[3] 離散構造

(1)

(1-1)

(1-1-1)

??? $\forall x\, p(x) \vdash p(x)$???

(1-1-2)

$P1 = \forall x\big(p(x) \to q(x)\big) \land \exists x\, p(x)$とおく．（$E = P1 \to \exists x\, q(x)$）

まず$P1 \vdash \exists x\, q(x)$を示す．

仮定$P1$と$T1$より，	$\forall x\big(p(x) \to q(x)\big)$	$\cdots P2$
仮定$P1$と$T2$より，	$\exists x\, p(x)$	$\cdots P3$
$P2$と$T4$より，	$p(x) \to q(x)$	$\cdots P4$
$P4$と$T3$と$B1$より，	$\exists x\, p(x) \to \exists x\, q(x)$	$\cdots P5$
$P3$と$T5$と$B1$より，	$\exists x\, q(x)$	$\cdots P6$

$\therefore P1 \vdash \exists x\, q(x)$が示された．

さらに$P1 \vdash \exists x\, q(x)$と$D1$より，$\vdash P1 \to \exists x\, q(x)$となり，$E$が示された．

(1-2)

(1-2-1)

$$\neg E = \neg\left(\left(\forall x\big(p(x) \to q(x)\big) \land \exists x\, p(x)\right) \to \exists x\, q(x)\right)$$

$$= \neg\left(\neg\left(\forall x\left(\neg p(x) \lor q(x)\right) \land \exists x\, p(x)\right) \lor \exists x\, q(x)\right)\{\}$$

$$= \left(\forall x\left(\neg p(x) \lor q(x)\right) \land \exists x\, p(x)\right) \land \neg \exists x\, q(x)$$

$$= \left(\forall x\left(\neg p(x) \lor q(x)\right) \land \exists x\, p(x)\right) \land \forall x \neg\, q(x)$$

$$= \exists y\left(\forall x\left(\neg p(x) \lor q(x)\right) \land\ p(y)\right) \land \forall x \neg\, q(x)$$

$$= \exists y\left(\left(\forall x\left(\neg p(x) \lor q(x)\right) \land\ p(y)\right) \land \forall x \neg\, q(x)\right)$$

$$= \exists y\left(\forall x\left(\left(\neg p(x) \vee q(x)\right) \wedge\ p(y)\right) \wedge \forall x \neg\ q(x)\right)$$

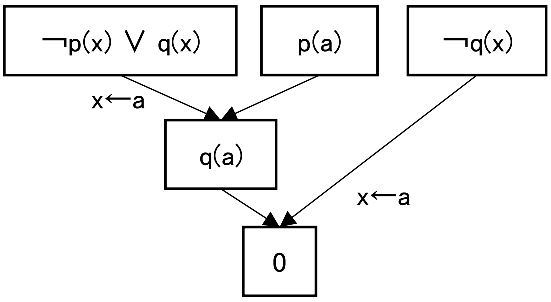
$$= \exists y \forall x\left(\left(\neg p(x) \vee q(x)\right) \wedge\ p(y) \wedge \neg\ q(x)\right)$$

(1-2-2)

スコーレム関数a(← y)

$$\neg E' = \forall x\left(\left(\neg p(x) \vee q(x)\right) \wedge\ p(a) \wedge \neg\ q(x)\right)$$

(1-2-3)



(2)

(2-1)

(2-1-1)

(a) R2, R3

(b) R1

(c) R2, R3

(d) R1, R3

(2-1-2)

R3

(2-2)

(2-2-1)

⊆は反射律，反対称律，推移律を満たす

(2-2-2)

w = s ∪ t

z = s ∩ t

(2-2-3)

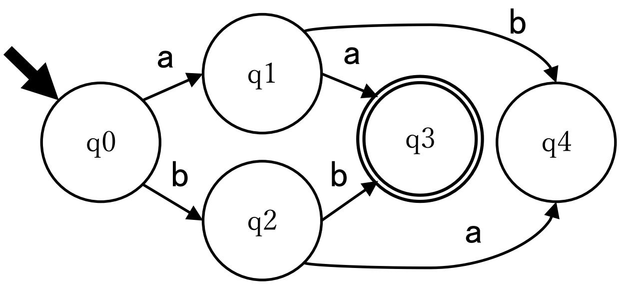
条件より$c(u) = \bar{u}(= \{x \in X;\ x \notin u\})$

$c(s \cup t) = \overline{s \cup t} = \bar{s} \cap \bar{t} = c(s) \cap c(t)$

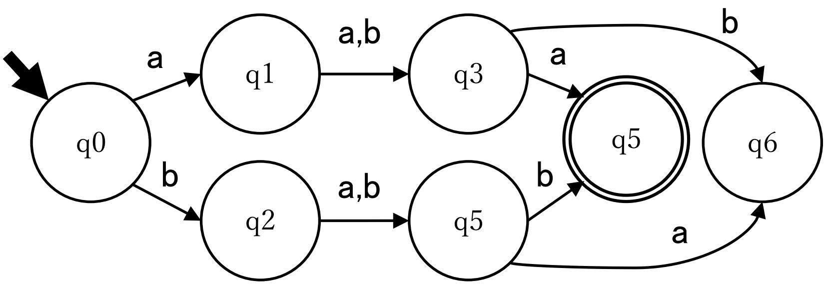
[4] 計算理論

(1)

(1-1)



(1-2)



(1-3)

nを正整数とする.

・$|v|$偶数のとき

$v = a^n b^n b^n a^n \in L$とすると$|v| \geq n$ であり,

$v = xyz\ (x = a^k, y = a^s,\ z = a^{n-k-s} b^n b^n a^n, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq s \leq n)$のように分解できる．このとき$xy^0 z = a^k a^{n-k-s} b^n b^n a^n = a^{n-s} b^n b^n a^n \notin L$より正則言語に対する反復補題に矛盾.

・$|v|$偶数のとき

$v = a^n b^n a b^n a^n \in L$として同様にすると正則言語に対する反復補題に矛盾.

∴L は正則言語でない

(1-4)

(a,Z)/Z　　(a,0)/0　　(a,1)/1

(b,Z)/Z　　(b,0)/0　　(b,1)/1

$(\varepsilon, Z)/Z$　　$(\varepsilon, 0)/0$　　$(\varepsilon, 1)/1$

(2)

(2-1)

（ア）

u，v を k-1 回以下の生成規則の適用で得られる文字列とすると，

w は A→aAbA，A→bAaA により得られるため，w=aubv，buav と表せて，

$|aubv|=|u|+|v|+2$，$|aubv|_a=|u|_a+|v|_a+1$，$|aubv|_b=|u|_b+|v|_b+1$.

$|u|_a=|u|_b$，$|v|_a=|v|_b$ より $|aubv|_a=|aubv|_b$.

同様に $|buav|_a=|buav|_b$.

$\therefore |w|_a=|w|_b$

(2-2)

（イ）

$|w|=0$ のとき $w=\varepsilon$ であり導出 $A \Rightarrow \varepsilon = w$ より $w \in L1$.

（ウ）

aAbA

（エ）

bAaA