Интенсив по математическому анализу и линейной алгебре, 2018 год.

Организационная информация.

- Занятия ведет Нина Сахарова (saharnina@gmail.com),
Вопросы по математике и не только можно отправлять на электронные адреса преподавателей или писать в наш telegrem-канал.
- В конце части занятий будет выдано домашнее задание. Задание нужно аккуратно записать (можно набрать в TeXe), отсканировать, собрать в один pdf-файл и выслать по адресу отправить на почту учебному ассистенту с темой письма «Интенсив по математике, занятие (номер), Иванов Иван.»
- Мы будем решать довольно много задач. Задания со знаком «*» предназначены для слушателей, которые уже хорошо знакомы со всем, что обсуждается в данный момент. Эти задания скорее всего разбираться со всеми не будут, но их можно и нужно решать самостоятельно, по желанию обсуждать с Ниной отдельно.

2 Занятие: Анализ функций от одной переменной, часть 2 (12 сентября, среда).

Все (или почти все) определения, формулировки и объяснения здесь и далее – короткие и неформальные.
За длинными и формальными определениями можно обращаться к следующей литературе:

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.
- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.
- Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике, 2002 (введение).

Часть картинок и задач заимствованы из книги Stewart, J. «Calculus - Early Transcendentals».

2.1 O-большое и o-малое.

«O» большое и «o» малое – математические обозначения для сравнения асимптотического поведения функций (то есть как меняются функции в окрестности некоторой точки).

Определение 1. *Функция $f(x)$ является O-большим от $g(x)$ при x стремящимся к точке a, если существует такая константа $C > 0$, что для всех x из некоторой окрестности точки a имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C|g(x)|;$$

(иными словами, отношение $|f|/|g|$ ограничено)

Определение 2. *Функция $f(x)$ является «o» малым от $g(x)$ при x стремящимся к точке a, если*

$$\lim_{x\to a} \frac{|f|}{|g|} = 0.$$

В частности:

1. фраза «сложность алгоритма есть «$O(f(n))$» означает, что с увеличением параметра n, характеризующего количество входной информации алгоритма, время работы алгоритма будет возрастать не быстрее, чем некоторая константа, умноженная на $f(n)$;

2. фраза «функция $f(x)$ является «о» малым от функции g(x) в окрестности точки p» означает, что с приближением x к p функция $f(x)$ уменьшается быстрее, чем $g(x)$ (отношение $|f(x)| \,/\, |g(x)|$ стремится к нулю).

Задание 2.1. Верно ли, что:

1) $\sin^2 x = o(x),\ \ x \to +\infty$;	2) $100x^n = o(x^{n-1})\ x \to 0$;
3) $100x^n \neq o(x^{n-1})\ x \to +\infty$;	4) $\frac{1}{x} = o(1),\ \ x \to +\infty$;
5) $100x^n \neq o(x^{n+1}),\ \ x \to +\infty$;	6) $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to \infty$;
7) $(1+x)^3 - 1 - 3x = o(x),\ x \to 0$;	8) $1 = o(1),\ \ x \to +\infty$;

Задание 2.2. Верно ли, что:

1) $x \neq O(x(1+\sin x)),\ \ x \to +\infty$;	2) f) $x^9 \neq O(x^3),\quad x \to +\infty$;
3*) $(x-1)^2(5+\sin\frac{1}{x-1}) = O((x-1)^2 + (x-1)^3),\quad x \to 1$;	4*) $x(2+\sin x) = O(x),\quad x \to 0$;
5) $1 = O(1000),\ \ x \to +\infty$;	6) $x = O(e^x),\ \ x \to +\infty$.

Задание 2.3. Как Вы думаете, что означают выражения:
1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ при $x \to 0$; 2) $n! = O\left(\left(\frac{n}{e}\right)^{1/2+n}\right)$ при $n \to \infty$?

2.2 Еще раз о производных и касательных к графикам функций (часть задач взяты из предыдущего листка).

Назовем «приращением аргумента» от некоторой точки a до x разницу $\Delta x = x - a$ (то, насколько изменился аргумент), а «приращением функции» назовем разницу $\Delta y = f(x) - f(a)$ (то, как сильно изменилась функция). Тогда на отрезке $[a, x]$ «средняя скорость» роста функции – есть отношение приращения функции к приращению аргумента, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 3. ***Производной*** *функции $f(x)$ в точке a называется мгновенная скорость роста функции в точке a:*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Можно рассматривать не только производную функции в точке, но и производную на некоторой области (то есть смотреть на производную, как на новую функцию):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Определение 4. ***Касательной*** *прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке a называется прямая, проходящая через точку $(a, f(a))$, тангенс угла наклона которой равен $f'(a)$.*

Из определения видно, что эта прямая задается уравнением $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Задание 2.4. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{e^x}{x}$, в точке $(1, e)$.

Имеются некоторые стандартные **правила дифференцирования** (совсем нехитрые и доказываются по определению):

- Если c – константа (то есть число), то $(c)' = 0$;
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
- $(e^x)' = e^x$;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$;

- Производная произведения (или правило Лейбница): $(fg)' = f'g + fg'$;
- Производная частного: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- Дифференцирование сложной функции $F = f(g(x))$: $F' = (f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$.

Задание 2.5. Найдите производную следующих функций (используя таблицу производных или/и правила вычисления производных, включая дифференцирование сложной функции):

1) $x^3 - 4x + 6$, 2) $\sqrt{x} - 2e^x$, 3) $\dfrac{x^2}{1+2x}$, 4) $\ln x$, 5) $\operatorname{arctg} x$,
6) $\sin(\cos x)$, 7*) $\sin(\cos x^2)$, 8*) $\sin(\cos^2 x)$, 9*) x^x, 10*) x^{x^x}.

2.3 Экстремумы функции. Исследований функций.

План исследования функции:

1. Найти область определения функции и нули функции (по возможности).
2. Вычислить первую производную функции.
3. Определить интервалы монотонности функции (промежутки возрастания или убывания функции).

   Возрастание и убывание функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

   a. Если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ возрастает на нем;

   b. Если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ убывает.

4. Определить экстремумы функции (точки максимума и минимума).

   Определение 5. *Функция $f(x)$ достигает* ***абсолютного максимума (или глобального максимума)*** *в точке c, если $f(c) > f(x)$ для всех точек x из области определения D. Аналогично определяется и глобальный минимум.*

   Определение 6. *Функция $f(x)$ достигает* ***локального максимума*** *в точке c, если $f(c) > f(x)$ для всех точек x в окрестности некоторой точки c. Аналогично определяется и локальный минимум.*

   Необходимое условие экстремума. Если функция $f(x)$ достигает **локального максимума или минимума** в точке c, и если $f'(c)$ существует, то $f'(c) = 0$. Обратите внимание на то, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

   Важно! Возможна ситуация, когда в некоторой точке производная не существует, а сама точка является максимумом или минимумом (придумайте пример).

   Достаточное условие экстремума. Предположим, что вторая производная функции f, f'' непрерывна в точке c, тогда

   a. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) < 0$, то c – локальный максимум функции;

   b. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) > 0$, то c – локальный минимум функции.

   Как найти глобальный экстремум непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

   a. Вычислите значения функции в граничных точках отрезка a и b;

b. Найдите все «критические точки функции» на этом отрезке, то есть точки, в которых $f'(x) = 0$;

c. В пунктах 1 и 2 найдите самое большое и самое маленькое значение $f(x)$, это и буду глобальные экстремумы функции.

5. Найти точки перегиба. Найти промежутки выпуклости/вогнутости графика функции.

Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a, b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале (a, b), то функция имеет вогнутость (или «выпуклость вниз») на этом интервале, если $f''(x) < 0$, то функция имеет выпуклость.

Определение 7. *Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $A = (a, f(a))$, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.*

О необходимом условии существования точки перегиба.

Если функция $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $A = (a, f(a))$, то $f''(a) = 0$ или не существует.

О достаточном условии существования точки перегиба.

Если:

a. первая производная $f'(x)$ непрерывна в окрестности точки a;

b. вторая производная $f''(a) = 0$ или не существует в точке a;

c. $f''(x)$ при переходе через точку a меняет свой знак,

тогда в точке функция имеет перегиб.

6. Найти вертикальные и наклонные (или горизонтальные асимптоты).

Вертикальная асимптота.

Определение 8. *Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполнено хотя бы одно из условий:*

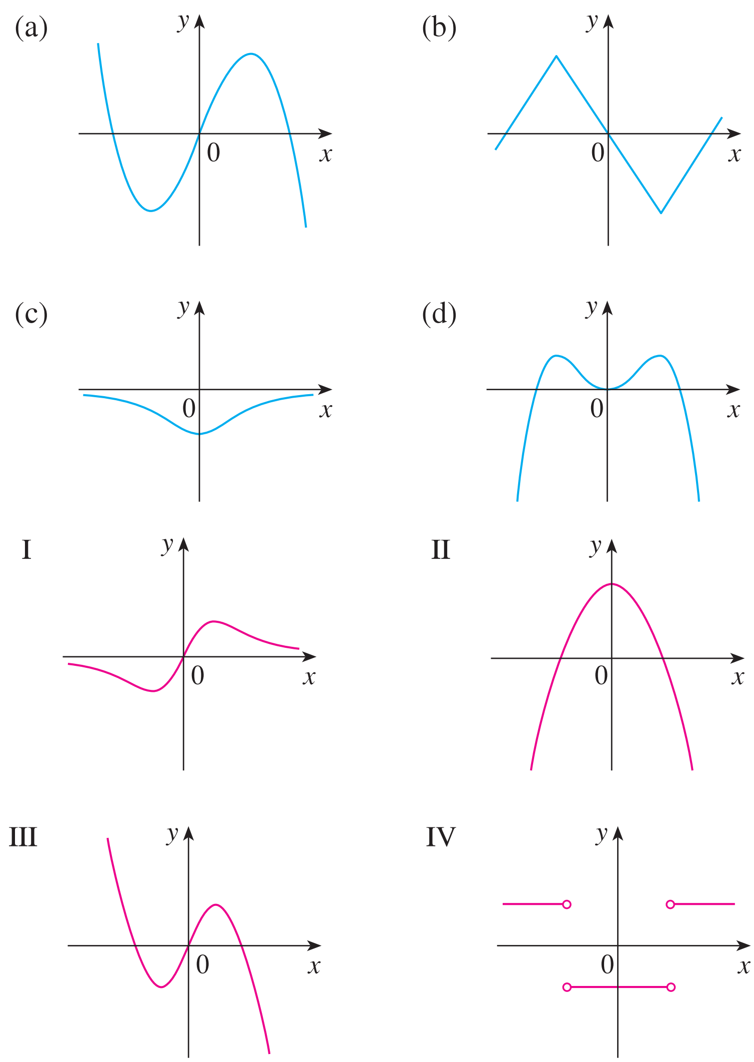
$$\lim_{x \to a+0} = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to a-0} = \pm\infty.$$

* Функции, которые являются непрерывными на всем множестве действительных чисел, вертикальных асимптот не имеют.

Наклонная асимптота.

Определение 9. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim_{x \to +\infty}(y - kx - b) = 0$ (аналогично определяется наклонна асимптота при $x \to -\infty$).*

Задание 2.6. Сопоставьте графикам функций $(a)-(d)$ графики производных $(I)-(IV)$:



Задание 2.7. Исследуйте функцию на максимумы, минимумы, промежутки монотонности (промежутки, на которых функция растет и промежутки, на которых она убывает). Найдите точки перегиба и асимптоты функции. Нарисуйте график функции (схематично).

1) $f(x)=xe^{2x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$; 4*) $f(x)=\ln(\sin x)$.

2.4 Первообразная.

Определение 10. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале I, если всюду на I*

$$F'(x)=f(x).$$

Теорема 1. *Если F – некоторая первообразная функции $f(x)$, то все прочие первообразные имеют вид $F(x)+C$, где C – любое число.*

Задание 2.8. (Решение дифференциальных уравнений). Подберите функцию f, для которой:

1) $f'(x) = \sin x + \cos x$; 2) $f'(x) = x^2$; 3) $f'(x) = f(x)$;
4) $f'(x) = 2f(x)$; 5)* $f'(x) = xf(x)$; 6) $f''(x) = x^2$;
7) $f''(x) = -f(x)$; 8)* $f''(x) = -f(x) + 1$; 9)* $f'(x) = -f^2(x)$
10)* $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Замечание. Переход от функции f к ее производной f' в математике называют *дифференцированием*,а вот переход от функции f к ее первообразной F называют *интегрированием*. Традиционное обзначение для *неопределенного интеграла* такое

$$\int f(x)\, dx = F(x),$$

(то есть $F'(x) = f(x)$).

2.5 Ряды.

Определение 11. ***Числовым рядом*** *(или просто рядом) называется выражение вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

где a_i – действительные числа. Сумма первых n членов ряда $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ называется n-й частичной суммой ряда. Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3...$$

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда $\lim_{n\to\infty} S_n = s$, то ряд называют ***сходящимся****, а число S – суммой ряда. Если такого предела не существует (или он равен бесконечности), то ряд называют* ***расходящимся****.*

Лемма 1. *Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Лемма 2. ***Признак сравнения.*** *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два ряда с положительными членами. Тогда,*
(1) если $a_n \leq b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
(2) Если $a_n \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится тоже.

Для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4...$ верна следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4...$, $a_n > 0$ удовлетворяет условиям:*
(1) $a_n \leq a_{n+1}$;
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
тогда он является сходящимся.

Определение 12. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, если он сам сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ уже не является сходящимся.*

Важно! Перестановка членов условно сходящегося ряда может, вообще говоря, привести к разным значениям суммы ряда (в то время как перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на значение суммы ряда).

Задание 2.9. Определите, сходится ли следующие ряды, являются ли они абсолютно или условно сходящимся:
a) $0 + 0 + 0 + 0 + ...$ b) $1 + 2 + 3 + 4 + ...$ c) $1 - 1 + 1 - 1 + ...$
d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ...$ e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ f) $2^3 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$
g) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ...$ h) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ...$

Определение 13. *Степенной ряд – это ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...,$$

где x – переменная, а все c_n – некоторые константы.

Заметим, что при подстановке конкретного значения переменной x ряд степенной ряд становится просто числовым рядом, про который можно говорить сходится он или нет. Более общо, степенным рядом (по степеням $(x-a)^n$) мы будем называть выражение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$$

Теорема 2. *Для данного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ имеется ровно три возможности:*
(1) Ряд сходится только для $x = a$;
(2) Ряд сходится для всех значений x;
(3) Существует положительное число R (которое называется радиусом сходимости),такое, что степенной ряд сходится для всех $|x-a| < R$ и расходится для всех $|x-a| > R$.

Задание 2.10. Найдите, для каких значений x сходится ряд
a) $1 + x + x^2 + x^3 + ...$; b) $3 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + ...$. Укажите радиусы сходимости данных рядов.

2.6 Ряд Тейлора.

Пусть $f^{(n)}(a)$ – это n-ая производная функции $f(x)$, вычисленная в точке a.

Теорема 3. *(**Теорема Тейлора** для функции $f(x)$). Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки а имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (a, x)$ такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

($c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$).

Многочлен $T_n = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ называют многочленом Тейлора, а $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ называют остаточным членом в форме Лагранжа.

R_n – это погрешность приближенного равенства $f(x) \approx T_n$. Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом P_n с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена R_n.

При $a = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора – **формулу Маклорена**:

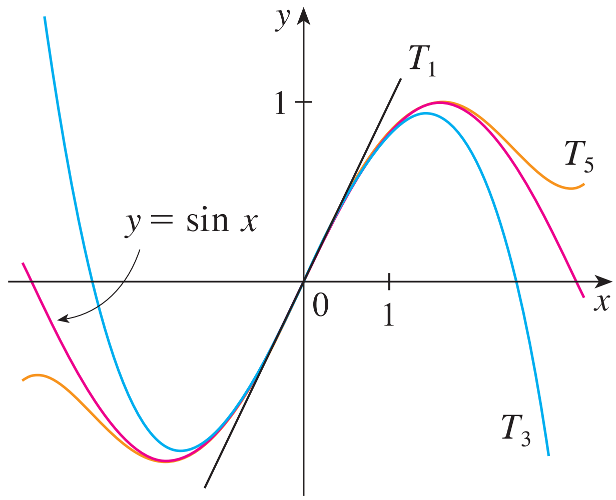
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

($c = a + \theta x$, $0 < \theta < 1$).

Теорема 4. *Если $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где T_n – n-ый многочлен Тейлора, и $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ для любых $|x-a| < R$, то функция f равна своему ряду Тейлора на интервале $|x-a| < R$.*

Лемма 4. ***Оценка остаточного члена или неравенство Тейлора.*** *Если* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *на промежутке* $|x-a|<R$, *то остаточный член*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{(n+1)}, \qquad |x-a|<R.$$



Задание 2.11. 1) Найдите первые несколько членов ряда Маклорена для функции e^x, функции $\sin x$ и функции $e^x \cdot \sin x$;

2) Вычислите предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Задание 2.12. 1) Найдите число e с точностью до 0,001.

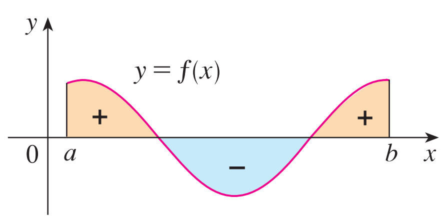
2*) Найдите с точностью до сотых число $(2.01)^7$.

2.7 Площади и интегралы.

Мы рассмотрим только геометрическую интерпретацию интеграла и совсем не будем касаться формальных сторон вопроса.

Для функции от одной переменной определенный интеграл (обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$) имеет простой геометрический смысл: он равен площади, заключенной между графиком функции и осью Ох от точки a до точки b (правда, площади ориентированной, со знаком). Для того, чтобы найти эту площадь, требуется найти первообразную функции $f(x)$, то есть некоторую функцию $F(x)$. Тогда, согласно, основной теореме анализа:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$



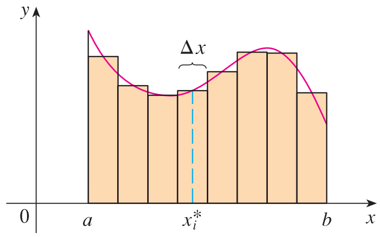


FIGURE 1
If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

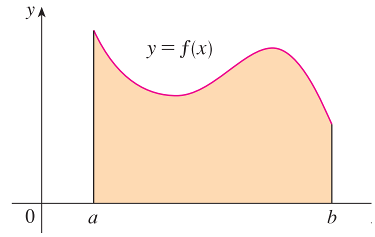


FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b

Задание 2.13. Вычислите следующие определенные интегралы:

1) $\int_1^4 (x^2 + 2x + 3)\ dx$, 2) $\int_1^3 \dfrac{3}{t^4}\ dt$, 3) $\int_0^1 10^x\ dx$, 4) $\int_1^9 \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\ dx$,

5*) $\int_0^1 xe^{-x^2}\ dx$, 6*) $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, 7*) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\ dx$, 8*) $\int_0^1 (x-1)^{25}\ dx$,

9*) $\int_0^{\pi} x^3 \cos x\ dx$, 10*) $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\ dx$, 11*) $\int_2^3 \dfrac{1}{t^2-1}\ dt$, 12*) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$.

Задание 2.14. Найдите площадь, ограниченную:
a) графиком синуса и отрезком $[0, \pi]$ оси Ox;
b) графиками функций $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^4 + 1$.

Домашнее задание 2.

Задача 1. Правда ли, что

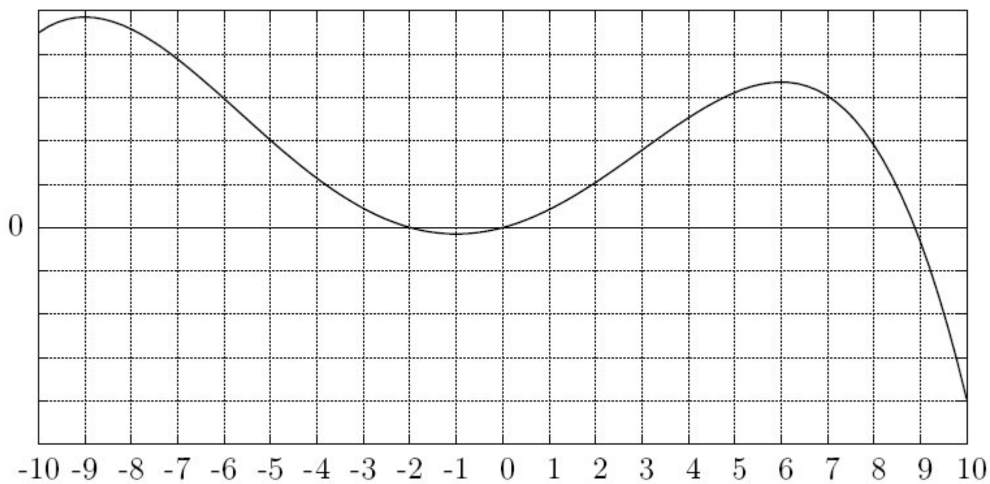
a) $\dfrac{x^2+3}{x-4} = O(x)$, $x \to \infty$?

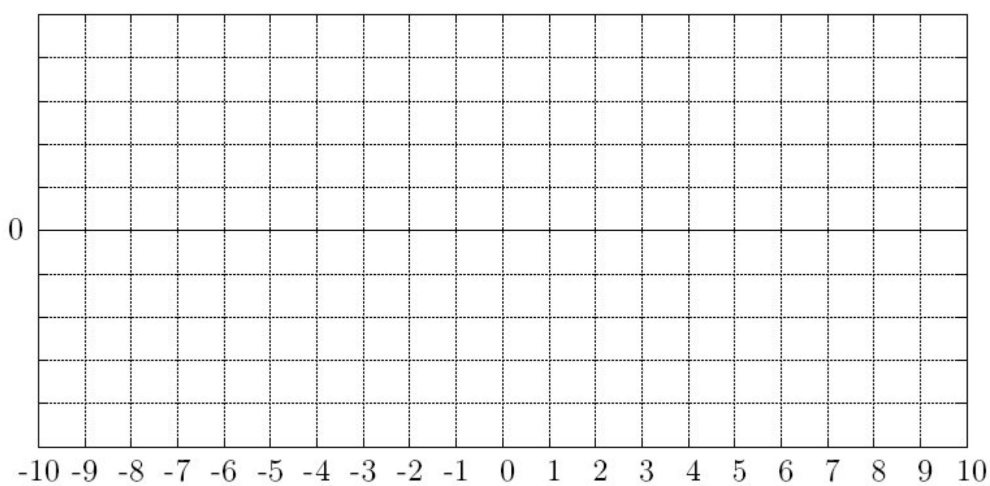
b) При каких k верно, что $\dfrac{x^2+3}{x-4} \sin x = O(x^k)$, $x \to 0$?

* Можно пользоваться без доказательства тем, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

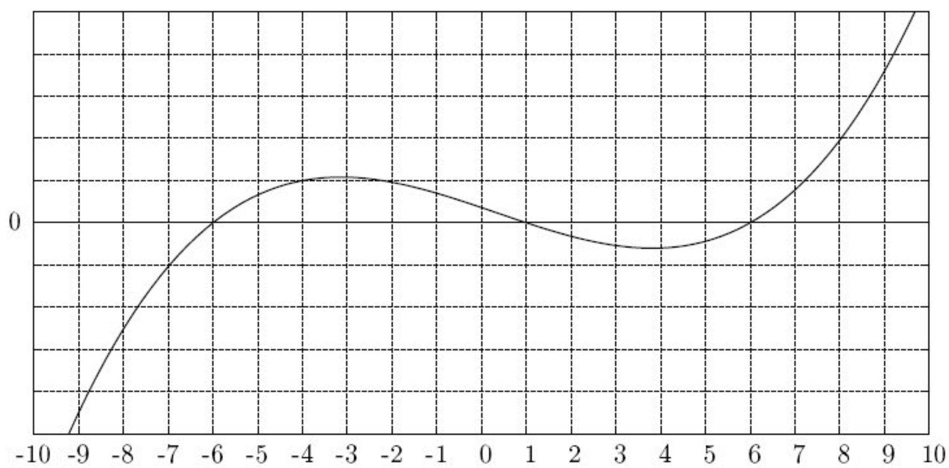
c) $5x^3 = o(x^2\sqrt{x})$, $x \to 0$?

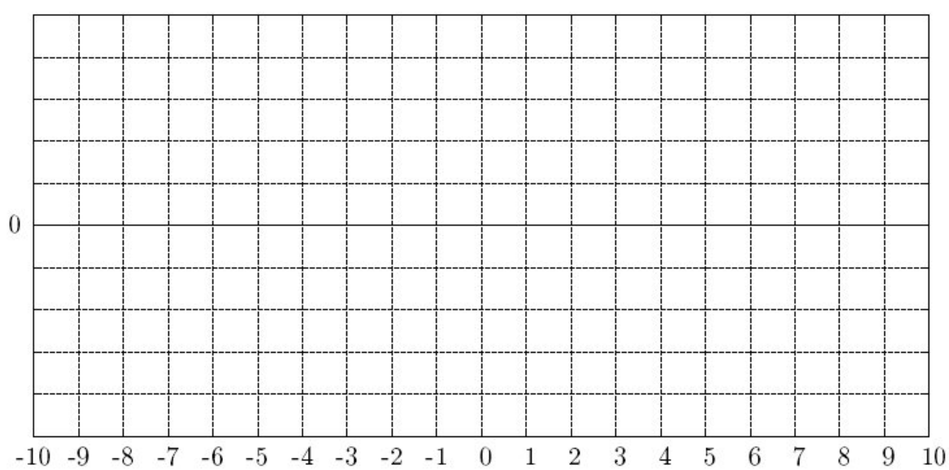
Задача 2. a) По графику функции, пожалуйста, постройте примерный график производной. Отметьте точки максимумов и минимумов функции, интервалы возрастания и убывания.





b) Пусть $f(0) = 0$. По графику производной, восстановите, пожалуйста, примерный график функции.





Задача 3. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{2x}{x+1}$, в точке $(1, 1)$.

Задача 4. Найдите производную следующих функций:
1) $\cos(\sin x^2)$, 2) $\cos(\sin^2 x)$, 3*) $(\cos(x))^{\sin x}$.

Задача 5. Исследуйте функцию на максимумы, минимумы, промежутки монотонности. Найдите ее вертикальные и горизонтальные асимптоты. Укажите промежутки выпуклости (вогнутости). Нарисуйте график функции (примерный эскиз).
a) $f(x) = \ln(\cos x)$;
b) $f(x) = \ln(x^4 - 1)$.

Задача 6*. Сходится ли ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n!} + ...?$$

Задача 7*. Вычислите $e^{1/4}$ с точностью до тысячных.

Задача 8. Найдите площадь, ограниченную графиками функций $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямой $x = 2$.