情報論理学
(第2回)

基礎工学部情報科学科　泉 泰介

Part1 ：命題論理の定義と意味論

論理式を定義する

- 前回は，ある種の「直感的な」説明で論理式を導入した
  - 論理記号の意味や式の解釈とセットで説明
  - ある種「意味を考えればわかるよね」という議論をしていた
    - これは我々のゴールにとって非常に都合が悪い．なぜならば，計算機は「意味を考える」ことが（直接的には）できないので
    - より形式的な（別の言い方をすれば，機械的に取り扱えるような）体系が欲しい

- 泉担当部分の大半(今週含めて4回)は，命題論理に上で述べたような形式性を与えること，それを計算機でどうやって取り扱うかということの説明に費やされる

最初のメッセージ

- Q：論理式とは何か？

論理式とは，記号の列である

命題論理の論理式

- 命題論理の構成要素(記号集合)
  1. 命題記号の集合Π
  2. 論理記号$\rightarrow$，$\neg$
  3. 補助記号(,)

定義(命題論理)

Πに基づく論理式$L(\Pi)$とは，以下の条件のいずれかを満たすもの(=b.およびc.の操作の繰り返しで得られるもの)すべての集合

a. Π中の各記号$p \in \Pi$

b. 2つの論理式p, qに対する$(p) \rightarrow (q)$

c. 論理式pに対する$\neg(p)$

- 再帰的な定義になっていることに注意

命題論理の論理式

これは一種の「流儀」のようなもの
教科書によっては∧,∨を含めた
記号列で論理式を定義することもある
（し，この授業でも略記法としては
普通に使う）

- 注意１：∧と∨はどこに消えた？
  - 形式的な定義ではこれらの記号は登場しない
  - $P \vee Q$ ：$(\neg P) \rightarrow Q$ の略記法とみなす
  - $P \wedge Q$ ： $\neg(P \rightarrow \neg Q)$の略記法と見なす
  - もう一つ，$\leftrightarrow$ を $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$の略記と定義する
    - 真理値表は右の通り

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
偽	偽	真
真	偽	偽
偽	真	偽
真	真	真

- 注意2 ：カッコの略記
  - 演算子の優先順位的に¬が→に優先しているとして，カッコは適宜省略される
    - $\neg P \rightarrow Q$ は $(\neg P) \rightarrow Q$ であり $\neg(P \rightarrow Q)$ ではない
    - 完全には排除できない(e.g. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ vs $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$)

意味論と自然演繹

- 定義上論理式はただの記号の列
  - **そこに真とか偽とか，$P \to Q$の真理値表とか，そういう概念は存在しない**
  - 論理式を用いて実際に論理を議論するためには，論理式を何らかの形で操作したり，そこから別の(意味のある)論理式を帰結したりするような方法が必要になる

- 2つのアプローチが存在：**意味論 / 自然演繹**
  - 対立する概念ではない
  - 別のことをやろうとしているわけでもない(得手不得手はある)
  - が，実際に2つを勉強すると毛色は結構違う

論理式の**意味論**的取り扱い(前半2回)

- 各論理記号は真理値表により意味を与えられる
- 命題記号に真偽を割り当てる(論理式の解釈という)ことで，式全体の真偽が決定される
- 式変形や推論といった行為は「論理式の真偽に矛盾しないような式の操作」という形で定義される（そのような操作だけを許す)
- ある意味でなじみ深い取り扱い方
  - この文脈では，命題論理の理論≒論理回路の理論（...と，泉は思う)

論理式の自然演繹的取り扱い(後半2回)

- 論理式に対して適用可能な操作(公理とかそのほかもろもろ) を定義する
- 操作に従って得られる論理的帰結を正しい(意味論の文脈でいえば「真偽に矛盾しない」)と思う
- 一見気持ち悪いかもしれないが，実際にはより人間の思考過程に近い
  - 「雨の日は傘を持っていく」「傘を持っていく日は歩いて通学する」→ このことから自然に「雨の日は歩いて通学する」と推論するはず
  - この推論は「$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ という論理式から$P \rightarrow R$を生成してもよい」という(記号処理的な)ルールとして記述される
  - ルールの適用の繰り返しによって帰結を得ることは一般にはより**説明的** (vs 真理値表による証明)

Part2：解釈と恒真性・恒偽性

解釈

- 論理式に現れる命題変数への真偽値割り当てをその論理式の解釈(interpretation)と呼ぶ
  - 形式的にはΠから$\{T, F\}$への写像
  - 解釈Iのもとでの論理式Aの真理値を$[\![A]\!]^I$で表すとする
  - 厳密には命題変数への真偽値割り当てから，論理式の真理値がどう決まるかを形式的に定義する必要がある($\because$論理式はただの記号列)
    - が，すでにデジタル回路や論理設計で式の評価は慣れていると思うので，詳細は略
    - 論理記号$\neg, \rightarrow$には標準的な意味(真理値表)が定められているとする

恒真性・恒偽性

- いかなる解釈Iでも$[\![A]\!]^I = T$であるとき，論理式Aは恒真or妥当(valid)であるという
  - 恒真な論理式は恒真式or妥当な式orトートロジー(tautology)と呼ばれる
- いかなる解釈Iでも$[\![A]\!]^I = F$であるとき，論理式Aは恒偽or充足不能(unsatisfiable)であるという
- 恒真でも恒偽でもない論理式は充足可能(satisfiable)であるという
  - $[\![A]\!]^I = T$とする解釈Iが少なくとも一つは存在する
- ある論理式Pが恒真であることを記号$\vDash$ を使って$\vDash P$と書く

トートロジーの例

- $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
  - 真理値表を書いてみる

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
F	F	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
T	T	T	T	T

- この恒真式はいわゆる「対偶」の議論を表現している
  - 「$P \to Q$を示すことと$\neg Q \to \neg P$を示すことは論理的に等しい」と理解できる

恒真性の意味

- 論理式が恒真であるということはどういう意味であろうか？
  - 定義的には，**解釈によらず真となる**論理式

    ＝論理記号への意味付けのみ(真理値表の割り当て)で真となる命題

重要なメッセージ：恒真性 ＝ 正しい(妥当な)論証

  - ある式が恒真式であることは，それが普遍的な論証・真理であることを意味している
  - 解釈によって成り立ったり成り立たなかったりということはない
  - 気を付けること：「普遍的」であることは有用であることとは別
    - $P \to P$は恒真式だが，これはPについて何も述べていない！
    - 恒真式は個々の命題の真偽について一切の情報を与えない（定義より）

「解釈」の解釈 (1)

- 命題論理における解釈は本質的には論理関数に対する真理値割り当て
  - なぜ「解釈」という特別な名前がつくのか？
- 意味論的には，解釈は「**何らかの「世界観」のもとでの命題変数への意味付け**」
  - 世界観はそれぞれの意味付けの真偽を決めている(ただしそれだけではない，後述)
  - 結果的に論理式の解釈により命題変数の真偽が決まる
- 例：$P \vee Q$という論理式に対する以下のような解釈を考える
  - P:「京都は東京より大きい」 Q:「東京は最大の都市である」
  - 世界観1 現代日本：$P = F$ / $Q = T$
  - 世界観2 平安時代の日本：$P = T$ / $Q = F$
  - 世界観3:現代のアジア：$P = F$ / $Q = F$

「解釈」の解釈 (2)

- なぜこんなまわりくどい言い回しになるのか？
  - 命題論理だと真理値割り当てとたまたま一致するが，他の体系だとそうはいかない
    - 例えば述語論理では，個々の述語に真偽を割り当てることはできない(実際，述語論理用の「解釈」の定義がある)
  - めんどくさいと思うかもしれないが，より幅広い論理体系を扱うための布石ぐらいに思っておきましょう

知識獲得とモデル(1)

- 計算機科学における論理の重要な応用の一つは「知識獲得」
  - 与えられた事実(命題の集合)から有用なルールを見つけたい(計算機で自動的に)
    - バスケット解析(顧客の購入データの集まりから典型的な購入パタンを発見)
    - 定理の自動証明(定理の前提条件から結論を導きたい)

- 素朴な疑問：「**知識**」って何？
  - 単なる恒真式は真理ではあるが，前述のとおり何も情報を含まないことがある
  - 「前提のもとでの真理(恒真式)」がそれに相当する

先ほど述べた「世界観」とほぼ同義

→前提(世界観)を形式的に表現する方法が欲しい！

知識獲得とモデル(2)

- 前提は論理式の集合Γ(と，それらすべてを充足するような解釈)で表す
  - 例えば前述の例では…
    (P:「京都は東京より大きい」　　　Q:「東京は最大の都市である」)
    - 世界観1 現代日本：$\Gamma = \{\neg P, Q\}$
    - 世界観2 平安時代の日本：$\Gamma = \{P, Q\}$
    - 世界観3:現代のアジア：$\Gamma = \{\neg P, \neg Q\}$
- 注意：前提はより複雑な論理式も含めることができる
  - 例：機械の故障(装置の性質を因果律として記述)
    - A点の温度が高いならば(命題P)，部品Xか部品Yが故障(命題Q_X, Q_Y)
    - 部品Xが故障したら，部品Zも故障(命題Q_Z)

$$\Gamma = \{P \to (Q_X, Q_y), Q_X \to Q_Z\}$$

知識獲得とモデル(3)

- 論理式の集合Γ(無限でもよい)に対して，その中の式すべてを充足するような解釈をΓのモデルと呼ぶ
  - 直感的には「前提とする世界観で，実際に前提が成立している状況」に対応

- ΓのすべてのモデルIに対して論理式Pが$[\![P]\!]^I = T$となるとき

$$\Gamma \vDash P$$

と書く．これは直感的にはΓを前提とするならば，Pがつねに正しいこと
すなわちPは前提から得られる知識とみなすことができる

  - 恒真式をあらわす記法$\vDash P$はΓが空集合のときに相当
    (空の論理式集合に対しては任意の解釈がモデルになるとみなす)

$\Gamma \vDash P$の証明法(1)

- 前提(世界観)が定義されたことで，我々にとって興味のある問題(の一部)は
  1. $\Gamma \vDash P$を示せ(定理の自動証明)
  2. $\Gamma \vDash$[　X　]を満たすような有用なXを導け(推論・知識獲得)

  のような形を持つといえる

- 2.は1.より解くのが難しいのは明らかなので，ここでは1.をどうやって示すかを検討してみる

$\Gamma \vDash P$の証明法(2)

- ところで，定義を追えばわかることだが，$\Gamma = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$としたとき
  $\{Q_2, Q_3, \ldots\} \vDash (Q_1 \to P)$ と $\Gamma \vDash P$ は等価である
  - (⇒)$\{Q_2, Q_3, \ldots\}$を充足する任意の解釈で$(Q_1 \to P)$が真だとするとQ_1および$\{Q_2, Q_3 \ldots\}$を充足する任意の解釈でPは真になる(→の真理値表より)
  - (⇐)Γすべてを充足する任意の解釈のもとでPが真となるならば，そのもとでQ_1，Pはともに真なので，$\{Q_2, Q_3, \ldots\} \vDash (Q_1 \to P)$は成り立つ

- ということは，Γが有限($\Gamma = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_n\}$とする)なら…

$$
\begin{aligned}
&\{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n\} \vDash P \\
&\Leftrightarrow \{Q_2, Q_3, \ldots Q_n\} \vDash (Q_1 \to P) \\
&\Leftrightarrow \{Q_3, \ldots Q_n\} \vDash Q_2 \to (Q_1 \to P) \\
&\ldots \\
&\Leftrightarrow \vDash Q_n \to (Q_{n-1} \to \left(Q_{n-2} \to \cdots (Q_1 \to P)\right) \ldots)
\end{aligned}
$$

$\Gamma \vDash P$の証明法(3)

…

$$\Leftrightarrow \vDash Q_n \to (Q_{n-1} \to (Q_{n-2} \to \cdots (Q_1 \to P)) \ldots)$$

- 論理的同値な式変形$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$を用いると (前回のスライド参照)

$$\Leftrightarrow \vDash Q_n \to (Q_{n-1} \to (Q_{n-2} \to \cdots (Q_1 \to P)) \ldots)$$
$$\Leftrightarrow \vDash (Q_n \wedge Q_{n-1}) \to (Q_{n-2} \to \cdots (Q_1 \to P)) \ldots)$$
$$\Leftrightarrow \vDash (Q_n \wedge Q_{n-1} \wedge Q_{n-2}) \to (Q_{n-3} \to \cdots (Q_1 \to P)) \ldots)$$

…

$$\Leftrightarrow \vDash (Q_n \wedge Q_{n-1} \wedge Q_{n-2} \ldots \wedge Q_1) \to P$$

- 結局，この形式の論理式の恒真性を問うていることと同じ
(ただし，これはΓが有限のとき)

最後に余談：⇔ と ↔

- 前述の議論（というか，ここまでの授業で)，論理式の式変形は⇔の記号を用いた
  - 一方で，論理式の中における(論理的)同値性の表現として↔も導入している
- この2つは論理学的な意味が異なるわけではない
  - これは「論理式が対象としている世界(中の世界)」と「論理式を対象としている世界(外の世界)」を区別しているため
  - 論理を操作したり証明したりする方法論も当然論理(学)に従うが，同じ記号を使うと混乱する
- 中と外の世界を明確に分けるという考え方(より一般的には，言語階層という考え方)は論理学に置いて標準的だが，異論もあるようである