

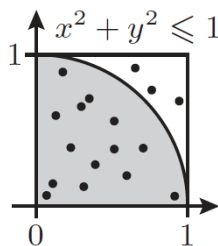
ВОПРОСЫ НА ПОНИМАНИЕ

Упражнение 1. Ответьте на следующие вопросы:

1. Перед нами стоит задача вычислить интеграл от некоторой функции. Какой будет погрешность у метода прямоугольников и метода Монте-Карло? В каких ситуациях предпочтительнее использовать метод Монте-Карло?
2. Что такое несмещенная оценка? Объясните словами, что это свойство означает.
3. Что такое состоятельная оценка? Объясните словами, что это свойство означает.
4. Что такое функция правдоподобия?
5. В каких случаях для оценки среднего случайной величины лучше использовать медиану вместо среднего арифметического?
6. Что такое доверительный интервал?

ЗАДАЧИ

Упражнение 2. Сколько случайных точек надо бросить в единичный квадрат, чтобы получить площадь под дугой окружности (см. рисунок ниже) с точностью 0.001 и с вероятностью 0.997?



Упражнение 3. Для случайных величин X_i , $i = 1, \dots, n$, взятых наудачу из отрезка $[0, \theta]$, проверьте несмещенность следующих оценок неизвестного параметра $\theta > 0$:

1. $\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n) = 6$;
2. $\hat{\theta}_2(x_1, \dots, x_n) = 2x_n$;
3. $\hat{\theta}_3(x_1, \dots, x_n) = 2x_1 + 2x_n$;
4. $\hat{\theta}_4(x_1, \dots, x_n) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$;
5. $\hat{\theta}_5(x_1, \dots, x_n) = 3(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/n$;

Посчитайте значения этих оценок на следующих данных ($n = 10$):

4.47 2.13 2.94 0.02 2.65 3.01 0.43 3.63 2.84 4.89.

Упражнение 4. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 3)$, $i = 1, \dots, n$. Проверьте несмещенность следующих оценок неизвестного параметра $\mu \in \mathbb{R}$:

1. $\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n) = 0$;
2. $\hat{\theta}_2(x_1, \dots, x_n) = x_1$;

3. $\hat{\theta}_3(x_1, \dots, x_n) = 2x_n$;

4. $\hat{\theta}_4(x_1, \dots, x_n) = 2x_2 - x_3$;

5. $\hat{\theta}_5(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$;

Посчитайте значения этих оценок на следующих данных ($n = 10$):

−3.19 2.25 4.64 −0.39 −1.44 −1.87 −1.68 0.27 0.43 0.58.

Упражнение 5. Пусть X_i равномерно распределены на $[0; \theta]$. Найдите оценку для неизвестного параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия.

Упражнение 6. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$. Найдите оценки для неизвестных параметров μ и σ^2 методом моментов. Что можно сказать о несмещенности полученных оценок? Является ли оценка μ состоятельной?

Упражнение 7. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Найдите оценки для неизвестных параметров μ и σ^2 методом максимального правдоподобия. Что можно сказать о несмещенности полученных оценок? Является ли оценка μ состоятельной?

Упражнение 8. Для модели сдвига показательного закона с плотностью

$$f_{\theta}(u) = \begin{cases} e^{-(u-\theta)}, & u \geq \theta, \\ 0, & u < \theta, \end{cases}$$

оценкой максимального правдоподобия является $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Покажите, что

$$\mathbb{P}\left(X_{(1)} + \frac{\ln \alpha}{n} < \theta < X_{(1)}\right) = 1 - \alpha,$$

то есть $(X_{(1)} + (\ln \alpha)/n, X_{(1)})$ является доверительным интервалом с коэффициентом доверия $1 - \alpha$.