電子回路：第3回　交流の基礎

基礎工学部情報科学科

粟野 皓光

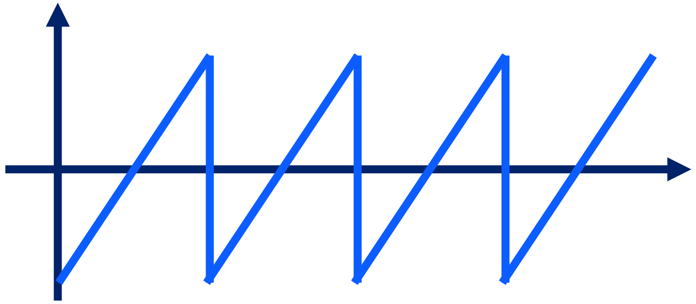
awano@ist.osaka-u.ac.jp

交流

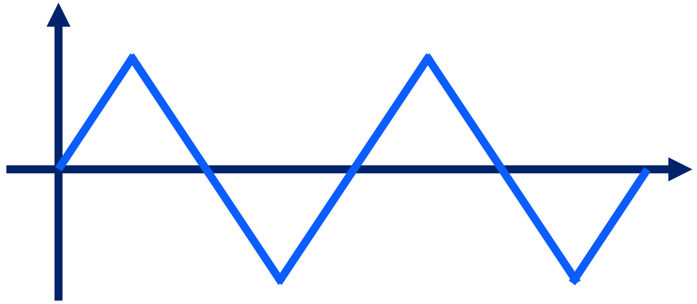
直流（DC）：時間と無関係に一定の電圧（or 電流）を示す
交流（Alternating Current; AC）：時間とともに周期的に向きが変化する電圧（or 電流）

交流波形の表し方：

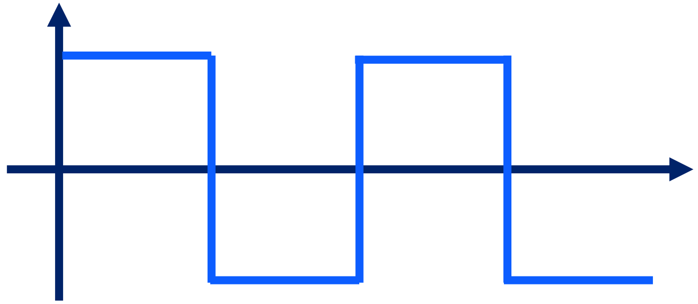
1. 周期（T）：周期的パターン1つ分の長さ（単位：s）．周波数fは周期の逆数：f=1/T（単位：Hz）
2. 最大値 or 最大振幅：交流波形が示す最大の値
3. ピークピーク値（peak-to-peak value）：最大値・最小値の差
4. 瞬時値：時間で変化する値（正弦波交流の瞬時値：$V_m \sin \omega t$）



のこぎり波



三角波



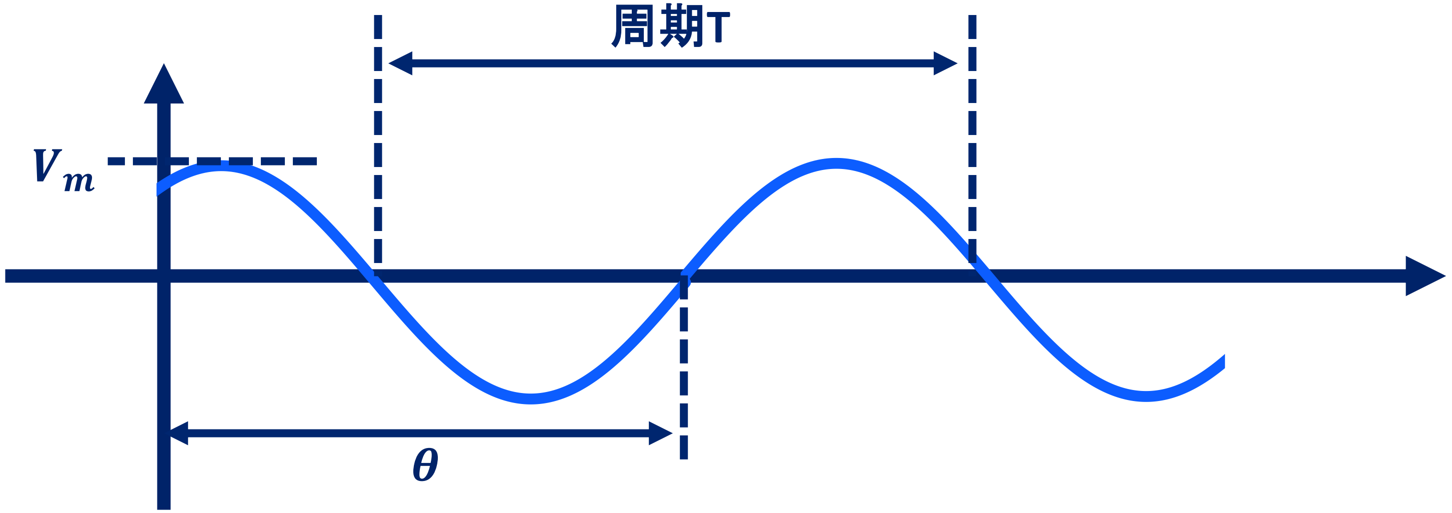
方形波

正弦波交流

正弦波交流の瞬時値表示：

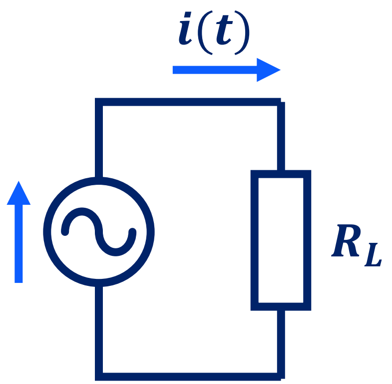
$$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$$

$\varpi = 2\pi f$　（角周波数 or 角速度）



実効値

抵抗に正弦波交流を印加した場合，同等の発熱効果を与える直流電圧・電流値を実効値と呼ぶ



$E = A_m \sin(\varpi t)$

時刻tにおける電流は

$$i(t) = \frac{E}{R_L} = \frac{A_m}{R_L}\sin\omega t$$

電力は

$$p(t) = Ei = \frac{A_m^2}{R_L}\sin^2\omega t = \frac{A_m^2}{2R_L}(1 - \cos 2\omega t)$$

で与えられる

この時，平均電力は $P = \dfrac{A_m^2}{2R_L}$ となる

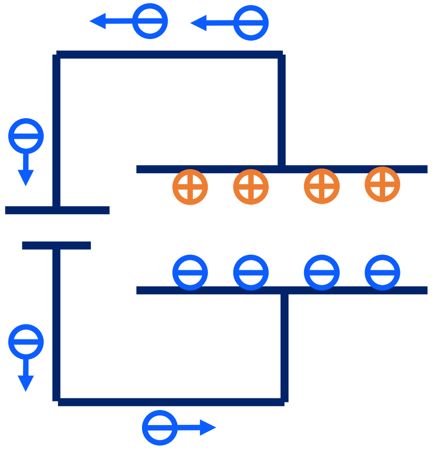
これは電圧 $E = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}$ の直流電圧源に抵抗R_Lを繋いだ時に消費される電力と等しい

最大値A_mを持つ正弦波交流に対して
電圧の実効値を $E = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}$ と定義する

キャパシタとインダクタ

キャパシタ

電荷を貯めることの出来る素子（例：2枚の平行平板キャパシタ）



- キャパシタに蓄えられている電荷q[C]と端子電圧vは比例関係にある

  $q = Cv$　　C：静電容量[単位：F(ファラド)]

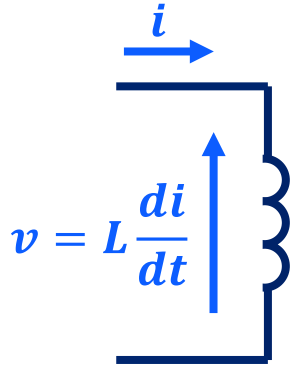
  地球の電離層と地表間の静電容量が約1[F]

- キャパシタに流れる電流をiとすると，電流は単位時間あたりに通過する電荷量なので

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

とも書ける

インダクタの性質



- インダクタを流れる電流の変化を妨げる方向に電圧を発生させる

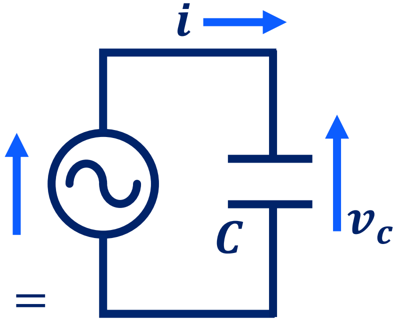
  インダクタ両端の電圧vを左図の向きに取ると

$$v = L\frac{di}{dt}$$

L：自己インダクタンス[単位：H(ヘンリー)]

正弦波交流を印加したときのキャパシタ・インダクタの振る舞い

キャパシタ



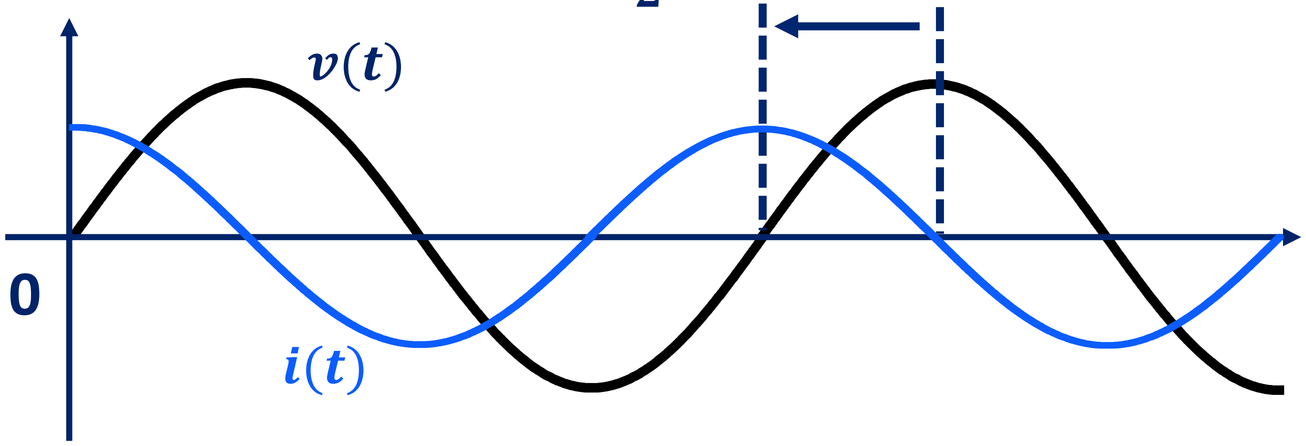
$E = A_m \sin(\varpi t)$

$$\begin{cases} v_c = \dfrac{Q}{C} = A_m \sin\omega t \\ i = \dfrac{dQ}{dt} \end{cases}$$

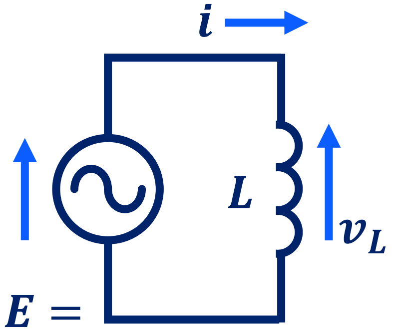
$$\Rightarrow\ i = C\frac{dv_c}{dt} = \omega C A_m \cos\omega t$$

$$= \omega C A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

電流は電圧より $\frac{\pi}{2}$ 位相が進んでいる



インダクタ



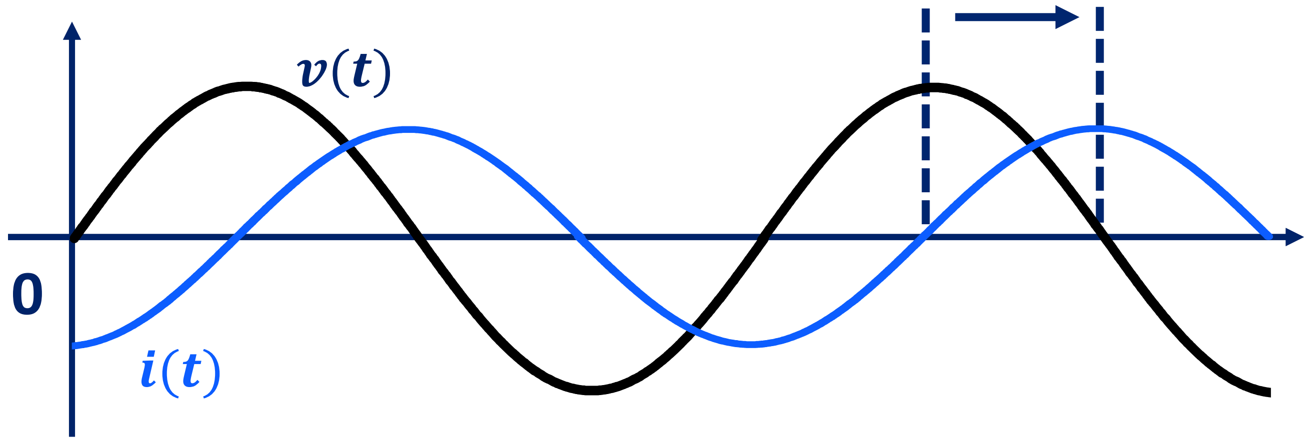
$E = A_m \sin(\varpi t)$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = A_m \sin\omega t$$

$$\Rightarrow\ i = -\frac{A_m}{\omega L}\cos\varpi t$$

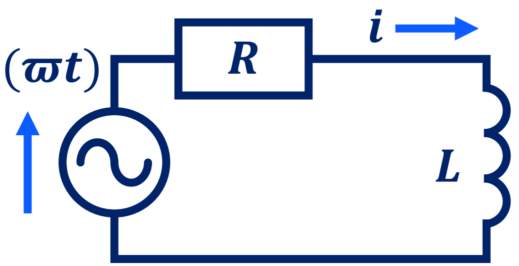
$$= \frac{A_m}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

電流は電圧より $\frac{\pi}{2}$ 位相が遅れている



RL交流回路

$E = E_m \sin(\varpi t)$



回路方程式： $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E_m \sin \varpi t$

(Step1)同時方程式の解を求める：

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\Leftrightarrow \log|i| = -\frac{R}{L}t + C$$

$$\Leftrightarrow i = \pm Ce^{-\frac{R}{L}t} = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

(Step2)定数変化法でCを決める：

Cをtの関数$C(t)$として回路方程式に代入すると

$$L\frac{dC}{dt} = E_m e^{\frac{R}{L}t} \sin \varpi t$$

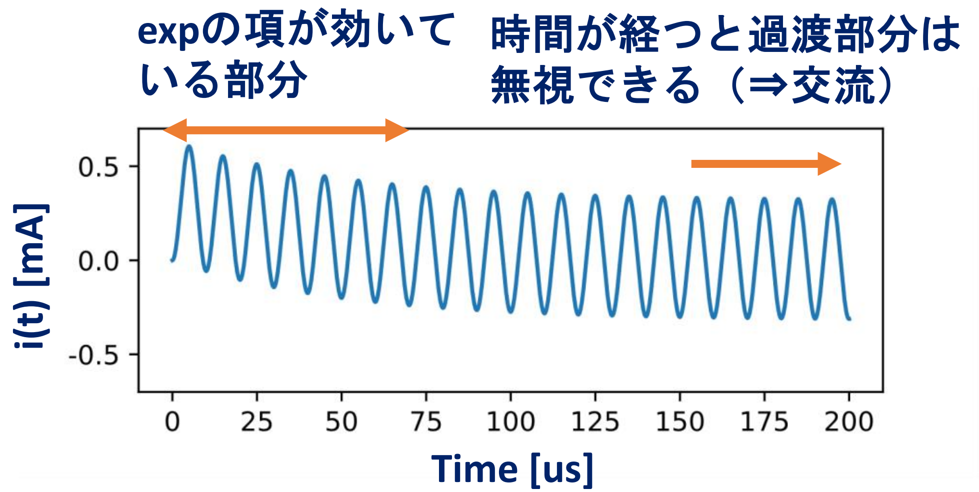
これを積分して

$$C(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{\frac{R}{L}t} \sin(\omega t + \varphi) + A$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\varpi L}{R}\right)$$

(Step3)求まったCを同時方程式の解に代入して一般解を得る：

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$



簡単な交流回路でも微分方程式を解くのは大変
そこで，複素数表示を導入する

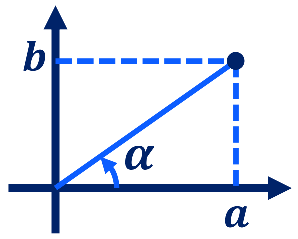
部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

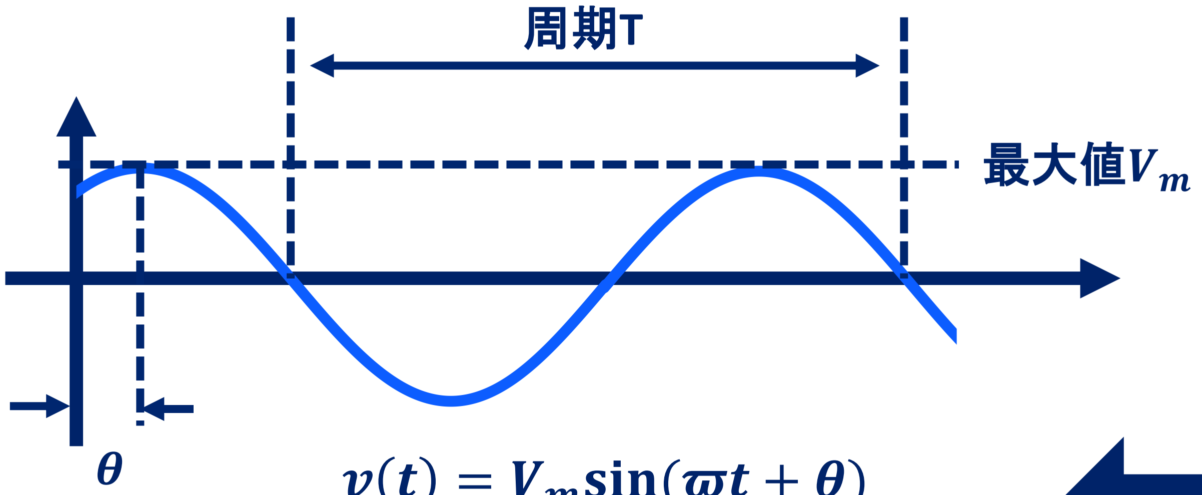
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$



瞬時値表示と複素数表示

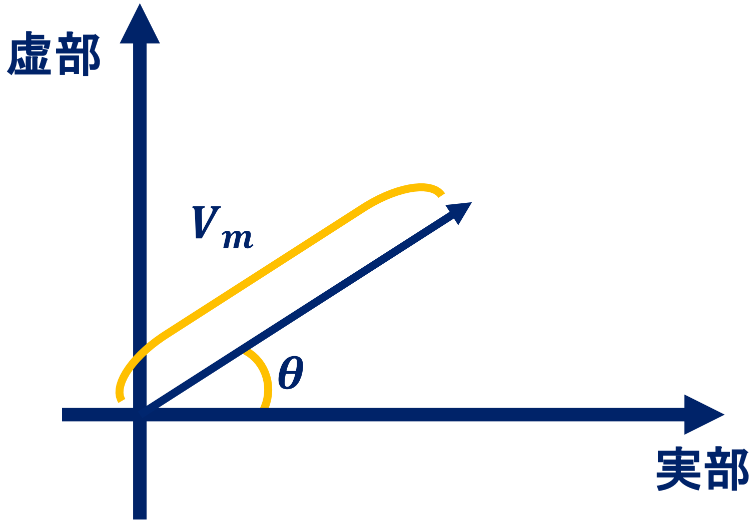
- 交流は瞬時値V_mと位相θで一意に特徴付けられる
  （交流回路理論では，角周波数ϖは回路全体で共通とするので独立パラメータには含めない）
- 見通しを良くするためにV_mとθを複素数で表現する

瞬時値表示



$$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$$
$$\varpi = 2\pi f$$
$$f = 1/T$$

複素数表示



$$V_m(\cos\theta + j \cdot \sin\theta) \quad \left(= V_m e^{j\theta} \right)$$

教科書によっては $\frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta}$ としているものもある

微積分と複素数表示

$$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$$

微分

$$\frac{dv(t)}{dt} = \varpi V_m \cos(\varpi t + \theta)$$
$$= \varpi V_m \sin(\varpi t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

これを複素数表示に変換すると…

$$\varpi V_m \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \varpi V_m(-\sin\theta + j \cdot \cos\theta)$$
$$= j\varpi \underline{V_m(j \cdot \sin\theta + \cos\theta)}$$

元波形の複素数表示

つまり複素数表示された世界で$j\varpi$を掛けるという操作は，時間領域で微分しているのと同じ

積分

$$\int v(t)\,dt = -\frac{1}{\varpi} V_m \cos(\varpi t + \theta)$$
$$= \frac{1}{\varpi} V_m \sin(\varpi t + \theta - \frac{\pi}{2})$$

これを複素数表示に変換すると…

$$\frac{1}{\varpi} V_m \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\varpi} V_m(\sin\theta - j \cdot \cos\theta) = -\frac{j}{\varpi} V_m(j \cdot \sin\theta + \cos\theta)$$
$$= \frac{1}{j\varpi} \underline{V_m(j \cdot \sin\theta + \cos\theta)}$$

元波形の複素数表示

つまり複素数表示された世界で$j\varpi$で割るという操作は，時間領域で積分しているのと同じ

複素数表示の性質まとめ

微積分と複素数表示

瞬時値表示：$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$　　複素数表示：　$V = V_m e^{j\theta}$　のとき

- $\dfrac{dv}{dt}$
- $\int dv\, dt$

の複素数表示は $j\varpi V$、$\dfrac{1}{j\varpi}V$ で与えられる

加減算と複素数表示

瞬時値表示：
$$v_1(t) = V_{m1} \sin(\varpi t + \theta_1)$$
$$v_2(t) = V_{m2} \sin(\varpi t + \theta_2)$$

複素数表示：
$$V_1 = V_{m1} e^{j\theta_1}$$
$$V_2 = V_{m2} e^{j\theta_2}$$
のとき

$v_1(t) \pm v_2(t)$ の複素数表示は　$V_1 \pm V_2$ で与えられる

複素数表示を使った微分方程式の解法

例題： $0.02\frac{d}{dt}x(t)+0.25\cdot x(t)=3.5\cdot\sin\left(120\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$ を解け

1. 右辺を複素数表示に直す

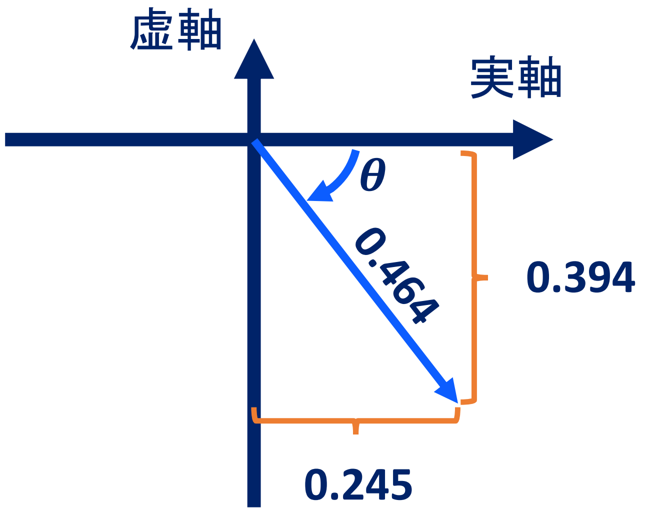
$$3.5\cdot\sin\left(120\pi\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 3.5\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)\approx 3.03+j1.75$$

2. $x(t)$の複素数表示をXと置いて左辺も複素数表示に直す

$$0.02\frac{d}{dt}x(t)+0.25\cdot x(t)\Leftrightarrow 0.02\cdot j\cdot 120\pi\cdot X+0.25\cdot X$$

3. 複素数表示に直した式を代数的に解く

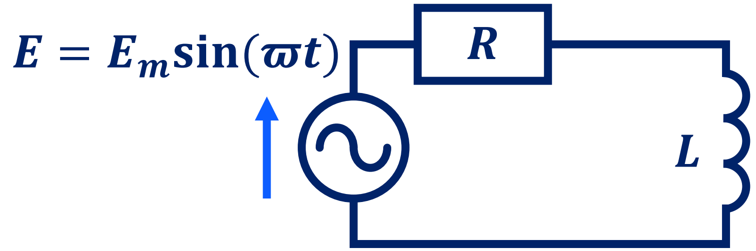
$$X=0.245-j\cdot 0.394\Leftrightarrow x(t)=0.464\cdot\sin(120\pi\cdot t-1.01)$$



$$\theta=\tan^{-1}\frac{-0.394}{0.245}\approx -1.01[\mathrm{rad}]$$

複素数表示を使うことで微分方程式を代数的に解くことが出来る

RL交流回路を複素数表示で解いてみる



回路方程式： $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E_m \sin \varpi t$

(Step1)複素数表示に変換：

$$L \cdot j\varpi I + RI = E_m(\cos 0 + j \cdot \sin 0) = E_m$$

I：電流$i(t)$の複素数表示

(Step2)代数的に解く：

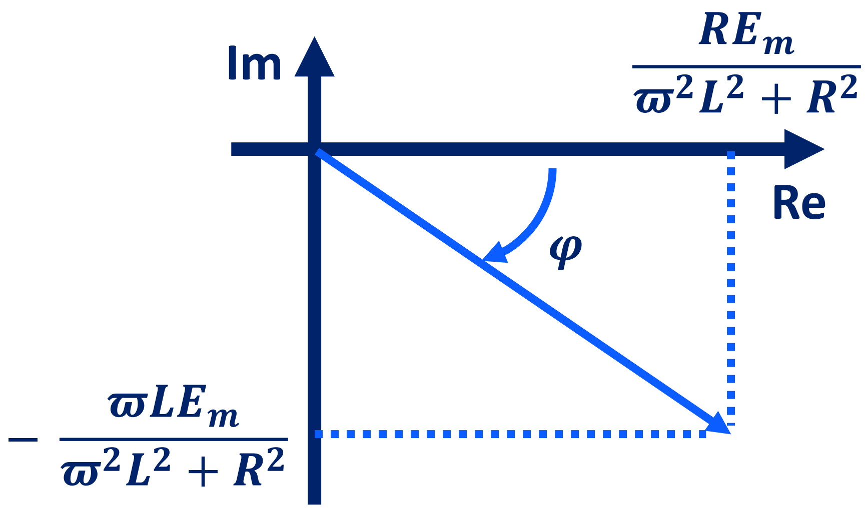
$$I = \frac{E_m}{j\varpi L + R} = \frac{E_m}{\varpi^2 L^2 + R^2}(R - j\varpi L)$$

(Step3)瞬時値表示に変換

極座標表示に直すと

$$I = \frac{E_m}{\sqrt{\varpi^2 L^2 + R^2}} e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\varpi L}{R}\right)$$



よって瞬時値表示は

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{\varpi^2 L^2 + R^2}} \sin(\varpi t + \varphi)$$

※この解法ではexp(...)の項が出てこないことに注意！
交流回路解析では，時間が十分に経過した定常状態しか解析できない