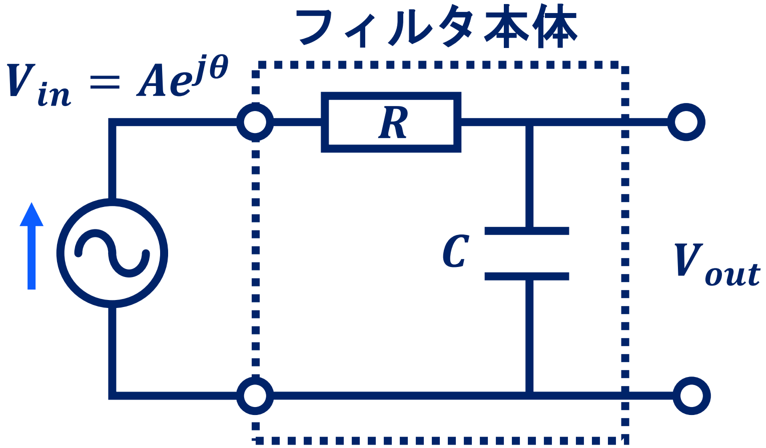
電子回路：第5回　フィルタ

基礎工学部情報科学科

粟野 皓光

awano@ist.osaka-u.ac.jp

低域通過フィルタ（ローパスフィルタ; Low-pass Filter）



直列インピーダンスによる分圧を考えるとV_{out}とV_{in}の関係は

$$V_{\text{out}} = \frac{\frac{1}{j\varpi C}}{R + \frac{1}{j\varpi C}} V_{\text{in}} = \frac{1}{1 + j\varpi CR} V_{\text{in}} = G(\varpi) V_{\text{in}} = |G(\varpi)| e^{j\angle G(\varpi)} V_{\text{in}}$$ と書ける

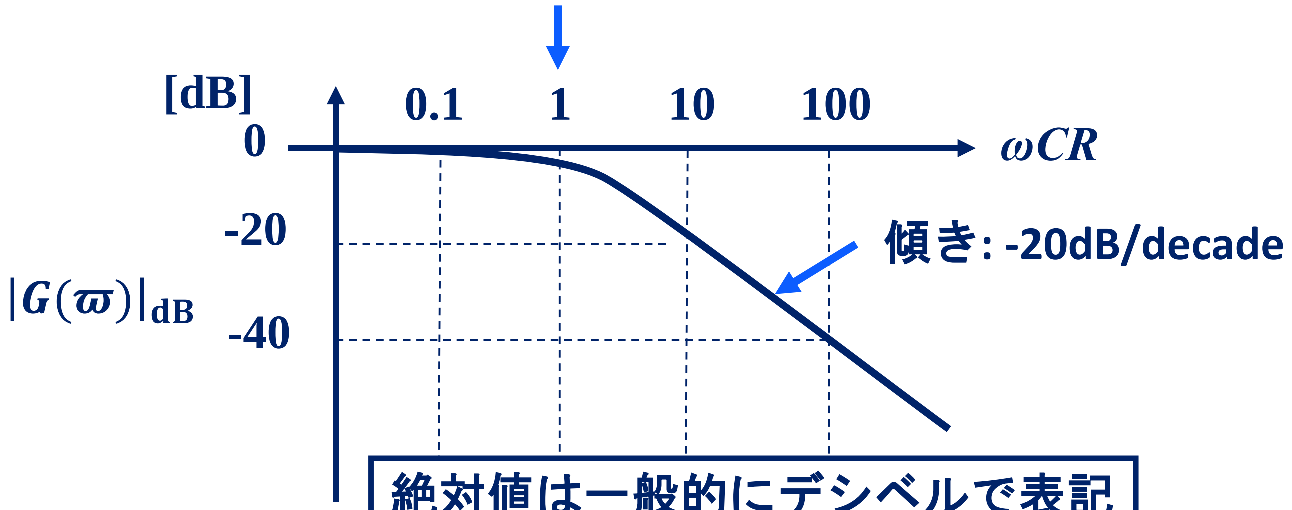
ただし
- $G(\varpi) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1+j\varpi CR}$
- $|G(\varpi)| \equiv \frac{1}{\sqrt{1+(\varpi CR)^2}}$　　$G(\varpi)$ の絶対値
- $\angle G(\varpi) \equiv -\tan^{-1} \varpi CR$　　$G(\varpi)$ の偏角

$V_{\text{in}} = Ae^{j\theta}$なので，$V_{\text{out}}$は $V_{\text{out}} = A|G(\varpi)|e^{j(\theta + \angle G(\varpi))}$ と書ける

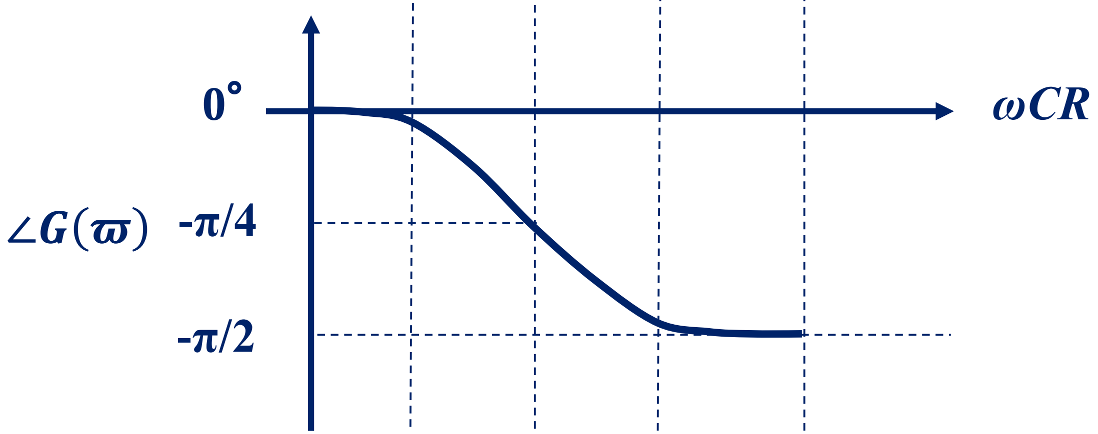
低周波数側（$\varpi \to 0$）	高周波数側（$\varpi \to \infty$）
$\lvert G(\varpi)\rvert \to 1, \angle G(\varpi) \to 0$	$\lvert G(\varpi)\rvert \to 0, \angle G(\varpi) \to -\frac{\pi}{2}$
入力波形の □ 振幅 □ 位相 は変化しない	入力波形の □ 振幅は減少 □ 位相は$-\frac{\pi}{2}$に近付く

ボード線図　角周波数ϖを変化させたときの$|G(\varpi)|$・$\angle G(\varpi)$の変化を図示したもの

RとCのインピーダンスが逆転する周波数
（カットオフ周波数：$\omega_C = 1/CR$）



絶対値は一般的にデシベルで表記
$|G(\varpi)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|G(\varpi)|$



$\omega \ll \omega_C$の場合

$$G(\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi CR} \approx \frac{1}{1} = 1$$

- $|G(\varpi)|_{dB} = 20\log_{10}1 = 0$
- $\angle G(\varpi) = -\tan^{-1} 0 = 0$

$\omega = \omega_C$の場合

$$G(\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi CR} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{2}(1 - j)$$

- $|G(\varpi)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\mathrm{dB}$
- $\angle G(\varpi) = -\tan^{-1} 1 = -\pi/4$

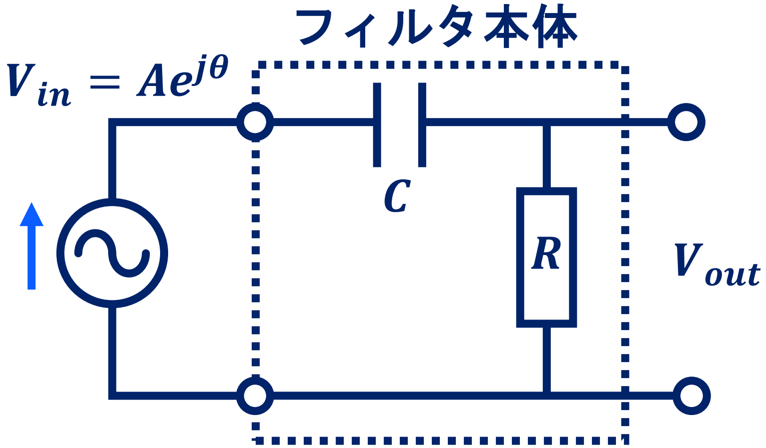
$\omega_C \ll \omega$の場合

$$G(\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi CR} \approx \frac{1}{j\varpi CR}$$

$j\varpi$で割っている
=積分

- $|G(\varpi)|_{dB} = -20\log_{10}(\varpi CR)$
- $\angle G(\varpi) = -\pi/2$

高域通過フィルタ（ハイパスフィルタ; High-pass Filter）



直列インピーダンスによる分圧を考えるとV_{out}とV_{in}の関係は

$$V_{\mathrm{out}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\varpi C}} V_{\mathrm{in}} = \frac{j\varpi CR}{1 + j\varpi CR} V_{\mathrm{in}} = G(\varpi) V_{\mathrm{in}} = |G(\varpi)| e^{j\angle G(\varpi)} V_{\mathrm{in}}$$ と書ける

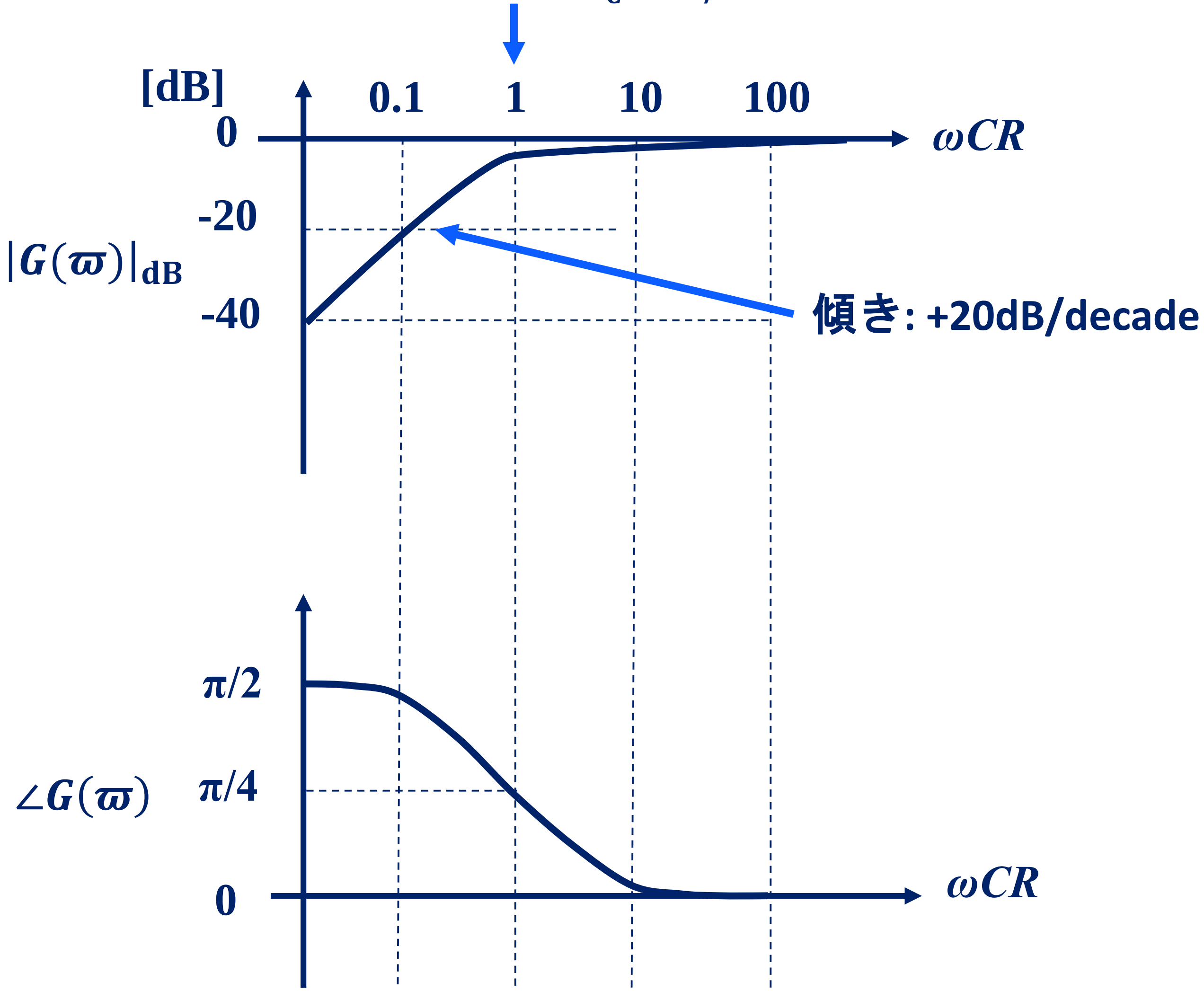
ただし
- $G(\varpi) \equiv \frac{V_{\mathrm{out}}}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{j\varpi CR}{1+j\varpi CR}$
- $|G(\varpi)| \equiv \frac{\varpi CR}{\sqrt{1+(\varpi CR)^2}}$　　$G(\varpi)$ の絶対値
- $\angle G(\varpi) \equiv \tan^{-1}\frac{1}{\varpi CR}$　　$G(\varpi)$ の偏角

$V_{\mathrm{in}} = Ae^{j\theta}$なので，$V_{\mathrm{out}}$は $V_{\mathrm{out}} = A|G(\varpi)|e^{j(\theta+\angle G(\varpi))}$ と書ける

低周波数側（$\varpi \to 0$）	高周波数側（$\varpi \to \infty$）
$\lvert G(\varpi)\rvert \to 0, \angle G(\varpi) \to \frac{\pi}{2}$	$\lvert G(\varpi)\rvert \to 1, \angle G(\varpi) \to 0$
入力波形の ☐ 振幅は減少 ☐ 位相は$\frac{\pi}{2}$に近付く	入力波形の ☐ 振幅 ☐ 位相 は変化しない

ボード線図

RとCのインピーダンスが逆転する周波数
（カットオフ周波数：$\omega_C = 1/CR$）



$\omega \ll \omega_C$の場合

$$G(\varpi) = \frac{j\varpi CR}{1 + j\varpi CR} \approx \frac{j\varpi CR}{1} = j\varpi CR$$

$j\varpi$を掛けている
=微分

- $|G(\varpi)|_{dB} = 20\log_{10}(\varpi CR)$
- $\angle G(\varpi) = \pi/2$

$\omega = \omega_C$の場合

$$G(\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi CR} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2}(1-j)$$

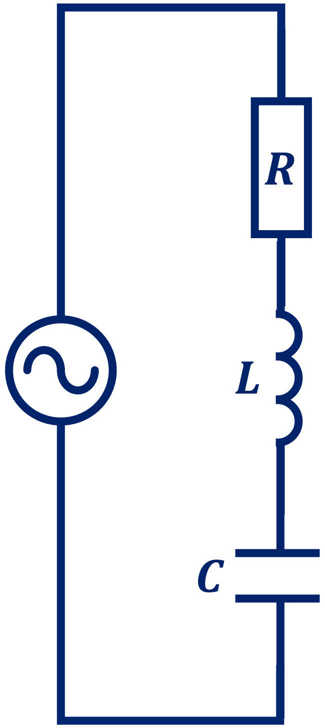
- $|G(\varpi)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\mathrm{dB}$
- $\angle G(\varpi) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$

$\omega_C \ll \omega$の場合

$$G(\varpi) = \frac{j\varpi CR}{1 + j\varpi CR} \approx \frac{j\varpi CR}{j\varpi CR} = 1$$

- $|G(\varpi)|_{dB} = 20\log_{10}1 = 0$
- $\angle G(\varpi) = \tan^{-1} 0 = 0$

RLC直列回路（再掲）



- 合成インピーダンスは

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

実部：レジスタンス　　虚部：リアクタンス

- リアクタンスが引き算になっており，周波数によってはリアクタンス＝０となる場合がある
  ⇒リアクタンス＝０となる周波数を共振周波数と呼ぶ

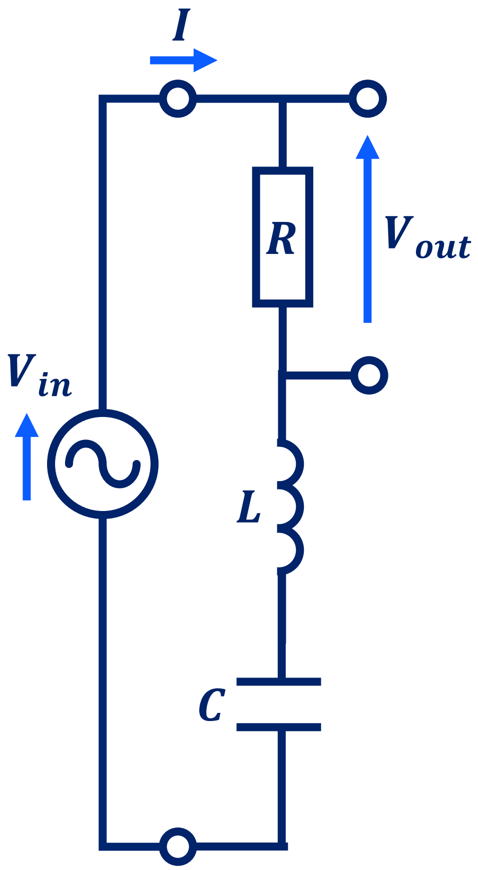
共振周波数をf_R，その時の角周波数をω_Rとすると　$\omega_R L - \frac{1}{\omega_R C} = 0$　なので

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \left(f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)$$

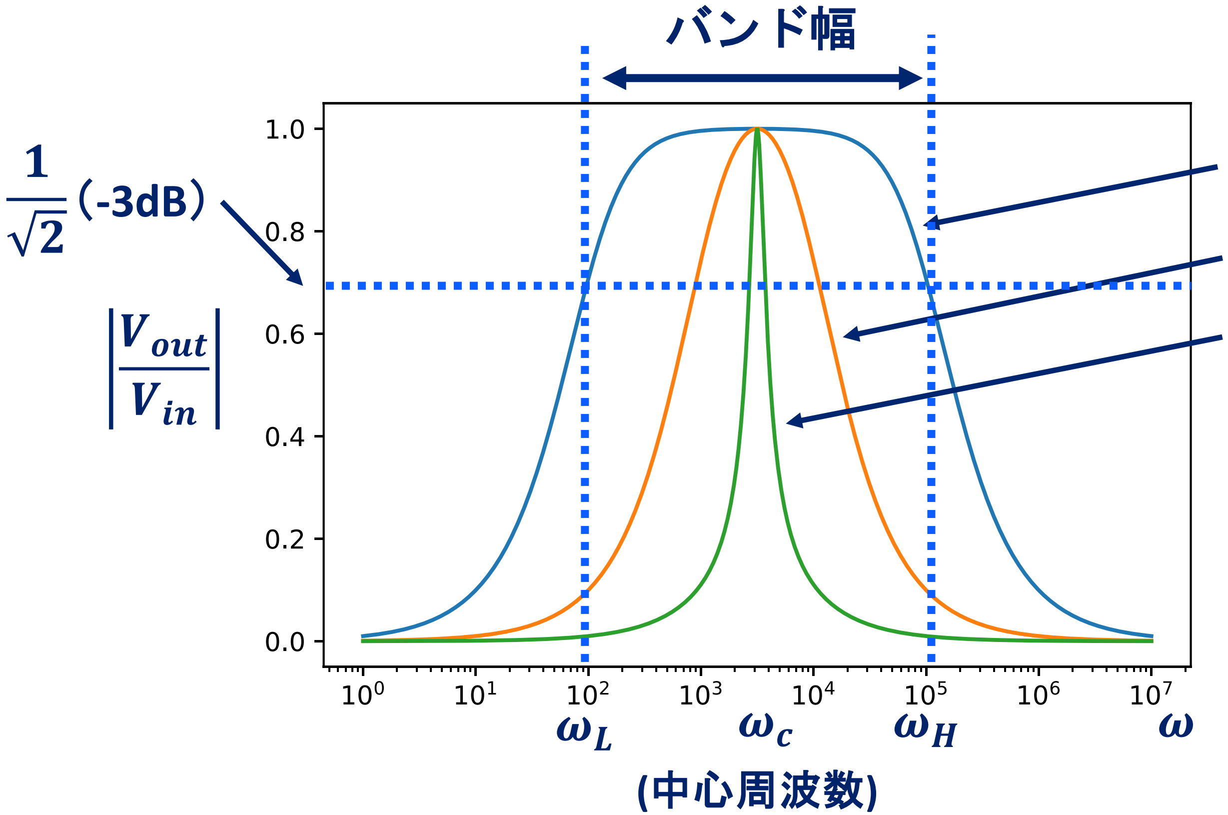
- この時，以下のことが成り立つ
  1. Zは純抵抗，インピーダンスの絶対値は最小
  2. LとCは短絡されたのと同じ
  3. 電圧・電流の位相差は0

帯域通過フィルタ（バンドパスフィルタ；Band Pass Filter）

RLC回路の両端に入力信号を，Rの両端から出力を取り出すと，特定の周波数の信号を通過させるフィルタ（帯域通過フィルタ）として機能する



図の回路で電流Iは $I = \dfrac{V_{in}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$ となるため $\dfrac{V_{out}}{V_{in}} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{1}{R}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$



Q値：フィルタ特性の“鋭さ”を表す値

$$Q = \frac{\omega_c}{\omega_H - \omega_L}$$

RLC直列回路のQ値

□ バンド幅を計算するためにω_L, ω_Hを求める

$$\left|\frac{V_{out}}{V_{in}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

定義から，これが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ になれば良いので

$$\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm 1$$

まず $\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 1$ について考える

整理すると $\varpi^2 - \frac{R}{L}\varpi - \frac{1}{LC} = 0$

よって $\varpi = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}$

ϖは正なので $\varpi = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}$

次に求めたϖがω_Lかω_Hかを調べる

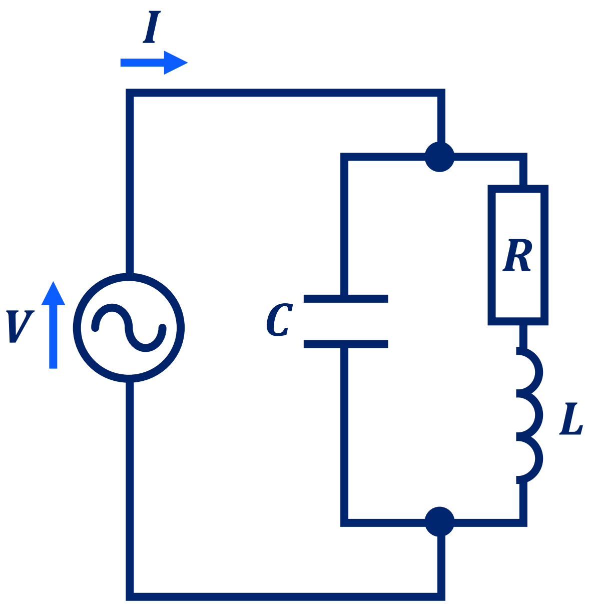
$$\varpi = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \varpi_C$$

なので，$\omega_H = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}$

同様に $\omega_L = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}$

よって $Q = \frac{\varpi_C}{\omega_H - \omega_L} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{L}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

例題1



【問】電圧と電流が同相となるための角周波数ω_0を求めよ

【解】合成アドミタンスは

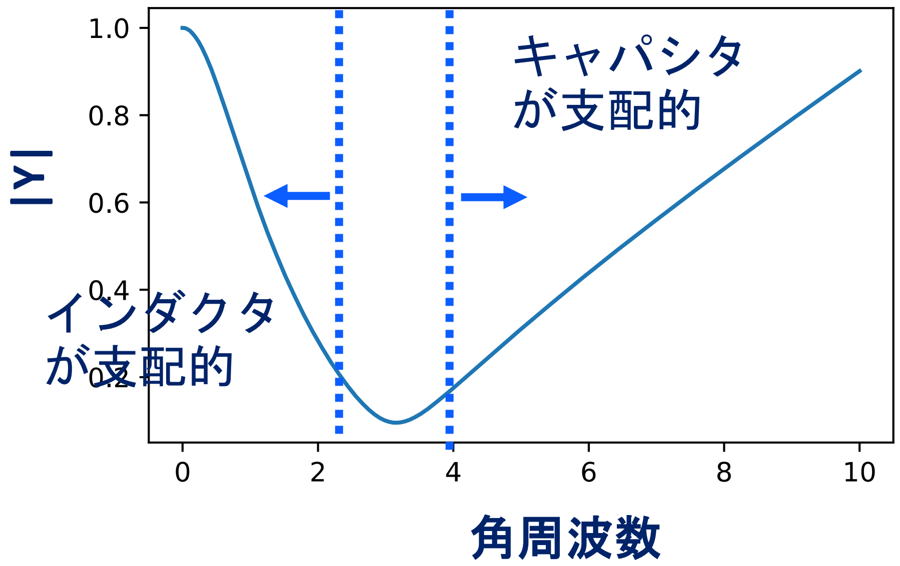
$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left\{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right\}$$

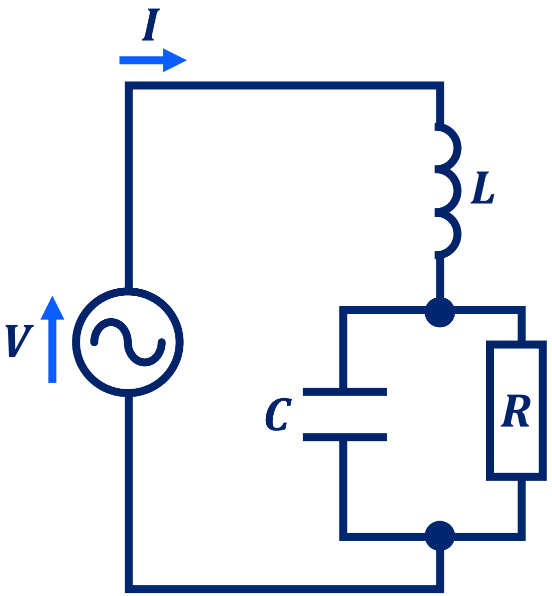
電流Iと電圧Vの関係は$I = YV$なので，電流と電圧が同相であるためにはYの虚部が0であれば良い．よって求める条件は

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \Leftrightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

R=1 / L=1 / C=0.1の時の|Y|



例題2



【問】図の回路で電源の角周波数はωであり，抵抗値は可変である．電流と電圧が同相となるRの条件を求めよ．

【解】合成インピーダンスは

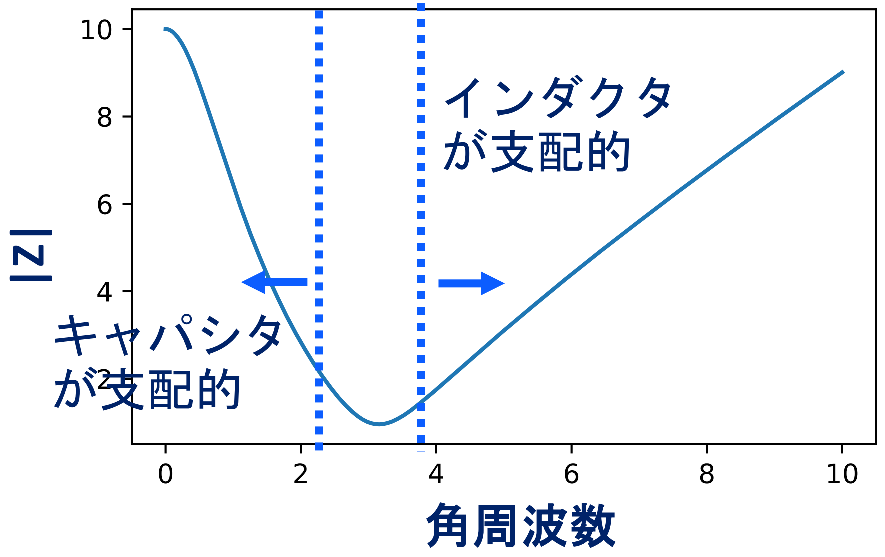
$$Z = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$= \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}\right)$$

前ページと同様に，合成インピーダンスの虚部が0であれば良い．
よって

$$\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} = 0 \Leftrightarrow R^2 = \frac{L}{C(1 - \omega^2 LC)} \quad R = \sqrt{\frac{L}{C(1 - \omega^2 LC)}}$$

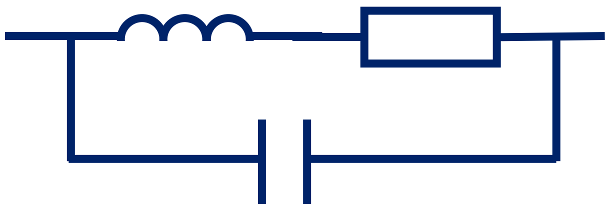
R=10 / L=1 / C=0.1の時の|Z|



現実の抵抗・キャパシタ・インダクタ

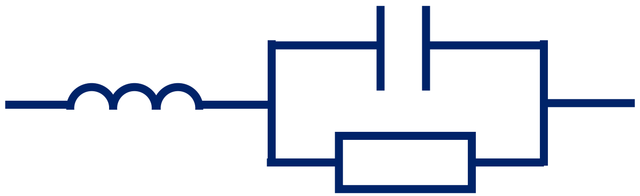
現実のキャパシタ・インダクタには寄生抵抗・寄生容量が含まれている

理想的なインダクタ

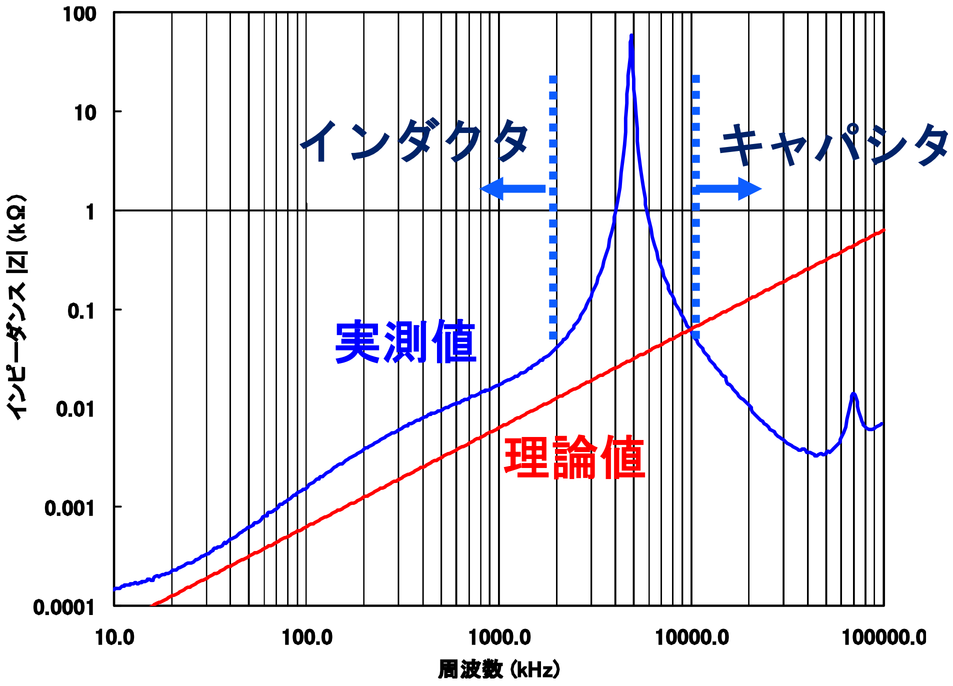


現実的なインダクタの等価回路

理想的なキャパシタ

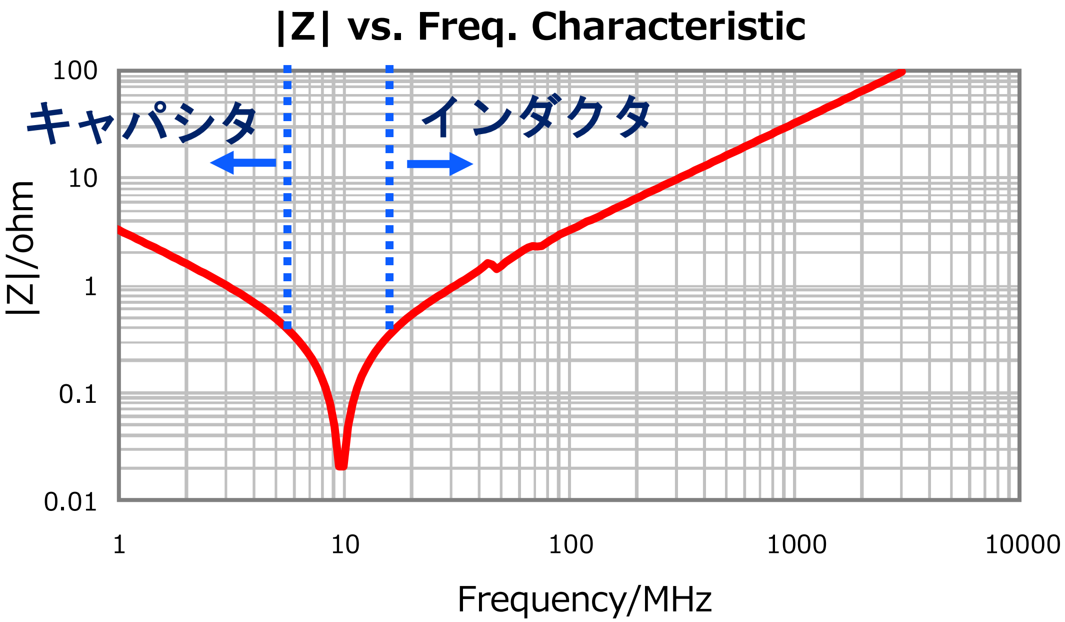


現実的なキャパシタの等価回路



インダクタの周波数特性

https://www.sagami-elec.co.jp/file/tech/coil_doc_100j.pdf



キャパシタの周波数特性

https://product.tdk.com/info/en/documents/chara_sheet/FA11C0G2A473JNU00.pdf