Интенсив по математическому анализу и линейной алгебре, 2018 год.

Организационная информация.

- Занятия ведет Нина Сахарова (saharnina@gmail.com)

  Вопросы по математике и не только можно отправлять на электронные адреса преподавателей или писать в наш telegrem-канал.

- В конце части занятий будет выдано домашнее задание. Задание нужно аккуратно записать (можно набрать в TeXe), отсканировать, собрать в один pdf-файл и выслать по адресу отправить на почту учебному ассистенту с темой письма «Интенсив по математике, занятие (номер), Иванов Иван.»

- Мы будем решать довольно много задач. Задания со знаком «*» предназначены для слушателей, которые уже хорошо знакомы со всем, что обсуждается в данный момент. Эти задания скорее всего разбираться со всеми не будут, но их можно и нужно решать самостоятельно, по желанию обсуждать с Ниной отдельно.

1 Занятие: Анализ функций от одной переменной (8 сентября, суббота).

Все (или почти все) определения, формулировки и объяснения здесь и далее – короткие и неформальные.
За длинными и формальными определениями можно обращаться к следующей литературе:

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.
- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.
- Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике, 2002 (введение).

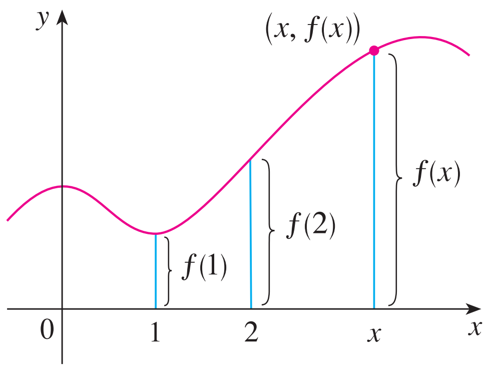
Часть картинок и задач заимствованы из книги Stewart, J. «Calculus - Early Transcendentals». Проверить вычисления или нарисовать нужную картинку может помочь https://www.wolframalpha.com (хотя на начальном этапе изучения математики с этим и подобными пакетами лучше не переусердствовать).

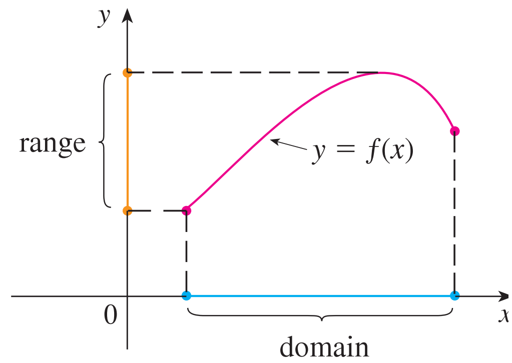
1.1 Функции от одной переменной и их преобразования.

Определение 1. ***Функция*** *f – это правило, по которому каждому элементу из числового множества D (это может быть отрезок, интервал, какая-то часть числовой прямой) сопоставляется ровно один элемент, $f(x)$, из числового множества E.*

Множество чисел D называется **областью определения** (domain) функции, множество E – это **множество значений** (range) функции. Число $y = f(x)$ – это значение функции f в точке x. Мы будем называть x **независимой**, а y – **зависимой** переменной. Функции можно представлять следующими способами:

- алгебраически (то есть формулой, например, $f(x) = 5x^8$ или $g(x) = 3\cos x$);
- графически;
- с помощью таблицы значений (указываются значения функции в нескольких точках; конечно, чем больше точек – тем лучше мы можем понять поведение функции).





Задание 1.1. Функция $f(x)$ задана таким образом

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq -2 \\ 1 - x, & -2 < x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

a) Постройте таблицу значений функции в точках $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

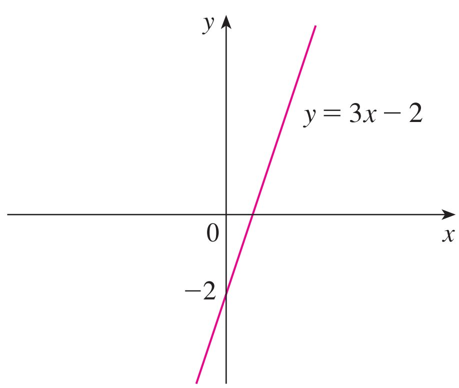
b) Постройте эскиз графика этой функции.

Задание 1.2. Является ли графиком какой-нибудь функции часть окружности

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \text{где} \quad x > \frac{1}{2} \ ?$$

Функция – это способ описания математической модели некоторого явления или объекта (например, численности популяции или движения тела). Некоторые функции встречаются гораздо чаще других. Ниже (в качестве возможного напоминания) приведены уравнения (и графики) некоторых наиболее часто встречающихся в природе и жизни функций:

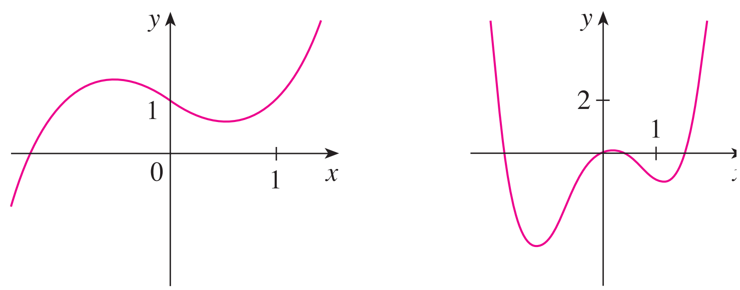
1. Линейная функция: $y = kx + b$, k и b – заданные числа (коэффициенты).



2. Степенная функция: $y = x^a$, a – любое число.

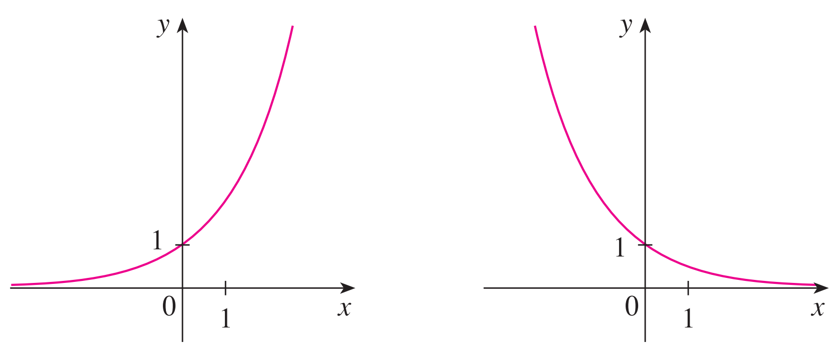
* Тут уместно рассмотреть несколько простых случаев: $a = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$; $a = 2n+1$, где $n \in \mathbb{N}$; $a = 1/n$ и, например, $a = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

2' Многочлен (полином): $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (число n называется степенью полинома).



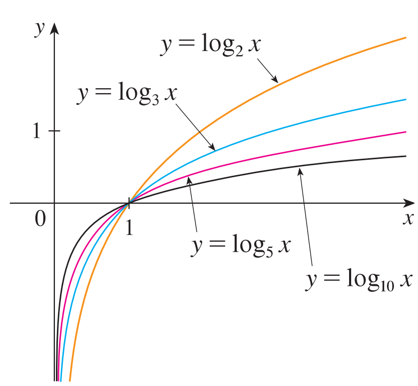
(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

3. <u>Тригонометрические функции:</u> $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, и т. д.
4. <u>Экспоненциальная функция:</u> $y = a^x$, a – любое положительное число

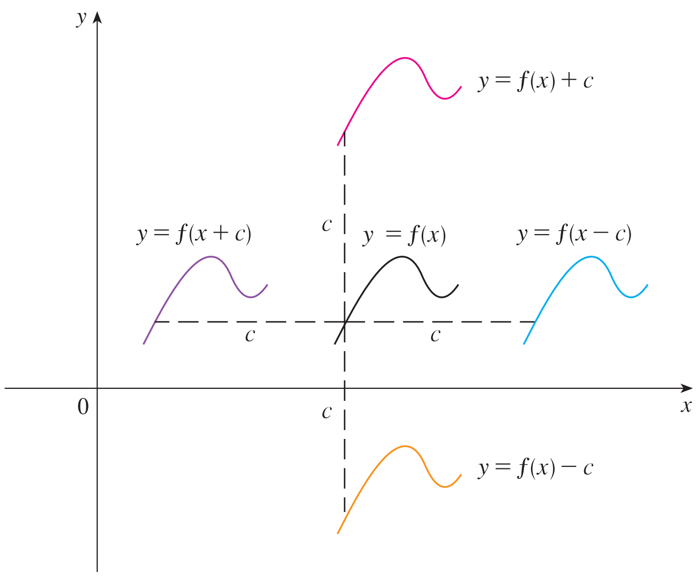


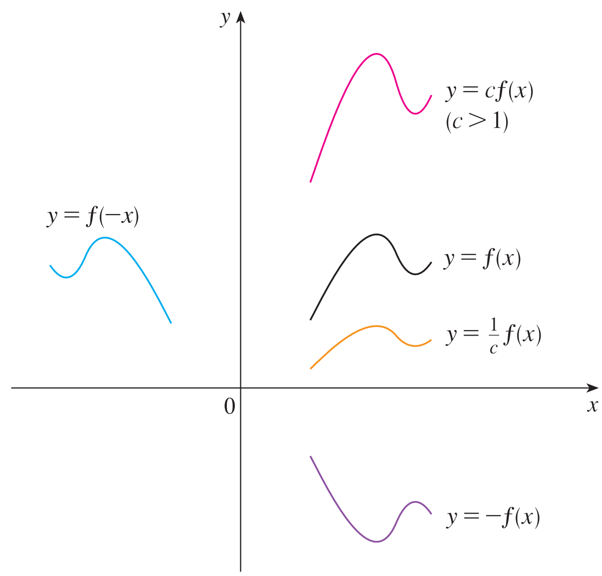
(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

5. <u>Логарифмическая функция:</u> $y = \log_a x$, a – любое положительное число



Чтобы нарисовать графики сложных функций, нужно понимать как изменяется функция под действием тех или иных преобразований. Есть три вида основных преобразований: сдвиги (вдоль оси x или оси y), сжатия/растяжения вдоль координатных осей, а так же отражения относительно осей:





Задание 1.3. a) Нарисуйте график функции $f(x)$, заданной следующими условиями: $x^2 + y^2 = 1$ и $y \geq 0$ (верхняя половинка окружности).

b) Для данной функции f постройте (если возможно): 1) $f(x-8)$, 2) $f(x+3)$, 3) $-f(x)$, 4) $-f(x)+2$, 5) $2f(-x)$, 6) $\frac{f(x)}{2}-1$, 7*) $f^{-1}(x)$, 8*) $f^{-1}(x+3)$, 9*) $(f(x+3))^{-1}$, 10*) $\dfrac{1}{f(x)}$.

Определение 2. ***Композиция двух функций*** f ***и*** g**,** $f \circ g$ *– это новая функция, которая получается как результат последовательного применения к независимой переменной* x *сначала функции* g*, а потом функции* f*:*

$$f \circ g = f(g(x)).$$

Задание 1.4. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+4}$ и $g(x) = \ln(2+x)$. Найдите функции

a) $f \circ f$, b) $f \circ g$ c) $g \circ f$, d) $g \circ g$.

Определение 3. ***Обратная функция к*** f *– это такая функция,* f^{-1}*, что*

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x.$$

Задание 1.5. Найдите обратную функцию к следующим:
a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = 1/x$ c) $f(x) = e^x$ d*) $f(x) = e^{x^3}$, e*) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$.
Нарисуйте эскизы этих функций и обратных к ним.

Задание 1.6*. Пусть $f(x) = 3 + x + e^x$. Найдите $g^{-1}(4)$.

1.2 Предел функции и предел последовательности.

Определение 4. *Будем писать*

$$\lim_{x\to a} f(x) = B,$$

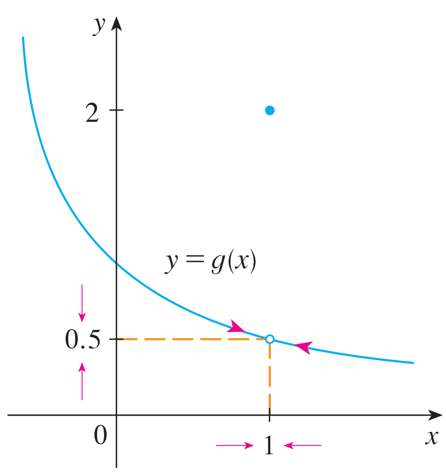
(звучит так «предел функции $f(x)$, при x стремящимся к a, равен B») если, рассматривая сколь угодно близкие к числу a значения переменной x, все значения функции $f(x)$ получаются сколь угодно близкие к числу B.

Строгое и формальное определение (по Коши) звучит так:

Определение 5. *Будем писать*

$$\lim_{x\to a} f(x) = B,$$

если, для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$, такое, что для всех x со свойством $|x - a| < \delta$ верно, что $|f(x) - B| < \varepsilon$.



Задание 1.7. Вычислите

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$; c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+6}{x-2}$; d*) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$,

e) $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-}$, $\lim_{x\to 0}$; f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Задание 1.8.* Пользуясь знанием о том, что $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ («замечательные пределы»), найдите:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{acrsin}x}{x}$, c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2/2}$,

d) $\lim_{x\to\infty} (1+\dfrac{k}{x})^{2x}$, e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Исходя из определения пределов можно доказать следующие естественные свойства, которые называются **арифметикой пределов:**

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, если $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Задание 1.9. Сформулируйте (придумайте) определение предела на бесконечности: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

1.3 Непрерывность.

Определение 6. *Будем говорить, что функция f* ***непрерывна в точке*** *a, если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Функция непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Задание 1.10. Найдите точки разрыва функций:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$, c) $f(x) = \ln(t^4 - 1)$.

Задание 1.11. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ определите, является ли функция a) $f(x)$; b) $xf(x)$; c) $x^2 f(x)$ непрерывной в нуле.

Теорема 1. ***Теорема о промежуточном значении:*** *если непрерывная функция $f(x)$ принимает какие-нибудь два значения A и B, то она принимает и любые значения между ними.*

Задание 1.12. Докажите, что при некотором x_0: $f(x) = x^2 + 10\sin x = 1000$.

Задание 1.13*. При каких x функция непрерывна?

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \end{cases}$.

1.4 Производная.

Назовем «приращением аргумента» от некоторой точки a до x разницу $\Delta x = x - a$ (то, насколько изменился аргумент), а «приращением функции» назовем разницу $\Delta y = f(x) - f(a)$ (то, как сильно изменилась функция). Тогда на отрезке $[a, x]$ «средняя скорость» роста функции – есть отношение приращения функции к приращению аргумента, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 7. ***Производной*** *функции $f(x)$ в точке a называется мгновенная скорость роста функции в точке a:*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

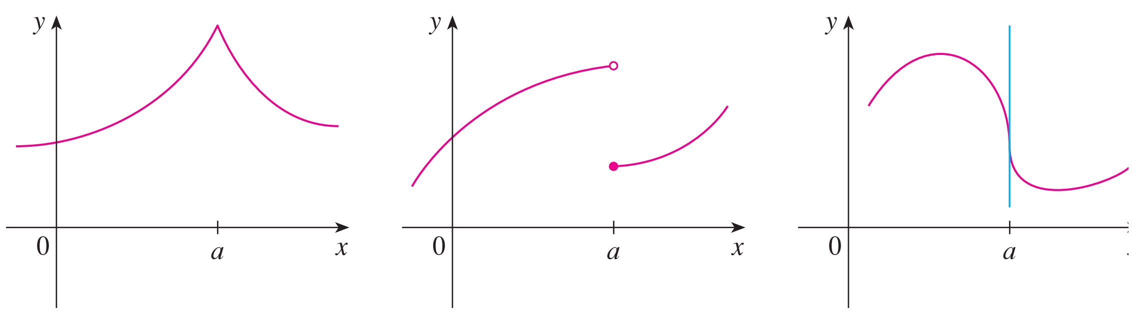
Можно рассматривать не только производную функции в точке, но и производную на некоторой области (то есть смотреть на производную, как на новую функцию):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Задание 1.14. Пользуясь этим определением (а не таблицей производных!) найдите производные следующих функций:
a) $f(x) = 179$, b) $f(x) = x^2$, c*) $f(x) = x^n$, d*) $f(x) = \sin x$.

Определение 8. *Функция называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если у нее существует производная в этой точке.*

Задание 1.15. Определите, являются ли функции на картинке ниже дифференцируемыми и почему.



Определение 9. ***Касательной*** *прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке a называется прямая, проходящая через точку $(a, f(a))$, тангенс угла наклона которой равен $f'(a)$.*

Из определения видно, что эта прямая задается уравнением $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Задание 1.16. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{e^x}{x}$, в точке $(1, e)$.

Имеются некоторые стандартные **правила дифференцирования** (совсем нехитрые и доказываются по определению):

- Если c – константа (то есть число), то $(c)' = 0$;
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
- $(e^x)' = e^x$;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
- Производная произведения (или правило Лейбница): $(fg)' = f'g + fg'$;
- Производная частного: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- Дифференцирование сложной функции $F = f(g(x))$: $F' = (f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$.

Задание 1.17. Найдите производную следующих функций (используя таблицу производных или/и правила вычисления производных, включая дифференцирование сложной функции):

1) $x^3 - 4x + 6$, 2) $\sqrt{x} - 2e^x$, 3) $\dfrac{x^2}{1+2x}$, 4) $\ln x$, 5) $\operatorname{arctg} x$,
6) $\sin(\cos x)$, 7*) $\sin(\cos x^2)$, 8*) $\sin(\cos^2 x)$, 9*) x^x, 10*) x^{x^x}.

1.5 Экстремумы функции.

Определение 10. *Функция $f(x)$ достигает* ***абсолютного максимума (или глобального максимума)*** *в точке c, если $f(c) > f(x)$ для всех точек x из области определения D. Аналогично определяется и глобальный минимум.*

Определение 11. *Функция $f(x)$ достигает* ***локального максимума*** *в точке c, если $f(c) > f(x)$ для всех точек x в окрестности некоторой точки c. Аналогично определяется и локальный минимум.*

Необходимое условие экстремума. Если функция $f(x)$ достигает **локального максимума или минимума** в точке c, и если $f'(c)$ существует, то $f'(c) = 0$. Обратите внимание на то, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Важно! Возможна ситуация, когда в некоторой точке производная не существует, а сама точка является максимумом или минимумом (придумайте пример).

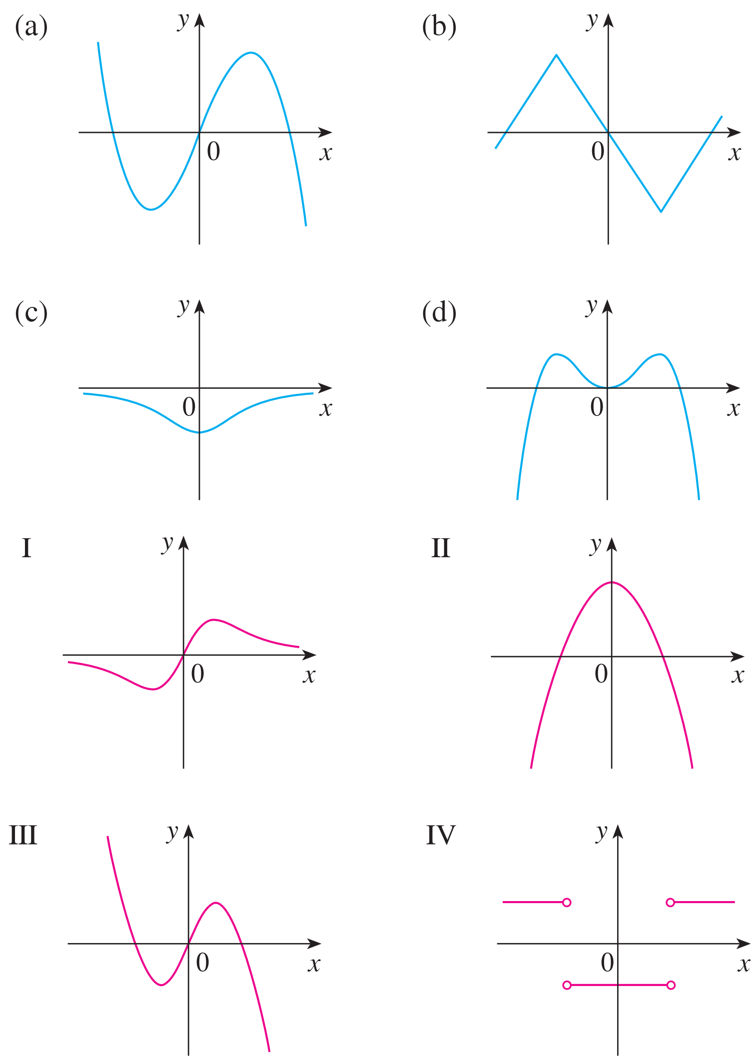
Достаточное условие экстремума. Предположим, что вторая производная функции f, f'' непрерывна в точке c, тогда
a. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) < 0$, то c – локальный максимум функции;
b. Если $f'(c) = 0$ и $f''(c) > 0$, то c – локальный минимум функции.

Как найти глобальный экстремум непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
a. Вычислите значения функции в граничных точках отрезка a и b;
b. Найдите все «критические точки функции» на этом отрезке, то есть точки, в которых $f'(x) = 0$;

c. В пунктах 1 и 2 найдите самое большое и самое маленькое значение $f(x)$, это и буду глобальные экстремумы функции.

Возрастание и убывание функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:
a. Если $f'(x) > 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ возрастает на нем;
b. Если $f'(x) < 0$ на некотором интервале, то $f(x)$ убывает.

Задание 1.18. Сопоставьте графикам функций $(a) - (d)$ графики производных $(I) - (IV)$:



Задание 1.19. Исследуйте функцию на максимумы, минимумы, промежутки монотонности (промежутки, на которых функция растет и промежутки, на которых она убывает).

1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = x^3 + x$; 3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$; 4*) $f(x) = \ln(\sin x)$.

1.6 Первообразная.

Определение 12. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале I, если всюду на I*

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 2. *Если F – некоторая первообразная функции $f(x)$, то все прочие первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C – любое число.*

Задание 1.20. (Решение дифференциальных уравнений). Подберите функцию f, для которой:

1) $f'(x) = \sin x + \cos x$; 2) $f'(x) = x^2$; 3) $f'(x) = f(x)$;
4) $f'(x) = 2f(x)$; 5)* $f'(x) = xf(x)$; 6) $f''(x) = x^2$;
7) $f''(x) = -f(x)$; 8)* $f''(x) = -f(x) + 1$; 9)* $f'(x) = -f^2(x)$
10)* $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Домашнее задание 1.

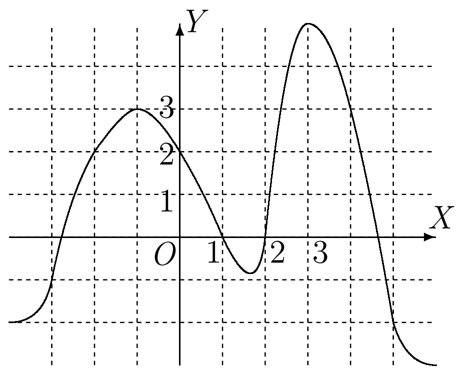


график $y = f(x)$

Задача 1. График функции $f(x)$ изображен на рисунке слева. Будем считать, что функция определена на отрезке $[-4, 6]$. Нарисуйте график функции

a) $f(|x|)$; b) $|f(x)|$; c) $1 - 2f(x)$;

d*) $4 - 2f(2 - 3x)$; e) $\dfrac{1}{f(x)}$; f) $-f(x+5)$.

Задача 2. Нарисуйте график функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ и найдите следующие пределы:

$\lim_{x\to 1^+}$, $\lim_{x\to 1^-}$, $\lim_{x\to 1}$.

Задача 3. Функции f и g определены на множестве $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и заданы таблицами:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	8	-1	4	7	6	0

x	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$	7	6	1	2	3	4	5

Рассмотрим функции (a) f^{-1} – обратная к f; (b) $f \circ g$ (c) $g \circ f$ (d) $f \circ f$.

1. Какие из перечисленных функций существуют (то есть корректно определены)?
2. Постройте таблицы для указанных функций (если это возможно).
3. Укажите области определения и области значений.

Задача 4. Какие нужно выбрать значения параметров a, b, чтобы следующая функция была непрерывной? $f(x) = \begin{cases} e^2, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 3 & x > 2 \end{cases}$

Задача 5. Используя теорему о промежуточном значении, докажите, что уравнение $100e^{-x/100} = 0.01x^2$ имеет хотя бы один вещественный корень.

Задача 6. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{2x}{x+1}$, в точке $(1, 1)$.

Задача 7. Найдите производную следующих функций:
1) $\cos(\sin x^2)$, 2) $\cos(\sin^2 x)$, 3*) $(\cos(x))^{\sin x}$.

Задача 8. Исследуйте функцию $f(x) = \ln(\cos x)$ на максимумы, минимумы, промежутки монотонности.