# Осенний интенсив
# “Математика для анализа данных”
# Занятие 1
# Теория множеств и логика

5 сентября 2018 г.

Правила игры:

- Преподаватель: **Антон Савостьянов**, почта: a.s.savostyanov@gmail.com, telegram: @mryodo
- Ассистенты:
  - **Даяна Мухаметшина**, почта: dayanamuha@gmail.com, telegram: @anniesss1 (*1 группа*)
  - **Алексей Хачиянц**, почта: kha83640@gmail.com, telegram: @knkeer (*2 группа*)
- Слушатели: **вы**
- Домашние задания следует присылать в *читаемом* виде не позднее чем через две недели (после проведения занятия) на почту ассистента. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс

## 1 Теория множеств

На данном занятии нам предстоит обсудить с вами одновременно сложные и простые вещи: теорию множеств и неразрывно связанную с ней теорию логики. Следует понимать, что в математике можно выделить два принципиально разных тернистых пути усложнения: изучения дальнейшего материала и изучение аксиоматики. Поэтому определить некоторые базовые понятия формально — достаточно большой труд, поэтому мы будем пользоваться некоторыми неформальными определениями и интуицией. К таким понятиям относятся натуральные и действительные числа, а также множества.

## 1.1 Представление о множествах

*«Где начинается полиция, - вопил он, -*
*и где кончается Беня?»*
*Как это делалось в Одессе. Исаак Бабель*

**Определение 1.** Когда говорят, что задано *множество* $A$, под этим понимают, что $A$ представляет собой совокупность объектов, игнорируя при этом какие либо отношения между этими объектами, в частности порядок; кроме того, один объект не может входить в множество более одного раза.

**Определение 2.** Предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами.* Обозначение: $x \in A$ (обратное обозначается $x \notin A$).

**Определение 3.** Именно, говорят, что множество $B$ является *подмножеством* другого множества $A$, если каждый элемент $x$ из $B$ является вместе с тем и элементом множества $A$. Обозначение: $B \subset A$ ($B \subseteq A$).

Для того чтобы наглядно представить себе понятие множества, академик Н.Н. Лузин предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы данного множества $A$, и что кроме них внутри оболочки никаких других предметов не находится. Эта оболочка с предметами $x$, находящимися внутри нее, и может служить образом множества $A$, составленного из элементов $x$. Сама же эта прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого кроме них), довольно хорошо изображает тот факт объединения элементов $x$, в результате которого создается множество $A$.

**Определение 4.** Если в множестве конечное число элементов, множество называют *конечным*; если в множестве бесконечное число элементов, то оно называется *бесконечным.*

В реальности бесконечные множества относительно количества элементов в них оказываются сильно неодинаковыми, однако данный вопрос, равно как и саму сомнительность формулировки «количество элементов множества» мы обсудим позже.

**Пример.** Простейшие примеры множеств:

- множество дней недели состоит из элементов
$$\{\text{понедельник}, \text{вторник}, \text{среда}, \text{четверг}, \text{пятница}, \text{суббота}, \text{воскресенье}\}$$
- множество корней уравнения $x^2 - 2x - 24 = 0$
$$\{-4;\ 6\}$$
- множество корней уравнения $x^2 - 24x + 2 = 0$

**Пример.** Заметим, что из определения следует, что
$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5\} = \{5, 4, 3, 2, 1\} = \{1, 3, 2, 4, 4, 5\}$$

## 1.2 Как задают множества

Как мы уже говорили выше, множества бывают конечные и бесконечные. Поэтому особый интерес представляют способы задания множеств, которых довольно много.

1. Самые простой способ был использован выше: перечисление элементов фигурных скобках. Например, список учащихся на данном курсе будет являться таким методом задания множестваа учащихся.

2. Что же делать в случае бесконечных множеств? Для них иногда используют неформальное перечисление, если ясно о каком множестве идет речь:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

$$\text{множество нечетных натуральных}=\{1, 3, 5, \ldots\}$$

3. Ясно, что здесь есть определенная сложность: читатель может быть введен в заблуждение такимм перечислением (например, последняя запись вполне может означать «множество простых чисел»). Поэтому множества часто задают при помощи некого характеристического свойства, которое записывают при помощи символа «|»:

$$\text{множество нечетных натуральных} = \{x \mid x = 2k + 1\}$$

   Задание множеств их характеристическими свойствами иногда приводит к осложнениям. Может случиться, что два различных ха- рактеристических свойства задают одно и то же множество, то есть всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно. Например, множество толстокожих сухопутных животных, имеющих два бивня, совпадает с множеством толстокожих животных, имеющих хобот, — это множество слонов. Вообще, во многих математических теоремах речь идет о совпадении двух множеств; в некоторых случаях проблема совпадения или различия двух множеств, заданных своими характеристическими свойствами, не решена до сих пор.

## 1.3 Операции над множествами

Определим теперь операции с множествами:

- объединение $A \cup B$ множеств $A$ и $B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств;

- пересечение $A \cap B$ состоит из элементов, которые принадлежат обо- им множествам;

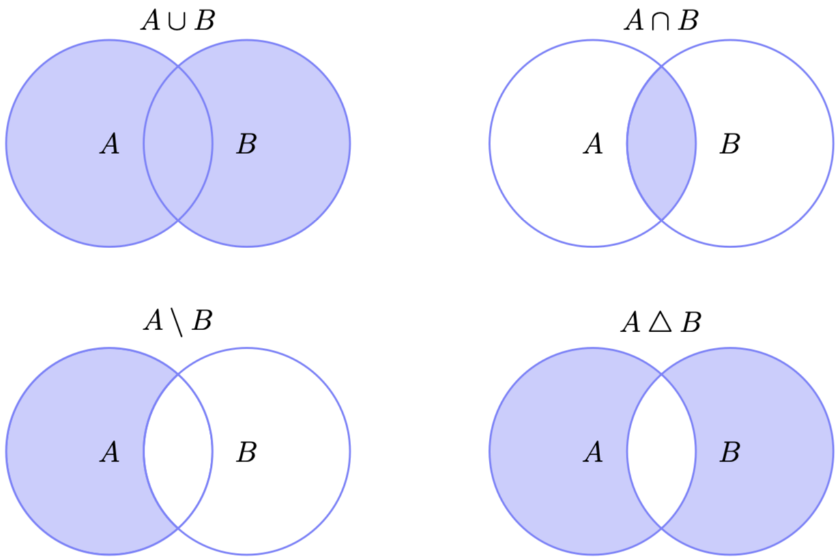


Рис. 1: Операции над множествами

- разность $A \backslash B$ состоит из элементов, которые принадлежат $A$, но не принадлежат $B$;
- симметрическая разность $A \triangle B$ состоит из элементов, принадле- жащих ровно одному из множеств.

Эти операции иллюстрируют с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

**Упражнение 1.** Запишите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ и $A \triangle B$ при помощи характеристических свойств.

**Решение 1.**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)$$

**Упражнение 2.** Убедитесь, что $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

**Упражнение 3.** Убедитесь, что множества $A$ и $B$ равны, тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

**Упражнение 4.** Докажите, что для любых множеств $A$ и $B$ справедливо

$$(A \cup B) \backslash (A \triangle B) = A \cap B$$

**Упражнение 5.** (*парадокс Рассела*) С отношением принадлежности связан открытый в 1901 году парадокс Рассела. Рассмотрим множество всех множеств, не являющихся собственными элементами:

$$M = \{X \mid X \notin X\}$$

Является ли это множество собственным элементом?

Пусть не является. Тогда $M \notin M$. Но тогда $X \notin X$ выполнено при $X = M$. То есть $X \in M$ для $X = M$. То есть $M \in M$, что противоречит предположению.

Но и случай $M \in M$ противоречив. Действительно, тогда $X \notin X$ невыполнено при $X = M$. А тогда $X \notin M$ для $X = M$, то есть $M \notin M$.

Значит, любой ответ на поставленный вопрос приводит к противоречию, т.е. ответить на вопрос нельзя. Рассуждения над этим и другими парадоксами привели к построению аксиоматической теории множеств (в противовес наивной теории), в которой множества можно строить не как угодно, а лишь по определенным правилам. В частности, соотношение $X \in X$ не может быть выполнено никогда, а множества всех множеств (называющегося *универсальным*) не существует.

Как ни странно, при этом понятие универсального множества все равно зачастую используется: договариваются считать, что такое множество существует в рамках отдельной задачи. Например, универсальным множеством для задачи про множество корней квадратного уравнения может служить множество действительных (или компексных чисел): действительно, элементы такого множества никак не могут «выйти за рамки» выбранного универсального.

**Определение 5.** Множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих множеству $A$, называется его дополнением.

**Упражнение 6.** Докажите свойства операций над множествами:

- коммутативность, дистрибутивность и ассоциативность объединения, пересечения и симметрической разницы;
- идемпотетность: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
- законы Де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

**Упражнение 7.** Верно ли, что для любых множеств $A$ и $B$ выполняется включение

$$(A \cup B) \backslash (A \backslash B) \subseteq B$$

**Упражнение 8.** Про множества $A$, $B$, $X$ и $Y$ известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство:

$$A \cup (Y \backslash X) = B \cup (Y \backslash X)$$

# 2 Логика

## 2.1 Алгебра логики

**Определение 6.** Логическим высказыванием считается любое высказывание, про которое можно сказать истинно оно или ложно.

Равно как и на множествах, на высказываниях можно определить алгебру бинарных операций, в результате которых получаются новые логические высказывания. Можно также считать, что логическое высказывание получается «сборкой кубиков», «кубиками» являются неделимые единицы (атомарные), которые сами по себе могут быть истинны или ложны, соединенные операциями, определенными далее. Поскольку истинность логического высказывания зависит от истинности атомарных единиц, то любое сложное логическое высказывание есть ничто иное как логическая функция от атомарных единиц. Также стоит понимать, что ничто не запрещает такой функции быть константой, то есть быть истинной или ложной безотносительно входных данных.

Договоримся также обозначать ложное утверждение 0, а истинное – 1.

Пусть $a$ — высказывание «число $x\in \mathbb{N}$ больше 5», а $b$ — «число $x \in \mathbb{N}$ меньше 7». Тогда высказывание «$a$ и $b$» означает, что $x = 6$ (полагаем, что речь идёт о натуральных числах). Если $a'$ — высказывание «$x \in A$», $b'$ — высказывание «$x \in B$», то высказывание «$a'$ и $b'$» означает «$x \in A \cap B$». Взяв $A = x \mid x > 5$, $B = x \mid x < 7$, получаем, что высказывание $a'$ принимает тот же смысл, что и $a$ (а $b'$ тот же, что и $b$) — таким образом, высказывания со штрихами формализуют высказывания без штрихов с помощью теории множеств. Между множествами и логикой есть также связь и в обратном направлении: используя логику, мы можем доказывать утверждения, схожие с утверждениями из упражнений на множества.

Введем следующие бинарные и унарные операции:

| Обозначение | Смысл | Название |
|---|---|---|
| $X \wedge Y$, $X \cdot Y$, $XY$ | $X$ и $Y$ | конъюнкция |
| $X \vee Y$, $X + Y$ | $X$ или $Y$ | дизъюнкция |
| $\neg X$, $\overline{X}$ | не $X$ | отрицание |
| $X \to Y$ | из $X$ следует $Y$ | импликация |
| $X \leftrightarrow Y$ | $X$ раносильно $Y$ | эквивалентность |
| $X \oplus Y$ | или $X$, или $Y$ | исключающее или |

Логические функции хороши тем, что множество их аргументов сильно ограничено (да и вообще конечно). Поэтому для их задания часто используют таблицы истинности:

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $X \vee Y$ | $X \wedge Y$ | $X \to Y$ | $X \leftrightarrow Y$ | $X \oplus Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Упражнение 9.** Проверьте, что определение всех высказываний, кроме быть может импликации, соответсвует смыслу, указанному в предыдущей таблице.

**Упражнение 10.** Докажите следующие законы:

1. $\neg(\neg X) = X$ (закон двойного отрицания)
2. $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$
3. $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ (законы Де Моргана)
4. $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
5. $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Помимо получения таблицы истинности по виду функции, интересно и обратное умение: по таблице истинности записать вид функции. Для этого предлагается следовать такому алгоритму (получение совершенной конъюнктивной нормальной формы):

1. выбрать все строчки в таблице, в которых функция истина (1);
2. для каждой строчки записать конъюнкцию: истинные переменные взять без отрицания, а ложные — с отрицанием;
3. записать дизъюнкция полученных конъюнкций и упростить её.

**Упражнение 11.** По таблице истинности получите СКНФ для импликации.

**Упражнение 12.** На заброшенном пруду резвятся лягушата – зеленые и пестренькие. От их кваканья глохнут пролетающие мимо птицы. Внимательный Крош заметил: все зеленые лягушата сидят на берегу. Если лягушонок пестрый, то он грустный. А все грустные лягушата не умеют плавать.

Какое высказывание верно?

1) Все лягушата веселые 2) Все лягушата грустные 3) Все лягушата зеленые 4) Все лягушата на берегу зеленые 5) Все лягушата сидят на берегу

**Упражнение 13.** Докажите, что

$$\neg((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)) = (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$$

## 2.2 Связь логики и множеств

Заметьте, что значки $\wedge$ и $\vee$ похожи на значки $\cup$ и $\cap$ и это не случайно. Пусть $X =$ "$x \in A$", $Y =$ "$x \in B$". Тогда высказывание $X \cdot Y$ равносильно высказыванию "$x \in A \cap B$". Аналогично, $X + Y \leftrightarrow$ "$x \in A \cup B$.

**Упражнение 14.** Выразите с помощью высказываний $X = "x \in A"$, $Y = "x \in B"$ и логических связок высказывания $x \in A \backslash B$ и $x \in A \bigtriangleup B$.

**Упражнение 15.** Докажем, что $B \backslash (A \backslash B) = B$, используя логику.

**Решение 2.** Выразим высказывание «$x \in B \backslash (A \backslash B)$» через высказывания $X$ и $Y$:

$$Y \cdot \overline{X \cdot \overline{Y}}$$

Воспользовавшись законом де-Моргана получаем, что

$$\overline{X \cdot \overline{Y}} = \overline{X} + Y$$

Осталось проверить, что

$$Y \cdot (\overline{X} + Y) = Y \cdot \overline{X} + Y \cdot Y = Y \cdot \overline{X} + Y = Y$$

Приведённое рассуждение доказывает справедливость равенство множеств $B \backslash (A \backslash B)$ и $B$ при произвольных $A$ и $B$, поскольку высказывания $X$ и $Y$ не зависят от выбранного элемента $x$ равно как и от описания множеств $A$ и $B$.

Высказывания всегда либо истинны, либо ложны, поэтому мы и фиксировали произвольный элемент $x$, говоря о высказываниях $a = "x \in A"$ и $b = "x \in B"$ . Если утверждение зависит от параметра $x$, то будем называть такое утверждение *предикатом*. Так, предикат $a(x) = "x \in A"$ зависит от переменной $x$, в то время как множество $A$ фиксированно. Выразим теперь с помощью предикатов $a(x)$ и $b(x)$ операции над множествами:

- $A \cup B = \{x \mid a(x) + b(x)\}$
- $A \cap B = \{x \mid a(x) \cdot b(x)\}$
- $A \backslash B = \{x \mid a(x) \cdot \overline{b(x)}\}$
- $A \bigtriangleup B = \{x \mid a(x) \cdot \overline{b(x)} + \overline{a(x)} \cdot b(x)\}$

Опишем теперь теретико-множественный смысл импликации. Высказывание $a(x) \to b(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$.