МдАД: Линейная алгебра **Осень 2018**

Линейная алгебра 1: 28 Сентября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Ассистент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).*
При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды LaTeX; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.
Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

1.1 Матрицы и действия с ними

1.1.1 Поля и матрицы

Определение 1.1. Матрицей называет прямоугольная таблица, состоящая из чисел, размера $m \times n$, где m — число строк в таблице, а n — число столбцов. Говорят, что матрица задана «над полем $\mathbb{F}$», если все ее элементы лежат в поле $\mathbb{F}$ и арифметические действия над элементами производятся по «правилам» поля $\mathbb{F}$.

Множество всех матриц (по умолчанию, над полем $\mathbb{R}$) размера $m \times n$ обозначается $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ или иногда $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Аналогично используется индекс и у самой матрицы: $A_{m\times n}$.

В случае, если $m = n$, то есть если матрица является квадратной, то второе измерение часто опускают и пишут: $A \in \mathbb{M}_n$.

Чтобы обозначить элемент матрицы A, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, используется обозначение a_{ij}. Важно не перепутать порядок записи: сначала всегда идет номер строки, а потом столбца.

Несложно заметить, что отдельно столбцы и строки матрицы A тоже являются матрицами. Для обозначения k-ой строки используется запись A_k; для k-го столбца — A^k. Заметим также, что если $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, то $A_k \in \mathbb{M}_{1\times n}$, а $A^k \in \mathbb{M}_{m\times 1}$.

Определение 1.2. Такие матрицы, где $m = 1$ или $n = 1$, называются векторами (точнее, векторами-строками и векторами-столбцами соответственно).

1.1.2 Действия с матрицами

Сложение. Самое тривиальное действие, которое можно сделать с матрицами — это сложение.

Матрицы A и B можно складывать поэлементно, тогда и только тогда, когда они одного размера. Таким образом, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ и $B \in \mathbb{M}_{m\times n}$, то существует матрица $C \in \mathbb{M}_{m\times n}$, причем $C = A + B$ и $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+3 \\ 4+4 & 5+5 & 6+6 \end{pmatrix}$$

Упражнение 1. Подумайте, почему не составляет труда доказать коммутативность и ассоциативность матричного сложения?

Умножение на скаляр. Также простой операцией является умножение матрицы на число (конечно, число должно быть из того же поля, над которым задана матрица). Поскольку число есть самая простая матрица размера 1×1, то для нее используют специальный термин — скаляр.

Таким образом, если есть матрица $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то существует матрица $\in \mathbb{M}_{m\times n}$ такая, что $C = \alpha A$, причем $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Традиционный порядок записи именно такой, как указан выше — αA, хотя и обратная запись $A\alpha$ не является некорректной; скорее просто не принятой.

Упражнение 2. Подумайте, почему верно $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, где α и β — действительные числа.

Матричное умножение. Среди всех матричных операций, как станет ясно, умение перемножать матрицы наиболее важно. К сожалению, такая операция помимо своей важности еще и довольно сложна (с непривычки).

Сначала определим (весьма преждевременно) одну величину для упрощения дальнейших рассказов:

Определение 1.3. Скалярным произведением двух векторов u и v одинакового размера называется скаляр, равный:

$$(u, v) = \sum_{t=1}^{n} u_t v_t$$

Поскольку мы уже определили понятия векторов-столбцов и векторов-строк, договоримся, что для корректного определения скалярного произведения u должен быть вектором-строкой: $u \in \mathbb{M}_{1\times n}$, а v — вектором-столбцом: $v \in \mathbb{M}_{n\times 1}$.

Пусть есть две матрицы $A \in \mathbb{M}_{m\times ⓝ}$ и $B \in \mathbb{M}_{ⓝ\times k}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

Тогда результатом из перемножения $A \times B = A \cdot B = C$ называется матрица $C \in \mathbb{M}_{m\times k}$, такая что:

$$c_{ij} = (A_i, B^j) = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Например, чтобы вычислить элемент c_{22} в произведении матриц, следует взять вторую строку матрицы A и второй столбец матрицы B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

После чего их требуется перемножить скалярно:

$$c_{22} = (A_2, B^2) = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \ldots + a_{2n}b_{n2}$$

Процедура сначала выглядит громоздкой, поэтому приведем пример вычисления:

Упражнение 3. Вычислите произведение следующий матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Заметим, что $A_{2\times 3}$, а $B_{3\times 2}$, то есть произвести умножение возможно:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}\cdot\mathbf{6}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{4}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{2} & \mathbf{1}\cdot\mathbf{5}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{1} \\ \mathbf{4}\cdot\mathbf{6}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{4}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{2} & \mathbf{4}\cdot\mathbf{5}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{3}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 56 & 41 \end{pmatrix}$$

$\square$

Замечание 1.4. Несложно понять, что матричное умножение сильно ориентированно на порядок следования матриц A и B. Главным следствием данного наблюдения является тот факт, что в общем случае матрицы не коммутируют по умножению, то есть $AB \neq BA$.

Упражнение 4. Приведите пример двух нетривиальных коммутирующих матриц произвольного размера.

Естественно, подобный пример легко составить, используя так называемую матричную единицу — матрицу E, в которой $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \ if\ i \neq j \\ 1, \ if\ i = j \end{cases}$. Умножение на такую матрицу совершенно прекрасно — она является нейтральным элементом по матричному умножению (причем нейтральным и слева, и справа, что необязательно): $AE = EA = A$.

Матрицы, которую коммутируют с любыми матрицами из выбранного подмножества матриц, имеют свою особую и крайне важную роль: такие матрицы называют коммутаторами и являются центральным элементом алгебр Ли, понятия, легшего в основу множества прикладных задач.

Упражнение 5. Пользуясь утверждением о скалярном произведении $(A_i + B_i, C^j) = (A_i, C^j) + (B_i, C^j)$, докажите, что

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Транспорнирование. Существует унарная операция с матрицей, называемая транспонированием.

Определение 1.5. Пусть дана матрица $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Матрицу $B = A^T$ называют результатом транспонирования, если

$$\forall i, j : \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Несложно понять, что если $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, то $A^T \in \mathbb{M}_{n\times m}$.

Тривиально из определения сложения и транспонирования следует такое утверждение: $(A+B)^T = A^T+B^T$. Однако в случае умножения равенство меняется следующим образом:

Теорема 1.6. *Для двух корректно заданных матрица A и B:*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Доказательство. Пусть $C = AB$. Тогда $i, j-$элемент $(AB)^T$ есть элемент c_{ji} матрицы C. Это результат перемножения A_j и B^i. С другой стороны, $i, j-$элемент $B^T A^T$ — это результат перемножения $(B^T)_i$ и $(A^T)^j$. Несложно понять, что $(B^T)_i = B^i$ и $(A^T)^j = A_j$ (действительно, в результате транспонирования строки становятся столбцами, а столбцы — строками, не меняя своего порядкового номера). $\square$

Упражнение 6. Докажите, что для любой матрицы A верно равенство $(A^T)^T = S$.

Упражнение 7. Найдите какую-нибудь матрицу X, что $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 8. Для матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ установите, можно ли вычислить произведения XX^T и X^TX и вычислите их. Сравните размеры данных матриц.

1.2 Системы линейных уравнений

Опишем теперь при помощи введенных операций привычные системы линейных уравнений. Для начала договоримся об определениях:

Определение 1.7. Систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ и $b_i \in \mathbb{R}$ — известные числа, называют системой линейных уравнений (СЛУ).

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то такую систему называют однородной (ОСЛУ); если же находится $b_k \neq 0$, то такая система называется неоднородной.

Приглядимся внимательно к записи выше: рассмотрим отдельную строчку:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

Такая запись дословно повторяет скалярное произведение векторов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда, если мы запишем коэффициенты a_{ij} в матрицу $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Описанная нами система уравнений превратится в результат перемножения матрицы A и вектора-стоблца x:

$$Ax = b$$

Таким образом оправдано довольно сложное матричное умножение — фактически оно дословно повторяет структуру СЛУ.

1.2.1 Метод Гаусса

Методов решений СЛУ довольно много: степень их трудоемкости, равно как и устойчивость к накоплению ошибок, связанных с машинной точностью, варьируется довольно значительно. Однако один из наиболее оптимальных методов решения СЛУ мы опишем прямо сейчас, поскольку для него не требуется знаний дополнительных понятий.

Сначала договоримся, что с уравнениями в системе можно делать три следующие операции, не меняя множество решений:

1. поменять два уравнения местами;
2. умножить уравнение на некоторое число, отличное от 0;
3. заменить одно уравнение на результат сложения его с некоторым другим уравнением, умноженным на число.

Такие преобразования называются элементарными. С точки зрения матрицы системы эти операции эквивалентны следующим процедурам:

1. поменять две строки местами;
2. умножить строку матрицы на некоторое число, отличное от 0;
3. добавить к строке другую строку, умноженную на число, отличное от 0.

Используя такие преобразования можно привести матрицу к *улучшенному ступенчатому виду*:

Определение 1.8. Вид матрицы называется улучшенным ступенчатым, если:

(a) в каждой строке есть ведущий элемент: ведущим называется первый ненулевой элемент при проходе строки слева направо (или строка полностью состоит из 0);
(b) для каждого ведущего элемента левее и ниже в матрице все элементы равны 0;
(c) для каждого ведущего элемента все элементы выше равны 0;
(d) ведущие элементы равны 1.

Примером улучшенного ступенчатого вида является, например, такая матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь процедура решения предельно проста: каждый столбец соотносится с неизвестной x_i. Теперь, если в соответствующем столбце нет ведущего элемента, то переменная считается свободной (ей разрешается принимать любое значение) — в нашей матрице x_1, x_2, x_5. Для каждого зависимого элемента строчку матрицы в улучшенном ступенчатом виде можно снова проинтерпретировать как уравнение. Например, первая строчка дает уравнение:

$$x_3 + 2x_5 = 0$$

Отсюда легко выразить все зависимые переменные (соответствующие ведущим элементам) через свободные переменные (в нашем случае x_3 зависимая, а x_5 — свободная).

Отметим также, что если бы система была бы неоднородная, то следовало бы дописать столбец b в качестве последнего столбца матрицы системы и привести ее к улучшенному ступенчатому виду вместе со столбцом правой части; в таком случае 0 в правой части уравнения превратился бы в число в последнем столбце.

Запишем результат в виде вектора:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_5 \\ -x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2x_5 \\ -x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получившиеся постоянные вектора, умноженные на свободные переменные, называют фундаментальной системой решений. Полученные нами результат показывает, что любое решение СЛУ выражается через вектора фундаментальной системы решений.

Упражнение 9. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y - 6z = 1 \\ 3x + 8y - 10z = 1 \end{cases}$$

Укажите улучшенный ступенчатый вид матрицы; ведущие элементы в каждой строке, количество свободных переменных. Приведите фундаментальную систему решений. Как вы думаете, сколько фундаментальных систем решений может быть у одной СЛУ?

Упражнение 10. Выполните обратное действие: по данной фундаментальной системе решений укажите какую-нибудь систему уравнений (положим, однородную), для которой данная ФСР и правда является ФСР:

$$e_1 = (0, 1, 5, -1) \quad e_2 = (1, 0, 0, 0) \quad e_3 = (0, -1, 0, 3)$$

Упражнение 11. Как связаны решения однородной системы $Ax = 0$ и неоднородной системы с той же матрицей $Ax = b$? Подсказка: рассмотрите разность двух решений неоднородной системы линейных уравнений.

1.3 Векторные пространства

Несмотря на то, что речь в линейной алгебре в основном про матрицы, про которые мы говорили выше, все-таки главным объектом являются линейные векторные пространства.

Чтобы понять, что такое векторные пространства, начнем с примера, который ляжет в основу нашего с вами разговора. Как мы договорились выше, рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Как и раньше, запишем систему в матричном виде $Ax = 0$. Теперь заметим, что если x и y решения системы, то и $x + y$ — решение системы: действительно, $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$. Аналогично, если x решение системы, то для любого числа α (αx) тоже будет решением системы: $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \cdot 0 = 0$.

Таким образом множество решений линейной однородной системы обладает двумя ключевыми структурными свойствами: сумма двух элементов и элемент, умноженный на произвольное число, тоже лежат в данном множестве. Эти структурные особенности и являются определяющими свойствами линейного векторного пространства:

Определение 1.9. Линейным или аффинным пространством V называется такое множество элементов (называемых векторами), для которых верно:

1. для любых двух элементов $u_1 \in V$, $u_2 \in V$ выполняется $u_1 + u_2 \in V$;
2. для любого элемента $u \in V$ и любого числа (из поля, над которым задано пространство) λ элемент $\lambda u \in V$.

При этом для перечисленных операций верны следующие аксиомы:

(a) $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$

(b) $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$

(c) Существует нулевой вектор $0 \in V\colon 0 + v = v + 0 = v$

(d) Существует противоположный вектор $-v \in V\colon v + (-v) = 0$

(e) $v \cdot 1 = v$

(f) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(g) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

(h) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Замечание 1.10. Что же такое векторы? Правильный ответ: элементы векторного пространства.

То есть по сути своей вектором может быть что угодно: столбец чисел, матрица, полином не выше 3-ей степени, функция и т.д. Думать о том, что вектор обязательно есть столбец чисел (или строка), — большая ошибка. Вскоре мы узнаем, что набор чисел, который мы ассоциируем с вектором, его совсем не определяет и глубоко относителен.

Упражнение 12. Установите, являются ли данные множества линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$:

(a) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$;

(b) множество векторов (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющих уравнению $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0$, где a_1, a_2, a_3 — фиксированные действительные числа;

(c) множество векторов (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющих уравнению $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 5$, где a_1, a_2, a_3 — фиксированные действительные числа;

1.3.1 Линейная независимость

Давайте рассмотрим множество векторов — точек на двумерной плоскости: такое пространство называется $\mathbb{R}^2$, поскольку задано над полем $\mathbb{R}$ и каждая точка задается парой числе — ее координатами в декартовой системе координат. Несложно показать, что такое множество и правда будет являться линейным пространствам (выполните это в качестве упражнения).

Выберем произвольный вектор (a, b); его можно *разложить по составляющим*, то есть представить в виде суммы:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Таким образом каждый вектор удалось записать в виде суммы двух фиксированных векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, умноженных на подходящие числа (говорят «в виде линейной комбинации двух этих векторов»). Ясно, что в таком случае набор векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ чем-то очевидно хорошо: через него можно выразить любой произвольный вектор из векторного пространства, причем его нельзя уменьшить, то есть выкинуть один из векторов из набора, не нарушая свойства о выразимости всего пространства. Это приводит к мысли о том, что внутри пространства можно выделить наборы векторов, с помощью которых можно описать все пространство.

Чтобы точнее определить такие наборы, введем следующее понятие:

Определение 1.11. Линейно зависимыми называются вектора $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$, если найдется такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, где хотя бы одно из чисел отлично от 0, что

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

Иными словами, вектора линейно-зависимы, если один из векторов набора может быть выражен как линейная комбинация оставшихся векторов.

Если же такого набора чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ не нашлось, то есть

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0,$$

то такой набор называют линейно независимым набором векторов.

Упражнение 13. Проверьте на линейную независимость следующий набор векторов из $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (3, 2)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (-1, 1)$. Будет ли линейно независимым набор из каких-нибудь двух векторов из этого набора? А одного вектора?

Упражнение 14. Будут ли линейно независимыми следующие наборы векторов:

(a) $v_1 = (1, -1, 2, 2)$, $v_2 = (-1, -2, 3, 0)$, $v_3 = (0, 3, -5, -2)$, $v_4 = (1, 0, -2, -1)$
(b) $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$

1.3.2 Базис пространства

Определение 1.12. Пусть в линейном пространстве V можно найти набор из n линейно независимых векторов (причем такое n максимально; то есть любой набор из $(n+1)$ вектора будет линейно зависимым), то любой такой набор называют базисом пространства, а количество векторов в базисе — размерностью пространства V: $\dim V = n$.

Замечание 1.13. Как можно заметить, базисов в фиксированном пространстве согласно определению, может оказаться очень и очень много. Единственная фиксированная величина для базиса — это количество элементов в нем, то есть размерность.

Замечание 1.14. Иногда определение базиса дают иначе: базисом пространства V называется набор из n линейно независимых векторов, причем любой вектор из пространства V может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Действительно, такое определение ничему не противоречит: если представить, что мы недобрали векторов в базис по нашему второму определению, то оставшиеся линейно-независимые элементы никак не могут быть выражены через меньший базис. Аналогично, мы не могли взять слишком много векторов: по определению, любой набор из $(n+1)$ уже будет линейно зависимым.

Замечание 1.15. Для любого вектора существует единственное разложение по базису.

Доказательство. Действительно, пусть дан некоторый базис $e_1, e_2, \dots e_n$ и нашлось два разных разложения по нему некоторого вектора x. Тогда:

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n$$

Перенесем в одну часть и сгруппируем коэффициенты по векторам базиса:

$$0 = (a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + \ldots + (a_n - b_n)e_n$$

По нашему предположению разложения были разные, значит, хотя бы одно $a_k - b_k \neq 0$, что означает, что набор векторов $e_1, e_2, \dots e_n$ линейно зависимый, чего быть не может. Противоречие. □

Второе определение приводит нас к следующему рассуждению: пусть дан вектор x из некоторого пространства с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда:

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$$

Набор чисел $(a_1, a_2, \dots a_n)$ называется координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots e_n$. Только после этого координаты могут быть записаны в виде вектора-столбца или вектора-строки.

Таким образом мы выяснили, что вектор — это абстрактный объект; столбцом чисел он становится только после того, как в соответствующем векторном пространстве был указан базис, по которому разложили данный вектор. Если базис решат поменять — координаты вектора станут другими.

Однако очень часто в задачах вектора уже даны в виде столбцов их координат; то есть задача предполагает наличие некоторого базиса, в котором и дает условие. Что это за базис? Установить невозможно. Дело в том, что один базис от другого абсолютно неотличим, если нам качественно не предъявляют раскладываемый вектор.

К примеру, если мы будем рассматривать векторное пространство полиномов не старше второй степени: координаты вектора $f(x) = 2x^2 - 1$ могут быть заданы по-разному — если мы рассматриваем базис 1, x, x^2, то получим $(-1, 0, 2)$, если базис 1, $x - 1$, $x^2 - 1$, то выйдет $(1, 0, 2)$ и так далее. Однако если бы нам сразу вручили вектор $(1, 0, 2)$ в некотором трехмерном пространстве, то установить базис, из которого он получился, было бы невозможно. В таких случаях говорят, что вектора заданы в некотором абстрактном стандартном базисе.

Упражнение 15. Покажите, что множество квадратных симметрических матриц ($A = A^T$) размера $n \times n$ является линейным пространством. Приведите какой-либо базис такого пространства (верной идеей будет начать с матриц размера 2).

Упражнение 16. Рассмотрим СЛУ вида $Ax = 0$. Выше мы уже доказали, что множество ее решений является линейным пространством. Укажите, как найти базис такого пространства. Следует ли из этого, что для решения любой линейной системы достаточно ограничиться поиском такого базиса. Составьте зависимость между числом свободных переменных и числом ненулевых строк в улучшенном ступенчатом виде метода Гаусса.

1.4 Определитель матрицы

Несложно понять, что когда речь идет о матрице, то рассматриваемый объект имеет довольно много степеней свободы: то есть, чтобы как-то охарактеризовать матрицу, приходится учитывать значения всех ее элементов, коих довольно много. Чтобы избежать подобной сомнительной характеристики, пользуются специальными величинами для каждой матрицы.

Определение 1.16. Следом (trace) квадратной матрицы называется сумма элементов на главной диагонали матрицы:

$$\mathrm{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Более важная для нас функция от квадратной матрицы — ее определитель, $\det A$ или $|A|$. К сожалению, общее ее определение довольно сложно, поэтому мы начнем с примеров:

Замечание 1.17. Определитель матрицы 2×2 равен

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Замечание 1.18. Определитель матрицы 3×3 равен

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Для запоминания можно дописать еще одну матрицу A рядом с матрицей A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{pmatrix}$$

Тогда в определителе группы слагаемых с «+» — это произведения на диагоналях данной матрицы, а с «-» — на побочных диагоналях.

Для подсчета определителей более высокого порядка можно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 1.19. *Пусть дана матрица A размера $n \times n$. Назовем дополнением A_{ij} матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-ой строки и j-го столбца. Тогда вычисления определителя матрицы A можно свести к вычислению определителей меньшего порядка:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} (-1)^{k+i} \det A_{ki}$$

Данную формулу называют разложением определителя по k-ой строке. Аналогично можно привести формулу разложения определителя по k-ому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i} \det A_{ik}$$

Ясно, что удобнее всего раскладывать определитель по строкам или столбцам с большим числом нулевых элементов — это позволит считать меньшее количество определителей меньшего порядка.

В чем геометрический смысл определителя? На самом деле, на этот вопрос легко ответить: рассмотрим матрицу A. На нее можно смотреть как на n n-мерных векторов-строк, уложенных друг под другом (или наоборот, n n-мерных векторов-столбцов, стоящих рядом). Рассмотрим случай матрицы 2×2: тогда мы говорим о двух двумерных векторах; если изобразить их с общим началом из точки $(0,0)$, то на полученных векторах, как на смежных сторонах, можно построить параллелограмм (говорят «натянуть параллелограмм на векторы»). Тогда определитель нашей матрицы будет равен площади этого параллелограмма, если вектора нарисованы в порядке следования в матрице против часовой стрелки (в противном случае мы получим противоположное число). Таким образом определитель матрицы — это ориентированный объем параллелограмма, натянутого на векторы, составляющие данную матрицу.

Такое определение, несмотря на внешнюю приятность, не позволяет подсчитывать определители матриц сколько-нибудь вменяемого размера, поэтому следует пользоваться теоремой и тождествами выше.

Добавим также два дополнительных утверждения без доказательства:

Замечание 1.20. Для произвольных квадратных матриц A и B одинакового размера верно следующее:

$$\det A^T = \det A \qquad \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

1.4.1 Обратная матрица

Определение 1.21. Обратной матрицей к данной квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1}, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Как можно заметить, обратная матрица всегда коммутирует с самой матрицей A.

Мы уже знаем, что в поле по умножению обратимы все элементы, кроме 0; то есть даже в самых хороших множествах могут оказаться необратимые элементы. В случае матриц таких элементов довольно много:

Теорема 1.22. *Матрица A называется вырожденной, если $\det A = 0$, и невырожденной, если $\det A \neq 0$. Невырожденные матрицы обратимы.*

На самом деле критерий обратимости можно написать несколькими способами, как мы увидим далее, но для наших целей локально подойдет такая теорема.

Итак, как же вычислить обратную матрицу? Для этого можно привести как минимум два простых алгоритма.

Согласно первому из них, для матрицы A следует выполнить такие действия:

1. Вычислить определитель матрицы $\det A$;
2. Вычислить матрицу B, где $b_{ij} = A_{ij}$ (то есть где каждый элемент есть соответствующее дополнение матрицы A);
3. Посчитать обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T$.

Такой алгоритм довольно трудоемок. Альтернативный процесс выглядит следующим образом:

1. Записать рядом с матрицей A единичную матрицу такого же размера $(A \mid E)$;
2. Элементарными преобразованиями по методу Гаусса привести матрицу A к виду единичной матрицы (заодно преобразовывая строки в матрице справа);
3. Обратная матрица A^{-1} будет стоять на месте единичной: $(E \mid A^{-1})$.

Упражнение 17. Чему равен определитель матрицы, обратной к матрице A? Воспользуйтесь свойствами выше.

Упражнение 18. Найдите обратные матрицы для следующих

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Замечание 1.23. Если рассматривается СЛУ $Ax = b$, причем A — невырожденная квадратная матрица, то решение системы обязательно единственно и может быть вычислено по формуле:

$$x = A^{-1} b$$

Если рассматривается случай однородной СЛУ, то формула все так же применима, при этом она сразу позволяет сделать вывод, что единственным решением системы будет нулевое решение.

1.4.2 Ранг матрицы

Определение 1.24. Рангом матрицы называется натуральное число $\mathrm{rk} A$, которое может быть вычислено тремя способами:

(a) как количество линейно-независимых строк в матрице
(b) как количество линейно-независимых столбцов в матрице
(c) как наибольшей размер квадратной невырожденной матрицы, полученной вычеркиванием строк и столбцов из данной матрицы.

По рангу матрицы также можно установить обратимость матрицы:

Замечание 1.25. Если у матрицы A размера $n \times n$ $\mathrm{rk} A < n$, то матрица вырожденная (фактически это означает, что если одну строку можно выразить как линейную комбинацию остальных строк, то такая матрица вырожденная). Из предыдущего определения сразу следует, что если $\mathrm{rk} A < n$, то $\det A = 0$.

Упражнение 19. Вычислите ранг следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Будет ли эта матрица вырожденной?

Пользуясь рангом матрицы удобно рассуждать о наличии решений СЛУ:

Теорема 1.26. *Для СЛУ вида $Ax = b$ матрицу A будем называть матрицей системы, а матрицу A с приписанным в конце столбцом b: $(A|b)$, — будем называть расширенной матрицей системы.*

1. *если ранг расширенной матрицы системы больше ранга матрицы системы, то решений нет;*
2. *ранг расширенной матрицы системы никогда не меньше ранга матрицы системы;*
3. *число свободных переменных (а также векторов в ФСР) равно $n - \mathrm{rk} A$, где n – количество стоблцов матрицы A*
4. *если ранг матрицы системы равен количеству столбцов в матрице системы и ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы, то решение единственно.*

Данная теорема, а особенно ее третий пункт, позволяют указать алгоритм вычисления ранга матрицы: действительно, если число свободных переменных так связано с рангом матрицы, то достаточно привести матрицу A в улучшенному ступенчатому виду — количество ненулевых строк и будет равняться рангу матрицы.

Упражнение 20. Для системы

$$\begin{cases} x + 6y - 5z = 1 \\ y - x = 0 \\ 4x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

вычислите ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы. Что можно сказать о решениях системы, пользуясь полученной информацией?