МдАД: Линейная алгебра **Осень 2018**

Линейная алгебра 2: 6 октября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Ассистент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).*
При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды LaTeX; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.
Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

2.1 Определитель матрицы

Несложно понять, что когда речь идет о матрице, то рассматриваемый объект имеет довольно много степеней свободы: то есть, чтобы как-то охарактеризовать матрицу, приходится учитывать значения всех ее элементов, коих довольно много. Чтобы избежать подобной сомнительной характеристики, пользуются специальными величинами для каждой матрицы.

Определение 2.1. Следом (trace) квадратной матрицы называется сумма элементов на главной диагонали матрицы:

$$\mathrm{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Более важная для нас функция от квадратной матрицы — ее определитель, $\det A$ или $|A|$. К сожалению, общее ее определение довольно сложно, поэтому мы начнем с примеров:

Замечание 2.2. Определитель матрицы 2×2 равен

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Замечание 2.3. Определитель матрицы 3×3 равен

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Для запоминания можно дописать еще одну матрицу A рядом с матрицей A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{pmatrix}$$

Тогда в определителе группы слагаемых с «+» — это произведения на диагоналях данной матрицы, а с «-» — на побочных диагоналях.

Для подсчета определителей более высокого порядка можно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 2.4. *Пусть дана матрица A размера $n \times n$. Назовем дополнением A_{ij} матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца. Тогда вычисления определителя матрицы A можно свести к вычислению определителей меньшего порядка:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(-1)^{k+i} \det A_{ki}$$

Данную формулу называют разложением определителя по k-ой строке. Аналогично можно привести формулу разложения определителя по k-ому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i} \det A_{ik}$$

Ясно, что удобнее всего раскладывать определитель по строкам или столбцам с большим числом нулевых элементов — это позволит считать меньшее количество определителей меньшего порядка.

В чем геометрический смысл определителя? На самом деле, на этот вопрос легко ответить: рассмотрим матрицу A. На нее можно смотреть как на n n-мерных векторов-строк, уложенных друг под другом (или наоборот, n n-мерных векторов-столбцов, стоящих рядом). Рассмотрим случай матрицы 2×2: тогда мы говорим о двух двумерных векторах; если изобразить их с общим началом из точки $(0, 0)$, то на полученных векторах, как на смежных сторонах, можно построить параллелограмм (говорят «натянуть параллелограмм на векторы»). Тогда определитель нашей матрицы будет равен площади этого параллелограмма, если вектора нарисованы в порядке следования в матрице против часовой стрелки (в противном случае мы получим противоположное число). Таким образом определитель матрицы — это ориентированный объем параллелограмма, натянутого на векторы, составляющие данную матрицу.

Такое определение, несмотря на внешнюю приятность, не позволяет подсчитывать определители матриц сколько-нибудь вменяемого размера, поэтому следует пользоваться теоремой и тождествами выше.

Добавим также два дополнительных утверждения без доказательства:

Замечание 2.5. Для произвольных квадратных матриц A и B одинакового размера верно следующее:
$$\det A^T = \det A \qquad \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

2.1.1 Обратная матрица

Определение 2.6. Обратной матрицей к данной квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1}, что:
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$
Как можно заметить, обратная матрица всегда коммутирует с самой матрицей A.

Мы уже знаем, что в поле по умножению обратимы все элементы, кроме 0; то есть даже в самых хороших множествах могут оказаться необратимые элементы. В случае матриц таких элементов довольно много:

Теорема 2.7. *Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$, и невырожденной, если $\det A \neq 0$. Невырожденные матрицы обратимы.*

На самом деле критерий обратимости можно написать несколькими способами, как мы увидим далее, но для наших целей локально подойдет такая теорема.

Итак, как же вычислить обратную матрицу? Для этого можно привести как минимум два простых алгоритма.

Согласно первому из них, для матрицы A следует выполнить такие действия:

1. Вычислить определитель матрицы $\det A$;
2. Вычислить матрицу B, где $b_{ij} = A_{ij}$ (то есть где каждый элемент есть соответствующее дополнение матрицы A);
3. Посчитать обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T$.

Такой алгоритм довольно трудоемок. Альтернативный процесс выглядит следующим образом:

1. Записать рядом с матрицей A единичную матрицу такого же размера $(A \mid E)$;
2. Элементарными преобразованиями по методу Гаусса привести матрицу A к виду единичной матрицы (заодно преобразовывая строки в матрице справа);
3. Обратная матрица A^{-1} будет стоять на месте единичной: $(E \mid A^{-1})$.

Упражнение 1. Чему равен определитель матрицы, обратной к матрице A? Воспользуйтесь свойствами выше.

Упражнение 2. Найдите обратные матрицы для следующих
$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Замечание 2.8. Если рассматривается СЛУ $Ax = b$, причем A — невырожденная квадратная матрица, то решение системы обязательно единственно и может быть вычислено по формуле:

$$x = A^{-1}b$$

Если рассматривается случай однородной СЛУ, то формула все так же применима, при этом она сразу позволяет сделать вывод, что единственным решением системы будет нулевое решение.

2.1.2 Ранг матрицы

Определение 2.9. Рангом матрицы называется натуральное число $\mathrm{rk}A$, которое может быть вычислено тремя способами:

(a) как количество линейно-независимых строк в матрице
(b) как количество линейно-независимых столбцов в матрице
(c) как наибольшей размер квадратной невырожденной матрицы, полученной вычеркиванием строк и столбцов из данной матрицы.

По рангу матрицы также можно установить обратимость матрицы:

Замечание 2.10. Если у матрицы A размера $n \times n$ $\mathrm{rk}A < n$, то матрица вырожденная (фактически это означает, что если одну строку можно выразить как линейную комбинацию остальных строк, то такая матрица вырожденная). Из предыдущего определения сразу следует, что если $\mathrm{rk}A < n$, то $\det A = 0$.

Упражнение 3. Вычислите ранг следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Будет ли эта матрица вырожденной?

Пользуясь рангом матрицы удобно рассуждать о наличии решений СЛУ:

Теорема 2.11. *Для СЛУ вида $Ax = b$ матрицу A будем называть матрицей системы, а матрицу A с приписанным в конце столбцом b: $(A|b)$, — будем называть расширенной матрицей системы.*

1. *если ранг расширенной матрицы системы больше ранга матрицы системы, то решений нет;*
2. *ранг расширенной матрицы системы никогда не меньше ранга матрицы системы;*
3. *число свободных переменных (а также векторов в ФСР) равно $n - \mathrm{rk}A$, где n – количество стоблцов матрицы A*

4. *если ранг матрицы системы равен количеству столбцов в матрице системы и ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы, то решение единственно.*

Данная теорема, а особенно ее третий пункт, позволяют указать алгоритм вычисления ранга матрицы: действительно, если число свободных переменных так связано с рангом матрицы, то достаточно привести матрицу A в улучшенному ступенчатому виду — количество ненулевых строк и будет равняться рангу матрицы.

Упражнение 4. Для системы

$$\begin{cases} x + 6y - 5z = 1 \\ y - x = 0 \\ 4x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

вычислите ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы. Что можно сказать о решениях системы, пользуясь полученной информацией?

2.2 Матрицы отображений и операторов

Как мы уже обсуждали выше, в одном и том же пространстве V можно найти много разных базисов. Тогда разумно задаться целью научиться получать из координат вектора в одном базисе координаты того же вектора в другом базисе.

Для этого давайте договоримся, что изначальный базис назывался $e_1, e_2, \dots e_n$, а новый интересующий нас базис — $f_1, f_2, \dots f_n$. Так же положим, что задано правило, по которому старый базис выражает новый:

$$\begin{cases} f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \ldots + c_{1n}e_n \\ f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{2n}e_n \\ \ldots \\ f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

Надо обратить внимание, что мы обязательно имеем дело с квадратной матрицей C: действительно, как мы обсуждали выше, размерность пространства не может измениться, поэтому как бы мы не меняли базис, количество векторов в нем не меняется.

Так же приведем выражение в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot$$

Матрица C называется матрицей перехода из одного базиса в другой. Несложно понять, что поскольку набор векторов e_k был линейно независимым, то и набор векторов f_k должен быть линейно независимым; поэтому ранг матрицы C должен быть n, то есть матрица должна быть обратима.

Упражнение 5. В пространстве V задано два базиса: $E = (e_1, e_2, e_3)$ и $F = (f_1, f_2, f_3)$. Положим они связаны следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ f_3 = e_1 + 2e_3 \end{cases}$$

Найдите координаты следующих векторов в базисе E, если в базисе F имеют следующие координаты:

$$a)\ (1,0,0) \qquad b)\ (0,1,0) \qquad c)\ (1,2,3) \qquad d)\ (a,b,c)$$

2.2.1 Отображения, операторы и их матрицы

В данной секции мы обсудим некоторое существенное обобщение линейных функций. Для начала определим, что такое линейное отображение:

Определение 2.12. Пусть даны два векторных пространства V и U над каким-нибудь общим полем (мы будем считать $\mathbb{R}$ для простоты). Отображение $f: V \to U$ называется линейным, если

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in V$
(b) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in V$.

Теперь положим в пространстве V есть базис $e_1, e_2, \ldots e_n$. Тогда любой вектор v может быть разложен по нему:

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

Рассмотрим его образ под действием отображения f в пространстве U:

$$f(v) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n) = f(a_1 e_1) + f(a_2 e_2) + \ldots + f(a_n e_n) = \\ = a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \ldots + a_n f(e_n)$$

Таким образом, образ любого вектора из пространства V определяется его координатами в пространстве V и образами базисных векторов $f(e_1)$, $f(e_2)$, $\ldots$, $f(e_n)$. Несложно заметить тогда следующее: образ вектора v получился результатом скалярного умножения на вектора-образы базиса $e_1, e_2, \ldots e_n$. Все это приводит нас к следующей изящной конструкции:

Определение 2.13. Матрицей A отображения $f\colon V \to U$, где в пространстве V определен базис $e_1, e_2, \dots e_n$, а в пространстве U — базис $f_1, f_2, \dots f_m$ (еще раз подчеркнем, что размерности V и U не обязаны совпадать), называется матрица размера $m \times n$, такая что в i-ом столбце матрицы A стоят координаты образа i-го базисного вектора — $f(e_i)$ в базисе пространства U $f_1, f_2, \dots f_m$.

То есть если

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \ldots + a_{1m}f_m \\ f(e_2) = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{2m}f_m \\ \ldots \\ f(e_n) = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nm}f_m \end{cases}$$

то матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Тогда если требуется посчитать координаты образа x при отображении f (пусть $y = f(x)$), достаточно вычислить:

$$y = Ax$$

Упражнение 6. Пусть есть отображение $G\colon V \to U$, где в V задан базис (e_1, e_2, e_3), а в пространстве U — базис (f_1, f_2, f_3, f_4). Пусть дано:

$$G(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

$$G(e_2) = f_3 - f_4$$

$$G(e_3) = 2f_2 + f_3$$

(a) Укажите значение $G(e_1 + e_2 + e_3)$.
(b) Укажите значение $G(2e_1 - 3e_2 + 4e_3)$.
(c) Укажите матрицу линейного отображения G.

Упражнение 7. Найдите матрицу линейного отображения:

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 - 5x_4, x_1 + 3x_2, -x_4, 8x_1 + 2x_2 + x_3)$
(b) поворота пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси Oy на угол $2\pi/3$
(c) $X \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$
(d) $X \to X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
(e) $X \to X^T$

(f) f — оператора дифференцирования на пространстве P_n полиномов степени не старше n (считая, что отображение переводит из P_n в P_n).

Упражнение 8. Даны линейные пространства V и W. Положим $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Линейное отображение из V в W в базисах из (e_1, e_2) в (f_1, f_2, f_3) задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите:

(a) образы базисных векторов, выразите их в координатах и как линейную комбинацию базисных;
(b) образ вектора $v = 2e_1 - 3e_2$, выразите его в координатах и как линейную комбинацию базисных.

Упражнение 9. Пусть дано три линейных пространства: U, V и W. Положим, линейные отображения заданы как: $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$. Матрицей отображения f является $A = \begin{pmatrix} 1 & 3//5 & 7 \end{pmatrix}$, а матрицей отображения g является $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим композицию $g \circ f$ (напомним, что композиция вычисляется справа налево).

(a) Докажите, что композиция есть линейное отображение
(b) Вычислите $f(0,1)$, $g \circ f(0,1)$
(c) Вычислите $f(1,0)$, $g \circ f(1,0)$
(d) Запишите матрицу отображения $g \circ f$. Проверьте, что она равна произведению BA.

Определение 2.14. Линейное отображение из пространства в само себя ($f\colon V \to V$) называется линейным оператором.

Теорема 2.15. *Пусть дан линейный оператор f. Пусть A и B его матрицы в разных базисах, причем C — матрица перехода из первого базиса во второй. Тогда верно:*

$$B = C^{-1}AC$$

Упражнение 10. Пусть дан линейный оператор f в пространстве V с базисом $e_1, e_2, \dots e_n$, причем $f(e_1) = (1,2)$, $f(e_2) = (1,-1)$, где $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-1,2)$. Найдите матрицу оператора в стандартном базисе.

Упражнение 11. Линейный оператор f растягивает векторы $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (1,-1,2)$ и $e_3 = (2,1,1)$ в 2, 3 и 4 раза соответственно. Найдите матрицу оператора в стандартном базисе.

2.2.2 Ядро и образ линейного оператора

Определение 2.16. Образом линейного отображения $f\colon V \to U$ называется множество $\mathrm{Im} f = f(x) \mid x \in V$. Отдельно заметим, что $\mathrm{Im} f \subset U$.

Определение 2.17. Ядром линейного отображения $f\colon V \to U$ называется множество $\mathrm{Ker} f = x \mid x \in V, f(x) = 0$. Отдельно заметим, что $\mathrm{Ker} f \subset V$.

Упражнение 12. Докажите, что $\mathrm{Im} f$ и $\mathrm{Ker} f$ — линейные векторные пространства.

Упражнение 13. Может ли так оказаться, что для некоторого оператора f пространства $\mathrm{Im} f$ и $\mathrm{Ker} f$ пересекаются не только по 0? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите.

Упражнение 14. Пусть приведена матрица линейного отображения f. Найдите размерности образа f и ядра f, если

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Собственные числа и собственные вектора

Пусть A — матрица линейного оператора на пространстве V с некоторым базисом.

Определение 2.18. Собственным вектором линейного оператора A называется такой ненулевой вектор $v \in V$, что

$$Av = \lambda v$$

где λ — некое действительное число. Такие число называют собственными значениями оператора A.

Что это означается с точки зрения геометрии? Действительно, представим, что наш оператор A подействовал на все пространство V. Тогда некоторые вектора он поменял сильно, а некоторые оставил почти такими же. «Почти таким же» назовем коллинеарный, то есть умноженный на скаляр вектор. Тогда для таких векторов действие оператора (как правило, довольно сложное и мало понятное) как раз кристально очевидно: такие вектора оператор «надувает».

Определение 2.19. Собственным значением линейного оператора A называется такие число λ, что для него найдется ненулевой собственный вектор. Иными словами, уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение.

Определение 2.20. Собственным подпространством линейного оператора A для собственного числа λ называется множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному числу. То есть собственным подпространством называется:

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)$$

Упражнение 15. Докажите, что V_λ и правда является линейным векторным пространством.

Откуда взялась единичная матрица? Давайте рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$. Несложно понять, что можно записать это уравнение, добавив матричную единицу, не нарушая пространства решений: $Ax = \lambda Ex$ Перенося все в левую часть и вынося по дистрибутивности x мы получаем как раз выражение $(A - \lambda E)x = 0$ На самом деле легко увидеть здесь линейную однородную систему (правда, с неизвестным параметром λ). Для того, что λ стало собственным числом, нужно, чтобы у такой СЛУ были ненулевые решения. Как мы уже с Вами знаем, с однородной СЛУ решений либо пространство, либо оно единственно (0); нас интересует случай, когда решений много (потому что нулевой вектор по определению не считается собственным). Значит, ранг матрицы системы $A - \lambda E$ должен быть меньше ее размерности, а следовательно матрица не должна быть обратимой. Из чего мы заключаем принципиально важную вещь:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Это уже уравнение на λ, получившее название характеристического уравнения. Его корни являются собственными числами.

Теорема 2.21 (Гамильтона-Кэли). *Если в характеристический многочлен $P(\lambda)$ подставить матрицу A, то он обнулится. При этом это будет многочлен минимальной степени с таким свойством для данной матрицы A.*

Упражнение 16. Даны следующие отображения:

(a) f: поворот на 30° против часовой стрелки на плоскости
(b) g: симметрия относительно $y = -x$
(c) h растяжение вдоль оси y в 5 раз

1. Найдите матрицы отображений f, g, fg, fh, gh;
2. Найдите какие-нибудь собственные вектора отображений f, g, h, fh, fg и gh, не пользуясь характеристическим уравнением;
3. Для тех отображений, где есть два линейно-независимых собственных вектора, переведите отображение в базис из этих векторов (такой базис называется собственным); запишите их матрицы в новом базисе.

Упражнение 17. Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$