МдАД: Линейная алгебра **Осень 2018**

Линейная алгебра 3: 13 октября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Ассистент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде на почту преподавателя не позднее указанного при выдаче задания крайнего срока (дедлайна).*
При выполнении домашнего задания приветствуется использование среды LaTeX; допустим набор в редакторах Word (Libreoffice, Google Docs) и отсканированные письменные материалы.
Выполненное домашнее задание должно содержать решение задачи, по которому возможно восстановить авторский ход решения, а не только ответ.

Задача 1. Найдите характеристический многочлен матрицы A, ее собственные числа и собственные векторы. Представьте матрицу A в виде $A = TBT^{-1}$ (это матрица перехода из собственного базиса в стандартный; здесь по столбцам стоят координаты векторов собственного базиса в стандартном!). Вычислите A^{2018}:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 2. В пространстве многочленов степени не старше 3 M рассмотрим линейное пространство L, порожденное многочленами $P(x) = 2x^2(x-1)$, $Q(x) = x^2(x+1)$, $R(x) = -4x^3 + 5x^2$ (то есть это пространство всех возможных линейных комбинаций данных многочленов, $aP(x) + bQ(x) + cR(x)$).

1. Докажите, что $\dim L = 2$ и $P(x)$, $Q(x)$ образуют в нем базис.
2. Рассмотрим преобразование $f\colon M \to M$, действующее по следующему правилу: для любого полинома $S(x)$ $f(S) = x^2 S''(x)$. Докажите, что f — это линейный оператор.
3. Докажите, что для пространства L оператор f отображает пространство в себя; то есть убедитесь, что любой полином из пространства L переходит в полином из пространства L.
4. Запишите матрицу оператора A в базисе $P(x)$, $Q(x)$ пространства L.
5. Диагонализуем ли этот оператор? Если да, то выпишите собственный базис (в виде координат и в виде полиномов).

Задача 3. Приведите следующую квадратичную форму любым удобным способом к каноническому виду:

$$q(x) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 10xz + 6yz$$

Выпишите матрицу оригинальной формы. Установите, при каких параметрах α форма

$$q(x) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 10xz + 6yz$$

будет знакоопределена? Укажите главные угловые миноры.

Задача 4. Исследуйте функцию на локальный экстремум (обратите внимание, что дана функция трех переменных):

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$