

Линейная алгебра 4: 20 октября

Преподаватель: Антон Савостьянов

Ассистент: Даяна Мухаметшина

Контакты: Антон Савостьянов, почта: a.s.savostyanov@gmail.com, telegram: @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, telegram: @anniesss1

Правила игры: Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).

При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды \LaTeX ; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.

Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

Задание 1*. Найдите псевдорешения системы (не забудьте убедиться, что матрица обратима):

$$(a) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

Вычислите функцию потерь для полученного решения.

Алгоритм поиска сингулярного разложения

- (a) Вычислить матрицу $A^T A$. Убедитесь, что матрица симметрична и имеет действительный спектр.
- (b) Решите характеристическое уравнение

$$\det(AA^T - \lambda E) = 0,$$

то есть найдите собственные числа данной матрицы.

- (c) Найдите собственные вектора матрицы AA^T , соответствующие найденным собственным числам, решая систему $(AA^T - \lambda E)x = 0$. Ее решениями будут левые сингулярные вектора.
- (d) Запишите найденные вектора по столбцам в матрицу U , предварительно их ортонормировав.

- (e) Найдите собственные вектора матрицы $A^T A$, соответствующие найденным собственным числам, решая систему $(A^T A - \lambda E)x = 0$. Ее решениями будут правые сингулярные вектора.
- (f) Запишите найденные вектора по столбцам в матрицу V , предварительно их отнормировав.
- (g) Альтернативно, зная матрицу U , можно вычислить матрицу V из разложения $U^T A V = \Lambda$.

Задание 2*. Найдите сингулярное разложение матрицы A . Установите ее наилучшее одноранговое приближение. Сильно ли различаются матрицы? Используйте любую меру различности, например, сумму квадратов разности (так называемую Фробениусову норму).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$