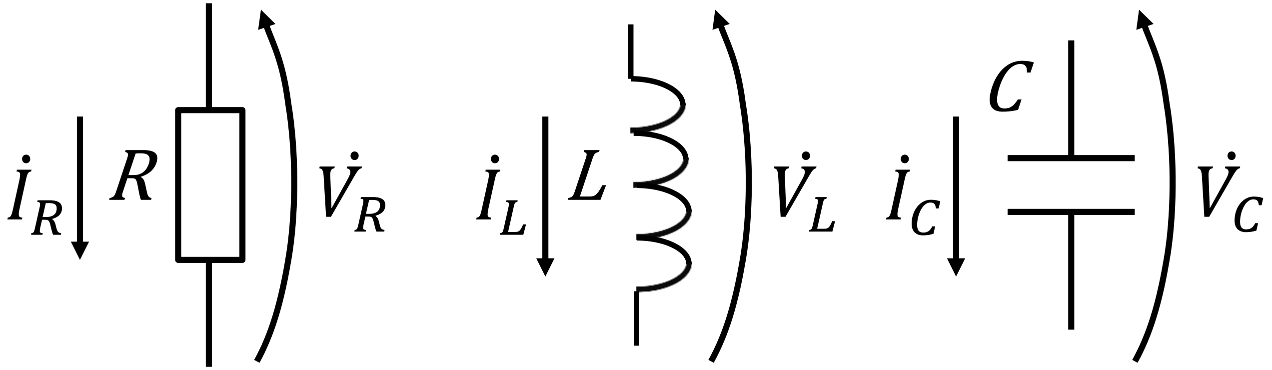
複素表現

- 正弦波を複素数で表す
- 時間表現(これまでの表現)
  - 電圧　$v(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  - 電流　$i(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- 複素表現
  - 複素電圧 $\dot{V} = A - jB$
  - 複素電流 $\dot{I} = A - jB$
    - jは虚数単位. $j^2 = -1$
    - $\dot{V}, \dot{I}$など点が付いている記号は複素数を表す

インピーダンス (impedance)

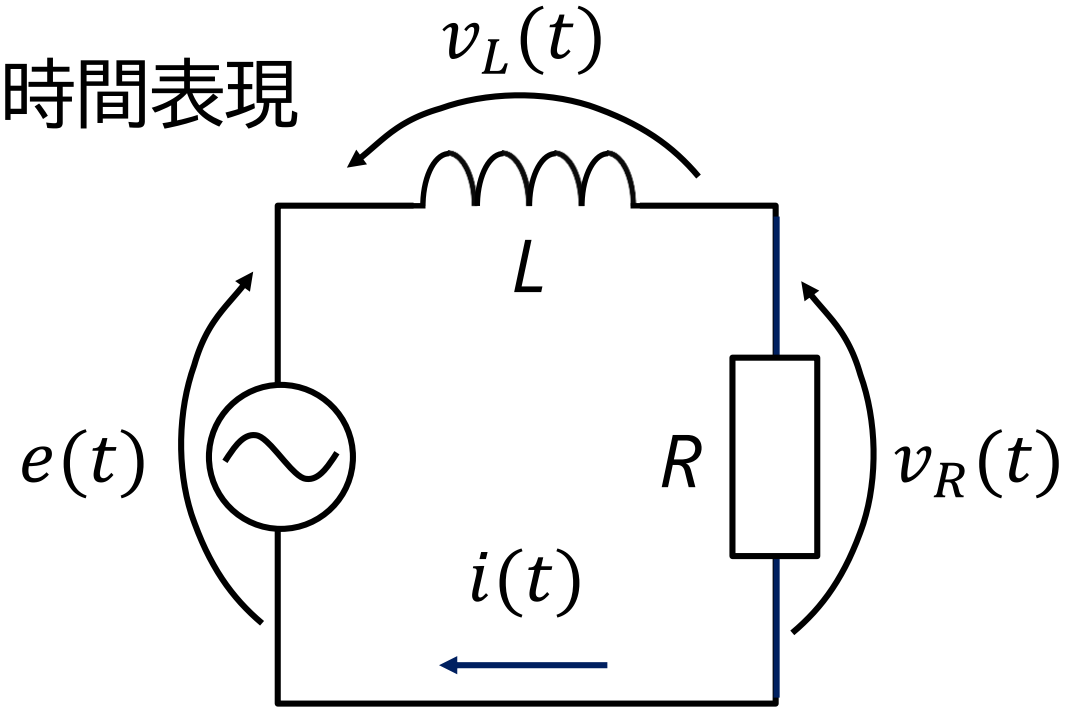
- 複素電圧, 複素電流について, 以下が成立
  - $\dot{V}_R = R\dot{I}_R$
  - $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}_L$
  - $\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$



- インピーダンス
  - 交流に関する抵抗値のようなもの
  - [各素子のインピーダンス] = [$\dot{I}$ についている係数]
  - 単位：Ω

LR直列回路

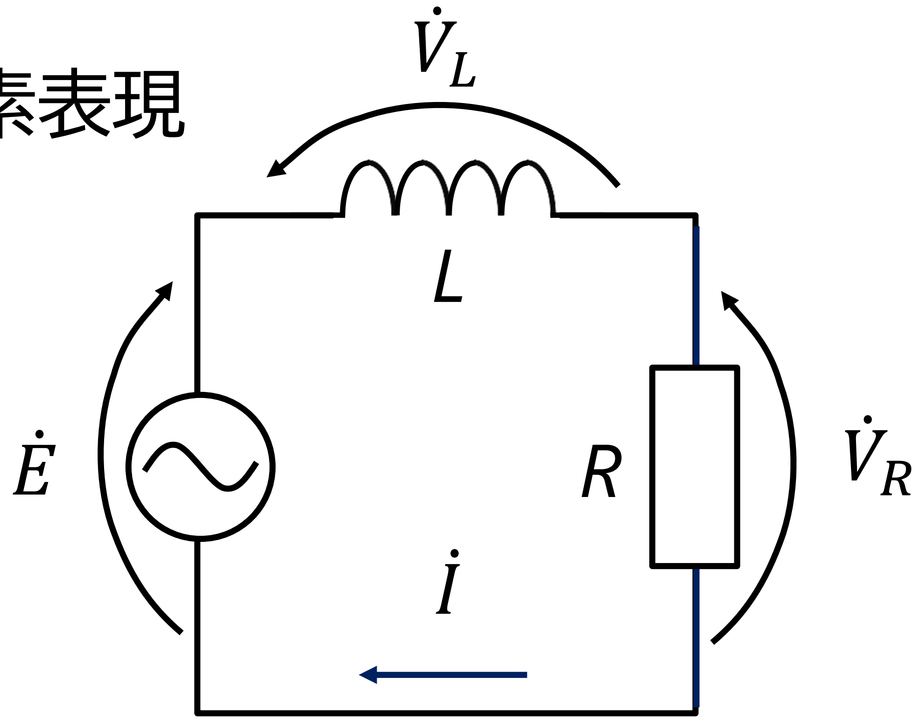
時間表現



$e(t) = E\cos\omega t$とする

$i(t)$をもとめよ

複素表現



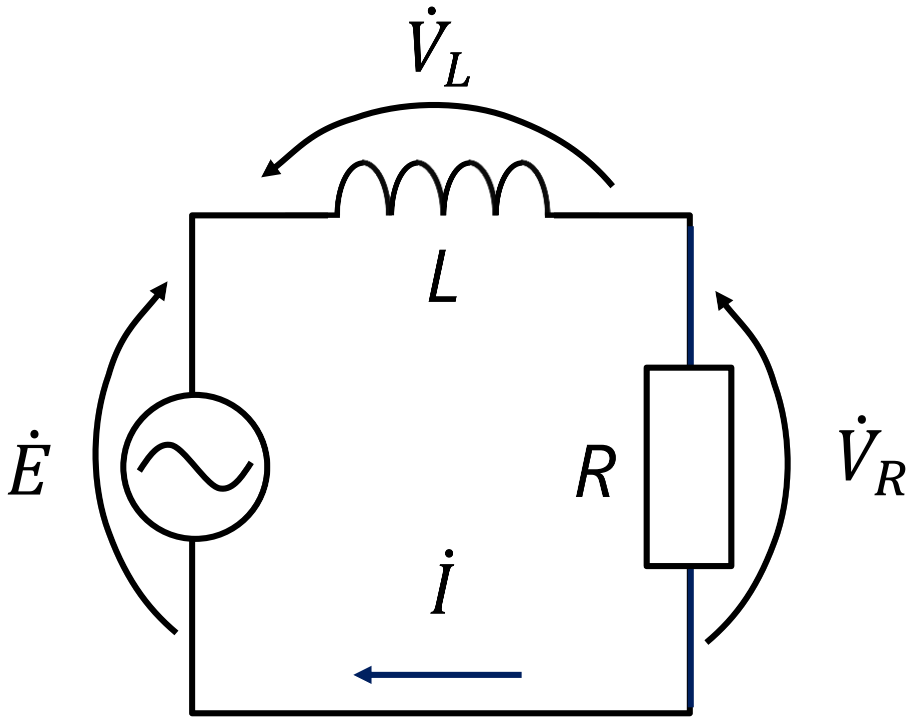
$\dot{E} = E$とする

$\dot{I}$をもとめよ

計算

- $\dot{V}_R = R\,\dot{I}$
- $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}$
- $\dot{V}_R + \dot{V}_L = \dot{E}$
- $\dot{I}(R + j\omega L) = E$
- $\dot{I} = \frac{E}{R+j\omega L}$
- $\dot{V}_R = \frac{R}{R+j\omega L}E$
- $\dot{V}_L = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}E$

- $\dot{V}_R = R\dot{I}_R$
- $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}_L$
- $\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$



$\dot{E} = E$とする

$\dot{I}$をもとめよ

時間表現への変換

- $\dot{I} = \frac{1}{R+j\omega L}E$

  $= \frac{R-j\omega L}{(R+j\omega L)(R-j\omega L)}E$

  $= \frac{RE}{R^2+\omega^2 L^2} - j\frac{\omega LE}{R^2+\omega^2 L^2}$

- 対応する時間表現
  - $i(t) = \frac{RE}{R^2+\omega^2 L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LE}{R^2+\omega^2 L^2}\sin\omega t$
    - ☛以前の結果と比較

- 時間表現(これまでの表現)
  - 電圧　$v(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  - 電流　$i(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- 複素表現
  - 複素電圧 $\dot{V} = A - jB$
  - 複素電流 $\dot{I} = A - jB$

原理

- $A\cos\omega t + B\sin\omega t$

  $= \mathrm{Re}\left[(A - jB)\mathrm{e}^{j\omega t}\right]$

である.

  - Re[..] : 複素数の実部
  - e： 自然対数の底. ネイピア数
- 複素表現は, $(A - jB)$の部分を, 取り出したもの

- 時間表現(これまでの表現)
  - 電圧　$v(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  - 電流　$i(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- 複素表現
  - 複素電圧 $\dot{V} = A - jB$
  - 複素電流 $\dot{I} = A - jB$

原理

- $A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  $= \mathrm{Re}\left[(A - jB)\mathrm{e}^{j\omega t}\right]$

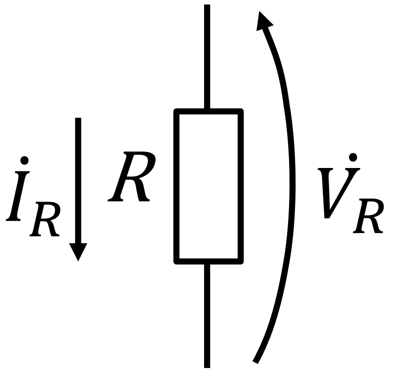
である.
  - Re[..] : 複素数の実部
- 上式が成り立っていることの確認
  - オイラーの公式:$\mathrm{e}^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
  - $\mathrm{Re}\left[(A - jB)\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}[(A - jB)(\cos\omega t + j\sin\omega t)]$
    $= \mathrm{Re}[(A\cos\omega t + B\sin\omega t) - j(B\cos\omega t - A\sin\omega t)]$
    $= A\cos\omega t + B\sin\omega t$

- 時間表現(これまでの表現)
  - 電圧　$v(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
  - 電流　$i(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- 複素表現
  - 複素電圧 $\dot{V} = A - jB$
  - 複素電流 $\dot{I} = A - jB$

原理：抵抗の電圧

- $\dot{V}_R = R\dot{I}_R$
- $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}_L$
- $\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$

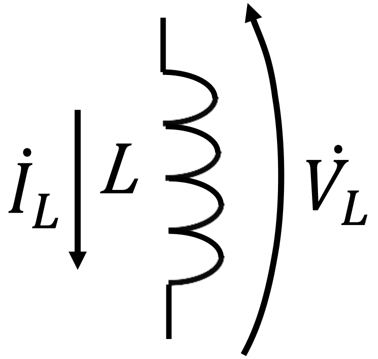
- 抵抗の電圧
  - $v_R(t) = Ri(t)$
  - $i(t)$の複素表現を$\dot{I}$とする
- $v_R(t) = Ri(t) = R\left(\mathrm{Re}\left[\dot{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\right]\right)$
  $= \mathrm{Re}[R\dot{I}\mathrm{e}^{j\omega t}]$
- 時間表現と同様, （電圧）＝（抵抗）×（電流）



原理:インダクタの電圧

- $\dot{V}_R = R\dot{I}_R$
- $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}_L$
- $\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$

- インダクタの電圧
  - $v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
  - $i(t)$の複素表現を$\dot{I}$とする
- $v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(Re\left[\dot{I}e^{j\omega t}\right]\right)$
  $= \mathrm{Re}\left[L\frac{d}{dt}\{\dot{I}e^{j\omega t}\}\right] = \mathrm{Re}[j\omega L\dot{I}e^{j\omega t}]$
- 時間表現での微分→ 複素表現では$j\omega$のかけ算



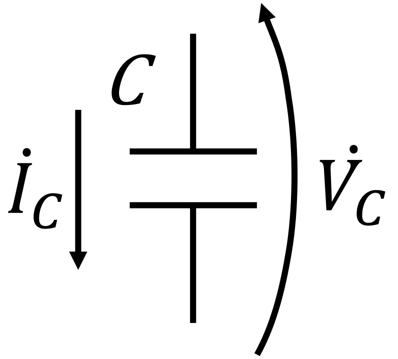
原理:キャパシタの電圧

- $\dot{V}_R = R\dot{I}_R$
- $\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}_L$
- $\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$

- キャパシタの電圧
  - $v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$
  - $i(t)$の複素表現を$\dot{I}$とする
- $v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}\int \mathrm{Re}\left[\dot{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\right]dt$

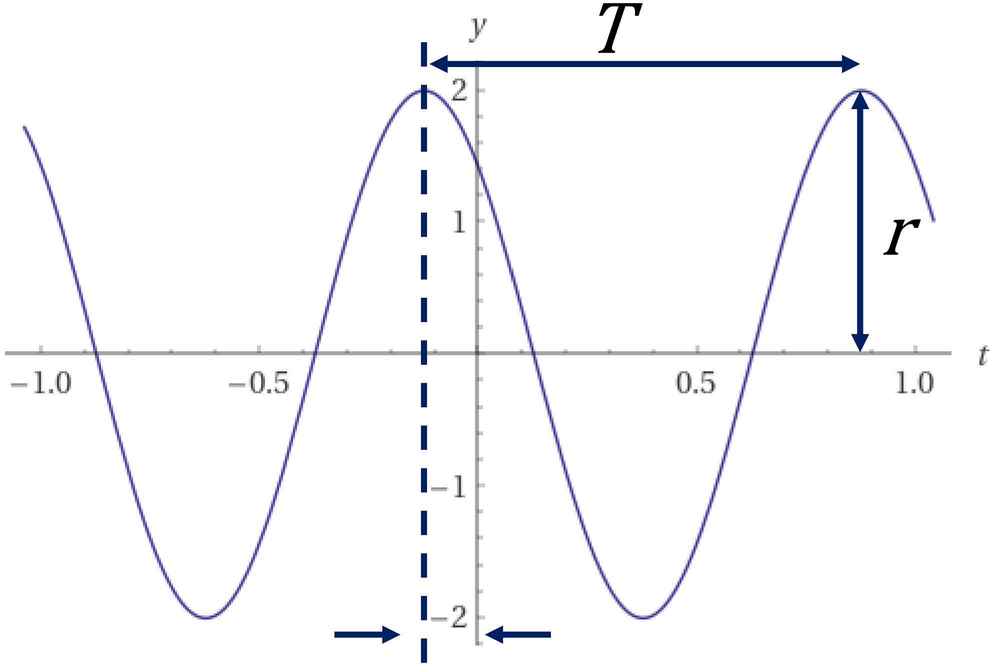
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{C}\dot{I}\int \mathrm{e}^{j\omega t}dt\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{j\omega C}\dot{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\right]$$

  - 積分定数は0とする
- 時間表現での積分→ 複素表現では$\frac{1}{j\omega}$のかけ算



時間表現への変換： $r\cos(\omega t+\theta)$の形式へ

- $r\cos(\omega t+\theta)$の波形
  - 複数の波形の位相差を考えるうえで, $A\cos\omega t+B\sin\omega t$の形式より便利



$\dfrac{\theta}{\omega}$ （$\theta\geq 0$のとき）

時間表現への変換： $r\cos(\omega t+\theta)$の形式へ

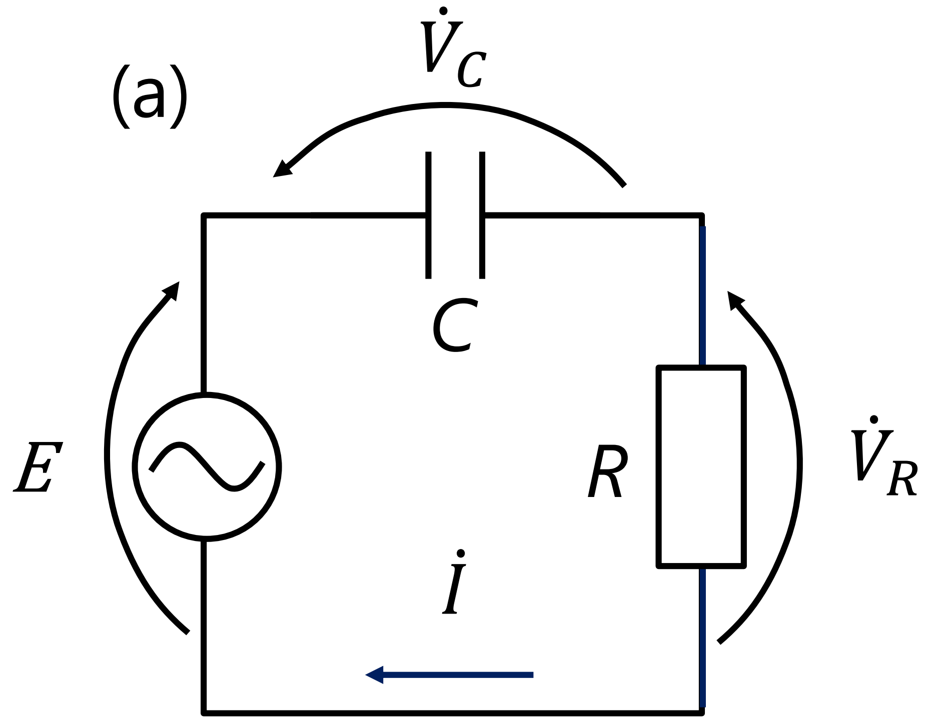
- 複素数を極座標形式 (polar coordinate form)で表す
  - $r\mathrm{e}^{j\theta}\ \left(=r(\cos\theta+j\sin\theta)\right)$
    - r: 絶対値
    - θ: 偏角
- $\mathrm{Re}\left[複素数\mathrm{e}^{j\omega t}\right]$を計算
  - $\mathrm{Re}\left[r\mathrm{e}^{j\theta}\mathrm{e}^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[r\mathrm{e}^{j(\omega t+\theta)}\right]$
    $=\mathrm{Re}[r(\cos(\omega t+\theta)+j\sin(\omega t+\theta))]$
    $=r\cos\left(\omega t+\theta\right)$
- 極座標形式にすれば, rとθがもとまる

例. LR直列回路での電流

- 複素表現 $\dot{I} = \frac{E}{R+j\omega L}$
- $\dot{I} = \frac{E}{R+j\omega L} = \frac{E(R-j\omega L)}{R^2+\omega^2 L^2} = \frac{ER}{R^2+\omega^2 L^2} - j\frac{\omega LE}{R^2+\omega^2 L^2}$
- 極座標形式へ変換
  - 絶対値 $|\dot{I}| = \sqrt{\frac{E^2R^2+\omega^2L^2E^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}} = \frac{E\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}{R^2+\omega^2L^2} = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$
  - 偏角$\theta = \tan^{-1}\frac{-\omega LE}{ER} = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$
- $\dot{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\ \mathrm{e}^{-j\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}$
- 時間表現 $i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R})$

問03

(a)



$\dot{I}$は？

(b)

LR直列回路においてインダクタの複素電圧

$$\dot{V}_L = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} E$$

時間表現が$r\cos(\omega t + \theta)$の形のとき，θは？

付録. 複素数に関する基本的な定義

- $\dot{A} = a + jb = re^{j\theta}$とする
  - $re^{j\theta} = r\cos\theta + j\, r\sin\theta$
- 絶対値 $|\dot{A}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 偏角 $Arg(\dot{A}) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
  - ただし, $a > 0$の場合
- 共役複素数 $\bar{\dot{A}} = a - jb = re^{-j\theta}$