是源的热力学温度，不依赖于频率。但如果其他过程对辐射有贡献， T_b 就会依赖于频率。

在辐射转移方程中引入亮温度的概念也是很方便的。

1.6 Nyquist原理和噪声温度

把电功率和温度联系起来。**Johnson噪声**，假设电阻 R 与一个线性放大器的输入端相连，电阻的电子热运动将会产生电流 $i(t)$ ，成为放大器的随机输入。虽然这个电流的平均值为0，它的RMS值却不会为0。由于 $\langle i^2 \rangle \neq 0$ 代表了功率不为0，电阻给放大器提供了功率输入。如果维持热平衡状态，这个功率一定是由温度决定的。这就是Johnson噪声。

H Nyquist在1929年研究了这种现象，他证明这个问题类似包含摩擦项的布朗运动中一个粒子的随机行走现象。

$P = kT$ 的推导，电阻的噪声功率正比于它的温度，噪声温度 T_N ，不依赖于电阻值 R 。在整个射电波段，噪声谱是白噪声谱的，即它的功率不依赖于频率。但是噪声源的阻抗必须与放大器的阻抗相匹配，这样的噪声源只能在有限的带宽范围内使用。

不是所有的电路元件都能用热噪声来表征，比如，一个产生1mW信号功率的微波设备等价于温度 $7 \times 10^{16} K$ ，但它的物理温度只有300K，显然这是个非热过程。

Chapter 2

电磁波传播基础

2.1 麦克斯韦方程组

用电磁场分量随时间和空间的变化描述电磁场。

2.2 能量守恒和坡印亭矢量

2.3 复数场矢量

2.4 波动方程

麦氏方程组给出了电磁场的时间和空间变化的联系，不过由于方程组包含了不同的场矢量，比较复杂，电场和磁场各自的性质不容易分析。把方程重写，使得每个方程只包含一个矢量，场的行为可以看得更加清楚，这就是引入波动方程的原因。

2.5 绝缘介质中的平面波

为尽可能简单地研究平面波的性质，选择一个直角坐标系使得波沿着正 z 方向传播，当等相面形成 $z = \text{const}$ 的平面时，我们说波是平面的，从而（？不理解） E, H 的所有分量在固定的 z 处将不依赖于 x 和 y 。也即其各分量对 x 和 y 的偏导数都为 0。结合麦克斯韦方程组可以得出： $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$, H 同样如此。所以纵向分量 E_z, H_z 在时间和空间上都是常数，因为这个常数值没有意义，所以可以设定其为 0。

也就是说：在绝缘介质中的平面电磁波是横波，其余成分具有行波谐波的形式。结合麦克斯韦方程组可以得出 E, H 垂直，于波向量 k 组成一个正交系统。

2.6 波包和群速度

能量和信息一般都以群速度传播，但是，在耗散介质中的传播情形是相当复杂的。论文：Sommerfield(1959), Brillouin(1914)

2.7 耗散介质中的平面波

耗散介质中的平面波的波数方程（学名为色散方程）：

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)$$

角频率 $\omega = 2\pi\nu$

2.8 稀薄等离子体的频散量

耗散介质的最简单的模型是稀薄等离子体。在等离子体中，自由电子和离子均匀分布，总的空间电荷密度为0。这个模型首先由 Drude(1900) 为了解释透明介质中紫外光的传播给出来，后来应用到稀薄等离子体中射电电磁横波的传播。从自由电子被电场加速的运动方程出发（电场力提供加速动力），电子的运动会产生电流，电流密度可以计算出来，也就可以得到等离子体的电导率：

$$\sigma = i \frac{Ne^2}{m_e\omega}$$

将其代入上一节中推导的：在耗散介质中的平面波的波数方程，得到

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

其中, $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m_e}$, 亦即之前在1.2中看到的：

$$\frac{\nu_p}{kHz} = 8.97 \sqrt{\frac{N}{cm^{-3}}}$$

对于 $\omega > \omega_p$, k 是实数，由相速度 v 的定义： $v = \omega/k$ 可得到相速度。

因而对于 $\omega > \omega_p$, 有 $v > c$.

而由群速度定义： $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, 可得到

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

对于 $\omega > \omega_p$, 有 $v_g < c$
相速度与群速度的关系:

$$vv_g = c^2$$

综上所述, v, v_g 都依赖于 ω , 当 $\omega = \omega_p$, $v_g = 0$, 使得在等离子体中频率低于 ω_p 的波是不可能传播的。

电磁脉冲的传播速度是群速度, 随频率而变化, 导致等离子体中脉冲传播的色散, 这个特点在 1967 年射电脉冲星的检测中十分重要。脉冲星脉冲到达的时间依赖于观测的频率: 观测的频率越低, 到达的时间越晚, 这个行为很容易用波在稀薄等离子体中的传播来解释。

下面进行证明:

星际介质的等离子体频率远低于观测频率: 在星际介质中, $\frac{\nu_p}{kHz} = 8.97\sqrt{\frac{N}{cm^{-3}}}$ 中 N 的典型值为 $10^{-3}cm^{-3} \sim 10^{-1}cm^{-3}$, 所以 ν_p 的范围为 $2.85kHz \sim 0.285kHz$, 而为了能够穿越地球的电离层, 观测频率必须满足 $\nu > 10MHz$. 利用 $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ 的级数展开得到关于 v_g 的高精度表达式:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_p^2}{\nu^2} \right)$$

因而接收到距离为 L 的脉冲星发出的脉冲时延为:

$$\tau_D = \int_0^L \frac{dl}{v_g} \approx \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_p^2}{\nu^2} \right) dl = \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{e^2}{2\pi m_e} \frac{1}{\nu^2} N(l) \right) dl$$

整理得

$$\tau_D = \frac{L}{c} + \frac{e^2}{2\pi m_e} \frac{1}{\nu^2} \int_0^L N(l) dl$$

在两个不同频率 ν_1, ν_2 处测得的脉冲到达时间的差别为:

$$\Delta\tau_D = \frac{e^2}{2\pi m_e} \left[\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right] \int_0^L N(l) dl$$

积分量 $\int_0^L N(l) dl$ 是在观测者和脉冲星之间的电子柱密度。因为在天文中距离的单位是秒差距, 人们已经习惯用 cm^{-3} 量度 $N(l)$, 而用 pc 度量 dl , 这个积分被称为频散量 DM (Dispersion Measure):

$$DM = \int_0^\infty \left(\frac{N}{cm^{-3}} \right) d\left(\frac{l}{pc} \right)$$

所以有:

$$\frac{\Delta\tau_D}{\mu s} = \dots$$

因为时延和观测频率都可以精确测量，所以可以计算出某个脉冲星的频散量的精确值。

如果脉冲星的距离 L 已知，这就很好地计算出脉冲星和观测者之间的平均电子密度。但因为 L 一般只是近似地知道，这种方式只能得到 N 的粗略估计值。常见的是：从合理的对 N 的估计，以及测量到的频散量，可以得到脉冲星的未知距离的信息。

星际介质的频散量以及脉冲具有一定的宽度限制了可分辨的脉冲精细结构的极限。脉冲到达时间对频率的依赖可以从

$$\tau_D = \frac{L}{c} + \frac{e^2}{2\pi m_e} \frac{1}{\nu^2} \int_0^L N(l) dl$$

中的 τ_D 得到，这就给定了分辨时间特征 τ 所需要的带宽 b （也就是当 $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, 求 $\nu_1 - \nu_2 =$ 多少）：

$$\frac{b}{\text{MHz}} = 1.205 \times 10^{-4} \frac{1}{\left[\frac{DM}{\text{cm}^{-3}\text{pc}}\right]} \left[\frac{\nu}{\text{MHz}}\right]^3 \frac{\tau}{\mu\text{s}}$$

频散量的典型值是 $30 \text{ cm}^{-3}\text{pc}$ ，等价于电子柱密度 10^{20} cm^{-2} 。式 $\frac{\Delta\tau_D}{\mu\text{s}} = \dots$ 预言一个频率为 100 MHz 的信号到达时间比无穷大频率处的信号要晚 12 s。

因为脉冲本身具有一定时间和频率宽度，从 $\frac{b}{\text{MHz}}$ 式的微分形式可以知道：对于给定的频率和色散量，如果要得到时间分辨率 τ ，最大的带宽应该是多少。

例如：为了在频率为 100 MHz，色散量为 $30 \text{ cm}^{-3}\text{pc}$ 的情况下分辨时间特征为 $0.1 \mu\text{s}$ 的脉冲特征，接收机的最大带宽应该小于 400 kHz。

Chapter 3

波的偏振

3.1 矢量波

前一章证明了在绝缘介质中平面电磁波是横波，而且沿着 z 方向传播的波的 \mathbf{E}, \mathbf{H} 的 x, y 分量服从同样的波动方程。

一般情况下， x, y 分量都应该单独给出，不过对于严格的单色波，这两个分量不是独立的，因为它们有同样的谐波形式，只是相位不同。

若把 E_x, E_y, E_z 看作直角坐标系下点的坐标，则这些坐标描述了一个圆柱表面的螺旋线，这个圆柱的截面可以通过消除波的相位项来确定。截面是一个椭圆，波因此被称为椭圆偏振波。

选取椭圆的长短轴建坐标系，能得到 $S_0 = E_a^2 + E_b^2 = E_1^2 + E_2^2$ ：可以解释为，偏振波的总坡印亭流量等于两个正交的、方向任意的波的流量之和。

进一步整理可得下列方程：

$$S_0 = E_a^2 + E_b^2 = E_1^2 + E_2^2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \tan \alpha$$

$$\tan 2\psi = -\tan 2\alpha \cos \delta$$

$$\frac{E_a}{E_b} = \tan \chi$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta$$

上述方程允许我们从任意坐标系的场强度计算椭圆偏振波的所有内秉的偏振参数： $S_0, \psi, \chi, E_a, E_b$ 。

相位差 δ 在几个方面都是重要的：它的符号决定波矢量旋转的方向，如果 $\sin \delta > 0$ 或等价地 $\tan \chi > 0$ ，偏振就是右旋的。右旋偏振时，矢量 \mathbf{E} 的旋转

和传播的方向组成右旋，这是在微波物理和现代物理光学中一般采用的约定。根据这个定义，右旋螺旋天线发射或接收右旋圆偏振波，易记。如果相位差 $\delta = 0, \pm\pi, \dots$, 偏振椭圆退化为一条直线， \mathbf{E} 是线性偏振的，一个椭圆偏振波可看成两个正交的线性偏振波的叠加。任意椭圆偏振波可以分解为两个（一左一右）圆偏振波的叠加。

3.2 庞加莱球和斯托克斯参量

从上节的讨论可得：需要 3 个独立参量来描述一个单色矢量波的偏振状态，因此引入了几套参数：

1. 两个正交线性偏振波的振幅 E_1, E_2 和相对相位 δ
2. 一左，一右旋圆偏振波的振幅 E_r, E_l 和相对相位 δ
3. 偏振椭圆的长轴和短轴 E_a, E_b 及位置角 ψ

庞加莱（1892）引入了另外一套方法，使得矢量波的不同偏振状态很容易可视化。

如果把式子

$$\tan 2\psi = -\tan 2\alpha \cos \delta$$

和

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta$$

中的角度 $2\psi, 2\chi$ 当作极坐标系的角，即一个半径为

$$S_0 = E_a^2 + E_b^2 = E_1^2 + E_2^2$$

中的 S_0 的球的经纬度，那么在偏振状态和球上的点之间就有一一对应的关系。赤道 ($2\chi = 0$, 也就是 $\delta = 0$) 代表线偏振，北极对应右圆偏振。

在庞加莱球和斯托克斯参数（1852）之间有一种自然的关联：**斯托克斯参数就是庞加莱球上的点在直角坐标系的对应坐标**：

$$S_0 = I = E_a^2 + E_b^2$$

$$S_1 = Q = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$$

$$S_2 = U = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi$$

$$S_3 = V = S_0 \sin 2\chi$$

这4个参数中只有 3 个是独立的。

斯托克斯参数也可以直接用偏振椭圆的参数式表示：

$$S_0 = I = E_1^2 + E_2^2$$

$$S_1 = Q = E_1^2 - E_2^2$$

$$S_2 = U = 2E_1E_2 \cos \delta$$

$$S_3 = V = 2E_1E_2 \sin \delta$$

这些方程把斯托克斯参数表示为可以直接观测的量,几个例子:

1. 右旋圆偏振波, $E_1 = E_2, \delta = \pi/2$

$$S_0 = I = S$$

$$S_1 = Q = 0$$

$$S_2 = U = 0$$

$$S_3 = V = S$$

2. 左旋圆偏振波, $E_1 = E_2, \delta = -\pi/2$

3. 线偏振波, $E_b = E, E_a = 0, \rightarrow \chi = 0,$

$$S_0 = I = S$$

$$S_1 = Q = I \cos 2\psi$$

$$S_2 = U = I \sin 2\psi$$

$$S_3 = V = 0$$

到此, 隐含了“一个严格的单色波总是偏振的”, 没有非偏振的单色波 ($E_1, E_2, \delta_1, \delta_2$ 总是常数)。

当转向准单色辐射时, 情况不同了: 这种类型的辐射可以是非偏振的。

为了分析准单色波, 必须用一种简便的方式来描述这种辐射, 这就是下一节的任务。

3.3 准单色平面波

前面给出的关于电磁波的偏振性质的描述都只局限于严格的单色波, 有限频率范围的情况如何分析?

在一个给定位置的波的电场和磁场强度都可以表达为积分形式:

$$V^{(r)}(t) = \int_0^\infty \alpha(\nu) \cos[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu$$

此式是傅立叶积分的精确形式, 所以能够很方便地把 $V^{(r)}$ 联系到复数函数:

$$V(t) = \int_0^\infty \alpha(\nu) e^{i[\phi(\nu) - 2\pi\nu t]} d\nu = V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t)$$

$V^{(i)}$ 不重复任何已经在 $V^{(r)}$ 中包含的信息, V 叫做属于 $V^{(r)}$ 的解析信号。
 $\alpha(t)$ 的形式使它的有效范围经常限制在一定的频率范围 $\Delta\nu$ 内, 而且 $\Delta\nu$ 比平均频率 $\bar{\nu}$ 要小得多, 即

$$\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$$

如果满足这个条件, 我们就说信号是准单色的。

3.4 准单色波的斯托克斯参数

考察一个频率为 ν , 沿 z 传播的准单色波,

$$E_x(t) = a_1(t)e^{i[\phi_1(t)-2\pi\nu t]}$$

$$E_y(t) = a_2(t)e^{i[\phi_2(t)-2\pi\nu t]}$$

如果 y 成分比 x 成分有相位延迟 ϵ , 则在 θ 方向的电矢量是:

$$E(t; \theta, \epsilon) = E_x \cos \theta + E_y e^{i\epsilon} \sin \theta$$

而这个偏振角对应的电磁波强度为:

$$I(\theta, \epsilon) = \langle E(t; \theta, \epsilon) E^*(t; \theta, \epsilon) \rangle$$

对于上面的波场 E_x, E_y , 准单色波的斯托克斯参数为:

$$S_0 = I = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle$$

$$S_1 = Q = \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle$$

$$S_2 = U = 2\langle a_1 a_2 \cos \delta \rangle$$

$$S_3 = V = 2\langle a_1 a_2 \sin \delta \rangle$$

通过6个强度测量可以得到这些参数:

$$S_0 = I = I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0)$$

$$S_1 = Q = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0)$$

$$S_2 = U = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)$$

$$S_3 = V = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2)$$

这就是用来分析射电偏振仪输出的公式。

对于部分偏振光, 从前面的方程组可以得到:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$$

其偏振度可以表示为:

$$p = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

3.5 法拉第旋转

1845年，当法拉第在光的传播方向上加上磁场时，他发现光在绝缘介质中的偏振角将会旋转。这使他知道光一定是电磁现象。

在射电天文中，法拉第旋转是研究星际磁场的重要工具[Verschuur, Kellerman, 1988, *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy*, **RADIO GALAXIES AND QUASARS**, Radiation properties of pulsar magnetospheres: observation, theory, and experiment].

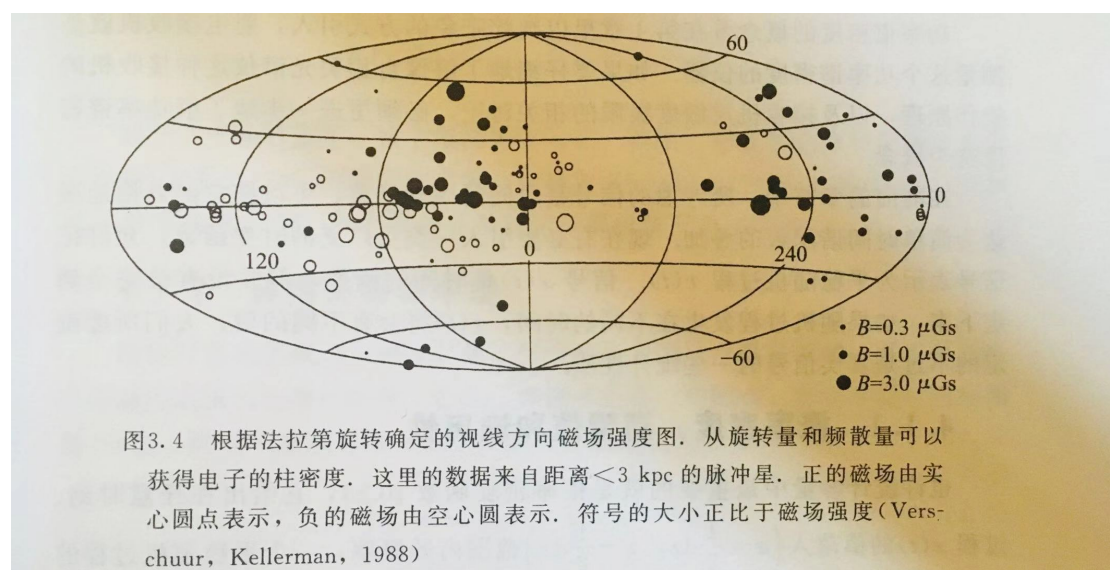


图3.4 根据法拉第旋转确定的视线方向磁场强度图。从旋转量和频散量可以获得电子的柱密度。这里的数据来自距离 < 3 kpc的脉冲星。正的磁场由实心圆点表示，负的磁场由空心圆表示。符号的大小正比于磁场强度 (Verschuur, Kellerman, 1988)

在2.8节中已经看到必须用稀薄等离子体处理星际气体，如果在这样的介质中加上磁场，具有各种模式和截止等等的波的传播是一个非常复杂的课题，在大多书等离子体的教材中有详细推导。

这里考虑高频限的模式，高频意味着电磁波的频率远高于所有的共振频率，但仍然足够低使得等离子体中的自由电子与外部磁场的相互作用不能忽略。因为平行于磁场的方向对波传播的影响要比垂直的大得多，这里只考虑平行的情况。

从电子在有电场和磁场时，因受电磁力和洛伦兹力而运动的情形出发，推导出电流密度($i = dq/dt$)

$$|\mathbf{J}| = -Ner_{\pm} = i \frac{Ne^2}{m(\omega \pm \frac{e}{m}B)} E_{\pm} = \sigma_{\pm} E_{\pm}$$

其中

$$\sigma_{\pm} = i \frac{Ne^2}{m(\omega \pm \frac{e}{m}B)} E_{\pm}$$

所以电导率是纯虚数。回旋频率 ω_c 为：

$$\omega_c = \frac{e}{m}B, \nu_c = \frac{e}{2\pi m}B$$

当 $\omega = \omega_c$ 时，波的频率与磁场中电子的回旋频率发生共振，这时 $\sigma_- \rightarrow \infty$ ，波 E_- 不能传播。这可以由下面的证明得到：

将 σ_{\pm} 代入 2.7 中的色散方程

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)$$

还是假设 $\epsilon \approx 1, \mu \approx 1$, 那么

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}\right)$$

其中引入了等离子体频率式： $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m_e}$ 。根据

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{c}{\omega} k$$

折射率就变为：

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}$$

这导致两种模式的波 E_+, E_- 的相传播速度 $v_{\pm} = c/n_{\pm}$ 稍有不同，使得两个圆偏振波 E_+, E_- 在传播一定距离 Δz 之后会有一个相对的相位差 $2\Delta\psi$ ：

$$2\Delta\psi = (k_+ - k_-)\Delta z$$

这两个圆偏振波叠加可以形成一个椭圆偏振波；因此，离开厚度为 Δz 的平板之后，偏振角将会改变 $\Delta\psi$

（从自由电子在电场和磁场同时作用下的运动出发，推导出感生电流的密度，电导率，从而得到折射率，得到两种模式的波的相传播速度不同，于是传播一段距离后偏振角将会变化）

对于 $\omega \gg \omega_p, \omega \gg \omega_c$, 可以整理得：

$$\Delta\psi = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c^2 \omega^2} \Delta z = \frac{2\pi Ne^3 B}{m^2 c^2 \omega^2} \Delta z$$

对于一个具有密度分布 $N(z)$ 和磁场强度 $B(z)$ 的有限大小的平板, 我们得到偏振方向的总的旋转角度为:

$$\Delta\psi = \frac{e^3}{2\pi m^2 c^2} \frac{1}{\nu^2} \int_0^L B_{//} N(z) dz$$

单位归为天文学中常用的:

$$\frac{\Delta\psi}{rad} = 8.1 \times 10^5 \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \int_0^{L/pc} \frac{B_{//}}{Gs} \frac{N}{cm^{-3}} d\left(\frac{z}{pc}\right)$$

$\Delta\psi$ 对 ν^{-2} 的依赖关系可以用来确定 $\int B N dz$ 的积分值。

如果可以测量在两个频率的偏振方向, 那么:

$$\frac{RM}{rad \cdot m^{-2}} = 8.1 \times 10^5 \int_0^{L/pc} \frac{B_{//}}{Gs} \frac{N}{cm^{-3}} d\left(\frac{z}{pc}\right) = \frac{\left(\frac{\Delta\psi_1}{rad}\right) - \left(\frac{\Delta\psi_2}{rad}\right)}{\left(\frac{\lambda_1}{m}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{m}\right)^2}$$

源的未知内秉偏振角消去了。正的 RM 表明 $B_{//}$ 指向观测者。

反过来, 也可以通过 $\frac{\Delta\psi}{rad}$ 公式确定内秉偏振角, 从而用来改正测量的偏振。

对于脉冲星, 把从法拉第旋转得到的 RM 值和前面的频散量 DM 值结合起来, 比值给出平行于视线方向的平均磁场强度:

$$\frac{\bar{B}_{//}}{Gs} = 1.23 \times 10^{-6} \frac{RM}{DM}$$

如果有反视线方向的磁场, $B_{//}$ 是真实值的下限。测量 3kpc 以内的脉冲星得到的结果是弥散的, 但在银经 0 度到 180 度的范围内, $\bar{B}_{//}$ 的方向远离太阳, 而在银经 180 度到 360 度的范围内, $\bar{B}_{//}$ 的方向朝向太阳, 这正是银河系旋转的方向。

从脉冲星的研究得到的磁场强度 $\bar{B}_{//}$ 的范围为 $0.3\mu Gs$ 到 $3\mu Gs$, 在银河系进行旋转量的测量受到逆向场的影响, 尤其是内银盘部分, 人们认为那里存在逆向磁场。

Chapter 4

信号处理和接收机

本章前两节是关于信号处理和噪声分析的一般话题。其余部分讨论射电天文观测中用到的各种接收机系统的原理、性质和限制，包括热辐射计、相干辐射计和频谱仪、脉冲星后端设备。需用到傅立叶变换和卷积。

4.1 信号处理和平稳随机过程

第一章介绍了功率谱密度的概念，射电接收机就是测量这个功率谱密度的仪器。若要仔细了解像自相关光谱仪这种接收机的操作原理，以及接收机灵敏度极限的相关讨论，必须进一步了解功率谱密度这一概念。

之前考虑的信号都是时间的周期函数，现在引入一类更广义的时变函数，把信号表示为平稳随机过程 $x(t)$ ： $x(t)$ 是时间的函数，但并没有被完全确定，人们所能确定的不过是真实信号的一些统计性质。

4.1.1 概率密度，期望值和遍历性

统计参量中最重要的就是**概率密度函数** $p(x)$ ，它给出在任意时刻，过程 $x(t)$ 的值落入 $(x - \frac{1}{2}dx, x + \frac{1}{2}dx)$ 范围内的概率，一个平稳随机过程的 $p(x)$ 不依赖于时间。

随机变量 x 的期望值或平均值 $E\{x\}$ 由下面的积分给出：

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

类似地，函数 $f(x)$ 的期望值 $E\{f(x)\}$ ：

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

它不同于变换 $y = f(x)$ 的期望值(有疑问, 不知道怎么推导出的):

$$E\{y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_x(x) \frac{dx}{|f'(x)|}$$

常遇到的期望值是平均值:

$$\mu = E\{x\}$$

和方差:

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - E^2\{x\}$$

4.1.2 自相关和功率谱

傅立叶变换的概念在物理学和工程学的许多领域中都是基础, 可以用它来讨论噪声信号。

但还是有些困难, 因为平稳时间序列在 $t \rightarrow \pm\infty$ 时并不衰减为0。因而傅立叶变换的显式定义:

$$X(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

并不存在。当 T 增加时积分值无规则地变化, 就像 N Wiener 首先证明的那样, 广义积分的 Cesaro 和的概念可以用来解除这种困境。Cesaro 和的定义是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \left[\int_{-r}^r A(x) dx \right] dr$$

这就是有限积分的平均的极限。对于很多普遍的广义积分值不存在的函数, 这个极限都存在。

积分顺序交换可以证明:

$$\frac{1}{N} \int_0^N \left[\int_{-r}^r A(x) dx \right] dr = \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|x|}{N}\right) A(x) dx$$

公式 4.9 的推导有疑问

对于一个随机时间序列的任何有限部分, 可以定义傅立叶变换:

$$X_T(\nu) = \int_{-1/2T}^{1/2T} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

其均方期望值是:

$$E_T\{|X(\nu)|^2\} = E\left\{\int_{-1/2T}^{1/2T} \int_{-1/2T}^{1/2T} x(s)x(t) e^{-2\pi i \nu(t-s)} ds dt\right\}$$

因为 $x(t)$ 被假定是平稳的，一定有：

$$R_T(\tau) = E_T\{x(s)x(s+\tau)\} = E_T\{x(t-\tau)x(t)\}$$

其中 $R_T(\tau)$ 是自相关函数 (ACF)。把 ACF 代入均方期望值表达式并对 s 积分，可以发现：

$$E_T\{|X(\nu)|^2\} = T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_T(\tau) e^{-2\pi i \nu t} d\tau$$

但是右边是 Cesaro 和，所以，通过定义功率谱密度 (PSD) $S(\nu)$ 为：

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_T\{|X(\nu)|^2\}$$

将 Cesaro 和代入可以得到：

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-2\pi i \nu t} d\tau$$

这就是 **Wiener-Khinchin定理**：遍历随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 和功率谱密度 $S(\nu)$ 是一对傅立叶变换
相应的傅立叶逆变换为：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

所以，这个过程传输的总功率是：

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu = E\{x^2(t)\}$$

公式 4.17, 4.18 的推导有疑问

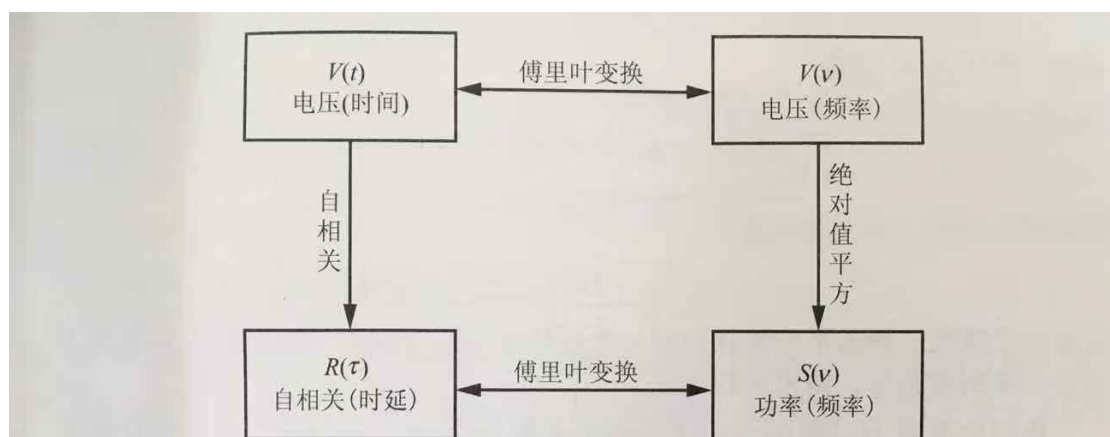


图4.1 作为时间和频率的函数的电压输入 $V(t)$ 和 $V(v)$ 、与自相关函数 $R(\tau)$ 和相应的功率谱密度 $S(v)$ 之间的关系图

这些概念的应用将会在下面关于线性系统和平方律检波器的两节中加以说明。不过，这可以当成一个例子，结果将会在后面关于接收机的极限灵敏度的讨论中用到。图 4.2 是这些概念的示意图。

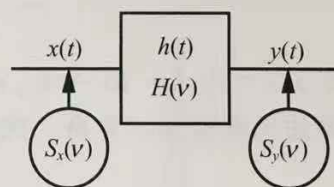


图4.2 线性系统中噪声分析的示意图，上面的符号代表时间行为，下面的符号代表频率行为

4.1.3 线性系统

使信号经过一个固定的线性滤波器，其对单位脉冲 $\delta(t)$ 的时间响应是 $h(t)$ ，那么这个系统的输出是 $x(t), h(t)$ 的卷积：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

(翻译的书里，4.19写错了)

滤波响应的傅立叶变换是：

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi i v t} dt$$

$y(t)$ (输出) 的期望值：

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t - \tau)\}h(\tau)d\tau$$

可以写成：

$$\mu_y = H(0)\mu_x$$

这显示了随机过程的平均值在经过一个线性系统后受到怎样的影响；如果输入信号的平均值为 0，输出也为 0。

先考虑 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的交叉相关函数 $R_{xy}(\tau)$ ，那么输出 $y(t)$ 的自相关函数 $R_{yy}(\tau)$ 就很容易定出。

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &\rightarrow \\ y(t)x(t-\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)x(t-\theta)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

而

$$E\{x(t-\tau)x(t-\theta)\} = R_{xx}((t-\tau) - (t-\theta)) = R_{xx}(\theta - \tau)$$

则

$$E\{y(t)x(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\theta - \tau)h(\tau)d\tau$$

即：

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau)$$

同样的方式：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &\rightarrow \\ y(t+\theta)y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(t+\theta)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

于是：

$$R_{yy}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\theta + \tau)d\tau = R_{yx}(\theta) \otimes h(-\theta)$$

根据自相关函数的定义， $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau)$ 于是：

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

所以为了计算线性滤波器输出自相关函数的一个点的值，必须知道输入的完整自相关函数。

对 $R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$ 进行傅立叶变换，得到输入和输出功率谱密度的关系式：

$$S_y(\nu) = S_x(\nu)|H(\nu)|^2$$

4.1.4 高斯随机变量

对复杂系统进行实际分析时，平稳随机过程常常是一个太大的分类，为简便分析，必须局限于性质不那么普遍的一类函数。

经常采用的是正态分布随机变量或高斯噪声，其概率密度函数是高斯函数，均值为0。

比如，具有高斯分布的函数能够代表通过限定带宽的滤波器的白噪声，在每一时刻，其振幅为 x 的概率是：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$E\{x\} = \mu = 0, E\{x^2\} = \sigma^2$$

高斯函数的傅立叶变换还是高斯函数，而这种傅立叶对的宽度是逆相关的：一个窄时域 Δt 上的高斯分布，一定对应于宽频域 $\Delta \nu$ 的高斯分布

$$\Delta t \Delta \nu \geq 1$$

4.1.5 平方律检波器

在射电接收机中，噪声信号要经过一个输出信号 $y(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 的功率成正比的装置：

$$y(t) = ax^2(t)$$

换句话说，输入功率要产生一个输出电压。

对于这样一个非线性系统的分析当然要比线性系统复杂，所以我们局限于对平均值 $\mu = 0$ 的高斯随机信号进行讨论。

高斯信号 $x(t)$ 的自相关函数是：

$$E\{x(t+\tau)x(t)\} = R(\tau)$$

则随机变量 $x(t+\tau), x(t)$ 是联合正态的，有相同的方差 $E\{x^2\} = R(0)$ ，它们之间的相关系数为：

$$r = \frac{E\{x(t+\tau)x(t)\}}{\sqrt{E\{x^2(t+\tau)\}E\{x^2(t)\}}} = \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

所以(咋推导的?) 它们的联合概率密度函数为：

n元(维)正态分布(The multivariate normal distribution)

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2; \tau) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{R^2(0) - R^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{R(0)x_1^2 - 2R(\tau)x_1x_2 + R(0)x_2^2}{2[R^2(0) - R^2(\tau)]}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rx_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right] \end{aligned}$$

如果这样的高斯噪声是平方律检波器的输入，那么输出噪声将不再是高斯的：

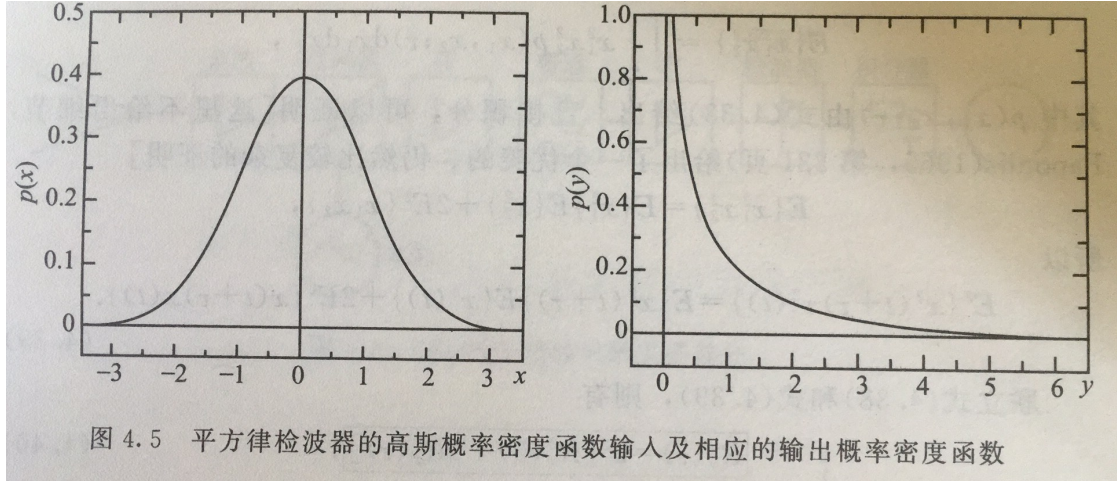


图 4.5 平方律检波器的高斯概率密度函数输入及相应的输出概率密度函数

而分布函数 $p_y(y)$ 却很容易计算出来，可以证明如果随机变量 x 用函数 $y = \varphi(x)$ 变换到 y ，则概率密度函数 $p_y(y)$ 为：

$$p_y(y) = \frac{p_x(x_1)}{|\varphi'(x_1)|} + \frac{p_x(x_2)}{|\varphi'(x_2)|} + \dots + \frac{p_x(x_n)}{|\varphi'(x_n)|}$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是方程 $y = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \dots = \varphi(x_n)$ 的所有实根。
对于 $y(t) = ax^2(t)$ ，可以推导出：

$$p_y(y) = \dots$$

从而得到：

$$E\{y(t)\} = E\{ax^2(t)\} = a\sigma_x^2 = aR_x(0)$$

$$E\{y^2(t)\} = 3a^2\sigma_x^4 = 3a^2R_x^2(0)$$

所以

$$\sigma_y^2 = 2a^2R_x^2(0) = 2E^2\{y(t)\}$$

与线性系统不同，即使输入信号的期望值为0，平方律检波器的输出信号的平均值也不为0。

为了定出平方律检波器的输出功率谱密度的形状，我们将计算输出信号 $y(t)$ 的自相关函数。

从自相关函数的定义，有：

$$R_y(\tau) = E\{y(t+\tau)y(t)\} = a^2E\{x^2(t+\tau)x^2(t)\}$$

类比式 4.18 得到：

$$E\{x_1^2x_2^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1^2x_2^2p(x_1, x_2; \tau)dx_1dx_2$$

其中 $p(x_1, x_2; \tau)$ 前面已经给出，直接积分，可以证明(Papoulis 1965 P221) 给出里一个优美、仍较复杂的证明：

$$E\{x_1^2 x_2^2\} = E\{x_1^2\}E\{x_2^2\} + 2E^2\{x_1 x_2\}$$

所以：

$$E\{x^2(t+\tau)x^2(t)\} = E\{x^2(t+\tau)\}E\{x^2(t)\} + 2E^2\{x(t+\tau)x(t)\}$$

则有：

$$R_y(\tau) = a^2[R_x^2(0) + 2R_x^2(\tau)]$$

对其进行傅立叶变换，可以得到输出信号的功率谱密度：（总之就是要得到功率谱密度，而因为信号自相关的傅立叶变换就是功率谱密度，所以要先得到信号的自相关，这就是前面一串所推导的）

$$S_y(\nu) = a^2 R_x^2(0)\delta(\nu) + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau$$

现在(不懂下面这个的推导)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu') d\nu' \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi i (\nu - \nu') \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu') S_x(\nu - \nu') d\nu'$$

从而：

$$S_y(\nu) = a^2 R_x^2(0)\delta(\nu) + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\nu') S_x(\nu - \nu') d\nu'$$

以输入功率谱密度表达了输出的功率谱密度。

4.2 接收机的极限灵敏度

前面已经提到，射电接收机就是测量功率谱密度的装置，为了做到这一点，即使一个基本的接收机也包含下面几个部分：接收滤波器，平方律检波器，平滑滤波器：

1. 接收滤波器

具有功率增益传递函数 $G(\nu)$ ，定义了接收机响应的频谱范围。一个实际的接收机，这个频率范围： $MHz \sim kHz$ ，带宽： $kHz \sim GHz$

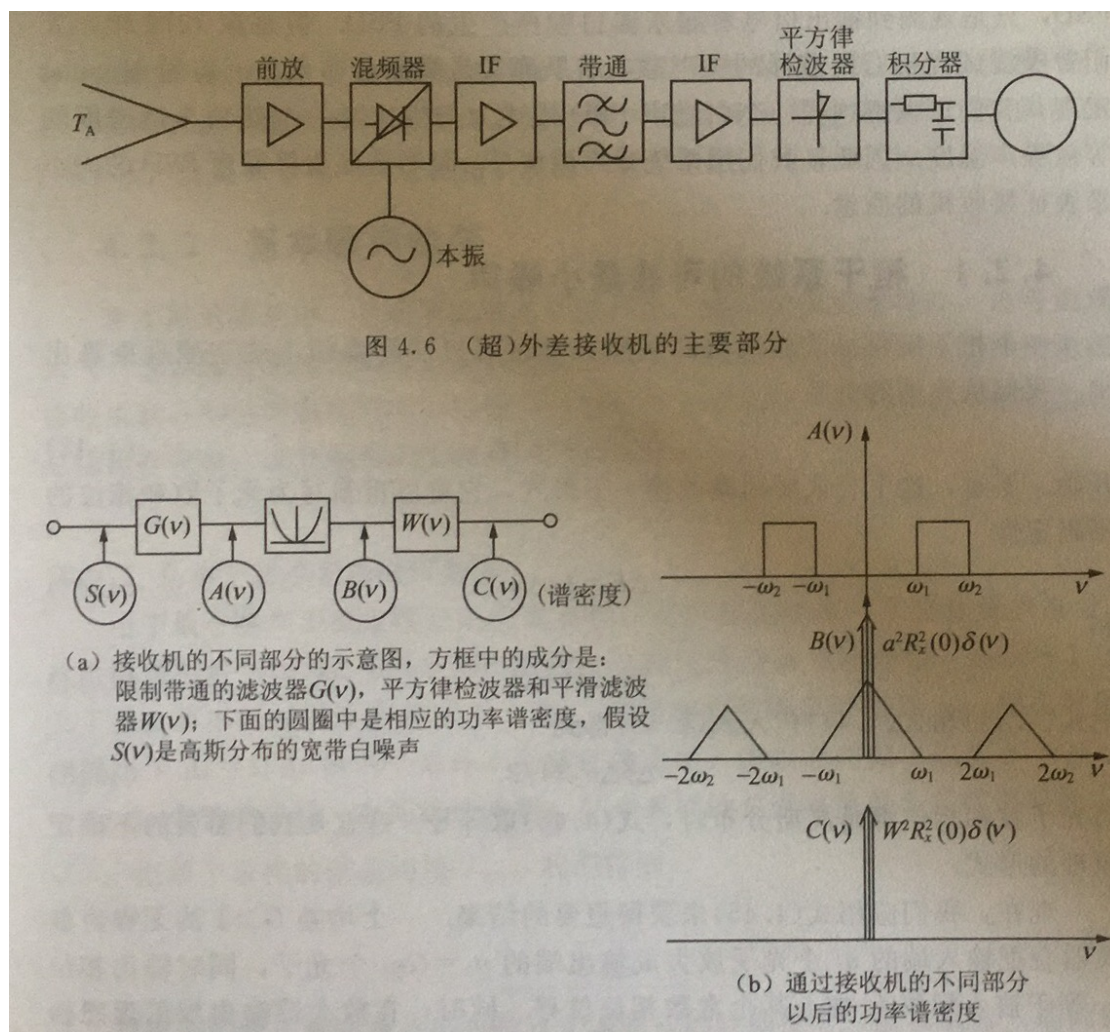
2. 平方律检波器

用来产生一个与接收端平均功率成正比的输出信号

3. 平滑滤波器

具有功率增益传递函数 $W(\nu)$ ，决定了输出的时间响应，它的性质必须和接收机的目的相适应。

用来测量弱射电源的平滑滤波器不会用于用来测量快速太阳爆发活动或者脉冲星的脉冲形状的平滑滤波器



要使一个接收机有用，它必须能够探测尽可能弱的信号。就像任何其他测量设备一样，此灵敏度有极限，因为要探测的信号是有噪声的，接收机本身也是有噪声的。

我们将概述这个极限灵敏度是怎样依赖于接收机的参数，即使没有任何输入源与接收机相连，我们也会观测到输入信号，其原因就是任何接收机都会发出热噪声，它与外来的信号一起放大，原则上讲是不可区分的。

为了分析一个真实接收机的性能，设想一个不产生内部噪声的理想接收机，同

时和两个噪声源相连，一个产生外部源的噪声，一个模拟接收机的噪声。外部源的功率谱密度可以是任何形状，而经验表明接收机噪声的虚拟输入PSD可以很好地用一个白噪声来表示。不过，人们从来不能直接测量这个 PSD，只是观测到输出信号看起来像白噪声产生的 PSD。但是在 1972 年，人们曾尝试测量 OH 脉泽的噪声谱，结果确实是高斯分布函数。应用 Nyquist 定理，我们可以把这样一个白噪声 PSD 描述为产生这样一个热功率谱密度的等效噪声温度。因此，我们用系统噪声温度 T_{sys} 而不是接收机噪声 PSD 的大小来表征接收机的质量。

4.2.1 相干系统的可能最小噪声

一个相干接收机或放大器的极限灵敏度可以从海森伯不确定原理推算出来,从:

$$\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$$

开始。将其重新写为光子数和相位的不确定性:

$$\Delta E = h\nu \Delta n, 2\pi\nu \Delta t = \Delta\phi$$

于是:

$$\Delta\phi \Delta n \geq 1/2$$

当光子数和相位都是高斯分布时，上式取等号，这就是我们需要的不确定原理的形式。

现在利用上式来获得想要的结果。

一个增益 $G > 1$ 的无噪声放大器会把输入端的 n_1 个光子放大成输出端的 $n_2 = Gn_1$ 个光子，同时输出相位 ϕ_2 等于输入相位 ϕ_1 加上某个常数相位位移。同时，在放大器输出端的理想探测器必须遵从:

$$\Delta\phi_2 \Delta n_2 = 1/2$$

但是，输入端光子数的不确定性是 $\Delta n_1 = \Delta n_2 / G$ ，相位的不确定性是相同的，所以在放大器的输入端，不确定关系要求:

$$\Delta\phi_1 \Delta n_1 = \frac{1}{2G}$$

这与 $\Delta\phi \Delta n \geq 1/2$ 是矛盾的，避免这种矛盾的唯一方式是假设放大器掺入了一些噪声。

为满足 $\Delta\phi_2 \Delta n_2 = 1/2$ ，在放大器的输出端，所需的单位带宽最小噪声是 $(G - 1)h\nu$ 。(这里不懂是怎么推来的)

在放大器的输入端，这个量是 $(1 - 1/G)h\nu$ 。为了最小化后续放大阶段的噪声贡

献，我们取 G 为一个很大的值，则放大器的最小噪声为 $h\nu$ ，就相当于接收机的噪声温度

$$T_{rx}(\text{minimum}) = \frac{h\nu}{k}$$

对于非相干探测器，如热辐射计，相位没有被保持，所以这个极限不存在。在厘米甚至毫米波段范围内，这个噪声温度极限是非常小的。比如，在 2.6 mm，它是 5.5K，但是在光学波段，这个极限大约是 10^4K 。

4.2.2 基本噪声极限

在实际系统中，总会有几种系统噪声源。除了接收机本身外，还有地球大气、地面辐射通过旁瓣进入系统引起的天线溢损噪声、波导以及连接馈源和接收机输入端的同轴电缆中不可避免的衰减产生的噪声，它们都会对接收机的总输出有贡献。这些噪声的贡献是可以相加的，所以：

$$T_{sys} = \sum T_i$$

由于最小噪声不确定性公式的重要性，我们首先给出一个更直观的推导，这也能说明对 Nyquist 采样定理的依赖。

从傅立叶变换原理知道， $\Delta\nu\Delta t = 1$ 定义了独立样本的时间分辨率 4.1.4。如果接收机的总带宽是 $\Delta\nu$ ，那么时间间隔小于 $\Delta t = 1/\Delta\nu$ 的两个采样不是彼此独立的，所以总时间 τ 包含 $N = \tau/\Delta t = \tau \cdot \Delta\nu$ 个独立采样。高斯统计表明， N 个采样的总误差是单个采样误差的 $1/\sqrt{N}$ 。把单个采样的误差叫做 T_{sys} ，我们得到：

$$\Delta T = \frac{T_{sys}}{\sqrt{\Delta\nu \cdot \tau}}$$

下面基于高斯统计来进行这个表达式的推导。

接收机输入端的系统噪声 PSD 是：

$$S_{sys}(\nu) = kT_{sys}$$

对于正态随机噪声信号 $x(t)$ ，平方律检波器的输入 PSD 为：

$$A(\nu) = kT_{sys}G(\nu)$$

根据式 4.35，在平方律检波器的输出端，信号 $y(t)$ 不是高斯分布，它的 PSD 称为 $B(\nu)$ ；具有功率传输函数 $W(\nu)$ 的平滑滤波器的输出是 $z(t)$ ，它的功率谱密度将是 $C(\nu)$

如果一个信号引起的平均输出的增加大于或者等于 z 的方差，即 $\langle \Delta z \rangle \geq \sigma_z$ ，我们说这个信号是可检测的。如果 z 具有高斯概率密度分布，就意味着检测的

可信度为 68%; 如果把 Δz 的极限设置更大, 则可以取得更高的置信水平。使用式 4.5 就得到检测极限为:

$$\Delta z = \sigma_z = \sqrt{E\{z^2(t)\} - E^2\{z(t)\}}$$

但是, 根据式 4.16

$$\langle z^2 \rangle = E\{z^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) d\nu$$

而从式 4.23, 4.36 得到:

$$\langle z \rangle = E\{z(t)\} = \sqrt{W(0)} E\{y(t)\} = \sqrt{W(0)} a R_x(0)$$

而

$$C(\nu) = W(\nu) B(\nu)$$

根据式 4.41, 对于平方律检波器的高斯噪声输入有:

$$B(\nu) = 2a^2[A(\nu) \otimes A(\nu)] + a^2 R_x^2(0) \delta(\nu)$$

把这些关系式代入 Δz 的公式:

$$\Delta z = \sqrt{2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\nu)[A(\nu) \otimes A(\nu)] d\nu}$$

一般来说, 平滑滤波器输出功率传递函数只有几 Hz 宽, 而 $A(\nu) \otimes A(\nu)$ 的宽度从 kHz 到 MHz, 所以 $A(\nu) \otimes A(\nu)$ 在 $W(\nu)$ 的带宽范围内可以认为是常数, 使得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\nu)[A(\nu) \otimes A(\nu)] d\nu \approx [A(\nu) \otimes A(\nu)]_0 \int W(\nu) d\nu$$

其中 $[...]_0$ 是 $\nu = 0$ 处的值。把 $R_x(0)$ 用 $A(\nu)$ 表示, 并利用式 4.16, 我们可以得到:

$$\frac{\Delta z}{\langle z \rangle} = \dots$$

或者将 4.51 代入, 并定义 $\Delta\nu, \tau$: 得到:

$$\frac{\Delta z}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\nu \cdot \tau}}$$

并且有: $\Delta z \propto \Delta T, \langle z \rangle \propto T_{sys}$ 于是有:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\nu \cdot \tau}}$$