

## Линейная алгебра 1: 28 Сентября

Преподаватель: Антон Савостьянов

Ассистент: Даяна Мухаметшина

**Контакты:** Антон Савостьянов, почта: a.s.savostyanov@gmail.com, telegram: @mryodo  
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, telegram: @anniesss1

**Правила игры:** Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).

При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды  $\text{\LaTeX}$ ; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.

Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

**Задача 1.** Решите систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -6x - 9y + 3z + 2v = 4 \\ -2x + 3y + 5z + 2v = 2 \\ -2x + 6y + 4z + 3v = 4 \end{cases}$$

Укажите улучшенный ступенчатый вид матрицы; ведущие элементы в каждой строке, количество свободных переменных. Приведите фундаментальную систему решений. Как вы думаете, сколько фундаментальных систем решений может быть у одной СЛУ?

**Задача 2.** Выполните обратное действие: по данной фундаментальной системе решений укажите какую-нибудь систему уравнений (положим, однородную), для которой данная ФСР и правда является ФСР:

$$e_1 = (0, 1, 5, -1) \quad e_2 = (1, 0, 0, 0) \quad e_3 = (0, -1, 0, 3)$$

**Задача 3.** Для матриц  $A$  и  $B$  найдите их сумму и произведения  $AB$  и  $BA$ , если возможно:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Задача 4.** Покажите, что множество квадратных верхнетреугольных матриц ( $a_{ij} = 0$ , если  $i > j$ ) размера  $n \times n$  является линейным пространством. Приведите какой-либо базис такого пространства (верной идеей будет начать с матриц размера 2).

**Задача 5.** Будет ли множество четных ( $f(x) = f(-x)$ ) многочленов степени не старше  $n$  линейным пространством? Если да, укажите какой-либо его базис.

**Задача 6.** Вычислите  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  и  $A^n$  для

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** Пусть даны вектора  $a = (1, 1, -2)$ ,  $b = (1, -2, 1)$ ,  $c = (-2, 1, 1)$ .

1. Докажите, что всех их линейных комбинации образуют линейное пространство;
2. Проверьте этот набор векторов на линейную зависимость;
3. Укажите базис и размерность получившегося пространства.