Zusammenfassung: Logik für die Informatik

Rico Klimpel

January 29, 2020

Contents

Informationen

Zusammenfassung der Vorlesung Logik für die Informatik an der CAU Kiel aus dem Wintersemester 2019/2020, gehalten von Prof. Dr. Thomas Wilke. Ein Versuch die wichtigsten Aussagen ohne enorm lange Formalitäten drum herum knapp zu Papier zu bringen. Kein Anspruch auf Vollständigkeit. Geschrieben in LaTeX.

Part I
Aussagenlogik

Part II
Prädikatenlogik

1 Syntax & Semantik

1.1 Signatur

Eine Signatur $\mathcal{S}$ besteht aus eine Menge S von Symbolen und einer Funktion $\Sigma\colon S \to \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \times \{1\}$.
The Elemente von S werden Symbole genannt und wie folgt eingeteilt:

- Ein Symbol f mit $\Sigma(f) = \langle n, 1\rangle$ für $n > 0$ ist eine Funktionssymbol.
  Menge dieser Symbole: $\mathcal{F}_\Sigma$ oder einfach $\mathcal{F}$.
- Ein Symbol R mit $\Sigma(R) = n$ für $n > 0$ ist ein Relationssymbol.
  Menge dieser Symbole: $\mathcal{R}_\Sigma$ oder $\mathcal{R}$.
- Ein Symbol c mit $\Sigma(c) = \langle 0, 1\rangle$ ist ein Symbol für eine Konstante.
  Menge dieser Symbole: $\mathcal{C}_\Sigma$ oder $\mathcal{C}$.
- Symbol b mit $\Sigma(b) = 0$ ist ein Symbol für einen boolschen Wert.
  Menge dieser Symbole: $\mathcal{B}_\Sigma$ or simply $\mathcal{B}$.

Im allgemeinen werden Signaturen mit $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ignoriert (Signaturen ohne boolsche Werte). Keine Ahnung warum er das sagt.

Beispiele:

$$S = \{\text{zero}, \text{one}, \text{add}, \text{mult}\}$$
$$\Sigma = \{\text{zero} \mapsto \langle 0,1\rangle, \text{one} \mapsto \langle 0,1\rangle, \text{add} \mapsto \langle 2,1\rangle, \text{mult} \mapsto \langle 2,1\rangle\}$$

Vereinfacht aufgeschrieben sieht das ganze so aus:

$$\mathcal{S} = \{\text{zero}, \text{one}, \text{add}//2, \text{mult}//2\}$$

1.2 Struktur

Sei $\mathcal{S}$ eine Signatur. Eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus:

- Univserum A mit $A \neq \emptyset$
- Für jedes Symbol eine Konstanten $c \in \mathcal{S}$ eine Interpretation $c^{\mathcal{A}} \in A$ von c.
- Für jedes Funktionssymbol $f//n \in \mathcal{S}$ eine Interpretation $f^{\mathcal{A}}\colon A^n \to A$
- Für jedes Relationssymbol $R/n \in \mathcal{S}$ eine Interpretation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$

Hier ein Beispiel das ungefähr zu der Signatur oben passt:

$$\begin{aligned}
A &= \{0,1,2,3\} \\
\text{zero}^{\mathcal{A}} &= 3 \\
\text{one}^{\mathcal{A}} &= 2 \\
\text{add}^{\mathcal{A}}(a,b) &= 0 && \text{for } a,b \in A \\
\text{mult}^{\mathcal{A}}(a,b) &= a + b \text{ rest } 4 && \text{for } a,b \in A \\
\text{Lt}^{\mathcal{N}} &= \{\langle a,a\rangle \colon a \in A\}
\end{aligned}$$

1.3 Terme

`https://lili.informatik.uni-kiel.de/llocs/Syntax_of_first-order_logic#`
Induktive Defintion für alle Terme über eine Signatur $\mathcal{S}$, die auch $\mathcal{S}$-terms genannt wird: Basiselemente:

- Ein Baum mit nur einem Element das eine Variable der Prädikatenlogik enthält ist ein $\mathcal{S}$-term.
- Ein Baum mit nur einem Element das eine Konstante $c \in \mathcal{S}$ enthält ist ein $\mathcal{S}$-term.

1.4 Formeln

1.5 Interpretation von Termen

1.6 Interpretation von Formlen

1.7 Freie Variablen

1.8 Koinzidenzlemma

---

2 Modelierung

2.1 Relationen in Strukturen defnieren?

2.2 Erfüllbarkeit einer Formel

---

3 Äquivalenz

3.1 Äquivalenz von Formeln

3.2 Regeln der Prädikatenlogik

3.3 Quantorenregeln

3.4 Umbenennen von gebundenen Variablen

3.5 Scope von Quantoren

3.6 Normalformen

3.6.1 Boolsche Normalform

3.6.2 Plenex Normalform

3.6.3 Konjunktive Normalform

---

4 Folgerungsbeziehungen (Entailment)

4.1 Folgerungsbeziehung

4.2 Beziehung zwischen Erfüllbarkeit und Folgerungsbeziehung

---

5 Beweissysteme

5.1 Natürliches Beweissystem

5.1.1 Beweisregeln

5.1.2 Korrektheit & Vollständigkeit

5.2 Resolutionsbeweise

5.2.1 Korrektheit & Vollständigkeit

5.2.2 Verbindung zwischen Resolution und Logik-Programmierung

---

6 Kompaktheit
