Дискретная математика-3
Теория графов

Антон Савостьянов

Курс "Математика для анализа данных"

Осень 2018

Задача 5

Условие

50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.

Решение

Пусть турнир выиграла команда A. Если существует команда B, выигравшая и у A, и у всех команд, проигравших A, то у такой команды очков больше, чем у A, что невозможно. Противоречие.

Разрезы

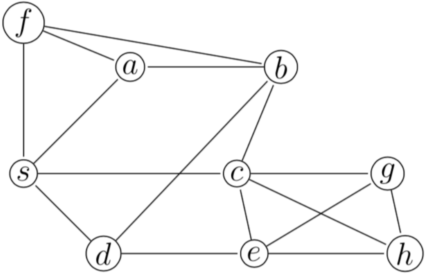
Разрезом в графе называют разбиение множества вершин графа V на два непересекающихся множества S и T: $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$.

Величиной или размером разреза называют количество (или суммарный вес) ребер, ведущих из вершин множества S в вершины множества T.

С помощью разреза можно доказать, что из вершины A в вершину B нет пути: действительно, если нашелся разрез (S, T), где $A \in S$ и $B \in T$, нулевого размера, то пути нет (что это говорит о связности?).

Разрезы

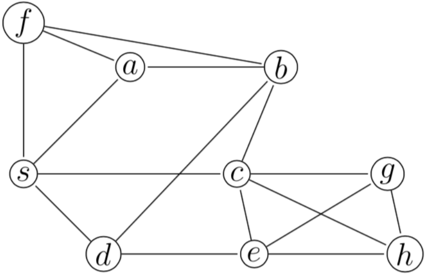
Граф G



Найдите в графе G разрез размера 6. Есть ли в графе G разрез большего размера?

Разрезы

Граф G



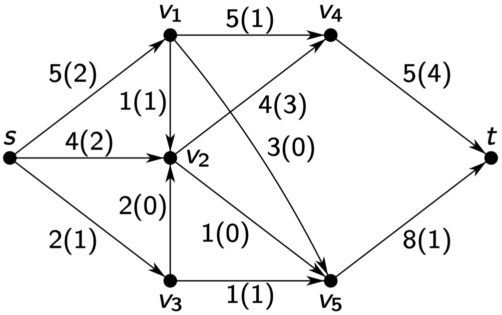
Найдите минимальный разрез графа G. Докажите, что найденный разрез действительно минимальный.

Разрезы

Из определения следует, что количество рёбер в минимальном разрезе неориентированного графа – это количество рёбер, которое необходимо удалить, чтобы граф стал несвязным.

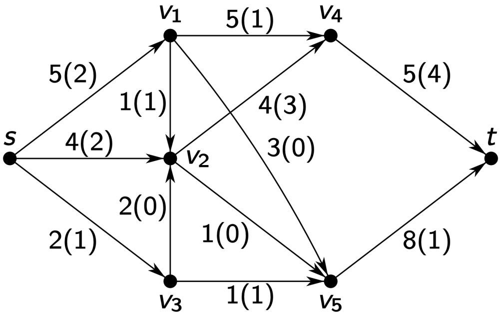
Рассмотрим ациклический ориентированный граф $G = (V, E)$ с источником s и стоком t (что это такое?). Каждому ребру $e \in E$ присвоим пропускную способность $\alpha(e)$. Тогда можно определить поток графе, который ограничен пропускной способность ребер.

Разрезы



Пропускной способностью разреза называется сумма пропускных способностей всех ребер в разрезе.

Разрезы



Теорема Форда-Фалкерсона: величина максимального потока в графе путей равна величине пропускной способности его минимального разреза.

Бинарные отношения

Как мы уже обсуждали, результаты теории графов находят применения в разных областях, поскольку графы описывают отношения. Мы рассмотрим ограниченный класс отношений — отношения на одном множестве V. Скажем, V может быть множеством людей, а отношение R на V — отношение знакомы ли эти люди.

Тогда пишут $R(a, b)$, если человек a знаком с человеком b.

Бинарные отношения

Ясно, что если a знаком с b, то и b знаком с a; не обязательно, что если при этом b знаком с c, то и a знаком с c. Считать ли, что a знаком с самим собой?

Отношение R называется

- рефлексивным, если для каждого $a \in V$ выполнено $R(a, a)$;
- антирефлексивным, если для каждого $a \in V$ не выполнено $R(a, a)$;
- симметричным, если из $R(a, b)$ следует $R(b, a)$;
- антисимметричным, если из $R(a, b)$ при $a \neq b$ следует, что отношение $R(b, a)$ не выполняется;
- транзитивным, если из $R(a, b)$ и $R(b, c)$ следует $R(a, c)$.

Бинарные отношения

Если отношение R антисимметрично, транзитивно и либо рефлексивно, либо антирефлексивно, то такое отношение называется отношением порядка.

Элементы a и b ($a \neq b$) сравнимы, если выполняется либо $R(a, b)$, либо $R(b, a)$.

Примеры отношений порядка знакомы нам со школы: это отношения $\leq$ и $\geq$, а также $>$ и $<$ на множестве чисел (натуральных, целых, рациональных, вещественных). Все числа сравнимы между собой: либо $a \geq b$, либо $b \geq a$, поэтому для отношения $R(a, b)$ также используют обозначение aRb.

Бинарные отношения

Условие

Профессор Рассеянный установил следующий порядок $<_P$ для утреннего одевания:

$$\text{очки} <_P \text{брюки} <_P \text{ремень} <_P \text{пиджак},$$

$$\text{очки} <_P \text{рубашка} <_P \text{галстук} <_P \text{пиджак},$$

$$\text{брюки} <_P \text{туфли},$$

$$\text{очки} <_P \text{носки} <_P \text{туфли},$$

$$\text{очки} <_P \text{часы}.$$

Формально, обозначение $a <_P b$ значит, что вещи a и b находятся в отношении P.

Бинарные отношения

1. Постройте ориентированный граф, в котором множество вершин — это множество вещей, и при этом из вещи b ведёт ребро в вещь a, если выполняется $a <_P b$.
2. Докажите, что отношение достижимости в этом графе есть отношение порядка.
3. Проведите топологическую сортировку в полученном графе.
4. Продолжите порядок, соответсвующий отношению достижимости, до линейного.

Модель Эрдеша-Реньи

Представим себе, что в некоторой стране есть 10 городов, которые попарно соединены дорогами.

Допустим, каждая из дорог за определенный срок изнашивается (т.е. становится непроезжей) с известной вероятностью q. При этом износ данной дороги никак не зависит от совокупного износа остальных дорог. Спрашивается: какова максимальная вероятность q, при которой с вероятностью больше $1/2$ не исчезнет возможность перемещения между любыми двумя городами? По существу, это вопрос о надежности транспортной сети: чем выше искомая вероятность q, тем, разумеется, сеть надежнее.

Модель Эрдеша-Реньи

Нетрудно видеть, что вопрос о надежности сети — это, в свою очередь, вопрос о связности случайного графа. В самом деле, сопоставим каждому городу вершину $i \in V_{10}$. Тогда «дорога» между «городами» i и j — это ребро. Износ дороги — это исчезновение ребра. Значит, утверждение «дорога изнашивается с вероятностью q» равносильно утверждению «ребро появляется с вероятностью $p = 1 - q$».

Таким образом, нас интересует, какова минимальная вероятность p, при которой в модели Эрдеша–Реньи $G(n, p)$ вероятность связности графа больше половины (граф, скорее, связен, чем несвязен).

Модель Эрдеша-Реньи

Теорема: Рассмотрим модель $G(n, p)$. Пусть $p = \frac{C \ln n}{n}$. Если $C > 1$, то почти всегда случайный граф связен. Если $C < 1$, то почти всегда случайный граф не является связным.

Действительно, вернемся к вопросу о надежности сети. Пусть число n городов, попарно соединенных дорогами, растет. Тогда, разумеется, величина $p = \frac{C \ln n}{n}$ довольно быстро стремится к нулю. Тем не менее, теорема утверждает, что вероятность сохранения связности графа при уничтожении его ребер с вероятностью $1-p$ стремится к единице. Грубо говоря, если городов 1000, то мы можем позволить дорогам разрушаться с вероятностью ≈ 0.993, так что в результате с вероятностью, близкой к единице, перемещение между любыми двумя городами останется возможным.