Интенсив по математическому анализу и линейной алгебре, 2018 год.

Организационная информация.

- Занятия ведет Нина Сахарова (saharnina@gmail.com)
Вопросы по математике и не только можно отправлять на электронные адреса преподавателей или писать в наш telegrem-канал.

- В конце части занятий будет выдано домашнее задание. Задание нужно аккуратно записать (можно набрать в TeXe), отсканировать, собрать в один pdf-файл и выслать по адресу отправить на почту ассистенту: (dvishnev@nes.ru). с темой письма «Интенсив по математике, занятие (номер), Иванов Иван.»

- Мы будем решать довольно много задач. Задания со знаком «*» предназначены для слушателей, которые уже хорошо знакомы со всем, что обсуждается в данный момент. Эти задания скорее всего разбираться со всеми не будут, но их можно и нужно решать самостоятельно, по желанию обсуждать с Ниной отдельно.

3 Занятие: Анализ функций от двух и более переменных, часть 1 (22 сентября, суббота).

Все (или почти все) определения, формулировки и объяснения здесь и далее – короткие и неформальные.
За длинными и формальными определениями можно обращаться к следующей литературе:

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.
- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.
- Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике, 2002 (введение).

Часть картинок и задач заимствованы из книги Stewart, J. «Calculus - Early Transcendentals».

3.1 Ряды. Повторение.

Определение 1. ***Числовым рядом*** *(или просто рядом) называется выражение вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

где a_i – действительные числа. Сумма первых n членов ряда $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ называется n-й частичной суммой ряда. Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ...$$

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда $\lim_{n\to\infty} S_n = s$, то ряд называют ***сходящимся****, а число S – суммой ряда. Если такого предела не существует (или он равен бесконечности), то ряд называют* ***расходящимся****.*

Лемма 1. *Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Лемма 2. ***Признак сравнения.*** *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два ряда с положительными членами. Тогда,*
(1) если $a_n \le b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
(2) Если $a_n \le b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится тоже.

Для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4...$ верна следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4...$, $a_n > 0$ удовлетворяет условиям:*
(1) $a_n \leq a_{n+1}$;
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
тогда он является сходящимся.

Определение 2. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, если он сам сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ уже не является сходящимся.*

Важно! Перестановка членов условно сходящегося ряда может, вообще говоря, привести к разным значениям суммы ряда (в то время как перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на значение суммы ряда).

Задание 3.1. Определите, сходится ли следующие ряды, являются ли они абсолютно или условно сходящимся:
a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ...$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ c) $2^3 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$
d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ...$ e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ...$

Определение 3. *Степенной ряд – это ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...,$$

где x – переменная, а все c_n – некоторые константы.

Заметим, что при подстановке конкретного значения переменной x ряд степенной ряд становится просто числовым рядом, про который можно говорить сходится он или нет. Более общо, степенным рядом (по степеням $(x-a)^n$) мы будем называть выражение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$$

Теорема 1. *Для данного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ имеется ровно три возможности:*
(1) Ряд сходится только для $x = a$;
(2) Ряд сходится для всех значений x;
(3) Существует положительное число R (которое называется радиусом сходимости),такое, что степенной ряд сходится для всех $|x-a| < R$ и расходится для всех $|x-a| > R$.

Задание 3.2. Найдите, для каких значений x сходится ряд
a) $1 + x + x^2 + x^3 + ...$; b) $3 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + ...$. Укажите радиусы сходимости данных рядов.

3.2 Ряд Тейлора.

Пусть $f^{(n)}(a)$ – это n-ая производная функции $f(x)$, вычисленная в точке a.

Теорема 2. *(**Теорема Тейлора** для функции $f(x)$). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (a, x)$ такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$(c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1)$.

Многочлен $T_n = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ называют многочленом Тейлора, а $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ называют остаточным членом в форме Лагранжа.

R_n – это погрешность приближенного равенства $f(x) \approx T_n$. Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом P_n с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена R_n.

При $a = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора – **формулу Маклорена**:

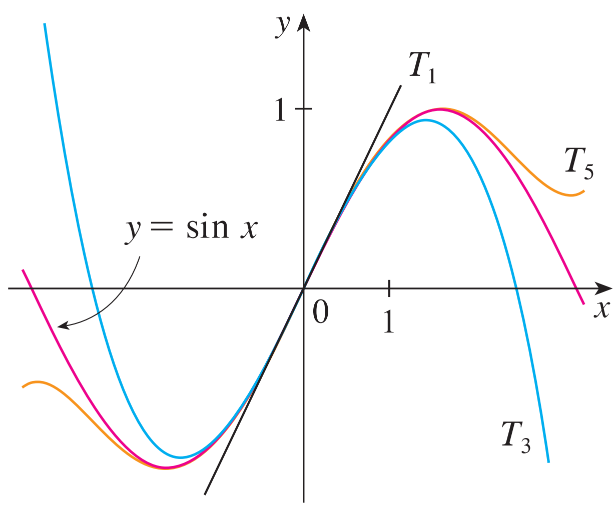
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$(c = a + \theta x, \quad 0 < \theta < 1)$.

Теорема 3. *Если $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где T_n – n-ый многочлен Тейлора, и $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ для любых $|x-a| < R$, то функция f равна своему ряду Тейлора на интервале $|x-a| < R$.*

Лемма 4. ***Оценка остаточного члена или неравенство Тейлора.*** *Если $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ на промежутке $|x-a| < R$, то остаточный член*

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{(n+1)}, \qquad |x-a| < R.$$



Задание 3.3. 1) Найдите первые несколько членов ряда Маклорена для функции e^x, функции $\sin x$ и функции $e^x \cdot \sin x$;

2) Вычислите предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Задание 3.4. 1) Найдите число e с точностью до 0,001.

2*) Найдите с точностью до сотых число $(2.01)^7$.

3.3 Площади и интегралы.

Мы рассмотрим только геометрическую интерпретацию интеграла и совсем не будем касаться формальных сторон вопроса.

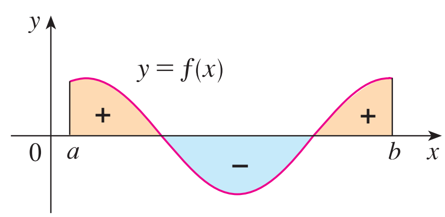
Определение 4. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале I, если всюду на I*

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 4. *Если F – некоторая первообразная функции $f(x)$, то все прочие первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C – любое число.*

Для функции от одной переменной ***определенный интеграл*** (обозначается $\int_a^b f(x)\ dx$) имеет простой геометрический смысл: он равен площади, заключенной между графиком функции и осью Ox от точки a до точки b (правда, площади ориентированной, со знаком). Для того, чтобы найти эту площадь, требуется найти первообразную функции $f(x)$, то есть некоторую функцию $F(x)$. Тогда, согласно, основной теореме анализа:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$



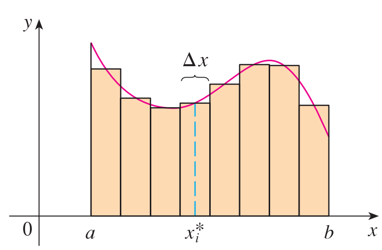


FIGURE 1
If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

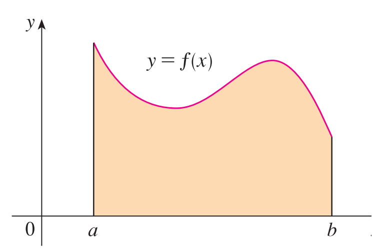


FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b

Задание 3.5. Вычислите следующие определенные интегралы:

1) $\int_1^4 (x^2 + 2x + 3)\ dx$, 2) $\int_1^3 \dfrac{3}{t^4}\ dt$, 3) $\int_0^1 10^x\ dx$, 4) $\int_1^9 \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\ dx$,

5*) $\int_0^1 xe^{-x^2}\ dx$, 6*) $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, 7*) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\ dx$, 8*) $\int_0^1 (x-1)^{25}\ dx$,

9*) $\int_0^{\pi} x^3 \cos x\ dx$, 10*) $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\ dx$, 11*) $\int_2^3 \dfrac{1}{t^2 - 1}\ dt$, 12*) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$.

Задание 3.6. Найдите площадь, ограниченную:
a) графиком синуса и отрезком $[0, \pi]$ оси Ox;
b) графиками функций $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^4 + 1$.

3.4 Кривые и вектор-функции.

Определение 5. *Вектор функция $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – это функция, область определения которой – вещественные числа (параметр t), а область значений – это векторы (в нашем случае векторы в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^3$).*

Некоторые кривые на плоскости являются графиками каких-нибудь функций. Но это верно не для всех кривых (почему?). Однако, если (x, y) – точки на кривой, и x и y – некоторые функции от параметра t, то есть $x = f(t)$ и $y = g(t)$, то кривую можно записать в параметрическом виде $(f(t), g(t))$.

Задание 3.7. Какую кривую на плоскости (или в трехмерном пространстве) задает следующая вектор-функция
a) $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$; b) $(\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$;
c) $(3t - 5, 2t + 1)$; d) $(\sqrt{t}, 1 - t)$; e) $(\cos t, \sin t, t)$.

Теорема 5. *Если $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ – вектор-функция, то ее производная*

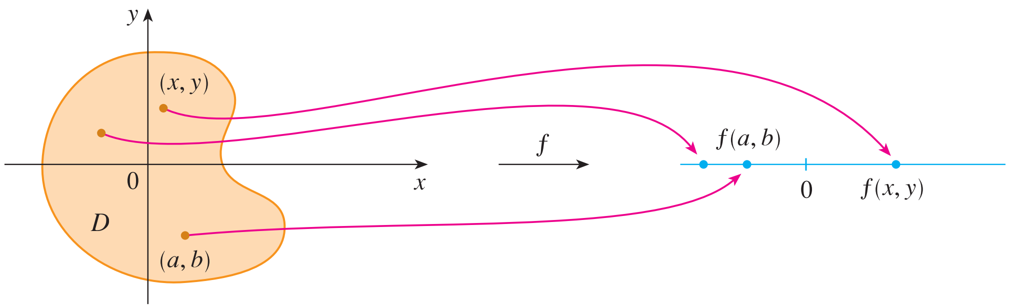
$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)).$$

Касательный вектор в точке t_0 – это вектор с координатами $r'(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$.

Задание 3.8. Найдите уравнение касательной для кривой, заданной параметрически
a) $r(t) = (3t - 5, 2t + 1)$ в точке $(-2, 3)$; b) $r(t) = (6 \sin t, t^2 + t)$ в точке $(0, 0)$.

3.5 Функции от двух переменных. Примеры.

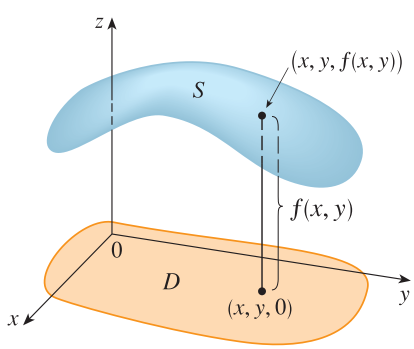
Определение 6. ***Функция от двух переменных*** *– это правило, которое сопоставляет каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из области определения D некоторое единственное число $z = f(x, y)$*



Задание 3.9. Найдите и нарисуйте линии область определения функции

a) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$; b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$.

Определение 7. *Если $f(x,y)$ – функция от двух переменных, то график этой функции – это множество точек $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, таких, что $z = f(x,y)$.*



Задание 3.10. Выполните набросок графика функции

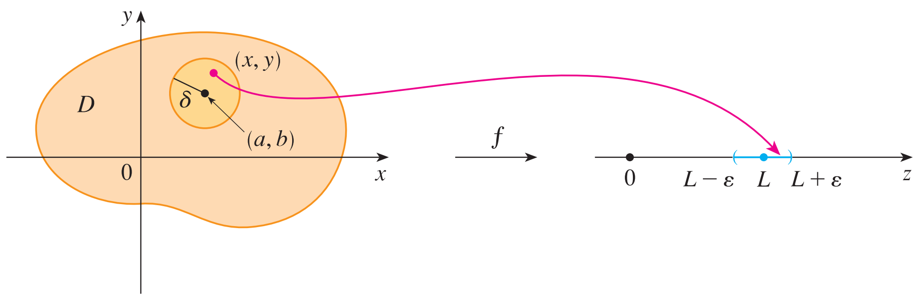
a) $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$; b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; c) $f(x,y) = y^2 + 1$; d) $f(x,y) = \cos x$.

Определение 8. ***Линии уровня (или кривые уровня)*** *функции от двух переменных $f(x,y)$ – это кривые заданные уравнением $f(x,y) = C$, где C – константа.*

Задание 3.11. Нарисуйте несколько кривых уровня (контурную карту) для функций:

a) $f(x,y) = ye^x$; b) $f(x,y) = (y - 2x)^2$ c*) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

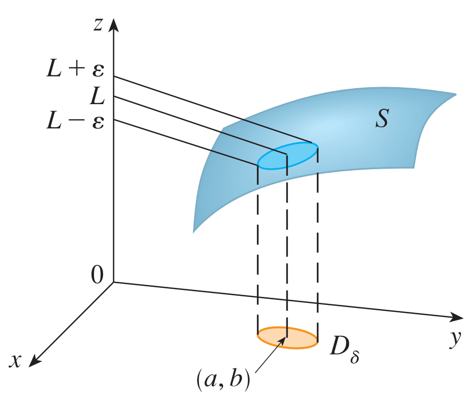
3.6 Предел функции нескольких переменных и непрерывность.



Определение 9. *Пусть $f(x, y)$ – функция от двух переменных, а (a, b) – некоторая точка из области определения. Будем говорить, что «предел функции f, при (x, y) стремящимся к (a, b), равен L»,*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

если разницу между числами $f(x, y)$ и l можно сделать сколько угодно маленькой, делая расстояние от точки (x, y) до (a, b) сколько угодно малым.



Определение 10. *Функция $f(x, y)$ называется* ***непрерывной в точке*** (a, b), *если*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Задание 3.12. Найдите предел функции в точке, если он существует (если передела не существует, то попробуйте это доказать). Является ли функция (в указанных точках) непрерывной?

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(5x^3 - x^2y^2)$; b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^4 + 3y^4}$; c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3.7 Частные производные.

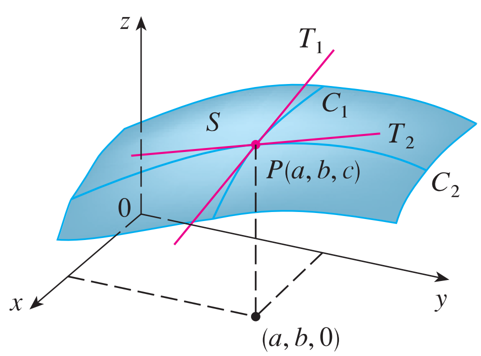
Определение 11. *Если $f(x,y)$ – функция от двух переменных, то частные производные f_x (по отношении к переменной x) и f_y (по отношении к переменной y) определяются так:*

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x},$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}.$$

Чтобы найти частную производную по x, f_x, необходимо зафиксировать переменную y (то есть считать ее константой) и продифференцировать $f(x,y)$ как функцию от одной переменной x.

Геометрически. Частные производные $f_x(a,b)$ и $f_y(a,b)$ – это угловые коэффициенты касательных прямых T_1, T_2 к кривым C_1, C_2, которые получаются при пересечении поверхности $z = f(x,y)$ с плоскостями $x = a$ и $y = b$.



Задание 3.13. Вычислите частные производные функции $f(x,y) = \sin(x^2 + 3y^3)$. Найдите вторые частные производные: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

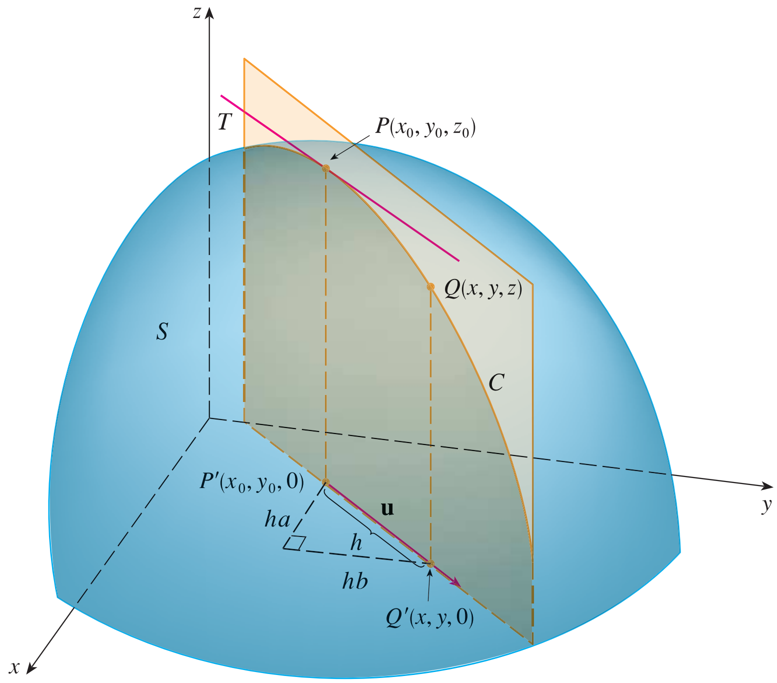
3.8 Производная по направлению и градиент.

Частные производные $f_x(x,y)$ и $f_y(x,y)$ дают представление о скорости роста функции, если мы меняем только одну координату (а вторую оставляем прежней), иными словами, если мы двигаемся на плоскости $x - y$ по направлению единичных векторов, $(1,0)$ или $(0,1)$, и смотрим как меняется при таком движении координата $z = f(x,y)$.

Если мы хотим узнать о скорости изменения функции при движении по какому-нибудь другому направлению (скажем, при движении вдоль единичного вектора $u = (\alpha, \beta)$, то необходимо узнать производную функции, вычисленную по этому направлению:

Определение 12. *Производная функции $f(x,y)$ по направлению единичного вектора $u = (\alpha, \beta)$, вычисленная в точке (x,y) – это*

$$f_u(a,b) = D_u f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\alpha, y + h\beta) - f(x,y)}{h}.$$



Определение 13. *Градиентом функции $f(x,y)$, ∇f, называется вектор из частных производных этой функции:*

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

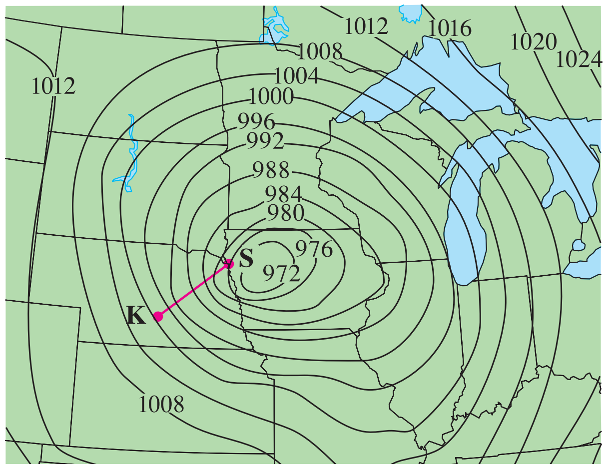
Производная функции по направлению в данной точке может быть найдена при помощи вектора-градиента функции:

Теорема 6. *Пусть $u = (\alpha, \beta)$ – произвольный вектор единичной длины, тогда*

$$D_u f(x,y) = \alpha f_x(x,y) + \beta f_y(x,y).$$

Задание 3.14. Вычислите производную функции $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ в точке $(2,-1)$ по направлению вектора $u = (3,4)$.

Предположим, мы хотим выяснить, в каком направлении нужно двигаться, чтобы скорость роста функции была максимальной (или, наоборот, минимальной). По-простому: если мы идем по поверхности, то интересно понять, в какую сторону идти, чтобы быстрее всего подняться на вершину, то есть где подъем самый крутой.

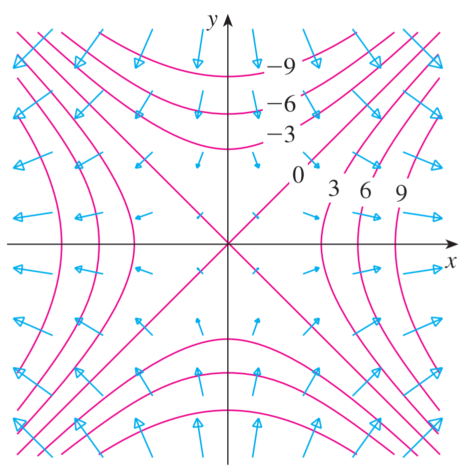


From *Meteorology Today*, 8E by C. Donald Ahrens (2007 Thomson Brooks/Cole).

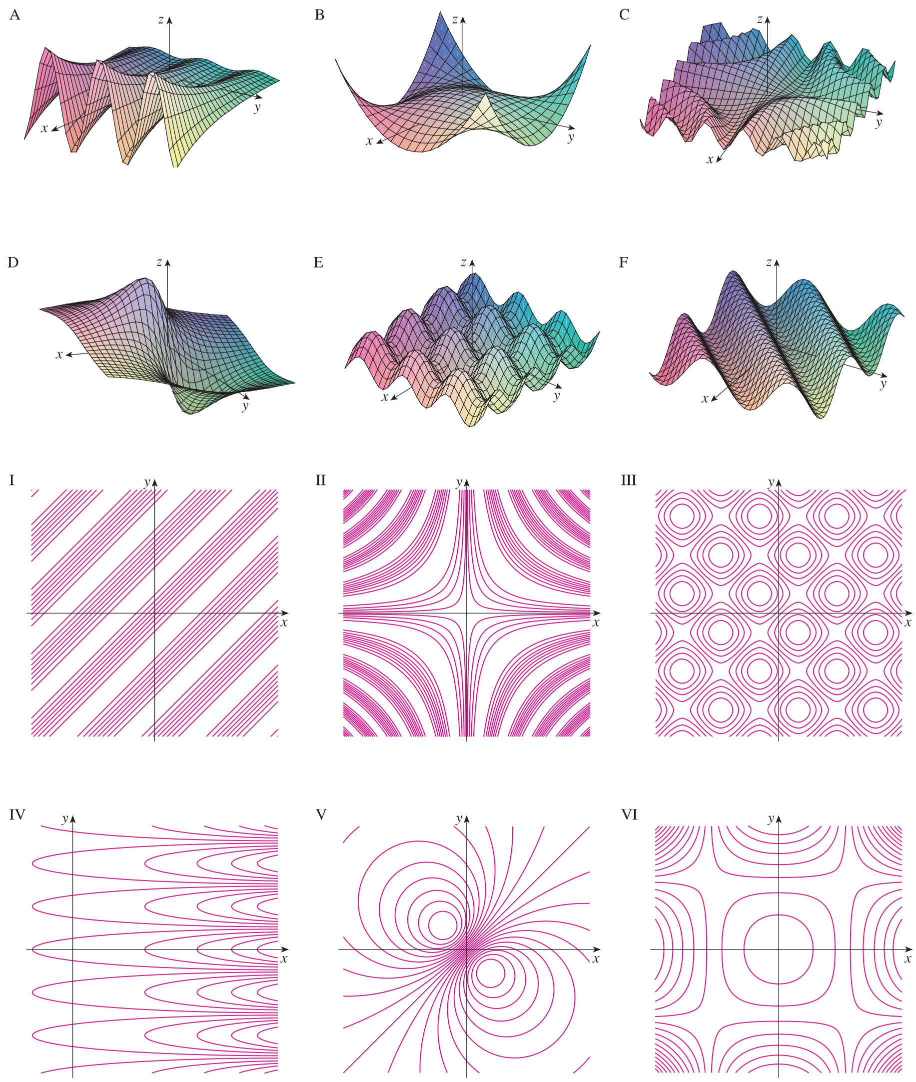
Теорема 7. *Пусть $f(x, y)$ дифференцируемая функция от двух (или более) переменных. Тогда максимальное значение производной по направлению $D_u f(x, y)$ равно $|\nabla f(x, y)|$ и достигается, когда вектор u имеет то же направление, что и вектор-градиент ∇f.*

Задание 3.15. Пусть функция $f(x, y) = xe^y$. Найдите направление, в котором скорость роста функции максимальна. Чему равна эта скорость?

Задание 3.16. На картинке ниже нарисованы линии уровня функции $f(x, y) = x^2 - y^2$. Нарисуйте графика этой функции. Сопоставьте синие стрелки на картинки с градиентами функции в соответствующих точках. Почему они выглядят именно так?



Задание 3.17. На картинке ниже нарисованы графики и их линии уровня. Сопоставьте картинки друг другу. На какой-нибудь картинке нарисуйте градиенты.



3.9 Экстремумы.

Теорема 8. *Если функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум или минимум (экстремум) в точке (a, b) и у нее существуют частные производные первого порядка в этой точке, то*

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

* Такие точки, в которые частные производные равны нулю или не существуют, называют **критическими точками.**

Достаточное условие экстремума. Пусть (a, b) – критическая точка функции $f(x, y)$ и предположим, что в окрестности этой точки функция имеет непрерывные производные второго порядка. Пусть

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2.$$

Тогда, если

1. $D > 0$ и $f_{xx}(a,b) > 0$, то в точке (a,b) – локальный минимум функции;
2. $D > 0$ и $f_{xx}(a,b) < 0$, то в точке (a,b) – локальный максимум функции;
3. $D < 0$, то в точке (a,b) – ни максимум, ни минимум (седловая точка).
4. $D = 0$, то в точке (a,b) может быть все что угодно (требуется дополнительное исследование).

Задание 3.18. Найдите локальные максимумы, минимумы и седловые точки (если есть) функции
a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$; b*) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

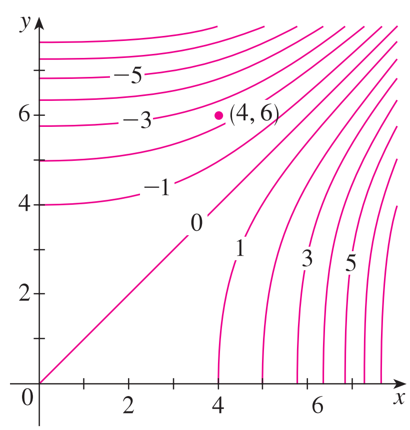
Домашнее задание 3.

Задача 1. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямой $x = 2$.

Задача 2. a) Изобразите эскиз кривой, заданной вектор-функцией $r(t) = (t, \cos 2t, \sin 2t)$;
b) Найдите и нарисуйте касательные векторы в точках $(\pi, 1, 0)$ и $(\pi/2, -1, 0)$.

Задача 3. Нарисуйте на плоскости $x - y$ линии уровня функции $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 4$. Укажите область определения и область значений этой функции. Попробуйте нарисовать эскиз этой поверхности.

Задача 4. Нарисуйте градиент функции $\nabla f(4,6)$, имеющей линии уровня как на картинке ниже, в точке (4, 6). Объясните, почему градиент имеет именно такое направление.



Задача 5. Найдите локальные максимумы, минимумы и седловые точки (если есть) функции

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2.$$

Задача 6*. Сходится ли ряд

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n!} + ...?$$

Задача 7*. Вычислите $e^{1/4}$ с точностью до тысячных.