МдАД: Линейная алгебра **Осень 2018**

Линейная алгебра 3: 13 октября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Ассистент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).*
При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды LaTeX; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.
Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

3.1 Собственные числа и собственные вектора

Пусть A — матрица линейного оператора на пространстве V с некоторым базисом.

Определение 3.1. Собственным вектором линейного оператора A называется такой ненулевой вектор $v \in V$, что

$$Av = \lambda v$$

где λ — некое действительное число. Такие число называют собственными значениями оператора A.

Что это означается с точки зрения геометрии? Действительно, представим, что наш оператор A подействовал на все пространство V. Тогда некоторые вектора он поменял сильно, а некоторые оставил почти такими же. «Почти таким же» назовем коллинеарный, то есть умноженный на скаляр вектор. Тогда для таких векторов действие оператора (как правило, довольно сложное и мало понятное) как раз кристально очевидно: такие вектора оператор «надувает».

Определение 3.2. Собственным значением линейного оператора A называется такие число λ, что для него найдется ненулевой собственный вектор. Иными словами, уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение.

Определение 3.3. Собственным подпространством линейного оператора A для собственного числа λ называется множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному числу. То есть собственным подпространством называется:

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)$$

Упражнение 1. Докажите, что V_λ и правда является линейным векторным пространством.

Откуда взялась единичная матрица? Давайте рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$. Несложно понять, что можно записать это уравнение, добавив матричную единицу, не нарушая пространства решений: $Ax = \lambda Ex$ Перенося все в левую часть и вынося по дистрибутивности x мы получаем как раз выражение $(A - \lambda E)x = 0$ На самом деле легко увидеть здесь линейную однородную систему (правда, с неизвестным параметром λ). Для того, что λ стало собственным числом, нужно, чтобы у такой СЛУ были ненулевые решения. Как мы уже с Вами знаем, с однородной СЛУ решений либо пространство, либо оно единственно (0); нас интересует случай, когда решений много (потому что нулевой вектор по определению не считается собственным). Значит, ранг матрицы системы $A - \lambda E$ должен быть меньше ее размерности, а следовательно матрица не должна быть обратимой. Из чего мы заключаем принципиально важную вещь:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Это уже уравнение на λ, получившее название характеристического уравнения. Его корни являются собственными числами.

Теорема 3.4 (Гамильтона-Кэли)**.** *Если в характеристический многочлен $P(\lambda)$ подставить матрицу A, то он обнулится. При этом это будет многочлен минимальной степени с таким свойством для данной матрицы A.*

Упражнение 2. Даны следующие отображения:

(a) f: поворот на 30° против часовой стрелки на плоскости
(b) g: симметрия относительно $y = -x$
(c) h растяжение вдоль оси y в 5 раз

1. Найдите матрицы отображений f, g, fg, fh, gh;
2. Найдите какие-нибудь собственные вектора отображений f, g, h, fh, fg и gh, не пользуясь характеристическим уравнением;
3. Для тех отображений, где есть два линейно-независимых собственных вектора, переведите отображение в базис из этих векторов (такой базис называется собственным); запишите их матрицы в новом базисе.

Упражнение 3. Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Упражнение 4. Рассмотрите характеристический многочлен произвольной матрицы. Какие знакомые числовые характеристики матрицы вы можете в нем обнаружить?

Упражнение 5. Докажите, что матрица необратима тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ является ее собственным значением.

3.2 Смена базиса и диагонализация

Как мы уже обсуждали выше, матрицы ассоциированы с линейными отображениями, а квадратные матрицы — с линейными операторами. Несложно заметить, что во всех наших построениях о матрицах операторов соблюдалось предположение о знании некоторого базиса пространства (например, мы говорили об операторе $f\colon V \to V$ с базисом $e_1, e_2, \dots e_n$ в пространстве V.

Однако в одном пространстве можно выделить бесконечно много базисов. Ясно, что матрица оператора целиком и полностью зависит от выбранного базиса. Поэтому следует установить, как меняется матрица оператора при смене базиса.

Напомним, что смена базиса задается матрицей перехода T, где по столбцам лежат координаты нового базиса в старом (как и у любого оператора); чтобы сделать такой переход, достаточно умножить вектор на матрицу перехода: $Tv_f = v_e$ или $v_f = T^{-1}v_e$. Тогда:

$$y_e = A_e x_e \iff T^{-1}y_f = A_e(T^{-1}x_f) \iff y_f = TA_eT^{-1}x_f \iff y_f = A_f x_f$$

В итоге у нас вышла теорема:

Теорема 3.5. *Для линейного оператора $f\colon V \to V$ матрицы оператора в базиса $e_1, \dots e_n$ и $f_1, \dots f_n$ связаны следующим образом:*

$$A_f = TA_eT^{-1},$$

где T — матрица перехода из базиса $e_1, \dots e_n$ в базис $f_1, \dots f_n$.

Главное, что нас интересует в случае перехода к новому базису — это существенное упрощение вида матрицы оператора. В результате хотелось бы получить некую матрицу, которую легко было бы умножать на произвольные вектор. Для этого построим специальный базис:

Определение 3.6. Собственным называется базис пространства, состоящий только из собственных векторов оператора. Если мы рассматриваем пространства V размерности n, то это требование означает, что должно найтись ровно n линейно независимых собственных векторов.

Теорема 3.7. *Собственные вектора с разными собственными значениями линейно независимы.*

Упражнение 6. Докажите, что в собственном базисе матрица оператора имеет диагональный вид (то есть $a_{ij} = 0$ если $i \neq j$). Докажите, что если матрица оператора диагональна, то базис, в котором она записана — собственный.

Установим, при каких условиях у оператора найдется собственный базис:

1. Найдем все собственные числа оператора A, решая характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$;
2. Если их ровно n, то найдется собственный базис, поскольку каждому собственному числу соответствует хотя бы одномерное пространство;
3. Если их меньше n (подумайте, может ли оказаться больше чем n корней у характеристического многочлена?), то необходимо найти размерность каждого собственного подпространства V_λ; если их сумма равна n, то у оператора существует собственный базис.

Упражнение 7. К сожалению, не каждый оператора диагонализуем. Для примера изучите матрицу $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Чему равно I^2? Как это связано с комплексными числами? Приведите их матричную запись.

Упражнение 8. Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц. Диагонализуемы ли они?

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Выпишите матрицы перехода, если да.

3.3 Матричные функции

Часто приходится рассматривать так называемые матричные функции. Простейший пример (за исключением многочисленных случаев применения в нейронных сетях) можно выстроить следующим образом: рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение $y' = ay$. Несложно догадаться, что его решениями является любая функция вида $y = Ce^{ax}$. Теперь представьте, что мы смотрим на систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Иными словами, $y' = Ay$, где y — вектор-функция. Хотелось бы написать, что тогда решениями аналогично являются экспоненты: $y = Ce^{Ax}$, однако тогда придется договориться о том, как считать экспоненту от матрицы.

Самый простой случай — это полиномиальные функции: в них матрицу можно просто подставить, вычисляя степени матрицы A (здесь, правда, требуется договориться, что

$A^0 = E$). Для всех остальных функций используем следующую простую операцию: заменим функции на их ряды Маклорена (то есть ряды Тейлора в точке $x = 0$). Таким образом мы свели задачу к предыдущей: требуется исключительно научиться считать полиномиальные матричные функции. Для этого вычислим:

Упражнение 9. Пусть $A \in \mathbb{M}_n$ и A — диагональная. Вычислите A^k для произвольного k.

Упражнение 10. Пусть A диагонализуема в некотором базисе, то есть найдется такая невырожденная матрица T, что $A = TBT^{-1}$, где B — диагональная. Вычислите A^k для произвольного k. Для этого выпишите A^k, применяя выражение выше.

Упражнение 11. Вычислите e^{Ax}, пользуясь тем, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ и матрица A диагонализуема в некотором базисе. Выполните такое вычисление для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.4 Квадратичные формы

Определение 3.8. Квадратичной формой $q(x)$, где $x \in V$, V — некоторое векторное пространство, называется однородный (то есть степень каждого монома равна 2) полином второго порядка от элементов вектора x.

Например, $q_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ или $q_2(x, y, z) = x^2 - 4yz + xy$ — это квадратичные формы. Для них можно предложить альтернативную матричную запись:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Значение квадратичной формы на векторе-столбце может быть вычислено при помощи матричного умножения:

$$q(x) = x^T Q x$$

Упражнение 12. Подумайте, почему смешанные произведения ($x_i x_j$, где $i \neq j$) дают в матрице коэффициент, деленный на 2.

Также задумаемся над переходом из одного базиса в другой. Пусть матрица перехода работает как $x = Ty$, тогда:

$$q(x) = x^T Q x = (Ty)^T Q (Ty) = y^T T^T Q T y = y^T (T^T Q T) y$$

Таким образом, при смене базиса новая матрица квадратичной формы может быть вычислена при помощи матричного умножения $B = T^T A T$.

Упражнение 13. Докажите, что для произвольной квадратичной формы $q(x)$ выполняется: $Q = Q^T$.

3.4.1 Канонический и нормальный вид квадратичных форм

Несложно понять, что для квадратичной формы $q_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ такой вид не является наиболее удобным и коротким. Действительно $q_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$; допустим, мы перешли бы от переменных (x, y) к переменным (u, v), причем $u = x - y$ и $v = x$. Несложно понять, что это смена базиса: из старого базиса e_1, e_2 мы перешли к новому f_1, f_2 по такому правилу:

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 \\ f_2 = e_1 \end{cases}$$

Отметим, что квадратичная форма в таком базисе стала гораздо проще: $q_1(u, v) = u^2$ (соответственно упростилась и ее матрица).

Определение 3.9. Вид квадратичной формы $q(x)$, при котором ее матрица $Q(x)$ принимает диагональный вид, называется каноническим видом квадратичной формы.

Определение 3.10. Вид квадратичной формы $q(x)$, при котором ее матрица $Q(x)$ принимает диагональный вид, причем на диагонали стоят только числа 0, 1 и -1 называется нормальным видом квадратичной формы.

Методов приведения матрицы к каноническому или нормальному виду довольно много. Самый простой из них — это метод Лагранжа, также известный как выделение полных квадратов.

Его идея заключается в том, что в форме последовательно выделяются полные квадраты, постепенно уменьшая число не собранных в них переменных. Например, пусть дана форма

$$q(x) = x^2 - 4xy + 2y^2 - 3z^2 - 6xz + 2yz$$

Выделим в ней полные квадраты, начиная с переменной x:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - 2y - 3z)^2 - 4y^2 - 9z^2 - 12yz + 2y^2 - 3z^2 + 2yz = \\ &= (x - 2y - 3z)^2 - 2y^2 - 10yz - 12z^2 = (x - 2y - 3z)^2 - 2(y^2 + 5yz + 6z^2) = \\ &= (x - 2y - 3z)^2 - 2\left(\left(y - \frac{5}{2}z\right)^2 - \frac{25}{4}z^2 + 6z^2\right) = \\ &= (x - 2y - 3z)^2 - 2\left(y - \frac{5}{2}z\right)^2 + \frac{1}{4}z^2 \end{aligned}$$

Тогда в каноническом виде мы получим матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Правильной идеей теперь будет написать матрицу перехода T. Заметим, что де-факто мы получили в наших скобках замену переменных:

$$\begin{cases} u = x - 2y - 3z \\ v = y - \frac{5}{2}z \\ w = z \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Заметим, что C не является матрицей перехода (поскольку она отображает старые координаты в новые), но при этом из нее легко получить матрицу перехода $T = C^{-1}$.

Другим методом приведения к каноническому виду является метод Якоби:

Теорема 3.11. *Пусть все главные угловые миноры Q_k матрицы Q не равны 0 (под главными угловыми минорами подразумеваются определители квадратных матриц, полученных из матрицы Q вычеркиванием всех строк и столбцов с $n - k$ по n; таким образом остается только матрица $k \times k$ в верхнем левом углу); положим также $Q_0 = 1$. Тогда существует такая замена координат, что*

$$T^T Q T = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{Q_{k-1}} y_k^2$$

При этом матрица T будет верхнетреугольной.

Упражнение 14. Методом Якоби приведите к каноническому квадратичную форму $q(x) = x^2 - 4xy + 2y^2 - 3z^2 - 6xz + 2yz$.

Определение 3.12. Число 1 на диагонали в нормальном виде квадратичной формы называется положительным индексом инерции. Аналогично, число -1 называется отрицательным индексом инерции. Пара индексов инерции называется сигнатурой формы и не зависит от базиса.

Определение 3.13. Квадратичная форма называется положительно определенной, если для любого $x \neq 0$ $q(x) > 0$. Соответственно, отрицательно определенной называется форма, что $q(x) < 0$.

Упражнение 15. Докажите, что форма определена положительно, если ее положительный индекс инерции равен размерности пространства.

Теорема 3.14 (Критерий Сильвестра)**.** *Пусть дана квадратичная форма $q(x)$ и ее матрица Q. Если:*

1. *Все ее главные угловые миноры Q_k положительны, то форма положительно определена;*
2. *Ее главные угловые миноры Q_k чередуют знак, начиная с минуса, то есть имеют тот же знак, что и $(-1)^k$, то форма отрицательно определена.*

Упражнение 16. При каких значениях α следующие квадратичные формы будут положительно или отрицательно определены:

(a) $q(x) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 2\alpha xy - 2zx + 4yz$

(b) $q(x) = \alpha x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$

Для симметрических матриц (а все матрицы квадратичных форм именно такие) справедлива такая замечательная теорема:

Теорема 3.15. *1. Все собственные числа симметрической матрицы A вещественны;*

2. Собственные вектора, принадлежащие различным собственным числам симметричной матрицы A попарно ортогональны (то есть их скалярное произведение равно 0);

3. Существует ортогональная замена переменных $X = TY$, приводящая квадратичную форму $f(X)$ к каноническому виду, где на диагонали матрицы квадратичной формы стоят собственные числа.

Упражнение 17. Для каждой квадратичной формы найдите матрицу в стандартном базисе; ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы диагональна; ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы имеет нормальный вид:

(a) $2x^2 + 2xy + 2y^2$
(b) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5xy - 2yz + 5z^2$

Упражнение 18. Зная, что $d^2 f$ функции $n-$переменных есть квадратичная форма, исследуйте на экстремумы функцию $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ с точки зрения знакоопределенности соответствующей квадратичной формы.