**Интенсив по математическому анализу и линейной алгебре, 2018 год.**

**Организационная информация.**

- Занятия ведет Нина Сахарова (saharnina@gmail.com)
  Вопросы по математике и не только можно отправлять на электронные адреса преподавателей или писать в наш telegrem-канал.

- В конце части занятий будет выдано домашнее задание. Задание нужно аккуратно записать (можно набрать в TeXe), отсканировать, собрать в один pdf-файл и выслать по адресу отправить на почту ассистенту: (dvishnev@nes.ru). с темой письма «Интенсив по математике, занятие (номер), Иванов Иван.»

- Мы будем решать довольно много задач. Задания со знаком «*» предназначены для слушателей, которые уже хорошо знакомы со всем, что обсуждается в данный момент. Эти задания скорее всего разбираться со всеми не будут, но их можно и нужно решать самостоятельно, по желанию обсуждать с Ниной отдельно.

# 4 Занятие: Анализ функций от двух и более переменных, часть 2 (26 сентября, среда).

Все (или почти все) определения, формулировки и объяснения здесь и далее – короткие и неформальные.
За длинными и формальными определениями можно обращаться к следующей литературе:

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.

- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.

- Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике, 2002 (введение).

Часть картинок и задач заимствованы из книги Stewart, J. «Calculus - Early Transcendentals».

## 4.1 Частные производные.

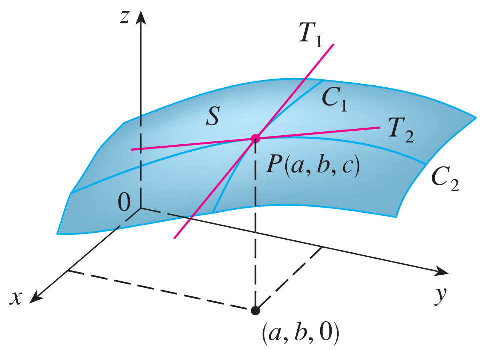
**Определение 1.** *Если $f(x, y)$ – функция от двух переменных, то частные производные $f_x$ (по отношении к переменной $x$) и $f_y$ (по отношении к переменной $y$) определяются так:*

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x},$$

$$f_y(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y}.$$

*Чтобы найти частную производную по $x$, $f_x$, необходимо зафиксировать переменную $y$ (то есть считать ее константой) и продифференцировать $f(x, y)$ как функцию от одной переменной $x$.*

**Геометрически.** Частные производные $f_x(a, b)$ и $f_y(a, b)$ – это угловые коэффициенты касательных прямых $T_1$, $T_2$ к кривым $C_1$, $C_2$, которые получаются при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостями $x = a$ и $y = b$.




**Задание 4.1.** Вычислите частные производные функции $f(x, y) = \sin(x^2 + 3y^3)$. Найдите вторые частные производные: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

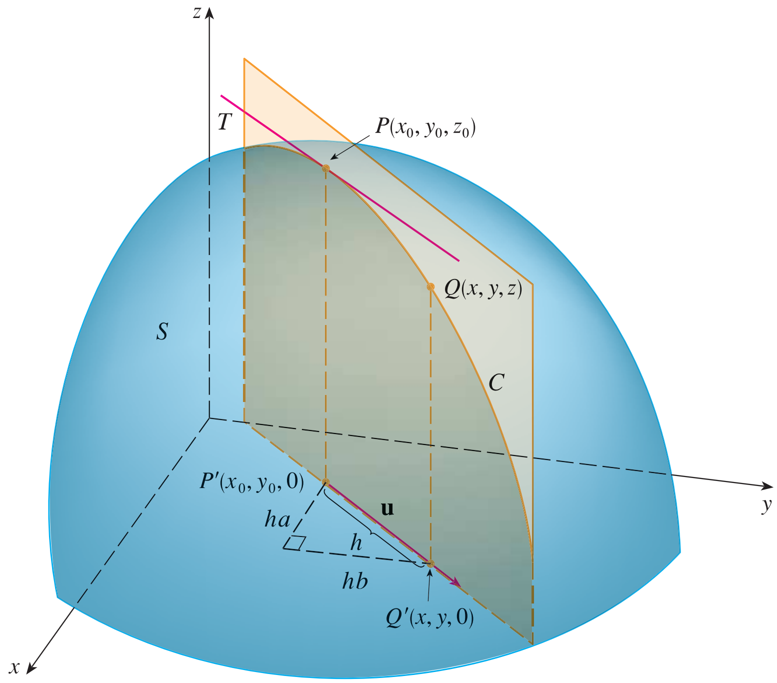
## 4.2 Производная по направлению и градиент.

Частные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ дают представление о скорости роста функции, если мы меняем только одну координату (а вторую оставляем прежней), иными словами, если мы двигаемся на плоскости $x - y$ по направлению единичных векторов, $(1, 0)$ или $(0, 1)$, и смотрим как меняется при таком движении координата $z = f(x, y)$.

Если мы хотим узнать о скорости изменения функции при движении по какому-нибудь другому направлению (скажем, при движении вдоль единичного вектора $u = (\alpha, \beta)$, то необходимо узнать производную функции, вычисленную по этому направлению:

**Определение 2.** *Производная функции $f(x, y)$ по направлению единичного вектора $u = (\alpha, \beta)$, вычисленная в точке $(x, y)$ – это*

$$f_u(a, b) = D_u f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\alpha, y + h\beta) - f(x, y)}{h}.$$




**Определение 3.** *Градиентом функции $f(x,y)$, $\nabla f$, называется вектор из частных производных этой функции:*

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

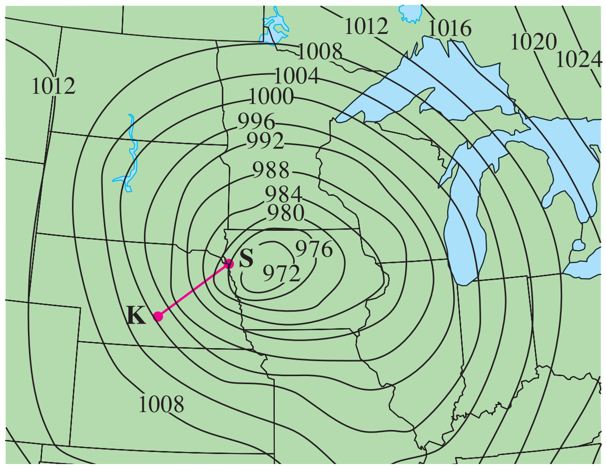
Производная функции по направлению в данной точке может быть найдена при помощи вектора-градиента функции:

**Теорема 1.** *Пусть $u = (\alpha, \beta)$ – произвольный вектор единичной длины, тогда*

$$D_u f(x,y) = \alpha f_x(x,y) + \beta f_y(x,y).$$

**Задание 4.2.** Вычислите производную функции $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ в точке $(2,-1)$ по направлению вектора $u = (3,4)$.

Предположим, мы хотим выяснить, в каком направлении нужно двигаться, чтобы скорость роста функции была максимальной (или, наоборот, минимальной). По-простому: если мы идем по поверхности, то интересно понять, в какую сторону идти, чтобы быстрее всего подняться на вершину, то есть где подъем самый крутой.

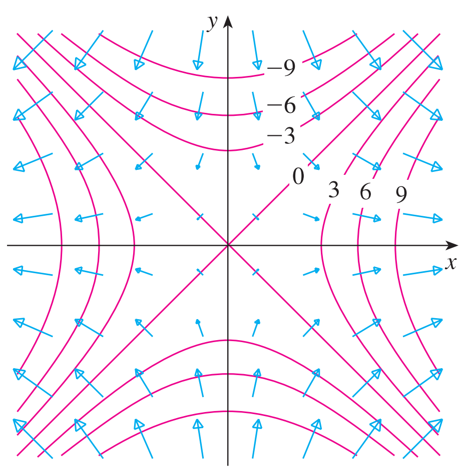


From *Meteorology Today*, 8E by C. Donald Ahrens (2007 Thomson Brooks/Cole).

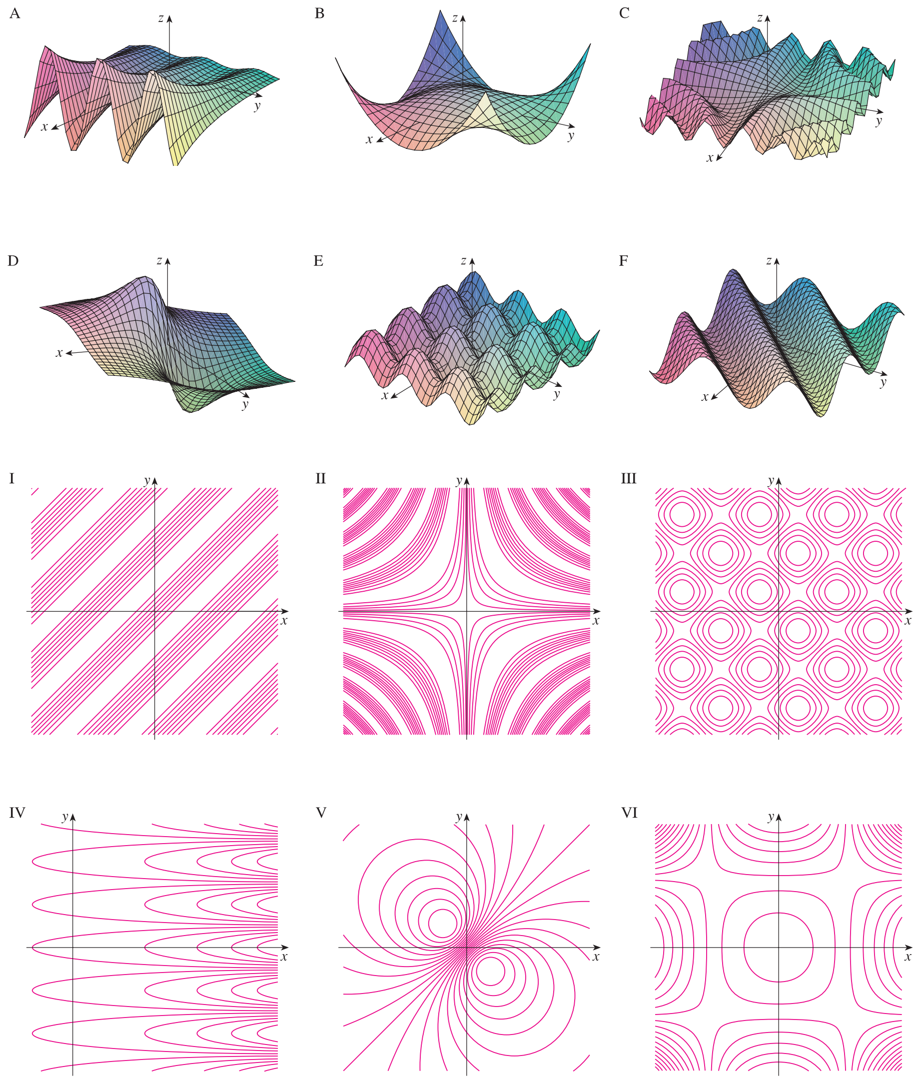
**Теорема 2.** *Пусть $f(x, y)$ дифференцируемая функция от двух (или более) переменных. Тогда максимальное значение производной по направлению $D_u f(x, y)$ равно $|\nabla f(x, y)|$ и достигается, когда вектор $u$ имеет то же направление, что и вектор-градиент $\nabla f$.*

**Задание 4.3.** Пусть функция $f(x, y) = xe^y$. Найдите направление, в котором скорость роста функции максимальна. Чему равна эта скорость?

**Задание 4.4.** На картинке ниже нарисованы линии уровня функции $f(x, y) = x^2 - y^2$. Нарисуйте график этой функции. Сопоставьте синие стрелки на картинки с градиентами функции в соответствующих точках. Почему они выглядят именно так?




**Задание 4.5.** На картинке ниже нарисованы графики и их линии уровня. Сопоставьте картинки друг другу. На какой-нибудь картинке нарисуйте градиенты.




### 4.3 Экстремумы.

**Теорема 3.** *Если функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум или минимум (экстремум) в точке $(a, b)$ и у нее существуют частные производные первого порядка в этой точке, то*

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

* Такие точки, в которые частные производные равны нулю или не существуют, называют **критическими точками.**

**Достаточное условие экстремума**. Пусть $(a, b)$ – критическая точка функции $f(x, y)$ и предположим, что в окрестности этой точки функция имеет непрерывные производные второго порядка. Пусть

$$D = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2.$$

Тогда, если

1. $D > 0$ и $f_{xx}(a,b) > 0$, то в точке $(a,b)$ – локальный минимум функции;
2. $D > 0$ и $f_{xx}(a,b) < 0$, то в точке $(a,b)$ – локальный максимум функции;
3. $D < 0$, то в точке $(a,b)$ – ни максимум, ни минимум (седловая точка).
4. $D = 0$, то в точке $(a,b)$ может быть все что угодно (требуется дополнительное исследование).

**Задание 4.6.** Найдите локальные максимумы, минимумы и седловые точки (если есть) функции
a) $f(x,y) = 9-2x+4y-x^2-4y^2$; b) $f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$; c*) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

! Для функций трех и более переменных нам потребуется немного знаний из линейной алгебры (квадратичная форма, соответствующая матрице из вторых частных производных – матрице Гессе), поэтому к этой задаче мы еще вернемся, но чуть позже.

## 4.4 Касательная плоскость, линейная аппроксимация функции.

Касательная плоскость к поверхности $S$, заданной уравнением $f(x,y) = z$, и проходящая через точку $(a,b)$, это плоскость, проходящая через две касательных прямых $T_1$ и $T_2$ (обозначения части 4). По аналогии с касаетльной прямой к графику функции, заданной уравнением $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, касательная плоскость к поверхности в точке $(a,b)$ задается линейным уравнением:

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(x-a).$$

**Задание 4.7.** Найдите касательную плоскость к поверхности
a) $z = y\cos(x-y)$ в точке $(2,2)$; b) $x^5 - x^3 + y^2 + z^2 = 0$ в точке $(2,2,2)$.

Если функция имеет непрерывные частные производные в точке $(a,b)$, то касательная плоскость в достаточно малой окрестности данной точки довольно неплохо приближает (или аппроксимирует) поверхность, заданную этой функцией. Пользуясь этим, можно находить примерное значение функции в точке $(x,y)$, близкой к $(a,b)$ (разумеется с некоторой погрешностью):

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(x-a).$$

**Задание 4.8.** a) Используя линейную аппроксимацию, найдите примерное значение функции $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ в точке $(1.1,\ 0.95)$.

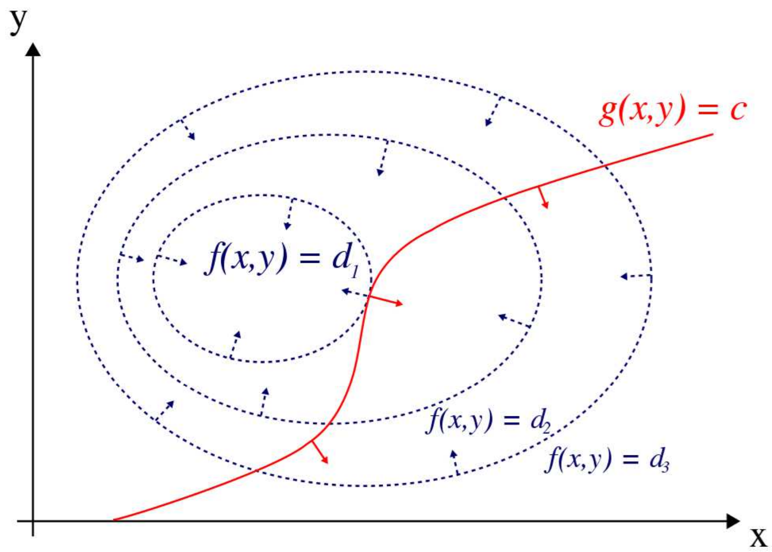
b) Найдите примерное значение $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

## 4.5 Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.

Пусть функция $f(x,y) = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ определена в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. Пусть, кроме того, на $x$ и $y$ наложено $m$ дополнительных условий (уравнений связи):

$$\begin{cases} g_1(x,y) = 0 \\ ... \\ g_m(x,y) = 0. \end{cases}$$

Говорят, что $f$ имеет в точке $(x_0, y_0)$ условный максимум (или условный минимум), если неравенство $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (или, соответственно $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$) выполняется в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0)$ при условии, что $(x_0,y_0)$ удовлетворяет уравнениям связи.




**План нахождения условного экстремума:**

1) Ввести функцию Лагранжа

$$L(x, y) = \lambda_0 f(x, y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x, y)$$

(числа $\lambda_i$ называются множителями Лагранжа. а саму функцию – Лагранжианом).

2) Найти все частные производные функции $L(x, y)$ (по переменным $x_i$, $y_i$, $\lambda_i$), приравнять их к нулю. Из полученных уравнений составить систему

$$\nabla \lambda_0 f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x, y)$$

и найти ее решение (критическую точку $(x_i^*, y_i^*, \lambda_i^*)$ – или точку «подозрительную» на условный экстремум).

3) Полученное решение может быть условным экстремумом функции (это необходимое, но недостаточное условие).

* Для определения типа критической точки (максимум, минимум или перегиб) Имеется и достаточное условие экстремума, но оно формулируются в матричных терминах (в терминах «окаймленного Гессиана»).

** Обобщение метода множителей Лагранжа на случай, когда некоторые ограничения могут быть неравенствами $g_i(x, y) \leq 0$ называется теоремой Куна-Таккера.

**Задание 4.9.** Найдите условный максимум или минимум функции $f(x, y) = x - 2y$ при ограничении $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 = 2$.

**Задание 4.10.** Найдите максимум функции $f(x, y) = y$ при ограничении $g(x, y) : x^2 + y^3 = 0$.

**Задание 4.11.** а) При каких значениях высоты $h$ и радиуса круга в основании $r$ цилиндр фиксированного объема имеет минимальную площадь поверхности? (Объем цилиндра $V(r, h) = h\pi r^2 = 1$, площадь поверхности цилиндра $S(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$.)

## 4.6 Ряд Тейлора.

Как и в случае функции от одной переменной, некоторые функции от двух переменных можно представить в виде сумме многочлена Тейлора и остаточного члена, то есть аппроксимировать функции, обладающие непрерывными частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно, многочленом степени $n$ (формула для многочлена степени 2):

$$f(x,y) = f(a,b) + (f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)) + \\ + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right) + ... + R_n, \quad (1)$$

где $R_n(x,y) = \dfrac{\mathrm{T}^{(n+1)} f(\xi,\zeta)}{(n+1)!}$, $\xi \in [a,x]$, $\zeta \in [b,y]$ и $\mathrm{T} = (x-a)\dfrac{\partial}{\partial x} + (y-b)\dfrac{\partial}{\partial y}$.

(в общем виде: $f(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\mathrm{T}^k f(x_0,y_0)}{k!} + R_n(x,y)$, где $R_n(x,y)$ – остаточный член в форме Лагранжа).

**Задание 4.12.** Найдите многочлен $P(x,y)$ степени 2, такой, что $P(2,1) = 1$, $P_x(2,1) = -1$, $P_y(2,1) = 2$, $P(2,1)_{xx} = 4$, $P_{yy}(2,1) = -2$, $P_{xy}(2,1) = 3$.

## 4.7 Объемы и интегралы.

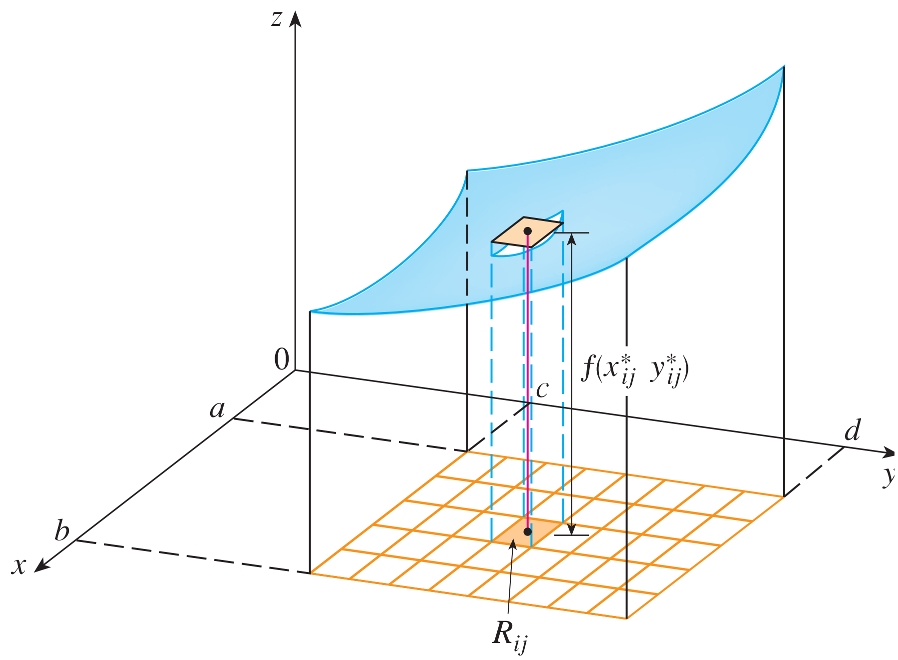
Пусть, для начала, $R_{x,y}$ – это прямоугольник на плоскости $x-y$ : $a < x < b$ и $c < y < d$.

Для функции от двух переменных двойной определенный интеграл (обозначается $\int\int_R x,yf(x,y)\,dA$) имеет следующий геометрический смысл: он равен объему, заключенному между графиком функции и плоскостью $x-y$ над прямоугольной областью $R_{x,y}$. Согласно теореме Фубини этот двойной интеграл может быть сведен к повторному:

$$\int\int_{R_{x,y}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

Если область $R$ над которой мы ищем объем – непрямоугольная, то можно попробовать сделать замену координат (то есть перейти в новые координаты $u(x,y)$ и $v(x,y)$, в которых область $R_{u,v}$ уже прямоугольная)б предварительно вычислив функцию $J(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$ (это определитель матрицы Якоби). Тогда

$$\int\int_{Rx,y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{Ru,v} f(x(u,v),y(u,v))\,J(u,v)du\,dv.$$




**Задание 4.13.** Вычислите двойной интеграл

a) $\int\int_R e^{x+3y}\ dxdy$, где область $R = [0,1] \times [0,3]$;

b) $\int\int_R (x+y)\ dxdy$, где область $R$ ограничена кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

**Задание 4.14*.** Используя теорему Фубини, найдите гауссов интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx$.

**Задание 4.15*.** Вычислите площадь кругового кольца $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$, используя двойной интеграл (не иначе!).

**Задание 4.16*.** Вычислите объем шара радиуса 1 при помощи тройного интеграла.

### 4.8 Простая версия метода градиентного спуска.

*картинки позаимствованы с сайта http://www.machinelearning.ru

Напоминание:

**Определение 4.** *Градиентом функции $f(x, y)$, $\nabla f$, называется вектор из частных производных этой функции:*

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Предположим, мы хотим выяснить, в каком направлении нужно двигаться, чтобы скорость роста функции была максимальной (или, наоборот, минимальной). По-простому: если мы идем по поверхности, то интересно понять, в какую сторону идти, чтобы быстрее всего подняться на вершину, то есть где подъем самый крутой.

**Теорема 4.** *Пусть $f(x, y)$ дифференцируемая функция от двух (или более) переменных. Тогда максимальное значение производной по направлению $D_u f(x, y)$ равно $|\nabla f(x, y)|$ и достигается, когда вектор $u$ имеет то же направление, что и вектор-градиент $\nabla f$.*

Предположим, мы столкнулись с такой проблемой: требуется найти минимум некоторой функции, но функция не выписывается аналитически, или уравнение $\nabla f = 0$ (необходимое условие экстремума в точке) слишком сложное для решения. Тогда можно использовать приближенные методы нахождения экстремумов (или численные методы).

1. **Метод градиентного спуска** – это метод нахождения локального экстремума (минимума или максимума) функции с помощью движения вдоль градиента (или в противоположную сторону от градиента). Известно, что направление вектора градиента совпадает с направлением наибольшего возрастания функции $f$ в данной точке. Противоположное направление (направление антиградиента) – это направление наиболее крутого убывания. Последним фактом мы и будем пользоваться для нахождения минимума (примерного) функции в самой простой **модели градиентного спуска (с постоянным шагом)**.

2. Пусть функция $f(x, y)$ допускает разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_k, y_k)$:

$$f(x, y) = f(x_k, y_k) + (f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)) + o(||(x - x_k, y - y_k)||), \qquad (2)$$

   Если $\langle \ , \ \rangle$ – стандартное школьное скалярное произведение (сумма попарных произведений координат двух векторов), то линейное приближение функции в окрестности точки $(x_k, y_k)$ можно переписать так:

$$f(x, y) - f(x_k, y_k) \approx \langle \nabla f(x_k, y_k), (x - x_k, y - y_k) \rangle \, .$$

3. Скалярное произведение минимально, когда векторы разнонаправлены. Следовательно, если

$$(x - x_k, y - y_k) = -a \nabla f(x_k, y_k),$$

   где $a > 0$ – маленькое положительно число, то

$$f(x, y) - f(x_k, y_k) \approx \langle \nabla f(x_k, y_k), (x - x_k, y - y_k) \rangle = \langle \nabla f(x_k, y_k), -a \nabla f(x_k, y_k) \rangle = -a||\nabla f(x_k, y_k)||^2 < 0$$

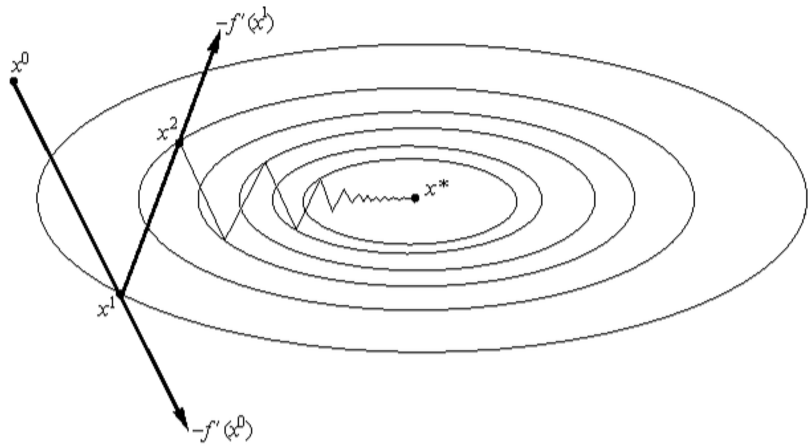
   Значит, положив следующей точку

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - a||\nabla f(x_k, y_k)||^2,$$

   мы уменьшим значение функции, $f(x_{k+1}, y_{k+1}) < f(x_k, y_k)$. Таким образом, можно построить последовательность точек $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2}), ...$, на которой значения нашей функции будут убывать.

4. Число $a$ называется **длиной шага**, который мы делаем в направлении антиградиента. Мы рассмотрим метод, в котором шаг не меняется. Положим $a = 0,1$.

   **Остановка алгоритма.** Условием окончания поиска минимума может являться малость градиента $f(x, y)$, например, если на каком-нибудь $n$-ом шаге $||\nabla f(x_n, y_n)|| < \delta$ (как только такая точка $(x_n, y_n)$ найдена, мы можем остановиться и считать, что нашли примерный минимум функции). $\delta$ – это **погрешность вычисления.** Проблема метода: при малых $\delta$, например при $\delta = 0.1$ метод может «расходиться» (иными словами, последовательность точек, которые мы получаем не будет сходится к точке минимума).



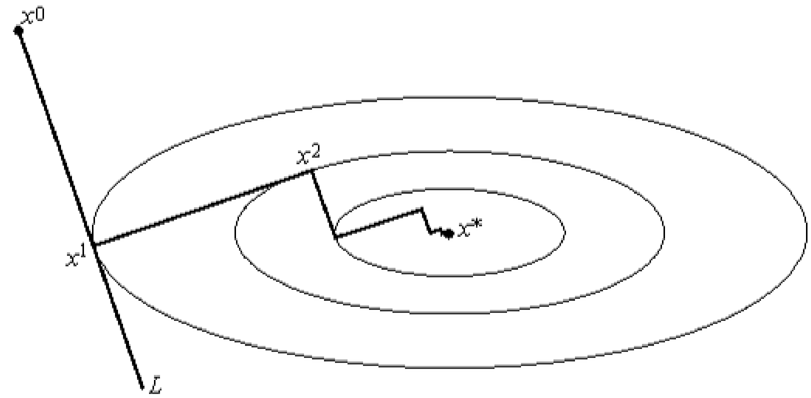

**Пример-задача 4.17.** Найдите минимум функции $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + e^{x+y}$ методом градиентного спуска с постоянным шагом, если погрешность вычисления $\delta = 0.1$, коэффициент шага $a = 0,1$, выбрав начальное приближение (начальную точку) $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

В таблице ниже приведены типовые расчеты:

| | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ | $\frac{\partial f}{dx}$ | $\frac{\partial f}{dy}$ | $\lvert\nabla f(x,y)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,4142 |
| 2 | -0,1000 | -0,1000 | 0,8487 | 0,6187 | 0,4187 | 0,7471 |
| 3 | -0,1619 | -0,1419 | 0,8045 | 0,4143 | 0,1706 | 0,4480 |
| 4 | -0,2033 | -0,1589 | 0,7880 | 0,2895 | 0,0604 | 0,2957 |
| 5 | -0,2323 | -0,1650 | 0,7806 | 0,2077 | 0,0123 | 0,2080 |
| 6 | -0,2530 | -0,1662 | 0,7768 | 0,1515 | -0,0072 | 0,1517 |
| 7 | -0,2682 | -0,1655 | 0,7748 | 0,1118 | -0,0138 | 0,1126 |
| 8 | -0,2794 | -0,1641 | 0,7737 | 0,0831 | -0,0146 | 0,0844 |
| 9 | -0,2877 | -0,1626 | 0,7731 | 0,0621 | -0,0131 | 0,0635 |
| 10 | -0,2939 | -0,1613 | 0,7727 | 0,0466 | -0,0110 | 0,0479 |

Сделайте выводы и примерном минимуме функции и величине этого минимума.

Вариация метода: метод наискорейшего спуска. В этом методе градиентного спуска величину шага $a_k$ мы уже не будем считать постоянной, а будем выбираетm так, чтобы следующая итерация была точкой минимума функции $f$ на луче $L$. (см. картинку ниже)




Геометрически это означает, что в этом методе направления соседних шагов ортогональны.

Этот вариант градиентного метода основывается на выборе шага из следующего соображения. Из точки $X_k = (x_k, y_k)$ будем двигаться в направлении антиградиента до тех пор пока не достигнем минимума функции $f$ на этом направлении, т. е. на луче

$$L = \left\{ X = X_k - af'(X_k); \quad a \leq 0 \right\},$$

направленном по антиградиенту, введем функцию одной скалярной переменной $a$:

$$F_k(a) = f(X_k - af'(X_k)).$$

Определим $a$ решая задачу $F_k(a) \to min$, $a \geq 0$. Полученный минимум и будет шагом $a_k$, используя который мы придем к новой точке на функции (а затем найдем новый шаг и новую точку и .т д).

! Метод наискорейшего спуска требует на каждом шаге решения задачи одномерной оптимизации (нахождение $a_k$). Однако на практике этот метод часто требует меньшего числа операций, чем градиентный метод с постоянным шагом.

## Домашнее задание 4.

**Задача 1.** Найдите локальные максимумы, минимумы и седловые точки (если есть) функции

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2.$$

**Задача 2.** a) Найдите касательную плоскость к поверхности $ye^{xy}$;
b) Используя линейную аппроксимацию, найдите примерно значение данной функции в точке $(-0.1, 1.1)$.

**Задача 3.** Найдите ряд Тейлора до второго порядка включительно для функции

$$f(x, y) = \sin(x + y) - \cos(x^2)$$

с центром в точке $(0, 0)$.

**Задача 4.** Найдите двойной интеграл по области $R$, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $x = 1$: $\int\int_R xy^2 \; dxdy$.

**Задача 5.** (из прошлого листка) a) Изобразите эскиз кривой, заданной вектор-функцией $r(t) = (t, \cos 2t, \sin 2t)$;
b) Найдите и нарисуйте касательные векторы в точках $(\pi, 1, 0)$ и $(\pi/2, -1, 0)$.

**Задача 6*.** (из прошлого листка) Сходится ли ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n!} + ...?$$

**Задача 7*.** (из прошлого листка) Вычислите $e^{1/4}$ с точностью до тысячных.