# Analiza Fouriera w Przetwarzaniu Sygnałów

## praca zaliczeniowa

Rafał Kluszczyński

Luty 2005

# Zadania


**1 Aliasing** **5**

1.1 Częstotliwość próbkowania $\nu \leq \frac{1}{2W}$ . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.2 Częstotliwość próbkowania $\nu \in (\frac{1}{2W}, \frac{1}{W}]$ . . . . . . . . . . . . . . 9

1.3 Częstotliwość próbkowania $\nu > \frac{1}{W}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.3.1 Przypadek gdy $\hat{f}(2(n+1)B) = 0$ . . . . . . . . . . . . 13

1.3.2 Przypadek gdy $\hat{f}(2(n+1)B) > 0$ . . . . . . . . . . . . 14

**2 Standardowe Filtry** **17**

2.1 Filtr RC . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.2 Obwód RLC . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

2.2.1 Przypadek gdy $\Delta < 0$ (czyli $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) . . . . . . . . . . 22

2.2.2 Przypadek gdy $\Delta = 0$ (czyli $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) . . . . . . . . . . 26

2.2.3 Przypadek gdy $\Delta > 0$ (czyli $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) . . . . . . . . . . 27

2.3 Filtr drugiego rzędu $-\frac{1}{\omega^2}g'' + g = f$ . . . . . . . . . . . . . . . . 30

2.4 Obwód całkujący i różniczkujący . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.4.1 Układ całkujący $g' = f$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.4.2 Układ różniczkujący $g = f'$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

**3 Układ elektryczny** **35**

3.1 Równanie filtru . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

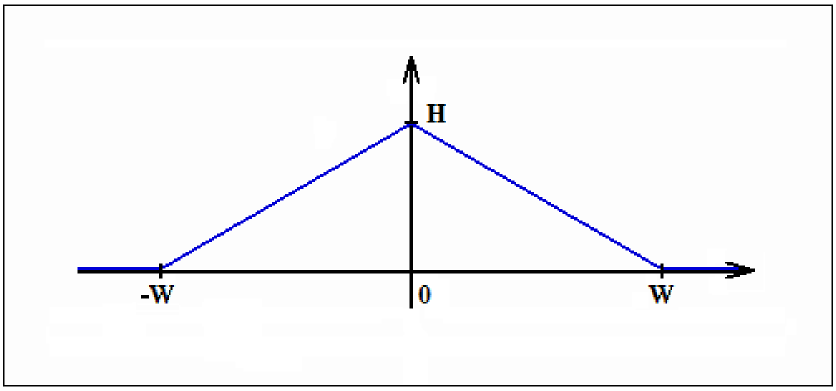
3.2 Transmitancja i krok odpowiedzi . . . . . . . . . . . . . . . . 38

3.3 Przypadek, gdy $r \ll R$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

# Zadanie 1

# Aliasing

**Znaleźć reprezentację sygnału powstałego poprzez próbkowanie sygnału po widmie trójkątnym przedstawionym na rysunku (1.1),**




Rysunek 1.1 Widmo sygnału

**z częstotliwością próbkowania $\frac{1}{2B}$, gdzie $B < W$.**

## 1.1 Częstotliwość próbkowania $\nu \leq \frac{1}{2W}$

Na początek zajmiemy się znalezieniem reprezentacji sygnału uzyskanej w wyniku próbkowania z częstotliwością $\nu = \frac{1}{2B} \leq \frac{1}{2W}$. W tym przypadku zachodzi nierówność $B \geq W$, natomiast widmo sygnału przedstawione na rysunku (1.1) opisane jest wzorem:

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} \frac{H}{W}\lambda + H & \text{dla } -W \leq \lambda \leq 0, \\ -\frac{H}{W}\lambda + H & \text{dla } 0 < \lambda \leq W, \\ 0 & \text{dla } |\lambda| > W. \end{cases} \tag{1.1}$$

Skoro $B \geq W$, to widzimy, że widma sygnału nie będą się na siebie nakładać, czyli otrzymany sygnał nie będzie zniekształcony, a jego reprezentację otrzymamy następująco:

$$(\check{\hat{f}})(x) = \int_{\mathcal{R}^1} (\hat{f}(\lambda)\mathbf{1}_{[-B,B]}(\lambda))e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \int_{-B}^{B} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$

$$= \int_{-W}^{W} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \int_{-W}^{0} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{0}^{W} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$

$$= \int_{-W}^{0} (\frac{H}{W}\lambda + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{0}^{W} (-\frac{H}{W}\lambda + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$

$$= \frac{H}{W}\int_{-W}^{0} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda - \frac{H}{W}\int_{0}^{W} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + H\int_{-W}^{W} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = (*)$$

Obliczymy teraz całkę nieoznaczoną wykorzystując metodę całkowania przez części,

- dla $x \neq 0$:

$$\int \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} - \frac{1}{2i\pi x}\int e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} - \frac{1}{(2i\pi x)^2}e^{2i\pi\lambda x}$$

$$= \frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} + \frac{1}{4\pi^2 x^2}e^{2i\pi\lambda x}$$

- dla $x = 0$:

$$\int \lambda e^{2i\pi\lambda x} d\lambda = \int \lambda e^{2i\pi\lambda 0} d\lambda = \int \lambda e^{0} d\lambda = \int \lambda d\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2$$

Podstawiając wynik całki do przerwanych wcześniej obliczeń szukanego sygnału otrzymujemy:

- dla $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{H}{W}[\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} + \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi\lambda x}]^{0}_{\lambda=-W} - \frac{H}{W}[\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi\lambda x}]^{W}_{\lambda=0} + H[\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]^{W}_{\lambda=-W} \\
&= \frac{H}{W}(0 + \frac{1}{4\pi^2x^2} + \frac{W}{2i\pi x}e^{-2i\pi Wx} - \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{-2i\pi Wx}) - \frac{H}{W}(\frac{W}{2i\pi x}e^{2i\pi Wx} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi Wx} - 0 - \frac{1}{4\pi^2x^2}) + \frac{H}{2i\pi x}(e^{2i\pi Wx} - e^{-2i\pi Wx}) \\
&= \frac{H}{W}(\frac{W}{2i\pi x}e^{-2i\pi Wx} - \frac{W}{2i\pi x}e^{2i\pi Wx} - \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{-2i\pi Wx} - \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi Wx} \\
&\quad + \frac{2}{4\pi^2x^2}) + \frac{H}{2i\pi x}(e^{2i\pi Wx} - e^{-2i\pi Wx}) \\
&= -\frac{H}{2i\pi x}(e^{2i\pi Wx} - e^{-2i\pi Wx}) + \frac{H}{W}\frac{1}{4\pi^2x^2}(2 - e^{2i\pi Wx} - e^{-2i\pi Wx}) \\
&\quad + \frac{H}{2i\pi x}(e^{2i\pi Wx} - e^{-2i\pi Wx}) \\
&= \frac{H}{W}\frac{1}{2\pi^2x^2}(1 - \frac{e^{2i\pi Wx} + e^{-2i\pi Wx}}{2}) = \frac{H}{2W\pi^2x^2}(1 - \cos(2\pi Wx)) \\
&= \frac{H}{2W\pi^2x^2}2\sin^2(\pi Wx) = HW\frac{\sin^2(\pi Wx)}{(\pi Wx)^2} = HW sinc^2(Wx)
\end{aligned}$$

- dla $x = 0$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{H}{W}\int_{-W}^{0} \lambda e^{2i\pi\lambda 0} d\lambda - \frac{H}{W}\int_{0}^{W} \lambda e^{2i\pi\lambda 0} d\lambda + H\int_{-W}^{W} e^{2i\pi\lambda 0} d\lambda \\
&= \frac{H}{W}[\frac{1}{2}\lambda^2]^{0}_{\lambda=-W} - \frac{H}{W}[\frac{1}{2}\lambda^2]^{W}_{\lambda=0} + H[\lambda]^{W}_{-W} \\
&= \frac{H}{W}(0 - \frac{1}{2}W^2) - \frac{H}{W}(\frac{1}{2}W^2 - 0) + 2HW \\
&= -\frac{1}{2}HW - \frac{1}{2}HW + 2HW = HW
\end{aligned}$$

Reasumując, w wyniku prawidłowego, według twierdzenia *Shannona-Nyquista*, próbkowania widma sygnału przedstawionego na rysunku (1.1), otrzymaliśmy następującą postać sygnału $f$:

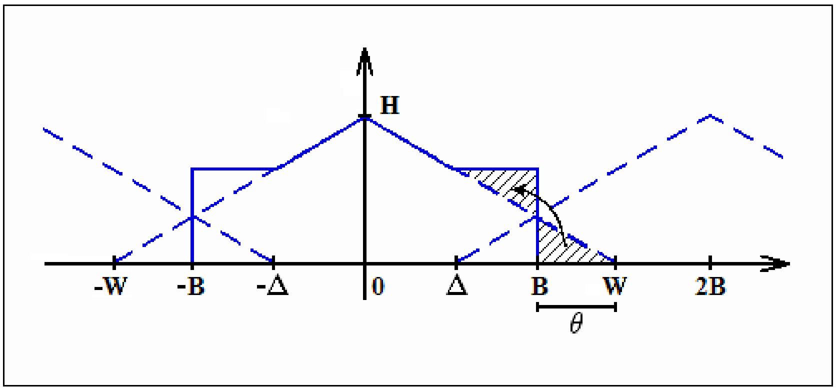
$$f(x) = \begin{cases} HW sinc^2(xW) & \text{dla } x \neq 0, \\ HW & \text{dla } x = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

## 1.2 Częstotliwość próbkowania $\nu \in (\frac{1}{2W}, \frac{1}{W}]$

Rozważymy teraz co się stanie, gdy weźmiemy nieprawidłową częstotliwość próbkowania $\nu$. Załóżmy narazie, że $\nu \in (\frac{1}{2W}, \frac{1}{W}]$. Wiemy wówczas, iż

$$\frac{W}{2} \leq B < W.$$

Zatem może dojść do nałożenia sie widma w sposób przedstawiony na rysunku (1.2).




Rysunek 1.2 Nakładanie się widm.

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$\theta = W - B,$$

$$\Delta = B - \theta = 2B - W,$$

których interpretację przedstawia rysunek (1.2), okrślamy funkcję opisującą zakłócone widmo:

$$g(\lambda) = \begin{cases} \hat{f}(\lambda) & \text{dla } |\lambda| \leq \Delta, \\ \hat{f}(\Delta) & \text{dla } \Delta < |\lambda| \leq B, \\ 0 & \text{dla } |\lambda| > B. \end{cases}$$

Następnie określamy reprezentację zakłóconego sygnału następująco:

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\mathcal{R}^1} g(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \int_{-B}^{B} g(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \int_{-B}^{-\Delta} \hat{f}(\Delta)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$+\int_{-\Delta}^{0} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{0}^{\Delta} \hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{\Delta}^{B} \hat{f}(\Delta)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$= \int_{-B}^{-\Delta} (-\frac{H}{W}\Delta + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{-\Delta}^{0} (\frac{H}{W}\lambda + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$+\int_{0}^{\Delta} (-\frac{H}{W}\lambda + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{\Delta}^{B} (-\frac{H}{W}\Delta + H)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$= (-\frac{H}{W}\Delta + H) \int_{-B}^{-\Delta} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \frac{H}{W}\int_{-\Delta}^{0} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + H\int_{-\Delta}^{0} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$-\frac{H}{W}\int_{0}^{\Delta} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + H\int_{0}^{\Delta} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + (-\frac{H}{W}\Delta + H)\int_{\Delta}^{B} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda =$$
$$= \frac{H}{W}\int_{-\Delta}^{0} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda - \frac{H}{W}\int_{0}^{\Delta} \lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + H\int_{-\Delta}^{\Delta} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$
$$+H(1-\frac{\Delta}{W})(\int_{-B}^{-\Delta} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + \int_{\Delta}^{B} e^{2i\pi\lambda x}d\lambda) = (*)$$

- $x \neq 0$

$$(*) = \frac{H}{W}[\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} + \frac{1}{4\pi^2 x^2}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-\Delta}^{0} - \frac{H}{W}[\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x}$$
$$+\frac{1}{4\pi^2 x^2}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=0}^{\Delta} + H[\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-\Delta}^{\Delta}$$
$$+H(1-\frac{\Delta}{W})([\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-B}^{-\Delta} + [\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=\Delta}^{B})$$

$$= \frac{H}{W}(\frac{1}{4\pi^2 x^2} + \frac{\Delta}{2i\pi x}e^{-2i\pi x\Delta} - \frac{1}{4\pi^2 x^2}e^{-2i\pi x\Delta}) - \frac{H}{W}(\frac{\Delta}{2i\pi x}e^{2i\pi x\Delta}$$

$$+\frac{1}{4\pi^2 x^2}e^{2i\pi x\Delta} - \frac{1}{4\pi^2 x^2}) + \frac{H}{\pi x}\frac{(e^{2i\pi x\Delta} - e^{-2i\pi x\Delta})}{2i}$$

$$+\frac{H(1-\frac{\Delta}{W})}{2i\pi x}(e^{-2i\pi x\Delta} - e^{-2i\pi xB} + e^{2i\pi xB} - e^{2i\pi x\Delta})$$

$$= \frac{H}{W}(\frac{1}{2\pi^2 x^2} - \frac{\Delta}{\pi x}\frac{(e^{2i\pi x\Delta} - e^{-2i\pi x\Delta})}{2i} - \frac{1}{2\pi^2 x^2}\frac{(e^{2i\pi x\Delta} + e^{-2i\pi x\Delta})}{2})$$

$$+\frac{H}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta) + \frac{H(1-\frac{\Delta}{W})}{\pi x}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))$$

$$= \frac{H}{W}(\frac{1}{2\pi^2 x^2} - \frac{\Delta}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta) - \frac{1}{2\pi^2 x^2}\cos(2\pi x\Delta) + \frac{W}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta))$$

$$+\frac{H(1-\frac{\Delta}{W})}{\pi x}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))$$

$$= \frac{H}{2\pi^2 x^2 W}(1-\cos(2\pi x\Delta)) + \frac{H}{W}\frac{W-\Delta}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta)$$

$$+\frac{H(W-\Delta)}{\pi x W}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))$$

$$= \frac{H}{2\pi^2 x^2 W}2\sin^2(\pi x\Delta) + \frac{H}{W}\frac{2\theta}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta)$$

$$+\frac{2H\theta}{\pi x W}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))$$

$$= \frac{H\Delta^2}{W}\ \frac{\sin^2(\pi x\Delta)}{(\pi x\Delta)^2} + \frac{2H}{\pi x W}\theta(\sin(2\pi x\Delta) + \sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))$$

$$= \frac{H\Delta^2}{W}sinc^2(x\Delta) + \frac{2H}{\pi x W}\theta\sin(2\pi xB)$$

- $x = 0$

$$(*) = \frac{H}{W}\int_{-\Delta}^{0}\lambda e^0 d\lambda - \frac{H}{W}\int_0^{\Delta}\lambda e^0 d\lambda + H\int_{-\Delta}^{\Delta}e^0 d\lambda$$

$$+\frac{H}{W}(W-\Delta)(\int_{-B}^{-\Delta}e^0 d\lambda + \int_{\Delta}^{B}e^0 d\lambda)$$

$$= \frac{H}{W}\int_{-\Delta}^{0}\lambda d\lambda - \frac{H}{W}\int_0^{\Delta}\lambda d\lambda + H\int_{-\Delta}^{\Delta}d\lambda + 2\frac{H}{W}\theta(\int_{-B}^{-\Delta}d\lambda + \int_{\Delta}^{B}d\lambda)$$

$$= \frac{H}{2W}[\lambda^2]_{\lambda=-\Delta}^{0} - \frac{H}{2W}[\lambda^2]_{\lambda=0}^{\Delta} + H[\lambda]_{\lambda=-\Delta}^{\Delta} + 2\frac{H}{W}\theta([\lambda]_{\lambda=-B}^{-\Delta} + [\lambda]_{\lambda=\Delta}^{B})$$
$$= -\frac{H}{2W}\Delta^2 - \frac{H}{2W}\Delta^2 + 2H\Delta + 2\frac{H}{W}\theta(-\Delta + B + B - \Delta)$$
$$= -\frac{H}{W}\Delta^2 + 2H\Delta + 4\frac{H}{W}\theta(B-\Delta) = 2H\Delta - \frac{H}{W}\Delta^2 + 4\frac{H}{W}\theta^2$$
$$= \frac{H}{W}\Delta(2W-\Delta) + 4\frac{H}{W}\theta^2$$

Podsumowując, reprezentacja sygnału powstała w wyniku próbkowania z częstotliwością $\nu \in (\frac{1}{2W}, \frac{1}{W}]$ wygląda:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{H\Delta^2}{W} sinc^2(x\Delta) + \frac{2H}{\pi x W}\theta \sin(2\pi x B) & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{H}{W}\Delta(2W-\Delta) + 4\frac{H}{W}\theta^2 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

gdzie $\theta = W - B$, oraz $\Delta = 2B - W$.

Widzimy, że sygnał ten różni się od przedstawionego równaniem (1.2). Zawiera on m.in. dodatkowe składniki w rozwiązaniu, które odpowiadają właśnie za zniekształcenie sygnału, czyli tzw. zjawisko *aliasingu*. Zauważamy jednak, iż wykonując przejście graniczne $B \to W$ otrzymujemy wzór (1.2), czyli zniekształcenia znikają. Wynika to z tego, iż skoro $B \to W$, to

$$\theta \to 0,$$

$$\Delta \to 2W - W = W,$$

a stąd otrzymujemy

- dla $x \neq 0$:

$$\widetilde{f}(x) \longrightarrow \frac{HW^2}{W} sinc^2(xW) + \frac{2H}{\pi x W}\ 0\ \sin(2\pi x B) = HW sinc^2(xW),$$

- dla $x = 0$:

$$\widetilde{f}(x) \longrightarrow \frac{H}{W} W(2W - W) + 4\frac{H}{W}\ 0^2 = HW.$$

A zatem ostatecznie,

$$\widetilde{f}(x) \overset{B\to W}{\longrightarrow} f(x).$$

## 1.3 Częstotliwość próbkowania $\nu > \frac{1}{W}$

W tym przypadku, skoro $\nu = \frac{1}{2B} > \frac{1}{W}$, wnioskujemy iż $B < \frac{W}{2}$. A zatem na nasz przedział $[-B, B]$ może nachodzić większa niż jak to było w poprzedniej sekcji, ilość widm sygnału. Po pierwsze, określimy liczbę tych widm, które z jednej strony pokrywają przedział $[-B, B]$ na całej jego szerokości. Będzie to

$$n = \lfloor \frac{W - B}{2B} \rfloor.$$

Znając $n$, jesteśmy w stanie wyliczyć stałą, którą należy dodać do funkcji widma $\hat{f}$ na przedziale $[-B, B]$ aby uwzględnić nakładanie się widm pokrywających ten przedział w całości,

$$S = \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(2Bk) & n > 0, \\ 0 & n = 0, \end{cases}$$

Teraz w zależności od szerokości nałożenia ostatniego, nie w pełni pokrywającego przedział $[-B, B]$, widma, rozważymy osobno dwa przypadki.

### 1.3.1 Przypadek gdy $\hat{f}(2(n+1)B) = 0$

Zaczniemy od sytuacji, gdy ostatnia, niepełna cześć nakładającego sie widma jest szerokości mniejszej niż $B$, czyli niż połowa pasma $[-B, B]$.

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\theta = W - (2n+1)B,$$

$$\Delta = B - \theta = 2B(n+1) - W,$$

mające podobną interpretację jak w poprzedniej sekcji.

Sygnał natomiast będzie obliczany następująco:

$$\widetilde{f}_1(x) = \int_{-B}^{-\Delta} (\hat{f}(-\Delta) + S) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{-\Delta}^{\Delta} (\hat{f}(\lambda) + S) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda$$

$$+ \int_{\Delta}^{B} (\hat{f}(\Delta) + S) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda = S \int_{-B}^{B} e^{2i\pi\lambda x} d\lambda$$

$$+ \int_{-B}^{-\Delta} \hat{f}(-\Delta) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{-\Delta}^{\Delta} \hat{f}(\lambda) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{\Delta}^{B} \hat{f}(\Delta) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda$$

Widzimy, że trzy ostatnie całki reprezentują sytuację jaką rozważaliśmy dla $\nu \in (\frac{1}{2W}, \frac{1}{W}]$. Skorzystamy zatem z wyników jakie tam otrzymaliśmy i zajmiemy się obliczeniem pozostałej całki z powyższej sumy, czyli

$$S\int_{-B}^{B} e^{2i\pi\lambda x} d\lambda = (*)$$

- dla $x \neq 0$:

$$(*) = S[\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-B}^{B} = \frac{S}{\pi x}\frac{(e^{2i\pi xB} - e^{-2i\pi xB})}{2i} = \frac{S}{\pi x}\sin(2\pi xB)$$

- dla $x = 0$:

$$(*) = S\int_{-B}^{B} e^0 d\lambda = S\int_{-B}^{B} d\lambda = S[\lambda]_{\lambda=-B}^{B} = S2B$$

A zatem ostateczna reprezentacja sygnału, przy warunku $\hat{f}(2(n+1)B) = 0$, przedstawia sie następująco:

$$\widetilde{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{H\Delta^2}{W} sinc^2(x\Delta) + (\frac{S}{\pi x} + \frac{2H}{\pi x W}\theta)\sin(2\pi xB) & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{H}{W}\Delta(2W - \Delta) + 4\frac{H}{W}\theta^2 + 2BS & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

### 1.3.2 Przypadek gdy $\hat{f}(2(n+1)B) > 0$

Teraz rozważymy sytuację, gdy ostatnia, niepełna cześć nakładającego sie widma jest szerokości większej niż połowa pasma $[-B, B]$.

W tym celu określamy następujące zmienne:

$$\Delta = W - 2B(n+1),$$

$$S_1 = S + 2\hat{f}(2(n+1)B),$$
$$S_2 = S + \hat{f}(0) + \hat{f}(2(n+1)B).$$

Reprezentacja szukanego sygnału w tym przypadku będzie się przedstawiać następująco:

$$\widetilde{f}_2(x) = \int_{-B}^{-\Delta} S_2 e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{-\Delta}^{\Delta} (\hat{f}(\lambda) + S_1)e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{\Delta}^{B} S_2 e^{2i\pi\lambda x} d\lambda \quad (1.4)$$

Obliczymy najpierw środkową całkę:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}(\hat{f}(\lambda)+S_1)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = \int_{-\Delta}^{\Delta}\hat{f}(\lambda)e^{2i\pi\lambda x}d\lambda + S_1\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{2i\pi\lambda x}d\lambda$$

$$= \frac{H}{W}(\int_{-\Delta}^{0}\lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda - \int_{0}^{\Delta}\lambda e^{2i\pi\lambda x}d\lambda) + (H+S_1)\int_{-\Delta}^{\Delta}e^{2i\pi\lambda x}d\lambda = (*)$$

- dla $x \neq 0$:

$$(*) = \frac{H}{W}([\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} + \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-\Delta}^{0} - [\frac{1}{2i\pi x}\lambda e^{2i\pi\lambda x} +$$

$$\frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=0}^{\Delta}) + (H+S_1)[\frac{1}{2i\pi x}e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-\Delta}^{\Delta}$$

$$= \frac{H}{W}(\frac{1}{2\pi^2x^2} + \frac{\Delta}{2i\pi x}e^{-2i\pi x\Delta} - \frac{1}{4\pi^2x^2}e^{-2i\pi x\Delta} - \frac{\Delta}{2i\pi x}e^{2i\pi x\Delta}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2x^2}e^{2i\pi x\Delta}) + \frac{H+S_1}{2i\pi x}(e^{2i\pi x\Delta} - e^{-2i\pi x\Delta})$$

$$= \frac{H}{2\pi^2x^2W}(1 - \frac{e^{2i\pi x\Delta}+e^{-2i\pi x\Delta}}{2}) - \frac{H\Delta}{\pi xW}\frac{(e^{2i\pi x\Delta}-e^{-2i\pi x\Delta})}{2i}$$

$$+\frac{(H+S_1)}{\pi x}\frac{(e^{2i\pi x\Delta}-e^{-2i\pi x\Delta})}{2i}$$

$$= \frac{H}{2\pi^2x^2W}(1-\cos(2\pi x\Delta)) - \frac{H\Delta}{\pi xW}\sin(2\pi x\Delta) + \frac{(H+S_1)}{\pi x}\sin(2\pi x\Delta)$$

$$= \frac{H}{\pi^2x^2W}\sin^2(\pi x\Delta) + \frac{W(H+S_1)-H\Delta}{\pi xW}\sin(2\pi x\Delta)$$

$$= \frac{H\Delta^2}{W}sinc^2(x\Delta) + \frac{H(W-\Delta)+S_1W}{\pi xW}\sin(2\pi x\Delta)$$

- dla $x = 0$:

$$= \frac{H}{W}(\int_{-\Delta}^{0}\lambda d\lambda - \int_{0}^{\Delta}\lambda d\lambda) + (H+S_1)\int_{-\Delta}^{\Delta}d\lambda = \frac{H}{2W}(-\Delta^2-\Delta^2)$$

$$+2\Delta(H+S_1) = 2\Delta(H+S_1) - \frac{H\Delta^2}{W}$$

Następnie rozwiązujemy dwie skrajne całki z równania (1.4):

$$S_2(\int_{-B}^{-\Delta} e^{2i\pi\lambda x} d\lambda + \int_{\Delta}^{B} e^{2i\pi\lambda x} d\lambda) = (**)$$

- dla $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}(**) &= \frac{S_2}{2i\pi x}([e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=-B}^{-\Delta} + [e^{2i\pi\lambda x}]_{\lambda=\Delta}^{B}) \\ &= \frac{S_2}{\pi x}(\frac{e^{2i\pi xB} - e^{-2i\pi xB}}{2i} - \frac{e^{2i\pi x\Delta} - e^{-2i\pi x\Delta}}{2i}) \\ &= \frac{S_2}{\pi x}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta))\end{aligned}$$

- dla $x = 0$:

$$(**) = S_2(\int_{-B}^{-\Delta} d\lambda + \int_{\Delta}^{B} d\lambda) = S_2([\lambda]_{\lambda=-B}^{-\Delta} + [\lambda]_{\lambda=\Delta}^{B}) = 2S_2(B - \Delta)$$

Sumując oba rozwiązania mamy sygnał postaci

$$\widetilde{f}_2(x) = \begin{cases} \frac{H\Delta^2}{W} sinc^2(x\Delta) + (\frac{H(W-\Delta)}{\pi x W} + \frac{S_1}{\pi x})\sin(2\pi x\Delta) \\ \qquad + \frac{S_2}{\pi x}(\sin(2\pi xB) - \sin(2\pi x\Delta)) & \text{dla } x \neq 0, \\ \\ 2\Delta(H + S_1) - \frac{H\Delta^2}{W} + 2S_2(B - \Delta) & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wiedząc, że

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= (S + 2\hat{f}(2(n+1)B)) - (S + \hat{f}(0) + \hat{f}(2(n+1)B)) \\ &= \hat{f}(2(n+1)B) - \hat{f}(0) = \hat{f}(2(n+1)B) - H, \end{aligned}$$

oraz upraszczając powyższą postać otrzymujemy ostatecznie następującą reprezentację sygnału:

$$\widetilde{f}_2(x) = \begin{cases} \frac{H\Delta^2}{W} sinc^2(x\Delta) + \frac{S_2}{\pi x}\sin(2\pi xB) \\ \qquad + (\frac{\hat{f}(2(n+1)B)}{\pi x} - \frac{H\Delta}{\pi x W})\sin(2\pi x\Delta) & \text{dla } x \neq 0, \\ \\ 2\Delta\hat{f}(2(n+1)B) - \frac{H\Delta^2}{W} + 2BS_2 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

oczywiście przy warunku, że $\hat{f}(2(n+1)B) > 0$.

# Zadanie 2

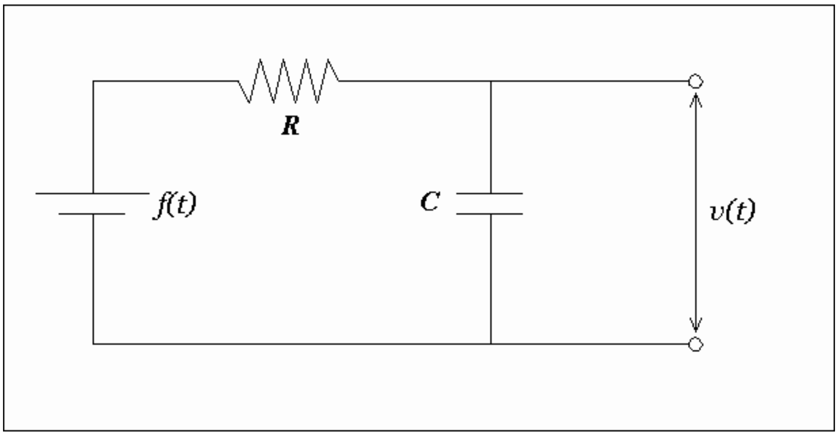
# Standardowe Filtry

**Znaleźć postać, obliczyć odpowiedź impulsową, oraz określić pozostałe parametry jak stabilność i realizowalność, dla następujących filtrów: RC, RLC, filtru opisanego równaniem $-\frac{1}{\omega^2}g'' + g = f$, oraz filtru całkującego i różnicującego.**

Zakładamy, że dla wszystkich filtrów rozważanych w tym rozdziale, sygnały wejściowe i wyjściowe znajdują się w klasie funkcji Schwarza.

## 2.1 Filtr RC

Rozważmy obwód przedstawiony na poniższym rysunku:




Rysunek 2.1 Obwód RC.

Sygnałem wejściowym jest napięcie $f(t)$, natomiast wyjściowym różnica potencjałów powstała po obu stronach okładek kondensatora. Różnica ta, dla kondensatora naładowanego ładunkiem $q$ wynosi $q/C$, zatem stosując *prawo Ohma* mamy

$$Ri(t) + v(t) = f(t).$$

Korzystając z zależności $i(t) = q'(t)$, otrzymujemy następującą postać równania:

$$RCv'(t) + v(t) = f(t) \tag{2.1}$$

Biorąc transformatę Fouriera po obu stronach równania:

$$RC\widehat{v'}(\lambda) + \widehat{v}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

oraz korzystając z własności $\widehat{g^{(k)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k \widehat{g}\,(\lambda)$ otrzymujemy:

$$RC(2i\pi\lambda)\widehat{v}(\lambda) + \widehat{v}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

$$(RC(2i\pi\lambda) + 1)\widehat{v}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

$$\widehat{v}(\lambda) = \frac{1}{RC(2i\pi\lambda)+1}\widehat{f}(\lambda)$$

Stąd wnioskujemy postać *funkcji przenoszenia*:

$$H(\lambda) = \frac{1}{RC(2i\pi\lambda)+1},$$

oraz mamy:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{RCx+1} = \frac{1}{RC}\ \frac{1}{x+\frac{1}{RC}}\ .$$

Widzimy oczywiście, że ów iloraz wielomianów jest w postaci ułamka prostego, oraz że wielomian $Q(x)$ posiada jeden pierwiastek rzeczywisty $x_1 = -\frac{1}{RC}$ taki, że $\Re(x_1) < 0$.

Korzystając z formuły (24.11) [1], przy czym $\beta_1 = \frac{1}{RC}$, możemy wyznaczyć nastepującą *odpowiedź impulsową*:

$$h(t) = \beta_1 e^{x_1 t} u(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t),$$

gdzie $u(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Znając *odpowiedź impulsową* możemy w pełni określić sygnał wyjściowy filtru $v(t)$ dla dowolnego sygnału $f(t)$ na wejściu:

$$v(t) = (h * f)(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t-s}{RC}} u(t-s) f(s) ds = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} f(s) ds.$$

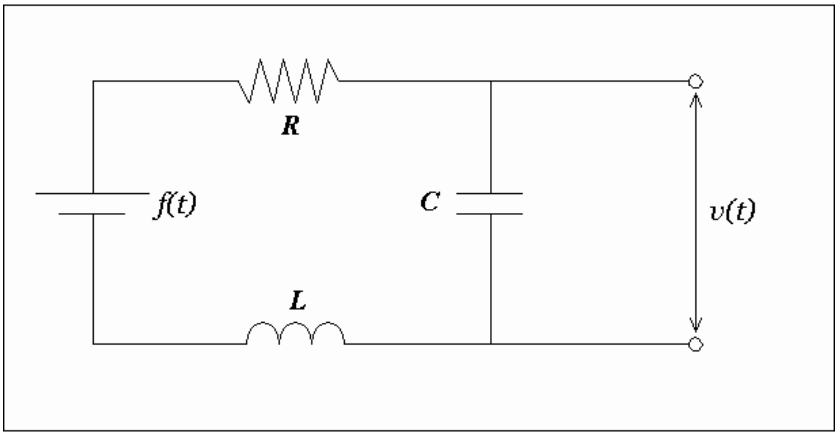
Biorąc $f = u$ uzyskamy *krok odpowiedzi*:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{RC}\ (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t-s}{RC}} u(t-s) u(s) ds)\ u(t) \\ &= \frac{1}{RC}\ (\int_{0}^{t} e^{-\frac{t-s}{RC}} ds)\ u(t) \\ &= \frac{1}{RC}([RCe^{-\frac{t-s}{RC}}]_{s=0}^{t}) u(t) \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t). \end{aligned}$$

Filtr ten na podstawie twierdzenia (24.4.2) [1] jest *stabilny*, ponieważ $degP \leq degQ$ oraz $Q(x)$ nie posiada pierwiastków na osi urojonej. Dodatkowo zauważamy że jedyny, rzeczywisty pierwiastek jest ujemny, skąd na podstawie twierdzenia (24.5.2) [1] wnioskujemy, iż filtr jest również *realizowalny*.

## 2.2 Obwód RLC

Dołóżmy teraz do naszego obwodu RC cewkę indukcyjną w sposób przedstawiony na rysunku (2.2).




Rysunek 2.2 Obwód RLC.

Wiemy, że napięcie $f(t)$ podane na wejściu musi być równe spadkowi napięć na poszczególnych elementach układu, tzn.

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = f(t)$$

gdzie $v_L$, $v_R$, $v_C$ to odpowiednio spadki napięć na cewce, oporniku i kondensatorze. Oczywiscie szukanym sygnałem jest $v(t) = v_C(t)$.

Korzystając z *prawa Ohma*, oraz z własności cewki indukcyjnej, wiemy, że

$$v_R(t) = Ri(t),$$
$$v_L(t) = Li'(t).$$

Stąd nasze równanie wygląda:

$$Li'(t) + Ri(t) + v(t) = f(t)$$

Wiedząc dodatkowo, że $i(t) = q'(t)$ oraz $v(t) = \frac{q(t)}{C}$ możemy wyznaczyć $i(t)$:

$$q(t) = Cv(t) \Rightarrow i(t) = Cv'(t).$$

Podstawiając je do równania filtru ostatecznie otrzymujemy postać:

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = f(t) \tag{2.2}$$

Obliczając transformatę Fouriera po obu stronach równania (2.2) mamy:

$$LC\widehat{v''}(t) + RC\widehat{v'}(t) + \widehat{v}(t) = \widehat{f}(t)$$

$$LC(2i\pi\lambda)^2\widehat{v}(t) + RC(2i\pi\lambda)\widehat{v}(t) + \widehat{v}(t) = \widehat{f}(t)$$

$$(LC(2i\pi\lambda)^2 + RC(2i\pi\lambda) + 1)\widehat{v}(t) = \widehat{f}(t)$$

$$\widehat{v}(t) = \frac{1}{LC(2i\pi\lambda)^2 + RC(2i\pi\lambda) + 1}\widehat{f}(t)$$

skąd wnioskujemy o postaci ilorazu $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1}.$$

Teraz w zależności od wyznacznika trójmianu kwadratowego $Q(x)$:

$$\Delta = C^2(R^2 - 4\frac{L}{C}),$$

musimy rozważyć trzy różne przypadki.

### 2.2.1 Przypadek gdy $\Delta < 0$ (czyli $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\omega = \sqrt{4\frac{L}{C} - R^2},\ \alpha = \frac{R}{2L},\ \beta = \frac{\omega}{2L}.$$

Oba pierwiastki są liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych, czyli:

$$z_1 = -\alpha + i\beta,$$

$$z_2 = -\alpha - i\beta,$$

oraz $\Re(z_1) < 0$, i $\Re(z_2) < 0$.

Rozłóżmy iloczyn $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1} = \frac{1}{LC}\,\frac{1}{(x - z_1)(x - z_2)} = \frac{1}{LC}(\frac{A}{x - z_1} + \frac{B}{(x - z_2)})$$

$$= \frac{1}{LC}\frac{A(x - z_2) + B(x - z_1)}{(x - z_1)(x - z_2)} = \frac{1}{LC}\frac{Ax - Az_2 + Bx - Bz_1}{(x - z_1)(x - z_2)}$$

$$= \frac{1}{LC} \frac{(A+B)x - (Az_2 + Bz_1)}{(x-z_1)(x-z_2)}.$$

Stąd wnioskujemy, że $A+B=0$, czyli $B=-A$, natomiast $-(Az_2+Bz_1)=1$. Dalej:

$$-(Az_2 - Az_1) = 1$$

$$-A(z_2 - z_1) = 1$$

$$A(z_1 - z_2) = 1$$

$$A(-\alpha + i\beta - (-\alpha - i\beta)) = A(2i\beta) = 1$$

$$A = \frac{1}{2i\beta} = \frac{1}{2i\frac{\omega}{2L}} = \frac{L}{i\omega}$$

skąd $B = -\frac{L}{i\omega}$.

Ostatecznie:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(x-z_1)(x-z_2)} = \frac{1}{LC}\left(\frac{L}{i\omega}\frac{1}{x-z_1} - \frac{L}{i\omega}\frac{1}{x-z_2}\right)$$

$$= \frac{1}{i\omega C}\left(\frac{1}{x-z_1} - \frac{1}{x-z_2}\right),$$

a zatem *funkcja przenoszenia* przyjmuje postać:

$$H(\lambda) = \frac{1}{i\omega C}\left(\frac{1}{2i\pi\lambda - z_1} - \frac{1}{2i\pi\lambda - z_2}\right).$$

Korzystając ze wzoru (24.11) [1] możemy określić *odpowiedź impulsową*:

$$h(t) = \frac{1}{i\omega C}(e^{z_1 t} - e^{z_2 t})u(t) = \frac{1}{i\omega C}(e^{-\alpha t}e^{i\beta t} - e^{-\alpha t}e^{-i\beta t})u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}\right)u(t) = \frac{2}{\omega C} e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\frac{\omega}{2L}t\right)u(t).$$

Zatem dla dowolnego sygnału wejściowego $f(t)$ na wyjściu filtru będziemy dysponować sygnałem postaci:

$$v(t) = (h * f)(t) = \frac{2}{\omega C}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)}\sin(\beta(t-s))u(t-s)f(s)ds,$$

a ponieważ $u(x) = 0$ dla $x < 0$, mamy:

$$v(t) = \frac{2}{\omega C} \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) f(s) ds.$$

W szczególności, obliczymy $h_1(t)$ będący sygnałem wyjściowym dla sygnału opisanego funkcją Heaviside'a $u(t)$. Zatem:

$$h_1(t) = (h * u)(t) = \frac{2}{\omega C} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) u(t-s) u(s) ds) u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} (\int_{0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) ds) u(t)$$

Obliczymy teraz całkę nieoznaczoną wykorzystując dwukrotnie metodę przez części:

$$I = \int e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) ds$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{-\alpha(t-s)} \cos(\beta(t-s)) ds$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-\alpha(t-s)} \cos(\beta(t-s))$$

$$- \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) ds$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-\alpha(t-s)} \cos(\beta(t-s)) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} I$$

Przenosząc szukaną całkę $I$ na jedną stronę równania otrzymujemy:

$$(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}) I = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-\alpha(t-s)} \cos(\beta(t-s)) \quad / \cdot \alpha^2$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) I = \alpha e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) + \beta e^{-\alpha(t-s)} \cos(\beta(t-s))$$

Dzieląc przez $(\alpha^2 + \beta^2)$ dostajemy szukany wzór:

$$\int e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) ds = \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} e^{-\alpha(t-s)} (\alpha \sin(\beta(t-s)) + \beta \cos(\beta(t-s)))$$

Podstawmy go do liczonego *kroku odpowiedzi*:

$$h_1(t) = \frac{2}{\omega C} (\int_{0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sin(\beta(t-s)) ds) u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} [e^{-\alpha(t-s)}(\alpha \sin(\beta(t-s)) + \beta \cos(\beta(t-s))]_{s=0}^{t} \; u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} (0 + \beta - e^{-\alpha t}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t))u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} (\beta - \beta e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t))u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} (1 - e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t))u(t)$$

Wyliczając:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\frac{R}{2L})^2 + (\frac{\omega}{2L})^2 = \frac{1}{4L^2}(R^2 + \omega^2) = \frac{1}{4L^2}(R^2 + 4\frac{L}{C} - R^2)$$

$$= \frac{1}{4L^2}\frac{4L}{C} = \frac{1}{LC}$$

i podstawiając do $h_1(t)$ mamy:

$$h_1(t) = \frac{2}{\omega C} \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} (1 - e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t))u(t)$$

$$= \frac{2}{\omega C} \beta LC (1 - e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t))u(t)$$

$$= \frac{2L}{\omega} \beta (1 - e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t))u(t)$$

A skoro $\alpha = \frac{R}{2L}$, oraz $\beta = \frac{\omega}{2L}$, ostatecznie otrzymujemy:

$$h_1(t) = [1 - e^{-\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t + \cos \beta t)]u(t)$$

$$= [1 - e^{-\frac{R}{2L}t}(\frac{R}{\omega} \sin \frac{\omega}{2L}t + \cos \frac{\omega}{2L}t)]u(t),$$

gdzie $\omega = \sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}$.

W tym przypadku filtr jest *stabilny* na podstawie twierdzenia (24.4.2) [1], ponieważ $degP \leq degQ$ oraz żaden z pierwiastków, $z_1$ lub $z_2$, nie leży na osi urojonej. Dodatkowo stwierdzamy, że pierwiastki te mają ujemne części rzeczywiste, zatem na mocy (24.5.2) [1] filtr ten jest *realizowalny*.

### 2.2.2 Przypadek gdy $\Delta = 0$ (czyli $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

Wówczas mamy:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LC(x + \frac{R}{2L})^2}.$$

Oznaczając $x_0 = -\frac{R}{2L}$, oraz zauważając, iż iloraz wielomianów $P$ i $Q$ jest już przedstawiony w postaci ułamka nierozkładalnego

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LC(x - x_0)^2}$$

wnioskujemy postać *funkcji przenoszenia*:

$$H(\lambda) = \frac{1}{LC}\frac{1}{(2i\pi\lambda - x_0)^2}$$

Wiedząc, że $\Re(x_0) < 0$, oraz na podstawie wzoru (24.13) [1], gdzie $m_1 = 2$, $\beta_{1,1} = 0$, oraz $\beta_{1,2} = \frac{1}{LC}$ mamy następującą *odpowiedź impulsową*:

$$h(t) = (\beta_{1,1} \cdot 1 + \beta_{1,2} \cdot t)e^{x_0 t}u(t) = \frac{1}{LC}te^{x_0 t}u(t)$$

Zatem dla dowolnego sygnału wejściowego $f(t)$, na wyjściu filtru uzyskujemy sygnał zadany wzorem:

$$v(t) = (h * f)(t) = \frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{t}(t-s)e^{x_0(t-s)}f(s)ds$$
$$= \frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{t}(t-s)e^{-\frac{R}{2L}(t-s)}f(s)ds$$

Podstawiając za sygnał wejściowy funkcję Heaviside'a otrzymamy *krok odpowiedzi*:

$$h_1(t) = (h * u)(t) = \frac{1}{LC}\int_{-\infty}^{\infty}(t-s)e^{x_0(t-s)}u(t-s)u(s)ds$$
$$= \frac{1}{LC}(\int_{0}^{t}(t-s)e^{x_0(t-s)}ds)u(t)$$

Obliczmy całkę nieoznaczoną:

$$\int(t-s)e^{x_0(t-s)}ds = t\int e^{x_0(t-s)}ds - \int se^{x_0(t-s)}$$

$$= -\frac{1}{x_0}te^{x_0(t-s)} + (\frac{s}{x_0}e^{x_0(t-s)} + \frac{1}{x_0^2}e^{x_0(t-s)}) = e^{x_0(t-s)}(\frac{s}{x_0} - \frac{t}{x_0} + \frac{1}{x_0^2})$$

Podstawiając jej wynik do szukanego *kroku odpowiedzi* mamy:

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= \frac{1}{LC}[e^{x_0(t-s)}(\frac{s}{x_0} - \frac{t}{x_0} + \frac{1}{x_0^2})]_{s=0}^{t}\ u(t) \\
&= \frac{1}{LC}[\frac{1}{x_0^2} + \frac{t}{x_0}e^{x_0 t} - \frac{1}{x_0^2}e^{x_0 t}]u(t) \\
&= \frac{1}{LC}\frac{1}{x_0^2}(1 + tx_0e^{x_0 t} - e^{x_0 t})u(t) \\
&= \frac{1}{LC}\frac{4L^2}{R^2}(1 - (1 + \frac{R}{2L}t)e^{-\frac{R}{2L}t})u(t)
\end{aligned}$$

Skoro $\Delta = 0$, więc $R^2 = 4\frac{L}{C}$, a zatem

$$\frac{1}{LC}\frac{4L^2}{R^2} = \frac{4L}{C}\frac{1}{R^2} = \frac{4L}{C}\frac{1}{4\frac{L}{C}} = 1,$$

skąd ostatecznie otrzymujemy wzór:

$$h_1(t) = [1 - (1 + \frac{R}{2L}t)e^{-\frac{R}{2L}t}]u(t).$$

Ponownie powołując się na twierdzenie (24.4.2) [1] stwierdzamy, że $degP \leq degQ$, oraz że podwójny pierwiastek rzeczywisty nie leży na osi urojonej i ma część rzeczywistą ujemną, a zatem filtr ten przy warunku, iż $\Delta = 0$, jest *stabilny* i *realizowalny.*

### 2.2.3 Przypadek gdy $\Delta > 0$ (czyli $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

W tym przypadku podobnie jak dla $\Delta < 0$ dysponujemy nastepującą postacią ilorazu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LCx^2 + RCx + 1} = \frac{1}{LC}\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)},$$

gdzie przy oznaczeniu $\omega = \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}$ mamy:

$$\sqrt{\Delta} = C\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} = C\omega,$$

$$x_1 = -\frac{R+\omega}{2L},\ x_2 = -\frac{R-\omega}{2L}.$$

Teraz jednak otrzymaliśmy jako pierwiastki równania ujemne liczby rzeczywiste, czyli spełniające nierówności $\Re(x_1) < 0$ i $\Re(x_2) < 0$.

Rozłóżmy iloraz wielomianów $P$ i $Q$ na ułamki proste:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LC}\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{LC}(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2})$$

$$= \frac{1}{LC}\frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{LC}\frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{LC}\frac{(A+B)x-(Ax_2+Bx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)},$$

stąd stwierdzamy, że $A+B=0$ (czyli $B=-A$), oraz $-(Ax_2+Bx_1)=1$. Dalej :

$$-(Ax_2 - Ax_1) = 1$$

$$-A(x_2 - x_1) = 1$$

$$A(x_1 - x_2) = 1$$

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{-\frac{R+\omega}{2L} - (-\frac{R-\omega}{2L})} = \frac{1}{-\frac{\omega}{L}} = -\frac{L}{\omega},$$

skąd $B = \frac{L}{\omega}$.

Ostatecznie mamy:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{LC}\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{LC}(-\frac{L}{\omega}\frac{1}{x-x_1} + \frac{L}{\omega}\frac{1}{x-x_2})$$

$$= -\frac{1}{\omega C}(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}),$$

a z tej postaci możemy wywnioskować *funkcję przenoszenia*:

$$H(\lambda) = -\frac{1}{\omega C}(\frac{1}{2i\pi\lambda - x_1} - \frac{1}{2i\pi\lambda - x_2}).$$

Natomiast na podstawie wzoru (24.11) z [1] określamy następującą *odpowiedź impulsową*:

$$h(t) = -\frac{1}{\omega C}(e^{x_1 t} - e^{x_2 t})u(t).$$

Zatem dla dowolnego sygnału wejściowego $f(t)$ sygnał wyjściowy wygląda:

$$v(t) = (h * f)(t) = -\frac{1}{\omega C}\int_{-\infty}^{t}(e^{x_1(t-s)} - e^{x_2(t-s)})f(s)ds.$$

W szczególności, *krok odpowiedzi* przedstawia sie wzorem:

$$\begin{aligned}
h_1(t) = (h * u)(t) &= -\frac{1}{\omega C}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{x_1(t-s)} - e^{x_2(t-s)})u(t-s)u(s)ds \\
&= -\frac{1}{\omega C}(\int_{0}^{t}(e^{x_1(t-s)} - e^{x_2(t-s)})ds)u(t) \\
&= -\frac{1}{\omega C}(\int_{0}^{t} e^{x_1(t-s)}ds - \int_{0}^{t} e^{x_2(t-s)}ds)u(t) \\
&= -\frac{1}{\omega C}([-\frac{1}{x_1}e^{x_1(t-s)}]_{s=0}^{t} - [-\frac{1}{x_2}e^{x_2(t-s)}]_{s=0}^{t})u(t) \\
&= -\frac{1}{\omega C}(-\frac{1}{x_1}(1 - e^{x_1 t}) + \frac{1}{x_2}(1 - e^{x_2 t}))u(t) \\
&= -\frac{1}{\omega C}(-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}e^{x_1 t} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2}e^{x_2 t})u(t) \\
&= (-\frac{1}{\omega C}(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) - \frac{1}{\omega C}\frac{1}{x_1}e^{x_1 t} + \frac{1}{\omega C}\frac{1}{x_2}e^{x_2 t})u(t),
\end{aligned}$$

Wyliczając:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\omega C}(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) &= -\frac{1}{\omega C}\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{\omega C}\ \frac{\omega}{L}\ \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{CL}\ \frac{4L^2}{R^2 - \omega^2} \\
&= \frac{4L}{C}\ \frac{1}{R^2 - (R^2 - 4\frac{L}{C})} = \frac{4L}{C}\ \frac{1}{4\frac{L}{C}} = 1,
\end{aligned}$$

oraz podstawiając $x_1 = -\frac{R+\omega}{2L}$ i $x_2 = -\frac{R-\omega}{2L}$ otrzymujemy ostatecznie:

$$h_1(t) = (1 + \frac{2L}{\omega C(R+\omega)}e^{-\frac{R+\omega}{2L}t} - \frac{2L}{\omega C(R-\omega)}e^{\frac{R-\omega}{2L}t})u(t).$$

Pokazaliśmy wcześniej, że oba pierwiastki $Q(x)$ są ujemnymi liczbami rzeczywistymi. Oczywiście widać, że spełniony jest warunek $degP \leq degQ$, a zatem i w tym przypadku stwierdzamy, że filtr jest *stabilny* i *realizowalny*, odpowiednio na podstawie twierdzenia (24.4.2) i (24.5.2) [1].

## 2.3 Filtr drugiego rzędu $-\frac{1}{\omega^2}g'' + g = f$

Rozważmy filtr opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$-\frac{1}{\omega^2}g''(t) + g(t) = f(t) \tag{2.3}$$

gdzie $\omega > 0$.

Obliczając transformaty Fouriera obu stron równania otrzymujemy:

$$-\frac{1}{\omega^2}\widehat{g''} + \widehat{g} = \widehat{f}$$

$$-\frac{1}{\omega^2}(2i\pi\lambda)^2\widehat{g} + \widehat{g} = \widehat{f}$$

$$(-\frac{1}{\omega^2}(2i\pi\lambda)^2 + 1)\widehat{g} = \widehat{f}$$

$$\widehat{g} = \frac{1}{-\frac{1}{\omega^2}(2i\pi\lambda)^2 + 1}\widehat{f}$$

$$\widehat{g} = \frac{-\omega^2}{(2i\pi\lambda)^2 - \omega^2}\widehat{f}$$

Zatem:

$$H(\lambda) = \frac{-\omega^2}{(2i\pi\lambda)^2 - \omega^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2\lambda^2 + \omega^2},$$

a stąd wynika, że:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-\omega^2}{x^2 - \omega^2}.$$

Rozłóżmy teraz powyższy iloraz wielomianów na ułamki proste:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-\omega^2}{(x-\omega)(x+\omega)} = \frac{A}{x-\omega} + \frac{B}{x+\omega} = \frac{A(x+\omega) + B(x-\omega)}{(x-\omega)(x+\omega)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (A\omega - B\omega)}{(x-\omega)(x+\omega)}.$$

Stąd wnioskujemy, że $A + B = 0$ ($B = -A$), a także, że $A\omega - B\omega = -\omega^2$. Dalej:

$$A\omega - B\omega = -\omega^2$$

$$A\omega + A\omega = -\omega^2$$

$$2A\omega = -\omega^2$$
$$A = -\frac{\omega}{2},$$

skąd $B = \frac{\omega}{2}$.

Ostatecznie :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-\omega^2}{x^2 - \omega^2} = -\frac{\omega}{2}(\frac{1}{x-\omega} - \frac{1}{x+\omega}).$$

Wiedząc, że równanie $x^2 - \omega^2 = 0$ posiada dwa rozwiązania $x_1 = \omega$ i $x_2 = -\omega$ takie, że $\Re(x_1) > 0$ oraz $\Re(x_2) < 0$, a także korzystając ze wzoru (24.11) [1] możemy określić *odpowiedź impulsową* filtru:

$$h(t) = -\frac{\omega}{2}(-e^{x_1 t}u(-t) - e^{x_2 t}u(t)) = \frac{\omega}{2}(e^{\omega t}u(-t) + e^{-\omega t}u(t)) = \frac{\omega}{2}e^{\omega|t|}$$

Znając natomiast $h(t)$, możemy napisać postać sygnału na wyjściu filtru, dla dowolnego sygnału wejściowego $f(t)$:

$$g(t) = (h * f)(t) = \frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\omega|t-s|}f(s)ds.$$

Obliczymy na koniec postać *kroku odpowiedzi* $h_1(t) = (h * u)(t)$, w tym celu będziemy musieli rozważyć dwa przypadki:

1. gdy $t \geq 0$:

$$h_1(t) = \frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|t-s|}u(s)ds = \frac{\omega}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega|t-s|}ds$$
$$= \frac{\omega}{2}\int_{0}^{t} e^{-\omega(t-s)}ds + \frac{\omega}{2}\int_{t}^{\infty} e^{\omega(t-s)}ds$$
$$= \frac{\omega}{2}[\frac{1}{\omega}e^{-\omega(t-s)}]_{s=0}^{t} + \frac{\omega}{2}[-\frac{1}{\omega}e^{\omega(t-s)}]_{s=t}^{\infty}$$
$$= \frac{\omega}{2}(\frac{1}{\omega}(1 - e^{-\omega t}) - \frac{1}{\omega}(0-1))$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\omega t} + 1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\omega t}$$

2. gdy $t < 0$:

$$h_1(t) = \frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|t-s|}u(s)ds = \frac{\omega}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega|t-s|}ds = \frac{\omega}{2}\int_{0}^{\infty} e^{\omega(t-s)}ds$$

$$= \frac{\omega}{2}[-\frac{1}{\omega}e^{\omega(t-s)}]_{s=0}^{\infty} = \frac{\omega}{2}(0 + \frac{1}{\omega}e^{\omega t}) = \frac{1}{2}e^{\omega t}$$

Reasumując sygnał $h_1(t)$ wygląda następująco:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\omega t} & \text{dla } t \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^{\omega t} & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Pokazaliśmy, że dla ilorazu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ spełniony jest warunek $degP \leq degQ$. Wyliczyliśmy również dwa pierwiastki, które nie znajdowały się na osi urojonej. Zatem na podstawie (24.4.2) [1] możemy stwierdzić, iż filtr ten jest *stabilny*. Niestety, jeden z tych pierwiastków miał cześć rzeczywistą dodatnią, a drugi ujemną, skąd na mocy twierdzenia (24.5.2) [1] zauważamy, że filtr ten nie jest *realizowalny*.

## 2.4 Obwód całkujący i różniczkujący

W elektronice często wykorzystuje się układy całkujące i różniczkujące. Nazwy tych obwodów są adekwatne do operacji dokonywanej na sygnale wejściowym.

### 2.4.1 Układ całkujący $g' = f$

Wychodząc od równania

$$g'(t) = f(t),$$

obliczamy *funkcję przenoszenia*:

$$\widehat{g'}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

$$(2i\pi\lambda)\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

$$\widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi\lambda}\widehat{f}(\lambda),$$

czyli

$$H(\lambda) = \frac{1}{2i\pi\lambda}.$$

Zatem iloraz wielomianów $P$ i $Q$ przedstawia się

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x}.$$

Widzimy, że $Q(x)$ posiada tylko jeden pojedyńczy pierwiastek $x_0 = 0$. Nie możemy tutaj zastosować żadnej z dotychczasowych metod. Jeśli bowiem $f$ jest w klasie funkcji Schwarza, to nie da się znaleźć w tej klasie funkcji $g$.

Prostsza okazuje sie bezpośrednia analiza tego przykładu. Widzimy, że $g$ musi być funkcją pierwotną $f$. Ograniczając się do sygnałów *przyczynowych*, czyli takich sygnałów, dla których spełniony jest warunek

$$h(t) = 0, \text{ dla } t < 0,$$

wybór funkcji $g$ jest zdeterminowany. W tym przypadku,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds,$$

którą można zapisać w kontekście funkcji Heaviside'a:

$$g = u * f.$$

Zatem *odpowiedzią impulsową* tego filtru jest funkcja impulsu jednostkowego $u(t)$. Zdefinowany jest również *krok odpowiedzi*:

$$h_1(t) = (u * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)ds = tu(t).$$

Reasumując, przy ograniczeniu sie tylko do sygnałów przyczynowych zauważamy, iż rozważany układ całkujący nie jest *stabilny*, ponieważ *odpowiedź impulsowa* nie należy do $\mathbf{L}^1(\mathcal{R})$,

$$\int_{\mathcal{R}} |u(\lambda)|d\lambda = \int_{\mathcal{R}} u(\lambda)d\lambda = \int_{0}^{\infty} d\lambda = \infty.$$

Jest on natomiast *realizowalny*, ponieważ dla wszystkich $t_0 \in \mathcal{R}$ zachodzi warunek

$$f(t) = 0 \text{ dla } t < t_0 \ \Rightarrow \ g(t) = 0 \text{ dla } t < t_0.$$

### 2.4.2 Układ różniczkujący $g = f'$

Analogicznie jak w poprzednim układzie wychodząc z równania

$$g(t) = f'(t),$$

możemy wyznaczyć *funkcję przenoszenia*:

$$\widehat{g}(\lambda) = \widehat{f}'(\lambda)$$

$$\widehat{g}(\lambda) = (2i\pi\lambda)\widehat{f}(\lambda),$$

czyli

$$H(\lambda) = 2i\pi\lambda.$$

Z postaci $H(\lambda)$ możemy wywnioskować iloraz wielomianów $P$ i $Q$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x.$$

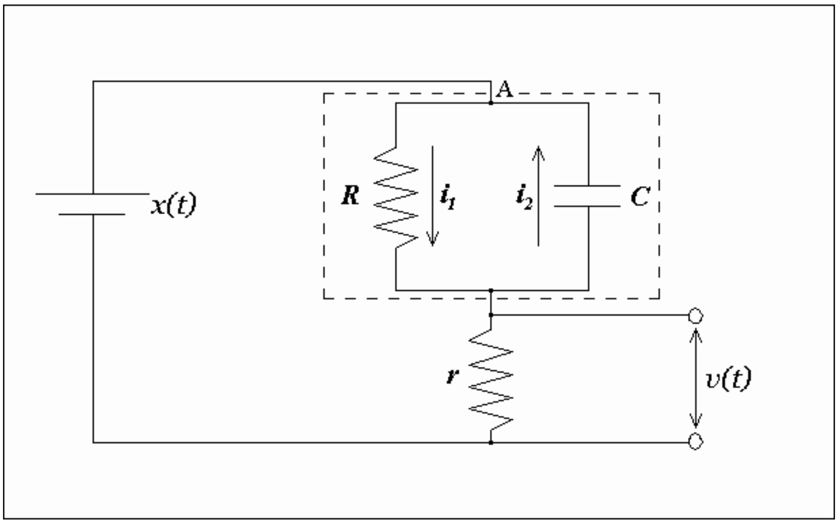
Zauważamy, iż w tym przypadku $Q(x)$ nie posiada pierwiastków i powołując się na twierdzenie (24.5.2) [1] wnioskujemy, że filtr ten jest *realizowalny.* Z drugiej zaś strony nie jest on *stabilny.*

Zdefiniowanie *odpowiedzi impulsowej* oraz *kroku odpowiedzi* w przypadku układu różniczkującego możliwe jest tylko w kontekście *teorii dystrybucji.*

# Zadanie 3

# Układ elektryczny

**Dla układu elektrycznego przedstawionego na poniższym rysunku,**




Rysunek 3.1

**gdzie** $x$ **jest sygnałem na wejściu, a spadek napięcia** $v$ **na oporniku o rezystancji** $r$ **jest sygnałem wyjściowym.**

1. **Pokazać, że** $x$ **i** $v$ **spełniają równość** $RrCv'+(R+r)v = rx+RrCx'$**.**

2. **Obliczyć funkcję przenoszenia i krok odpowiedzi.**

3. **Zakładając, że** $r \ll R$**, określić jaką rolę może pełnić ten filtr.**

Dla rozważanego poniżej układu elektrycznego zakładamy, że sygnał wejściowy, oraz szukany sygnał wyjściowy znajdują się w klasie funkcji Schwarza.

## 3.1 Równanie filtru

Napięcie podane na wejściu układu musi być równe sumie spadków napięć na poszczególnych elementach układu połączonych szeregowo, tzn.

$$x(t) = v_{RC}(t) + v_r(t), \tag{3.1}$$

gdzie $v_{RC}$ jest spadkiem napięcia na układzie opornika i kondensatora zaznaczonego linią przerywaną na rysunku (3.1), natomiast $v_r$ jest spadkiem napięcia na oporniku o rezystancji $r$. Szukanym przez nas sygnałem wyjściowym będzie $v = v_r$.

Według *pierwszego prawa Kirchhoffa* wiemy, że w dowolnym punkcie obwodu suma natężeń prądów wpływających jest równa sumie natężeń prądów wypływających. Stosując tę zasadę w rozważanym układzie w punkcie rozgałęzienia $A$, dostajemy zależność

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t). \tag{3.2}$$

Następnie korzystając z *prawa Ohma*, oraz własności kondensatorów otrzymujemy równości:

$$i(t) = \frac{v(t)}{r},\ i_1(t) = \frac{v_{RC}(t)}{R},$$

$$v_{RC}(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow q(t) = Cv_{RC}(t).$$

Pamiętając, że $i(t) = q'(t)$ mamy

$$i_2(t) = Cv'_{RC}(t).$$

Podstawiając wyliczone natężenia do równania (3.2) otrzymujemy

$$\frac{v(t)}{r} = \frac{v_{RC}(t)}{R} + Cv'_{RC}(t) \quad / \cdot Rr$$

$$Rv(t) = rv_{RC}(t) + RrCv'_{RC}(t). \tag{3.3}$$

Wyznaczając natomiast napięcie $v_{RC}$ z równania (3.1)

$$v_{RC}(t) = x(t) - v(t),$$

i podstawiając do równania obwodu (3.3) otrzymujemy

$$Rv(t) = r(x(t) - v(t)) + RrC(x(t) - v(t))'$$

$$Rv(t) = rx(t) - rv(t) + RrC(x'(t) - v'(t))$$
$$Rv(t) + rv(t) = rx(t) + RrCx'(t) - RrCv'(t).$$

Grupując na koniec wyrazy sygnału wejściowego po jednej stronie, natomiast wyjściowego po drugiej stronie równania, otrzymujemy ostatecznie równanie układu elektrycznego przedstawionego na rysunku (3.1) w postaci

$$RrCv'(t) + (R + r)v(t) = rx(t) + RrCx'(t).$$

## 3.2 Transmitancja i krok odpowiedzi

Dysponując już równaniem układu:

$$RrCv' + (R + r)v = rx + RrCx', \tag{3.4}$$

możemy obliczyć transformaty Fouriera po obu jego stronach:

$$RrC\widehat{v'} + (R + r)\widehat{v} = r\widehat{x} + RrC\widehat{x'}$$

$$RrC(2i\pi\lambda)\widehat{v} + (R + r)\widehat{v} = r\widehat{x} + RrC(2i\pi\lambda)\widehat{x}$$
$$(RrC(2i\pi\lambda) + (R + r))\widehat{v} = (r + RrC(2i\pi\lambda))\widehat{x}$$
$$\widehat{v} = \frac{RrC(2i\pi\lambda) + r}{RrC(2i\pi\lambda) + (R + r)}\widehat{x}$$

W tym momencie, jesteśmy w stanie określić *funkcję przenoszenia* charakteryzującą rozważany obwód:

$$H(\lambda) = 1 - \frac{1}{rC}\ \frac{1}{2i\pi\lambda + \frac{R+r}{RrC}}. \tag{3.5}$$

Widzimy także, iż iloraz $P/Q$ wygląda następująco:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{RrCz + r}{RrCz + (R + r)},$$

czyli, że $degP = degQ$. W tym przypadku, zamieniamy niewiadomą funkcję $v$ na $g = v - \lambda x$, gdzie w naszym przypadku $\lambda = \frac{RrC}{RrC} = 1$.

Następnie, tak jak to zostało przedstawione w paragrafie (24.3.4) [1] podstawiając $v = g + x$ modyfikujemy równanie (3.4):

$$RrC(g+x)' + (R+r)(g+x) = rx + RrCx'$$

$$RrCg' + RrCx' + (R+r)g + (R+r)x = rx + RrCx'$$

$$RrCg' + (R+r)g = (r-(R+r))x + (RrC - RrC)x'$$

$$RrCg' + (R+r)g = -Rx \tag{3.6}$$

i rozwiązujemy je w sposób analogiczny. Pamiętamy jednak, że ostatecznym rozwiązaniem będzie sygnał postaci:

$$v = \lambda x + h_g * x,$$

gdzie $h_g$ jest *odpowiedzią impulsową* obliczoną z równania (3.6).

Weźmy zatem transformaty Fouriera po obu stronach równania (3.6):

$$RrC\widehat{g'} + (R+r)\widehat{g} = -R\widehat{x}$$

$$RrC(2i\pi\lambda)\widehat{g} + (R+r)\widehat{g} = -R\widehat{x}$$

$$(RrC(2i\pi\lambda) + (R+r))\widehat{g} = -R\widehat{x}$$

$$\widehat{g} = \frac{-R}{RrC(2i\pi\lambda) + (R+r)}\widehat{x}$$

Widzimy stąd, że tym razem iloraz wielomianów wygląda:

$$\frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \frac{-R}{RrCz + (R+r)} = -\frac{1}{rC}\;\frac{1}{z + \frac{R+r}{RrC}}$$

czyli posiada jeden pierwiastek rzeczywisty $z_0 = -\frac{R+r}{RrC}$ taki, że $\Re(z_0) < 0$.

Korzystając teraz ze wzoru (24.11) [1] możemy określić *odpowiedź impulsową* filtru opisanego równaniem (3.6):

$$h_g(t) = -\frac{1}{rC}e^{z_0 t}u(t) = -\frac{1}{rC}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}u(t).$$

Stąd dla dowolnego sygnału $x(t)$ na wejściu filtru otrzymamy następujący sygnał wyjściowy $g(t)$:

$$g(t) = (h_g * x)(t) = -\frac{1}{rC}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{R+r}{RrC}(t-s)}u(t-s)x(s)ds$$

$$= -\frac{1}{rC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{R+r}{RrC}(t-s)}x(s)ds.$$

W szczególności dla sygnału $u(t)$ mamy:

$$g_1(t) = (h_g * u)(t) = -\frac{1}{rC}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{z_0(t-s)}u(t-s)u(s)ds)u(t)$$

$$= -\frac{1}{rC}(\int_{0}^{t} e^{z_0(t-s)}ds)u(t) = -\frac{1}{rC}([-\frac{1}{z_0}e^{z_0(t-s)}]_{s=0}^{t})u(t)$$

$$= \frac{1}{rCz_0}(1 - e^{z_0 t})u(t) = -\frac{R}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{RrC}t})u(t)$$

Aby teraz wyznaczyć *krok odpowiedzi* dla filtru opisanego równaniem (3.4), skorzystamy z przytoczonego wcześniej wzoru:

$$v = \lambda x + h_g * x.$$

Podstawiając $\lambda = 1$, $x = u$ i $(h_g * u)(t) = g_1(t)$ otrzymujemy ostatecznie:

$$h_1(t) = u(t) - \frac{R}{R+r}(1 - e^{-\frac{R+r}{RrC}t})u(t)$$

$$= (1 - \frac{R}{R+r})u(t) + \frac{R}{R+r}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}u(t)$$

$$= \frac{r}{R+r}u(t) + \frac{R}{R+r}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}u(t)$$

$$= \frac{1}{R+r}(r + Re^{-\frac{R+r}{RrC}t})u(t).$$

## 3.3 Przypadek, gdy $r \ll R$

Przyjrzyjmy się raz jeszcze obliczonej dla tego układu *funkcji przenoszenia*, przypominając wzór (3.5):

$$H(\lambda) = 1 - \frac{1}{rC}\ \frac{1}{2i\pi\lambda + \frac{R+r}{RrC}},$$

który przedstawimy w postaci

$$H(\lambda) = 1 - \frac{1}{rC(2i\pi\lambda) + (1 + \frac{r}{R})}.$$

Zakładając warunek $r \ll R$, możemy w naszych rozważaniach opuścić wyraz $\frac{r}{R}$, który jest wówczas bliski zeru. Zatem

$$H(\lambda) \approx 1 - \frac{1}{rC(2i\pi\lambda) + 1}. \tag{3.7}$$

Zauważamy, iż drugi wyraz powyższej różnicy jest wzorem na *funkcję przenoszenia* dla *filtru RC* o rezystancji $r$ i kondensatorze $C$. Oznaczając ją przez $H_0$ mamy

$$H(\lambda) \approx 1 - H_0(\lambda). \tag{3.8}$$

Z paragrafu (2.4.3) w [1] wiemy, że filtr opisany *transmitancją* postaci $H_0$ jest filtrem *dolnoprzepustowym*, tzn. przepuszcza w postaci niezmienionej sygnał o niskich częstotliwościach, natomiast im częstotliwości są wyższe na wejściu filtru tym bardziej są tłumione.

Z postaci równania (3.8) możemy mieć pewne podejrzenia, iż rozważany filtr nie będzie *dolnoprzepustowym.* W tym celu zbadajmy jak zachowuje się *widmo energii* $|H(\lambda)|^2$ dla funkcji przenoszenia (3.7) przy bliskich zeru oraz nieskończenie wysokich częstotliwościach.

Oznaczając przez $\beta = 2\pi rC$ przekształcimy na początek wzór (3.7),

$$H(\lambda) \approx 1 - \frac{1}{rC(2i\pi\lambda) + 1} = 1 - \frac{1}{\beta i\lambda + 1} = 1 - \frac{\beta i\lambda - 1}{\beta^2 i^2 \lambda^2 - 1}$$

$$= 1 + \frac{\beta i\lambda - 1}{\beta^2\lambda^2 + 1} = \frac{\beta^2\lambda^2}{\beta^2\lambda^2 + 1} + i\frac{\beta\lambda}{\beta^2\lambda^2 + 1},$$

który w tej postaci możemy wykorzystać do obliczenia *widma energii*:

$$|H(\lambda)|^2 = H(\lambda) \cdot \overline{H(\lambda)} \approx \left(\frac{\beta^2\lambda^2}{\beta^2\lambda^2 + 1} + i\frac{\beta\lambda}{\beta^2\lambda^2 + 1}\right) \cdot \left(\frac{\beta^2\lambda^2}{\beta^2\lambda^2 + 1} - i\frac{\beta\lambda}{\beta^2\lambda^2 + 1}\right)$$

$$= \left(\frac{\beta^2\lambda^2}{\beta^2\lambda^2 + 1}\right)^2 - i^2\left(\frac{\beta\lambda}{\beta^2\lambda^2 + 1}\right)^2 = \frac{(\beta^2\lambda^2)^2 + (\beta\lambda)^2}{(\beta^2\lambda^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\beta^2\lambda^2(\beta^2\lambda^2 + 1)}{(\beta^2\lambda^2 + 1)^2} = \frac{\beta^2\lambda^2}{\beta^2\lambda^2 + 1} = \frac{4\pi^2(rC)^2\lambda^2}{4\pi^2(rC)^2\lambda^2 + 1}.$$

Teraz możemy przejść do analizy przypadków granicznych. Przy niskich częstotliwościach mamy:

$$\lim_{\lambda \to 0} |H(\lambda)|^2 \approx \frac{4\pi^2(rC)^2 0^2}{4\pi^2(rC)^2 0^2 + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0,$$

natomiast przy nieskończenie wysokich:

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} |H(\lambda)|^2 \approx \lim_{\lambda\to\pm\infty} (\frac{4\pi^2(rC)^2\lambda^2}{4\pi^2(rC)^2\lambda^2+1}) = \lim_{\lambda\to\pm\infty} (\frac{1}{1+\frac{1}{4\pi^2(rC)^2\lambda^2}}) = 1.$$

Widzimy zatem, że rozważany układ przepuszcza sygnały o wysokich częstotliwościach, natomiast im niższe częstotliwości podajemy na wejściu obwodu, tym bardziej będą one osłabiane. Jest to własność charakteryzująca *filtry górnoprzepustowe*, do których możemy zaliczyć nasz układ, jeśli tylko spełnione jest założenie, iż $r \ll R$.

# Bibliografia

[1] Gasquet, C., Witomski, P., *Fourier analysis and applications*, Springer, 1999.

[2] Halliday, D., Resnick, R., *Fizyka, tom 2*, PWN, 2002, str. 332-339.