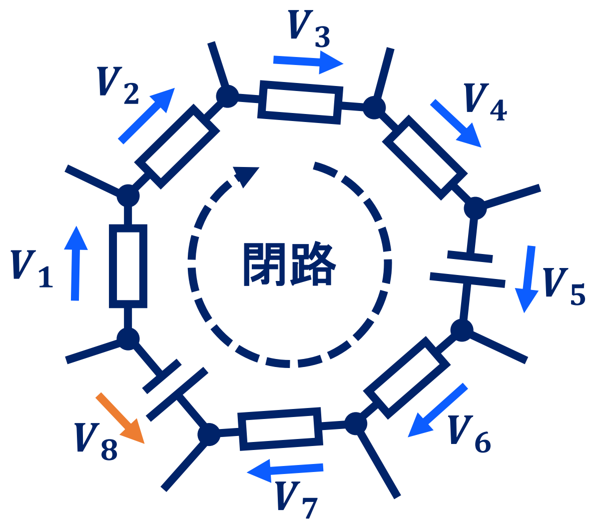
電子回路：第2回　直流回路解析

基礎工学部情報科学科

粟野 皓光

awano@ist.osaka-u.ac.jp

キルヒホッフの電圧則・電流則



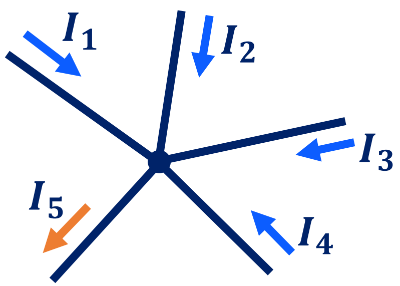
キルヒホッフの電圧則

任意の閉回路中に存在する電圧の和はゼロ

（左の図で$V_1 + V_2 + \cdots + V_7 - V_8 = 0$）

符号に注意

- 電圧のベクトルがループと同じ向き⇒プラス
- 電圧のベクトルがループと逆向き⇒マイナス



キルヒホッフの電流則

回路網の任意の接点に流れ込む電流と流れ出す電流の総和はゼロ

（左の図で$I_1 + I_2 + \cdots + I_4 - I_5 = 0$）

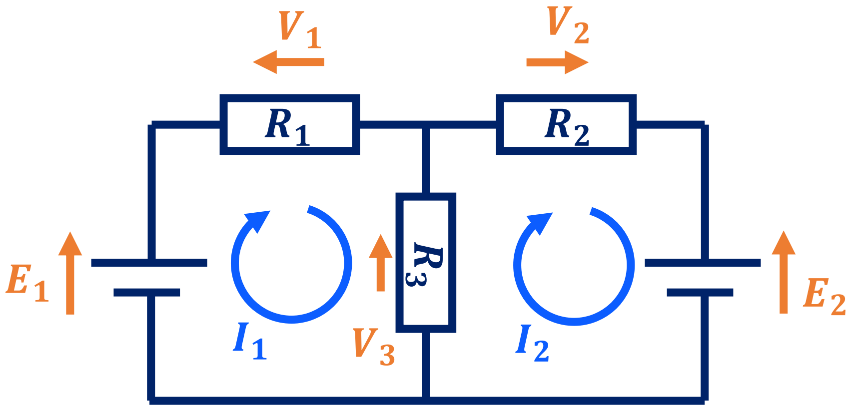
符号に注意

- 接点に流れ込む電流と，流れ出す電流で符号が違う

ループ電流法による回路方程式の立て方

□ 閉路を流れる電流を未知数に取ってキルヒホッフの電圧則を適用する解析手法

1. 独立の閉回路にループ電流を割り当てる



2. 網目電流それぞれに対して電圧則を適用

$$\text{電流}I_1：E_1-\underbrace{R_1I_1}_{V_1}-\underbrace{R_3(I_1-I_2)}_{V_3}=0$$

$$\text{電流}I_2：-E_2-\underbrace{R_2I_2}_{V_2}+\underbrace{R_3(I_1-I_2)}_{V_3}=0$$

（仮の電圧の向きを書き込んでおくと間違えにくい）

3. 連立方程式を解く

$$\begin{pmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -R_2-R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} E_1 & -R_3 \\ E_2 & -R_2-R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -R_2-R_3 \end{vmatrix}}=\frac{E_1(R_2+R_3)-E_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & E_1 \\ R_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ R_3 & -R_2-R_3 \end{vmatrix}}=-\frac{E_2(R_1+R_3)-E_1R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

参考：クラメルの公式

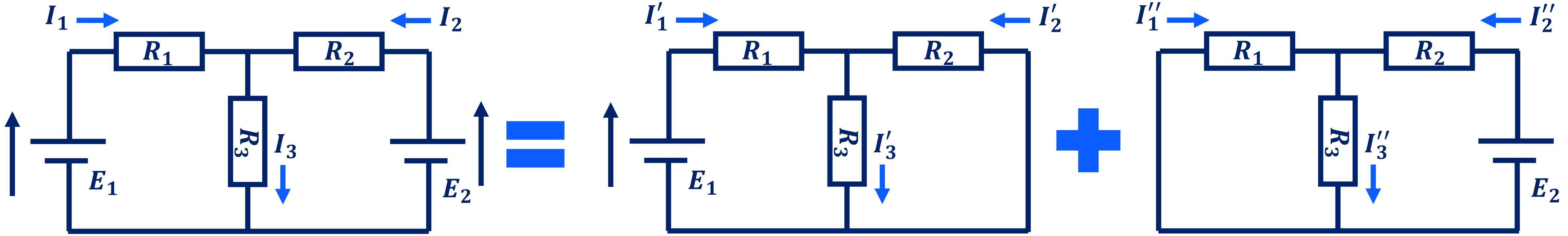
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$ の解は $$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

重ね合わせの理

重ね合わせの理

線形回路において**複数の電源**がある場合，各枝路に流れる電流は，**各電源がそれぞれ単独に存在するときに流れる電流の総和**に等しい

なお，取り除く電源が**電圧源の場合は短絡**・**電流源の場合は開放**として考える



$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \qquad I''_2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

$$I'_2 = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} I'_1 \quad \leftarrow \text{符号に注意} \rightarrow \quad I''_1 = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} I''_2$$

$$I'_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I'_1 \qquad I''_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_3} I''_2$$

$\Leftarrow$

$$I_1 = I'_1 + I''_1$$

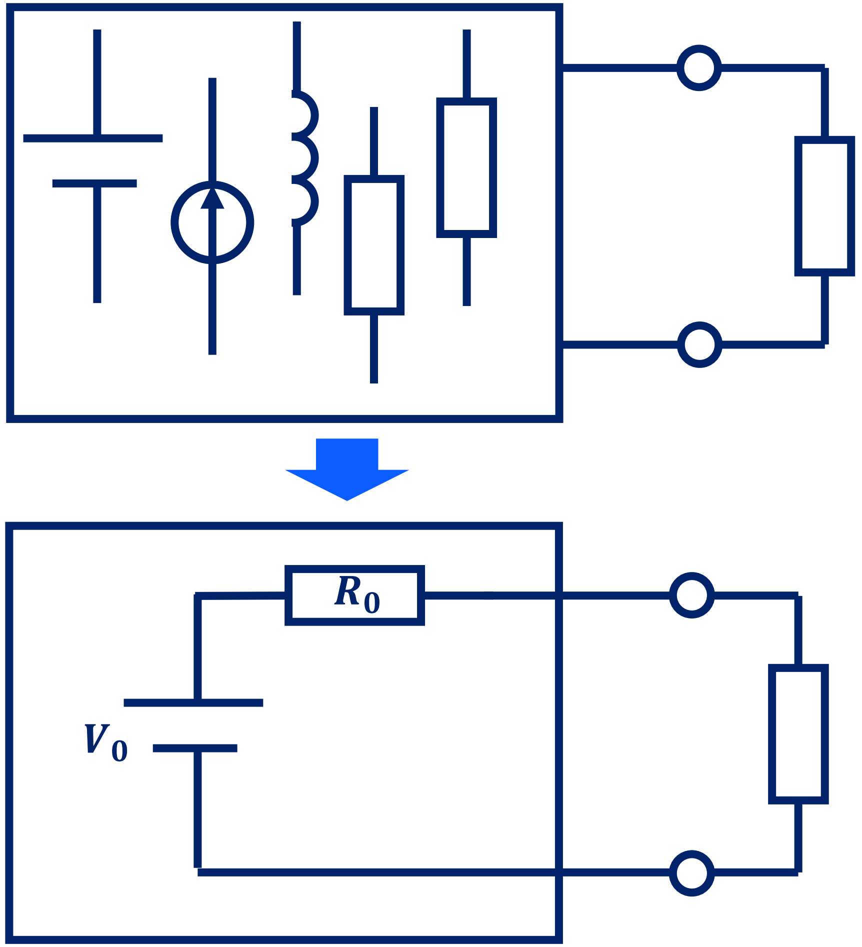
$$I_2 = I'_2 + I''_2$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3$$

鳳-テブナンの定理

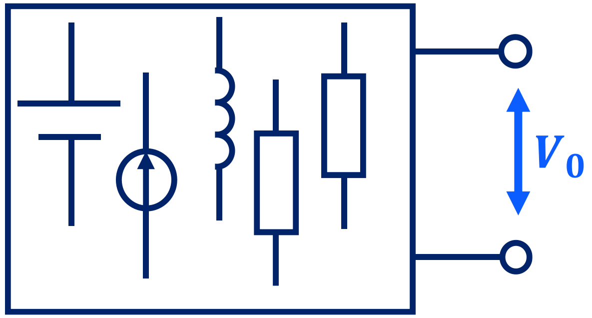
鳳-テブナンの定理

どんな複雑な回路網でも任意の２端子からみて1つの電圧源と1つの内部抵抗に置き換えることが出来る



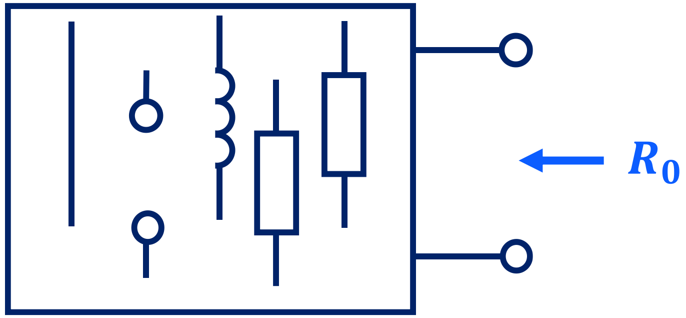
□ V_0の求め方

付加抵抗Rを取り外した時の開放電圧

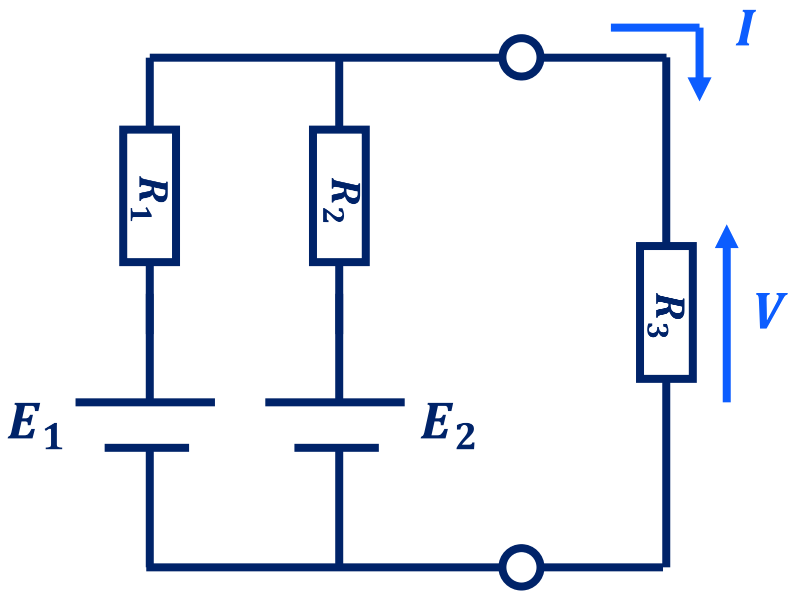


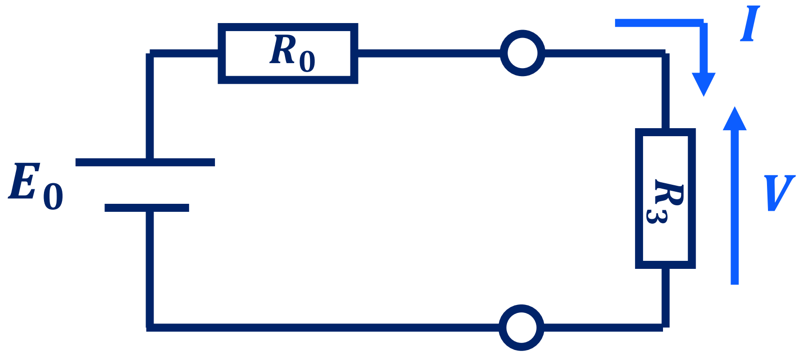
□ R_0の求め方

回路網の全ての電圧源を短絡除去・電流源を開放除去した時の終端から測った抵抗



テブナンの定理の適用例：負荷R_3に流れる電流I・掛かる電圧Vの計算





□ E_0の計算

R_3を開放した回路にキルヒホッフの電圧則を適用すると

$$E_1 - I'R_1 - I'R_2 - E_2 = 0 \rightarrow I' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

開放電圧E_0は

$$E_0 = E_1 - I'R_1 = E_1 - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}R_1 = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1 + R_2}$$

□ R_0の計算

E_1, E_2を短絡・ R_3を取り除いた回路の端子から見た抵抗は

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

□ Iの計算

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R_3} = \frac{\frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

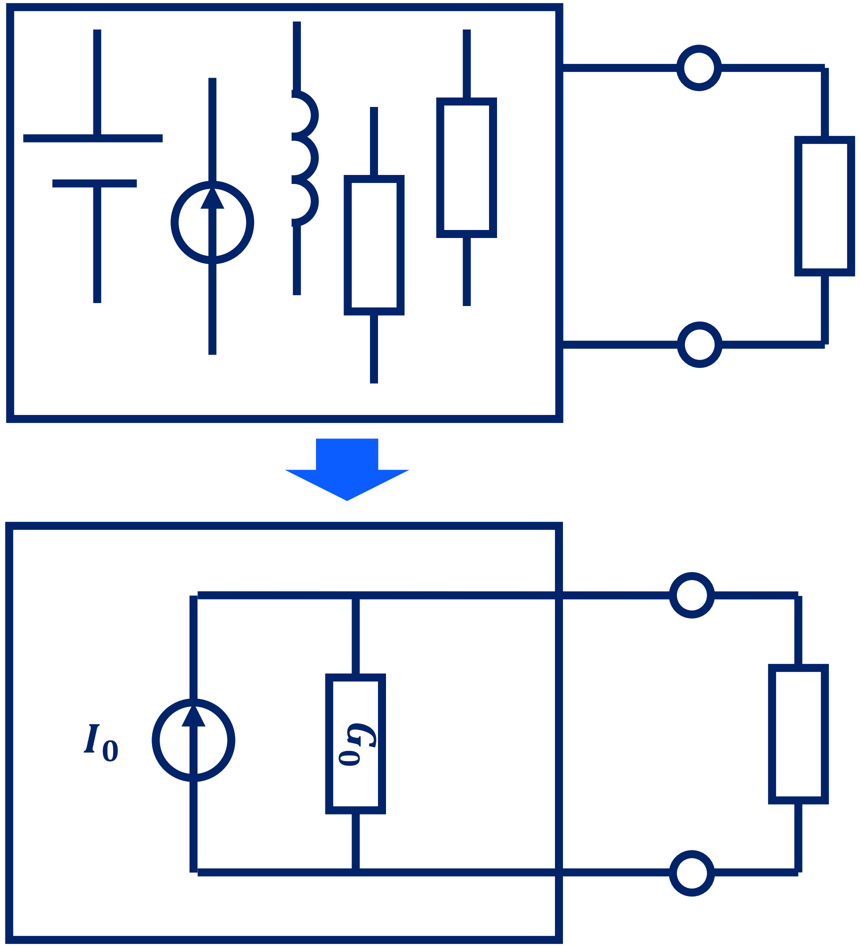
□ Vの計算

$$V = R_3I = R_3\frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

ノートンの定理

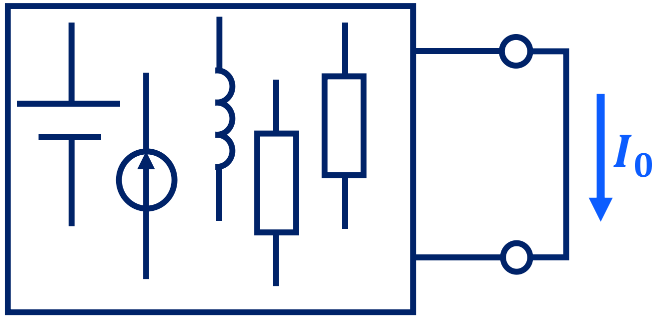
ノートンの定理

どんな複雑な回路網でも任意の２端子から見ると１つの等価電流源と１つの内部コンダクタンスで表現できる



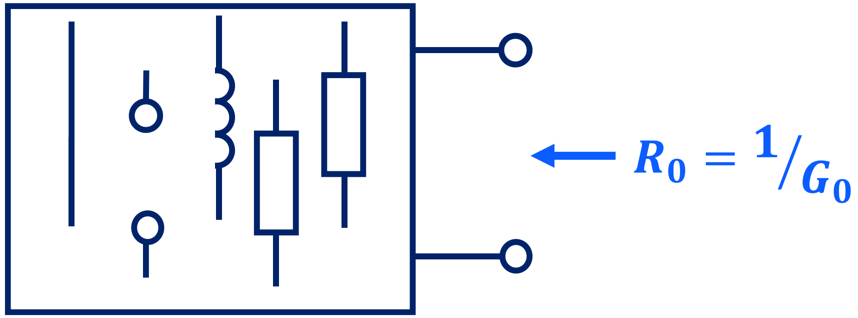
- I_0の求め方

付加抵抗Rを短絡した時に流れる電流

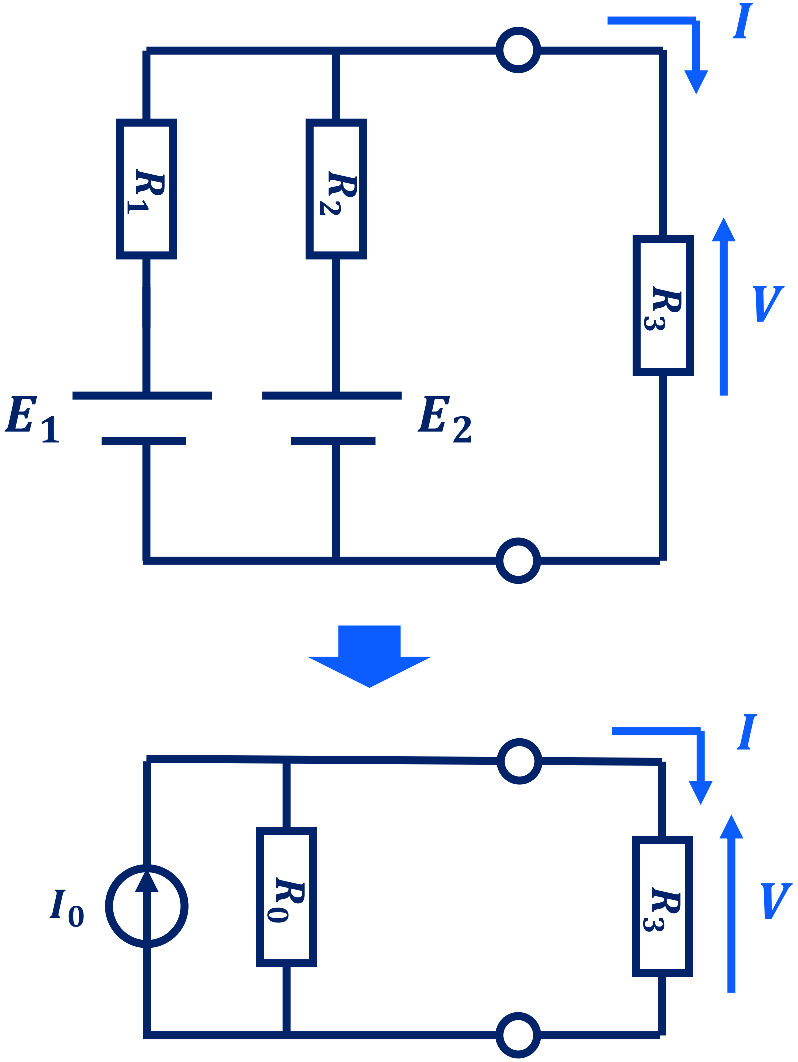


- G_0の求め方

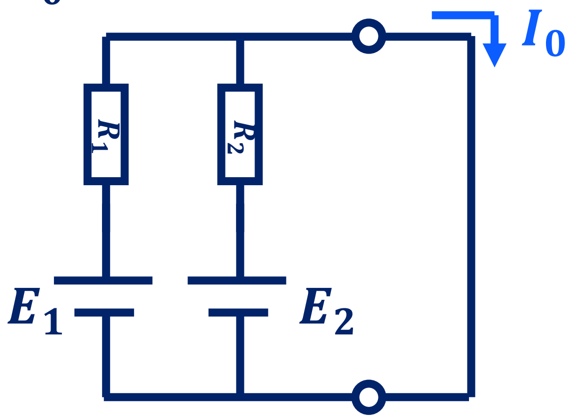
回路網の全ての電圧源を短絡除去・電流源を開放除去した時の終端から測った抵抗の逆数



ノートンの定理の適用例：負荷R_3に流れる電流I・掛かる電圧Vの計算



□ I_0の計算



$$I_0 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

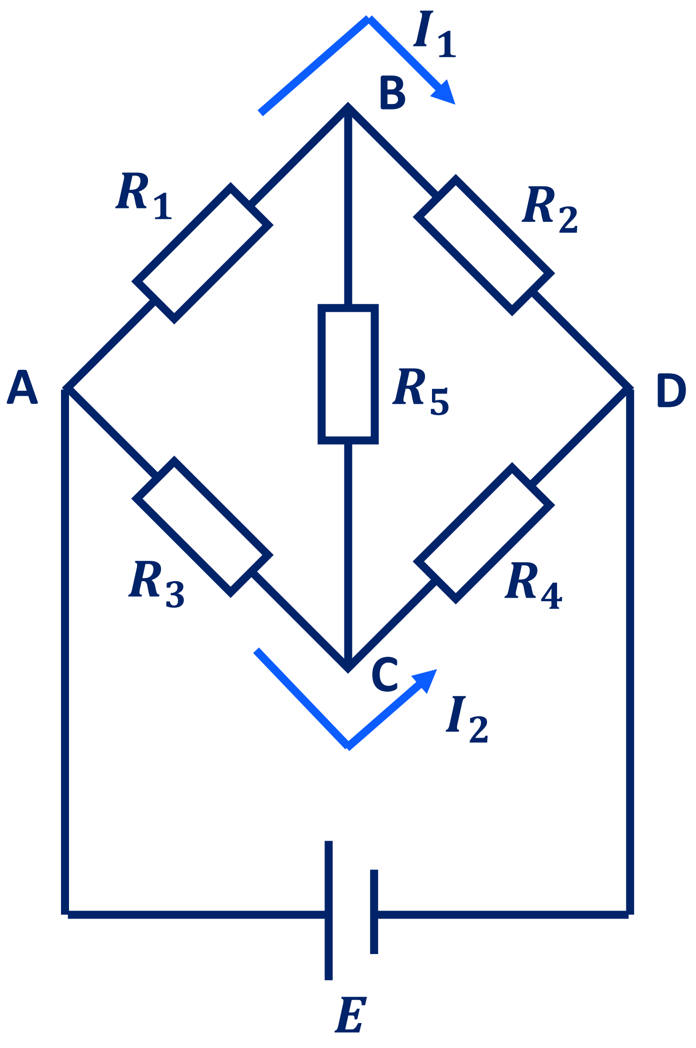
□ R_0の計算　$R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

よってIは

$$I = \frac{R_0}{R_0 + R_3} I_0 = \frac{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

となりテブナンの定理を使った時と同じ結果を得る

ブリッジ回路

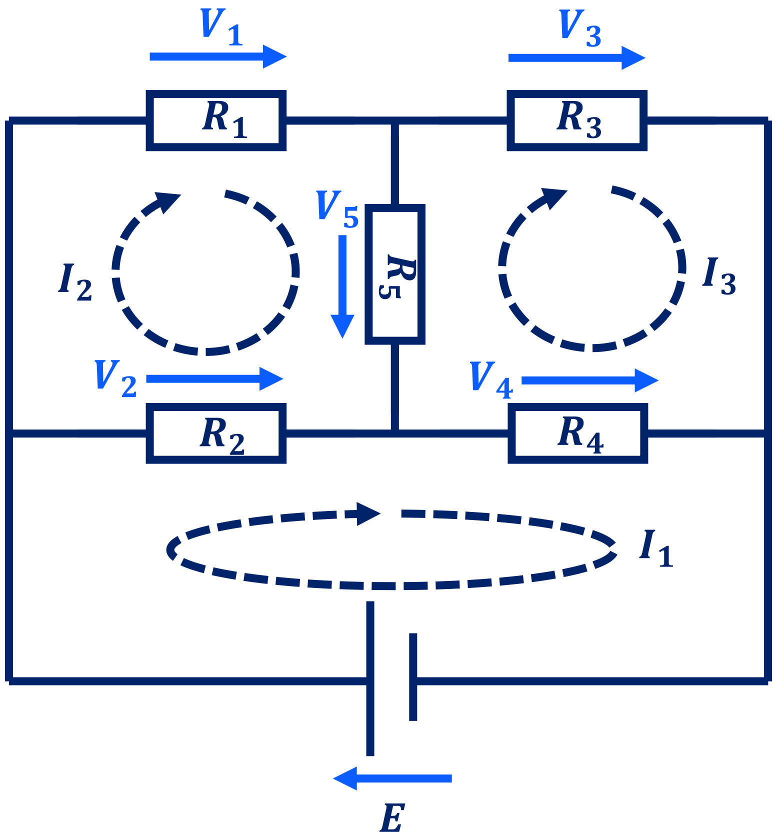


ブリッジ回路：
R_1～ R_4を菱形に組みR_5をブリッジを掛けるように接続した回路

ブリッジ回路の平衡条件：
- $R_1R_4 = R_2R_3$が成り立つとき，端子B・C間の電位が等しい
  ⇒ R_5に流れる電流はゼロ
- これをブリッジ回路の平衡条件と呼ぶ

平衡条件の導出（簡単なので各自試してみること）：
- 閉路ACBA及び閉路BCDBについてキルヒホッフの電流則を適用する方法
- 直列接続抵抗の分圧に着目する方法

不平衡時のブリッジ回路の解析（オーソドックスな解き方）



- I_1の閉路に対してキルヒホッフの電圧則を適用すると…

$$V_2 + V_4 + E = 0$$

- 同様にI_2, I_3の閉路に対しても適応すると…
  - $V_1 + V_5 - V_2 = 0$
  - $V_3 - V_4 - V_5 = 0$
- オームの法則から
  - $V_1 = -R_1 I_2$
  - $V_2 = R_2(I_2 - I_1)$
  - $V_3 = -R_3 I_3$
  - $V_4 = R_4(I_3 - I_1)$
  - $V_5 = R_5(I_3 - I_2)$
- (1)〜(3)に代入して整理すると
  - $-(R_2 + R_4)I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_3 = -E$
  - $R_2 I_1 - (R_1 + R_2 + R_5)I_2 + R_5 I_3 = 0$
  - $R_4 I_1 + R_5 I_2 - (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = 0$
- これを解いて

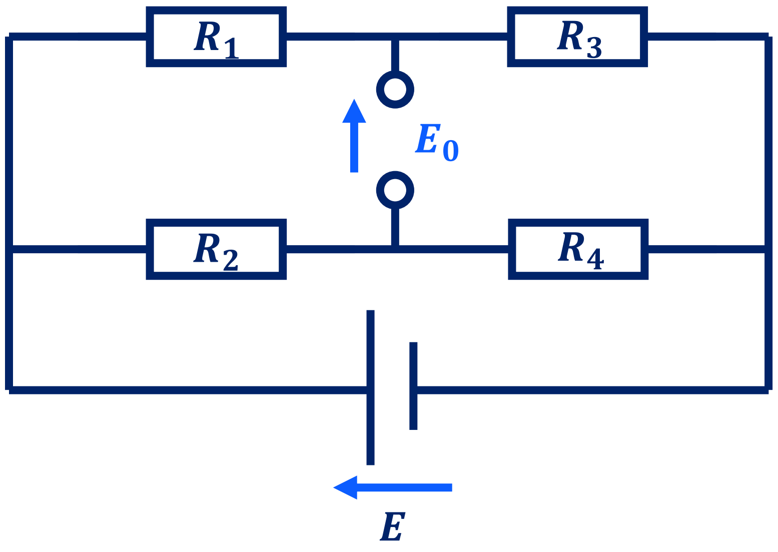
$$I_1 = -\frac{E}{\Delta}(R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_5 + R_4R_5)$$

$$I_2 = -\frac{E}{\Delta}(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5)$$

$$I_3 = -\frac{E}{\Delta}(R_2R_5 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_4R_5)$$

ただし $\Delta = -(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_3R_4R_5)$

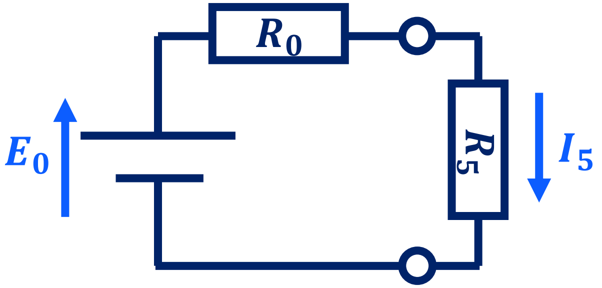
不平衡時のブリッジ回路の解析（テブナンの定理を使った解法）



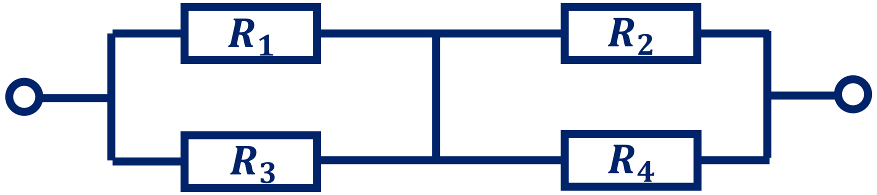
- 抵抗R_5を取り除いた回路を考える
- 開放電圧E_0と，電圧源を短絡した時の端子から見た抵抗R_0は以下となる

$$E_0 = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) E \qquad R_0 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

- 等価回路は以下のようになる



電圧源Eを短絡して，整理した図



- よって抵抗R_5に流れる電流I_5は以下のようになる（Δは前ページと同じ）

$$I_5 = \frac{E_0}{R_0 + R_5} = \frac{E}{\Delta} (R_2 R_3 - R_1 R_4)$$

前ページの$I_3 - I_3$とI_5が等しくなることを確かめること

まとめ

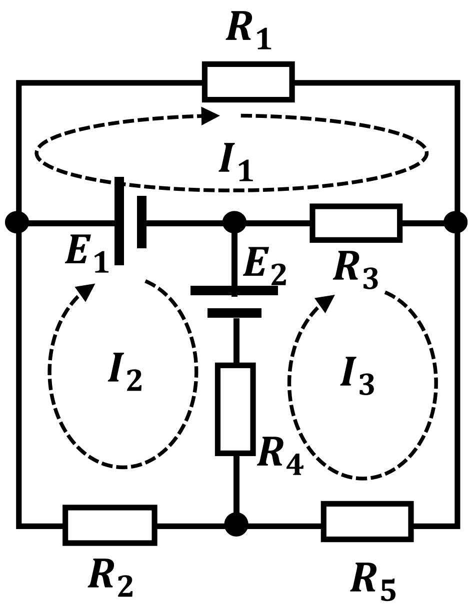
- キルヒホッフの法則
  - 電圧則：任意の閉回路中に存在する電圧の和はゼロである
  - 電流則：回路網の任意の接点に流れ込む電流と流れ出す電流の総和はゼロである

- 重ね合わせの理
  - 電圧源・電流源が複数ある場合に回路を簡単化するために使う

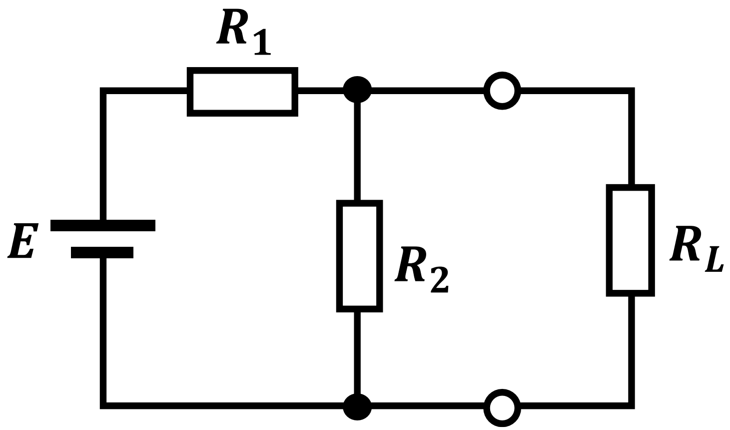
- テブナンの定理 / ノートンの定理
  - 特定の抵抗に流れる電流・両端の電位差を知りたい場合に便利

課題

問1：図の回路でループ電流
I_1～I_3を求めなさい。



問2：図の回路で抵抗R_Lで消費される電力が最大となるようなR_Lの値をR_1，R_2及びEを用いて表しなさい。ただし，「電圧の内部抵抗と負荷抵抗が等しいとき負荷抵抗で消費される電力は最大となる」ことを用いても良い。



- CLEで提出すること
  - latex, powerpoint, word等はpdfに変換すること
  - 手書きの場合は写真を撮るなどして画像データで提出すること

- 計算過程が書いていないものは採点しない
- 一方で，解き方があっていれば計算ミスなどは減点しない