R3 院試解答
井上研究室版

大問 1:鶴
大問 2:柏原
大問 3:田邉
大問 4:小池
大問 5:水上
大問 6:北庄司

2021 年 4 月 26 日

概 要

これを読む皆さんは，おそらく阪大の大学院を志しているのでしょう．この答えをあてにしておられる方も多いかと思われます．しかし，1 つ注意してください．ここに書かれているのは公式の答えではありません．あくまでも皆さんの先輩による「こうなんじゃないかな〜」という私見です．とはいえ一応大学院に合格した人が書いているわけですから 6 割ぐらいは信用していただいて構いません．その上で，合格をより確実なものにしたければ他研究室や友達の答えも参考にしつつ勉強することをお勧めします．私たちは頑張る皆さんを応援しています．

1　アルゴリズムとプログラミング

1.1　解答

1. ```
   d 4
   d 2
   p 3
   p 5
   p 1
   ```

2. (a) (A) `qd[i-1]` (B) `d`
   (C) `qd[i-1]` (D) `qd[i]`

   (b) `NMAX - 1`

   (c) ```
   d 4
   d 3
   p 5
   p 2
   p 1
   ```

   (d) ```
   7
   1
   2
   3
   4
   5
   0
   0
   ```

   (e) `int` 型の範囲で表現できる正整数が `(NMAX-1)` 個連続かつ昇順で重複無く並ぶデータを含むとき．

### 1.2　解説

(1)

図のプログラムのデータ構造は，問題文でも示されている通り FIFO キュー (First-in Frist-out Queue) である．qdata.txt から入力された数値が，
   ```

- 正整数であるならば, その値を末尾に格納する (Enqueue)
- 0 であるならば，先頭の値を取り出す (Dequeue)

という動作を行えば良いから, 次の手順に従って標準出力を書き下せば良い．ただし, 関数 `dequeue` 内でキューから取り出される値を標準出力しているため, 該当部分の関数 `printf` を見逃さないように．また，qdata.txt の 1 行目の数値は操作回数を示すため，**7 という値を格納してはならない**．なお，[] 内の数値は，該当操作が終了した直後のキューの状態を示す．

1. 値 4 を格納 [4]
2. 値 4 を取り出し []
3. 値 2 を格納 [2]
4. 値 3 を格納 [2, 3]
5. 値 2 を取り出し [3]
6. 値 5 を格納 [3, 5]
7. 値 1 を格納 [3, 5, 1]
8. キューの中身を標準出力 [3, 5, 1]

(2)
情報科学科開講科目「データ構造とアルゴリズム」では取り扱わない，優先度付きキュー (Priority Queue) からの出題である．キューの内容を Enqueue 時に優先度が高い順にソートする処理が付与された FIFO キューであり，アルゴリズムに対する理解のし易さは他の複雑なもののそれと比べても大きい．
ただし，本設問では,「配列の要素の値が高いほど優先度が高い」という手法を採用しているため，競技プログラミング等で「配列の要素の値が低いほど優先度が高い」という手法に慣れている人は特に注意しなければならない．
(2-1)
修正後の関数 `enqueue` では，キューにおけるデータの並びが降順になるように，挿入データ `d` が入る添字を決定し，挿入データより小さい値の元から存在するデータを 1 個だけ添字の大きい方にずらすという処理を行う．この処理と合致するように空欄に入る式を記述すれば良い．
(2-2)
本設問で使用するキューでは，キューの先頭の添字 `qhead` と末尾の添字 `qtail` とが一致するならばキューは空である，と定義している．しかし，この実装では, 配列の要素が全て埋まった場合，すなわちキュー内のデータ数が `NMAX` 個である場合も，`qhead` と `qtail` との値が一致する．
したがって，配列の要素を全て埋めると空かどうかの判定が正しく動作しないと考えられる．
(2-3)
(1) と同様の要領で出力結果を書き下せば良い．なお，[] 内の数値は，該当操作が終了した直後のキューの状態を示す．

1. 値 4 を格納 [4]
2. 値 4 を取り出し []
3. 値 2 を格納 [2]
4. 値 3 を格納 [3, 2]
5. 値 3 を取り出し [2]
6. 値 5 を格納 [5, 2]
7. 値 1 を格納 [5, 2, 1]
8. キューの中身を標準出力 [5, 2, 1]

(2-4)
Enqueue 時にキュー配列の要素を降順に並べる必要があるため，データの挿入前に $O(n)$ だけ配列データをずらす必要がある．ここで，挿入するデータがキュー配列内に格納されている任意の値よりも大きいならば, キューの先頭に挿入する必要があるため，データをずらす処理を n 回行わなければならない．したがって, qdata.txt 内の 1 行目以外のデータを昇順に並べると良い．
なお，データの削除を先に行うと配列の要素数が減少するため，削除処理は末尾に移動させる．
(2-5)
解答の通りである．

1.3　所感

本年度はニアミスを誘導させるような要素が多かった．事実，本設問の解答・解説作成者は，この PDF における「解説」欄で指摘した点に気づかなかったため大きく失点している．

例年，必須問題「アルゴリズムとプログラミング」は他の設問と比べて難易度が低いため，軽く見ても問題ないように見える．しかし，令和 3 年度のように，問題自体は難しくないが問題文をよく読まないと失点する要素を含む場合が予想されるため，問題文およびソースコードをしっかりと吟味しなければならない．

2　計算機システムとシステムプログラム

2.1　解答

(1). (1-1) (あ) (F)

(い) (E)

(う) (B)

＜え＞ 0.25

(1-2) 0.003s

(2). (2-1) 下の表を参照。

ファイル A の先頭ブロック番号:0　空き領域の先頭ブロック番号:4

i:ブロック番号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ii:次のブロック番号	1	2	end	6	7	end	8	9	5	10	11	end

(2-2) 下の表を参照。

i:ブロック番号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ii:空き状態	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

(2-3) 探索時間が長くなり、最終的に $O(P)$(P はブロック数) に近づく。

理由：ビットマップのみの管理方式では、ファイルのスペースを確保する際連続した領域が必要となる。空きブロック数が多いときにはすぐに条件を満たす領域を見つけられるが、少ないときは該当する領域がなかなか見つからず、最悪計算量 $O(P)$ に近づく。

2.2　解説

(1-1)

基本的な用語を押さえましょう。イメージを掴めない方はグーグルすればわかりやすい図がたくさん出でくるのでぜひ利用してください。

- セクタ：トラックの一部、ハードディスク側の読み書きの最小単位。

- トラック：プラッタの記録面を外周から内周に向かって同心円状に分割されたドーナツ状の記録領域。
- プラッタ：平滑な円盤状の記録用部品。
- クラスタ：いくつかの論理的に連続したセクタをまとめた領域。ファイルシステム側の読み書きの最小単位。
- シリンダ：すべてのプラッタ記録面にまたがる同半径な同心円上のトラックの集合。

(1-2)
ヘッドが移動し終えた後、読み書きの単位であるセクタの開始位置に触れるようにディスクを回転させる必要がある。移動完了直後の位置は該当するトラックの上ではランダムであるとみなせるので、最悪待ち時間は一回転する時間 0.006s、最良待ち時間は 0 秒だから、平均待ち時間は一回転する時間のちょうど半分の 0.003s である。
(2-1)
ファイルの大きさは 15KB、ブロックの大きさは 4KB から、4 ブロック分の領域を確保する必要があるとわかる。すなわち空き領域の先頭：ブロック 3 から 4 ブロック分ファイルに割り当てればよい。ここでブロックの順番を参照すると $3 \to 6 \to 8 \to 5 \to 4 \to \cdots$ であるゆえ、ファイルの末尾に当たるブロック 5 の次のブロック番号を end と置いて、ブロック 5 の次はブロック 4 だから、空き領域の先頭ブロック番号が 4 になる。
(2-2)
(2-1) と同様なサイズのファイルなので、やはり 4 ブロック分の領域を確保する必要がある。ビットマップは単純にブロック番号を昇順に走査していき、空きブロックを発見したらすぐ割り当てるので、3~6 を 0 で埋め、そのあとのブロック番号に対する空き状況はそのままにする。
(2-3)
解答の通りである。

2.3 所感

計算機システムとシステムプログラムというテーマでは難しい問題が少なく、基本的な知識点を押さえていればそれだけで高得点につながるので、このテーマの問題に対しては、過去問と教科書を見返すだけで十分だと感じました。

3　離散構造

3.1　解答

(1).

$$\begin{aligned} f_1(1.5) &= 1.5 \\ f_2(2.5) &= 5 \\ f_3(1.5) &= 35 \end{aligned}$$

(2). 真：$n=1$ のとき，$f_1(x) = x\lfloor f_0(x)\rfloor = x$．よって $x, y \in [0,\infty) \wedge x \neq y \to f_1(x) \neq f_1(y)$．
したがって，$n = 1 \in \mathbb{Z}_0$ が存在し f_1 は単射．

(3). 偽：$n=2$ のとき，$f_2(x) = x\lfloor x\rfloor$ となる．ここで，$x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x$ より，$\lfloor x\rfloor = k (k \in \mathbb{Z}_0)$ と置くと，$k \leq x < k+1$．よって $k^2 \leq f_2(x) < k(k+1)$ となる．このとき，$f_2(x) = 2$ を満たすような k は存在せず，そのような x も存在しない．したがって，$n=2$ のとき 2 に対する元が存在しないので f_2 は全射ではない．

(4).(4-1) (2) より，任意の $k \in \mathbb{Z}_0$ に対して $(h,n,m) = (2k,1,1)$ で $(k,k) \in R$．よって R は反射的．

(4-2) $(h,n,m) = (4,1,2)$ が存在し $(2,4) \in R$．$(h,n,m) = (4,2,1)$ が存在し $(4,2) \in R$．$2 \neq 4$ より R は反対照的ではない．

(5).(5-1) $x = 13+\varepsilon(\varepsilon \in [0,1))$ とすると，$f_2(x) = 13+\varepsilon\lfloor 13+\varepsilon\rfloor = 169+13\varepsilon$．よって $f_2(x)$ は 169 以上 182 未満のすべての実数を取りうる．171 はこの範囲に含まれるので $x = 13+\varepsilon$ は $f_2(x) = 171$ の解として成り立つ．

(5-2) $\frac{171}{13}$

(6). $\frac{171}{29}$

3.2　解説

(1)

単なる計算問題．凡ミスに気をつけたい．

$$\begin{aligned} f_1(1.5) &= 1.5\lfloor f_0(1.5)\rfloor = 1.5 \\ f_2(2.5) &= 2.5\lfloor f_1(2.5)\rfloor \\ &= 2.5\lfloor 2.5\lfloor f_0(2.5)\rfloor\rfloor = 2.5\lfloor 2.5\rfloor = 5 \\ f_3(1.5) &= 3.5\lfloor 3.5\lfloor 3.5\rfloor\rfloor = 3.5\lfloor 3.5\times 3\rfloor = 35 \end{aligned}$$

(2)

単射：$f: A \to B$ に対して $\forall a, b \in A[a \neq b \to f(a) \neq f(b)]$

これを f_1 が満たすことを示す．(1) の時点で気づけると良い．

(3)

全射：$f: A \to B$ に対して $\forall b \in B \exists a \in A[b = f(a)]$

一見すると難しいが適当な数字を当てはめれば成り立たないことがすぐにわかる．偽であるので反例を 1 つ示せば良い．$\lfloor x\rfloor = k(k \in \mathbb{Z}_0)$ と置くのがポイント．

(4)

二項関係に関する定義は問題に出ている限りではなくすべて覚えることをお勧めする．この問題に関してはどちらも直感的に理解でき，具体的な数字を当てはめれば証明できる．

(4-1)

反射的：A 上の二項関係 R に対して $\forall a \in A[aRa]$

(4-2)

反対称的：A 上の二項関係 R に対して $\forall a, b \in A[aRb \wedge bRa \to a = b]$

(5)

この問題からは方程式の解を求める問題に移る．しかし，丁寧な導入が付いているため難易度は高くない．

(5-1)

解答の通りである．

(5-2)

(5-1) より，$171 = 169+13\varepsilon$．これを解いて $\varepsilon = \frac{2}{13}$．これを代入して $x = 13+\varepsilon = \frac{171}{13}$

(6)

(5-1) と同様に $\varepsilon \in [0,1)$ を用いると $x = 5+\varepsilon$ で 125 となり，解として成り立つ可能性があることがわかる ((4) のときとは異なり，あくまで可能性である事に注意)．(5-2) と同様に計算すると $x = \frac{171}{29}$ となる．これを $f_3(x) = 171$ に代入して検算すると成り立つことから解となっていることがわかる．

3.3　所感

本年度の問題は全体を通して昨年度の問題から大きく易化しており，凡ミスをいかにしないかが大事であったと思う．この大問 3 に関しても例年の問題傾向とはやや異なるものの，過去 10 年ほどの間に出題された問

題に答えられるだけの知識があれば十分に解ける問題であった．二項関係や写像に関する最低限の知識は備えた上で臨みたい．

4　計算理論

4.1　解答

(1) ((a)),(a+a),a*a*a,a*(a),(a)*a,a*a+a,a+a*a,a+a+a

(2) a+a+a,a+a*a,a*a+a,a*a*a

(3) 差集合 $W_1 - W_2$ に含まれる文字列を数式と解釈した際，括弧が計算の順序に影響を与える数式が存在していないため，括弧が数式に与える影響はない．

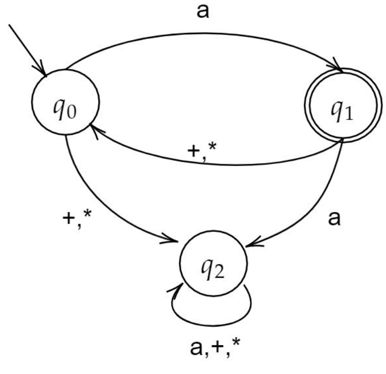
(4-あ)

$\{S \rightarrow A, S \rightarrow S + A, A \rightarrow B, A \rightarrow A * B, B \rightarrow a, B \rightarrow (S)\}$

(4) 方針　結合の強さに応じて，生成規則の頭部を分割することで生成規則を考案した．S が式，A が項，B が因数に該当する．

(5-a) この言語は前半が 0 個以上の'(' であり，後半に前半と同じ数の')' があり，前半と後半の間に a が挟まるような言語である．この言語が決定性有限オートマトンで認識できるならば, ある決定性有限オートマトン A で受理される．A の状態数を k とし, 入力として k 個以上の'(' からなる文字列を受け取った際，鳩の巣原理により，ある $(^i$ と $(^j$ $(i \neq j)$ を読み取った際同じ状態を取ることになる．この場合，残りの')' を正しく受理することが明らかに出来ないため，この言語は決定性有限オートマトンで認識することはできない．

(5-b)



4.2 所感

文脈自由文法，決定性有限オートマトンについてきちんと理解していれば，そこまで難しくないと思われる．過去問を解けば問題ないだろう．ただ，(1) や (2) での見落とし，(5) で全ての状態に置いて，すべての入力記号に対する遷移を表記することを忘れるといった単純なミスには十分注意すること．

5 ネットワーク

5.1 解答

(1)

(1-1) あ：搬送波　い：ジャム信号

(1-2)

(1-2-1) $\frac{L}{V}$

(1-2-2) B がフレームの送信を終了するまでに、A が送信したフレームの先頭ビットが B に到達すればよい。

よって、$\frac{F_B}{C} > \frac{L}{V}$ より、$F_B > \frac{CL}{V}$

(1-3) 同軸ケーブルが長くなれば、フレームが隣のステーションに到達するまでの時間が長くなり、確実に衝突を検出することができなくなるから。

(1-4) 接続先の MAC アドレスのテーブルを保持しておき、到達した MAC フレームのヘッダを確認して、必要なフレームを必要なポートへのみ中継する。

(1-5) 衝突の発生時、再送までの時間をランダムに決定し、また衝突が繰り返されるたびに再送時間の最大値を長くする。

(2)

(2-1) $p(0|0) = (1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2) + \epsilon_1\epsilon_2$
$p(1|1) = (1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2) + \epsilon_1\epsilon_2$
$p(0|1) = \epsilon_1(1-\epsilon_2) + (1-\epsilon_1)\epsilon_2$
$p(1|0) = \epsilon_1(1-\epsilon_2) + (1-\epsilon_1)\epsilon_2$

(2-2) $p(0|0) + p(1|0) = 1$、$p(1|1) + p(0|1) = 1$ であり、$p(0|0) \geq 0$、$p(1|1) \geq 0$、$p(1|0) \geq 0$、$p(0|1) \geq 0$ なので、$p(0|0) \geq p(1|0)$ かつ $p(1|1) \geq p(0|1)$ を示せばよい。

(2-1) より、$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)+\epsilon_1\epsilon_2 \geq \epsilon_1(1-\epsilon_2)+(1-\epsilon_1)\epsilon_2$ を変形した、$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)+\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_1(1-\epsilon_2) - (1-\epsilon_1)\epsilon_2 \geq 0$ を示す。

(左辺) $= (1-2\epsilon_1)(1-2\epsilon_2)$

$\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}$ 及び $\epsilon_2 \leq \frac{1}{2}$ より、$1-2\epsilon_1 \geq 0$、$1-2\epsilon_2 \geq 0$

よって、$(1-2\epsilon_1)(1-2\epsilon_2) \geq 0$

すなわち、$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)+\epsilon_1\epsilon_2 \geq \epsilon_1(1-\epsilon_2)+(1-\epsilon_1)\epsilon_2$

以上より、$a \neq b$ のとき、$p(b|a) \leq \frac{1}{2}$ である。

(2-3) 通信路 Γ は、送受信記号がそれぞれ 0 と 1 の 2 個である。

また、$\epsilon = \epsilon_1(1-\epsilon_2) + (1-\epsilon_1)\epsilon_2$ とすると、(2-1) より、$p(1|0) = p(0|1) = \epsilon$、$p(0|0) = p(1|1) = 1-\epsilon$ かつ、(2-2) より、$0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ となる。

以上より、通信路 Γ は、2 元対称通信路である。

5.2 解説

(1)

(1-1) CSMA/CD は、伝送前に通信路上に搬送波があるかを確認し、通信路が空いているときのみ伝送を行う搬送波検知（Carrier Sense Multiple Access）と、伝送中の衝突の発生を検知し、伝送を中止する衝突検出（Collision Detection）を合わせた方式である。衝突が検出された場合は、物理層によってジャム信号が送信される。

(1-2)

(1-2-1) （略）

(1-2-2) （略）

(1-3) 規格ごとに最大長や伝送速度といった制限が定められている。

(1-4) 同軸ケーブルの最大長を超えた伝送を行うための中継器には、ブリッジとリピータがある。ブリッジは MAC 層での接続であり、MAC 層が必要なイーサネットフレームのみを中継する。これに対し、リピータは物理層での接続であり、受け取った全てのビット列を中継する。

(1-5) （略）

(2) 筆者は数学が死ぬほど苦手なので、本解答・解説の内容はくれぐれも過信しないでください。

(2-1) 送信者から中継点、中継点から受信者までのそれぞれの区間で記号誤りが発生しうるため、表 1 のような場合が存在する。

結果	送信 → 中継 → 受信	確率
$p(0\|0)$	$0 \to 0 \to 0$	$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)$
	$0 \to 1 \to 0$	$\epsilon_1\epsilon_2$
$p(1\|1)$	$1 \to 1 \to 1$	$(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)$
	$1 \to 0 \to 1$	$\epsilon_1\epsilon_2$
$p(0\|1)$	$1 \to 0 \to 0$	$\epsilon_1(1-\epsilon_2)$
	$1 \to 1 \to 0$	$(1-\epsilon_1)\epsilon_2$
$p(1\|0)$	$0 \to 1 \to 1$	$\epsilon_1(1-\epsilon_2)$
	$0 \to 0 \to 1$	$(1-\epsilon_1)\epsilon_2$

表 1: (2-1) 解説

(2-2) （略）

(2-3) 2 元対称通信路の定義は、送受信記号が共に 0、1 の 2 個であることと、実数 $\epsilon (0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2})$ に対して、遷移確率が

$$\begin{aligned} p_{Y|X}(1|0) &= p_{Y|X}(0|1) = \epsilon \\ p_{Y|X}(0|0) &= p_{Y|X}(1|1) = 1-\epsilon \end{aligned}$$

となることである。

5.3 所感

難易度という点では、それほど難しい問題・複雑な問題は出題されていない。ただし、知識を問う問題では、1 つの通信方式・規格に対して、それなりの深さの理解が求められる。満点を目指すのならば、分野内の内容について、広く深く記憶しておく必要があるだろう。説明を求める問題も複数あるため、単語の記憶だけでなく、仕組みや理由についても、正しく理解しておくこと。

6　電子回路と論理設計

6.1　解答

(1) **(1-1)** $i = \frac{E_1 - E_2}{R_1}$

(1-2) $i = \frac{E_1 - E_2}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}$

(1-3) $i = \frac{E_2}{R_2} \cdot e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}t} + \frac{E_1 - E_2}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}$

(2) **(2-1)**

a (0 0 1)

b (0 1 0)

c (0 1 1)

d (1 0 0)

e (1 0 1)

f (1 1 0)

g (1 1 1)

h (0 0 0)

(2-2)

$K_1 = Q_1 \oplus Q_0$
$K_0 = Q_0$

6.2　解説

(1) **(1-1)** スイッチを閉じていないことから左部の回路は電流が流れない．右部閉回路にキルヒホッフの電圧則を用いて導く．

(1-2) 左部，右部の閉回路それぞれに対してループ電流を割り当て，キルヒホッフの電圧則を用いて導く．

(1-3) 左部，右部の閉回路それぞれに対してループ電流を時計回りに i_1, i_2 と割り当てると以下の方程式が成り立つ．

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 - R_1 i_1 - L\tfrac{di}{dt} &= 0 \\ E_2 - R_2 i_2 + L\tfrac{di}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

$i = i_1 - i_2$ と上の式から

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{L(R_1+R_2)}{R_1 R_2}\frac{di}{dt}$$

$$-\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} = \frac{1}{i - \frac{E_1-E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}\frac{di}{dt}$$

この微分方程式を解くと

$$\begin{aligned} \ln|i - \tfrac{E_1-E_2}{R_1} + \tfrac{E_2}{R_2}| &= -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}t + C \\ &(C = const) \\ i + \tfrac{E_1-E_2}{R_1} - \tfrac{E_2}{R_2} &= Ae^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}t} \\ &(A = \pm e^C) \end{aligned}$$

$t < 0$ のとき　$i = \frac{E_1-E_2}{R_1}$ であるため，求めた関数に $t = 0, i = \frac{E_1-E_2}{R_1}$ を代入すると

$$A = \frac{E_2}{R_2}$$

(2) **(2-1)**　D_2, D_1, D_0 の論理式を立てることで導く．

$$\begin{aligned} D_2 &= Q_2 \oplus (Q_0 \wedge Q_1) \\ D_1 &= Q_1 \oplus Q_0 \\ D_0 &= \neg Q_0 \end{aligned}$$

(2-2)　(2-1) の状態遷移表から K_1, K_2 のカルノー図を作成すると表 2, 表 3 ようになる．

K_1		Q_1Q_0			
		00	01	11	10
Q_2	0	0	1	0	1
	1	0	1	0	1

表 2: K_1 のカルノー図

K_0		Q_1Q_0			
		00	01	11	10
Q_2	0	0	1	1	0
	1	0	1	1	0

表 3: K_0 のカルノー図

表より K_1 は Q_1 と Q_0 の排他的論理和であり，K_0 は Q_0 のみに依存することが分かる．

6.3　所感

難易度は低いが，ある程度の計算力が必要である．特に (1) では符号のミスが起きやすいので注意すること．