情報論理学
第12回: 導出原理

基礎工学部情報科学科　中川 博之

レポート課題

レポート課題: 問11-1 (解答)

- 以下の各式の冠頭標準形を求めよ
  - (1) $\forall x\, p(x) \wedge \exists x \neg q(x)$
  - (2) $(\forall x \neg p(x) \vee \exists x \neg q(x)) \wedge (\forall x\, r(x) \vee \exists x\, s(x))$
  - (3) $(\forall x \neg p(x) \rightarrow \exists x \neg q(x)) \wedge (\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x))$

  - (1) $\forall x\, p(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

    $= \exists x (\forall x\, p(x) \wedge \neg q(x))$

    変数名を変えて　$\exists x \forall y (p(y) \wedge \neg q(x))$

等価な式を = で結ぶことにする

レポート課題

レポート課題: 問11-1(解答)

- (2) $(\forall x \neg p(x) \lor \exists x \neg q(x)) \land (\forall x\, r(x) \lor \exists x\, s(x))$

  $= \exists x (\forall x \neg p(x) \lor \neg q(x)) \land \exists y (\forall x\, r(x) \lor s(y))$

  $= \exists x \exists y ((\forall x \neg p(x) \lor \neg q(x)) \land (\forall x\, r(x) \lor s(y)))$

  $= \exists x \exists y (\forall z(\neg p(z) \lor \neg q(x)) \land \forall z(r(z) \lor s(y)))$

  $= \exists x \exists y \forall z ((\neg p(z) \lor \neg q(x)) \land (r(z) \lor s(y)))$

- (3) $(\forall x \neg p(x) \rightarrow \exists x \neg q(x)) \land (\exists x\, r(x) \land \exists x\, s(x))$

  $=(\neg \forall x \neg p(x) \lor \exists x \neg q(x)) \land (\exists x\, r(x) \land \exists x\, s(x))$

  $=(\exists x\, p(x) \lor \exists x \neg q(x)) \land (\exists x\, r(x) \land \exists x\, s(x))$

  $= \exists x (p(x) \lor \neg q(x)) \land \exists x \exists z (r(x) \land s(z))$

  $= \exists x \exists y \exists z ((p(x) \lor \neg q(x)) \land r(y) \land s(z))$

レポート課題

レポート課題: 問11-2 (解答)

- スコーレム標準形を求めよ．変換過程も示すこと．
  - $\exists u \forall v \forall w \exists x \forall y (\neg p(u) \land (\neg q(w) \lor \neg r(a, x)) \land (q(y) \lor r(u, x)))$
  - ∃uに対して新たな定数記号bを導入して
    $\forall v \forall w \exists x \forall y (\neg p(b) \land (\neg q(w) \lor \neg r(a, x)) \land (q(y) \lor r(b, x)))$
  - ∃xに対して新たな関数記号hを導入して
    $\forall v \forall w \forall y (\neg p(b) \land (\neg q(w) \lor \neg r(a, h(v, w))) \land (q(y) \lor r(b, h(v, w))))$

充足不能性を確かめる手段

- 述語論理式A の充足不能性を確かめる方法

- Step 1. Aの冠頭標準形 を求める
- Step 2. スコーレム標準形を求める
- Step 3. 導出原理により空節を導出する

エルブランの定理

- 定理5.3.1と定理5.3.2を併せたもの

- 定理5.3.1: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ (ここまでで用意したスコーレム標準形が該当) が充足不能
⇔ その式がエルブラン解釈のもとで充足不能

- 定理5.3.2: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ がエルブラン解釈のもとで充足不能
⇔ $A[x_1, \ldots, x_n]$ のエルブラン列$A_1, A_2, \ldots$ 中にある有限個の$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$が存在し, $A_{i1} \land A_{i2} \land \ldots \land A_{im}$がエルブラン解釈のもとで充足不能

？？？

だが, 限定した状況で充足不能性を判定できそう

エルブラン領域

[定義] 論理式Bに対するエルブラン領域 (Herbrand Universe) HD_B :

- H_0 = B内の定数の集合. もしB内に定数がなければ {a}
  - a: 新たに導入した定数
- $H_{i+1} = H_i \cup \{f(t_1, ..., t_n) \mid f \in F, t_j \in H_i\}$
  - FはB内で出現する関数記号の集合
- $HD_B = H_0 \cup H_1 \cup ...$
- 充足可能性を論じる上で, あらゆる対象領域と等価と考えることが可能な領域 (集合)
- エルブラン領域の各要素をBの基礎項(ground term)と呼ぶ

適用例

- B: $\forall x \forall y(p(x, y, c, d) \rightarrow q(y))$に対するエルブラン領域 HD_B
  - $H_0 = \{c, d\}, H_1 = \{c, d\}, \cdots$
- よって $HD_B = \{c, d\}$

- B: $\forall x \forall y\ p(f(x), g(x, y))$に対するエルブラン領域$HD_B$
  - $H_0 = \{a\}, H_1 = \{a, f(a), g(a, a)\}, \cdots$
- $HD_B = \{a, f(a), g(a, a), f(f(a)), f(g(a, a)), g(a, f(a)), g(f(a), a), g(f(a), f(a)), g(a, g(a, a)), g(g(a, a), a), g(f(a), g(a, a)), g(g(a, a), f(a)), g(g(a, a), g(a, a)), \ldots\}$

エルブラン基底

- エルブラン基底 (Herbrand base):
  - エルブラン領域HDの要素を引数とする基礎式の集合
  - 基礎式(ground atom): 述語記号の引数に基礎項を代入した原始論理式 (述語)

- 例) B: ∀x∀y p(f(x), g(x, y))に対して
  - エルブラン領域HD_B ＝{a, f(a), g(a, a), f(f(a)), f(g(a, a)), g(a, f(a)), g(f(a), a), g(f(a), f(a)), g(a, g(a, a)), g(g(a, a), a), g(f(a), g(a, a)), g(g(a, a), f(a)), g(g(a, a), g(a, a)), ...}(前スライドの通り)
  - エルブラン基底 HB_B = {p(a, a), p(a, f(a)), p(a, g(a, a)), p(f(a), a), p(f(a), f(a)), p(f(a), g(a, a)), ...}

エルブラン解釈

- 論理式Bのエルブラン解釈(Herbrand interpretation):
  - 値の集合(ドメイン)を HD_B とするような解釈

- 例) B: $\forall x \forall y\ p(f(x), g(x, y))$に対して
  - エルブラン領域HD_B = {a, f(a), g(a, a), f(f(a)), f(g(a, a)), g(a, f(a)), g(f(a), a), g(f(a), f(a)), g(a, g(a, a)), ...} (前スライドの通り)
  - エルブラン基底 HB_B = {p(a, a), p(a, f(a)), p(a, g(a, a)), p(f(a), a), p(f(a), f(a)), p(f(a), g(a, a)), ...} (前スライドの通り)
  - エルブラン解釈(の一例) :
    p(u, v)はu=f(a)のときtrue, それ以外でfalseとなる述語

- つまり, エルブラン解釈はエルブラン基底から真となる基礎式を選択したもの (エルブラン基底の任意の部分集合)

エルブラン列

- $A[x_1, ..., x_n]$の**エルブラン列** $A_1, A_2, ...$:
  - Aの変数 $x_1, ..., x_n$ にHD_Aの元をすべての組み合わせで代入して得られた式A_iを並べたもの

- 例5.3.3: $A[x, y]=(p(x) \lor \neg q(y)) \land \neg p(f(y)) \land q(f(y))$ とすると $HD_A = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$, エルブラン列は
  - $x \leftarrow a, y \leftarrow a$ として
    $A_1 = (p(a) \lor \neg q(a)) \land \neg p(f(a)) \land q(f(a))$
  - $x \leftarrow f(a), y \leftarrow a$ として
    $A_2 = (p(f(a)) \lor \neg q(a)) \land \neg p(f(a)) \land q(f(a))$
  - $x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)$ として
    $A_3 = (p(a) \lor \neg q(f(a))) \land \neg p(f(f(a))) \land q(f(f(a)))$
  - $x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow a$ として $A_4 = ...$
  - $x \leftarrow f(a), y \leftarrow f(a)$ として $A_5 = ...$
  - ...

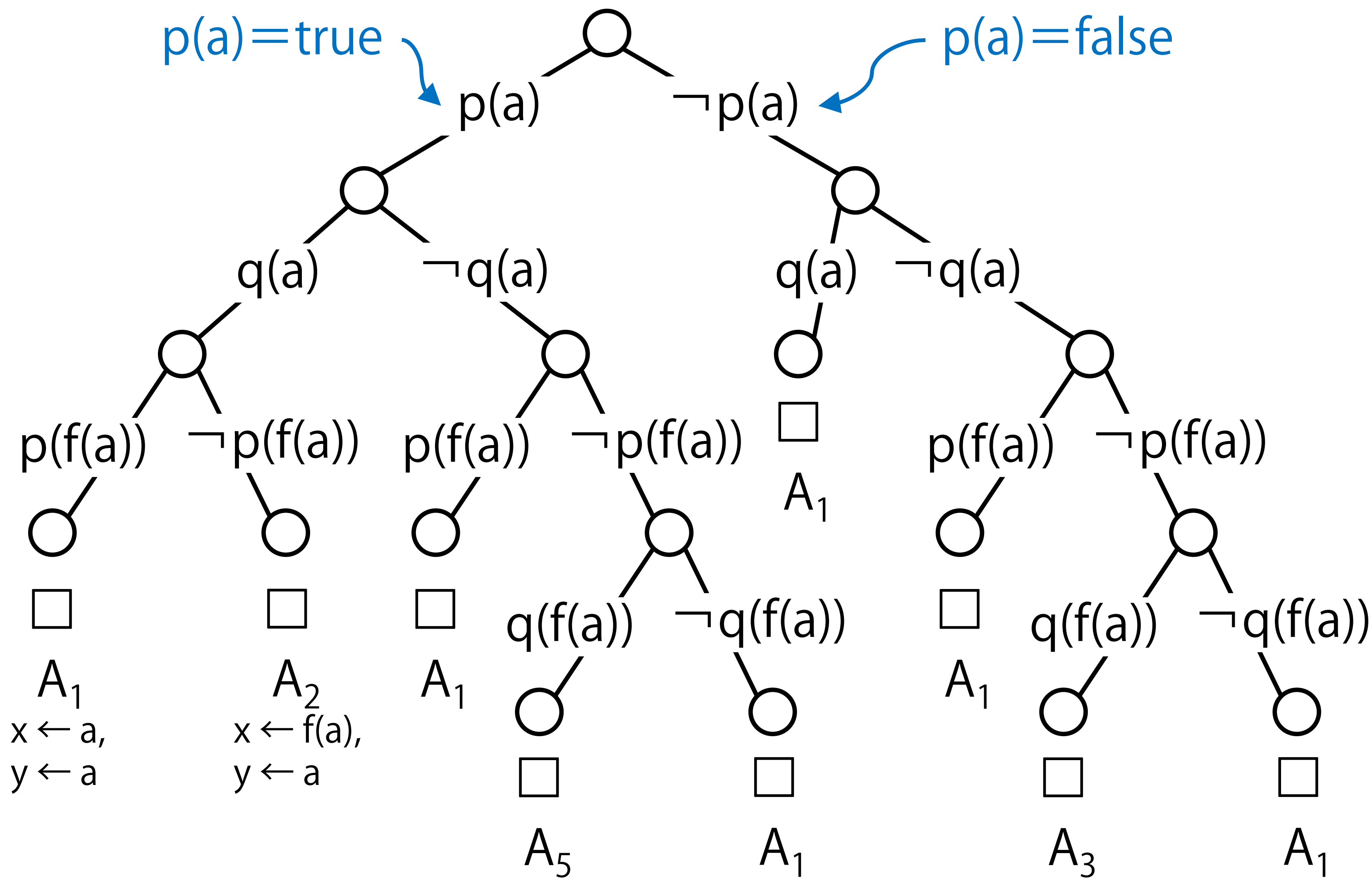
[再掲] エルブランの定理

- 定理5.3.1と定理5.3.2を併せたもの
- 定理5.3.1: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n]$ (ここまでで用意したスコーレム標準形が該当) が充足不能
  $\Leftrightarrow$ その式がエルブラン解釈のもとで充足不能
- 定理5.3.2: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A[x_1, \dots, x_n]$ がエルブラン解釈のもとで充足不能
  $\Leftrightarrow$ $A[x_1, \dots, x_n]$ のエルブラン列$A_1, A_2, \dots$ 中にある有限個の$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im}$が存在し, $A_{i1} \wedge A_{i2} \wedge \dots \wedge A_{im}$がエルブラン解釈のもとで充足不能

$A[x, y]=(p(x) \vee \neg q(y)) \wedge \neg p(f(y)) \wedge q(f(y))$

意味木 (図5.3.1)

例5.3.3のAに対する意味木

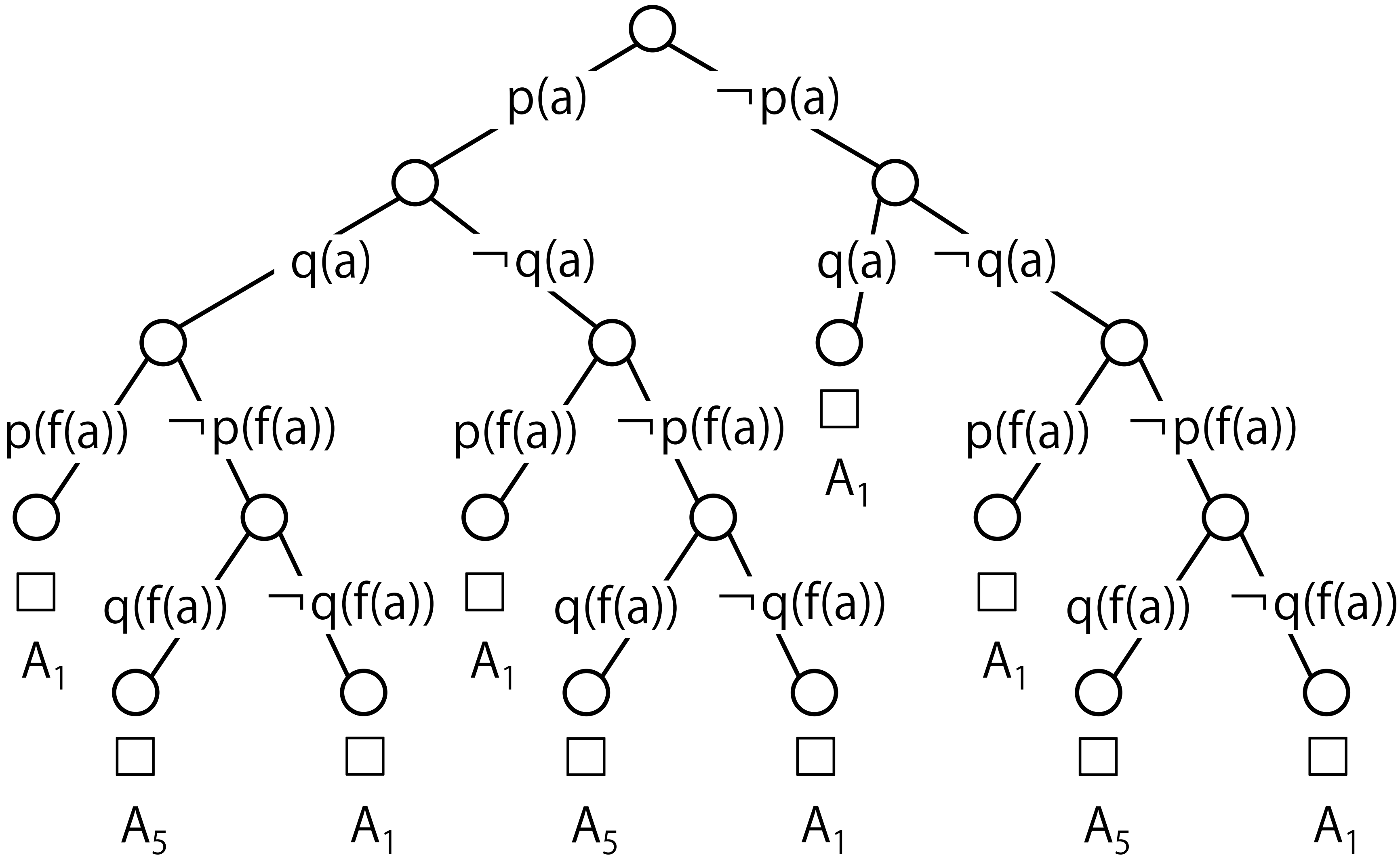


$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_5$ がエルブラン解釈のもとで充足不能

$A[x, y]=(p(x) \vee \neg q(y)) \wedge \neg p(f(y)) \wedge q(f(y))$

意味木 (図5.3.1)

同じく例5.3.3のAに対する意味木



$A_1 \wedge A_5$ がエルブラン解釈のもとで充足不能

エルブランの定理の意義

- 意義: エルブラン領域の要素を論理式に代入し, 命題論理式とみなした上でその充足不能性を調べることで, 与式の充足不能性を確認することができる
  - 充足不能性の確認に対して, 述語論理式を命題論理式とみなすための手段を提供

基礎節

- もう少し効率の良い方法を考える
- スコーレム化された和積標準形(スコーレム連言標準形)

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k)$$

- エルブラン列$A_1, A_2, \ldots$ 中のA_iを$C_1^i \wedge C_2^i \wedge \ldots \wedge C_k^i$とし, $A_1, A_2, \ldots$ 中に現れる節の集合

$$\{C_1^1, C_2^1, \ldots, C_k^1, C_1^2, C_2^2, \ldots, C_k^2, \ldots\}$$

を考える

  - これらの各節は基礎節(ground clause)と呼ばれる

基礎節

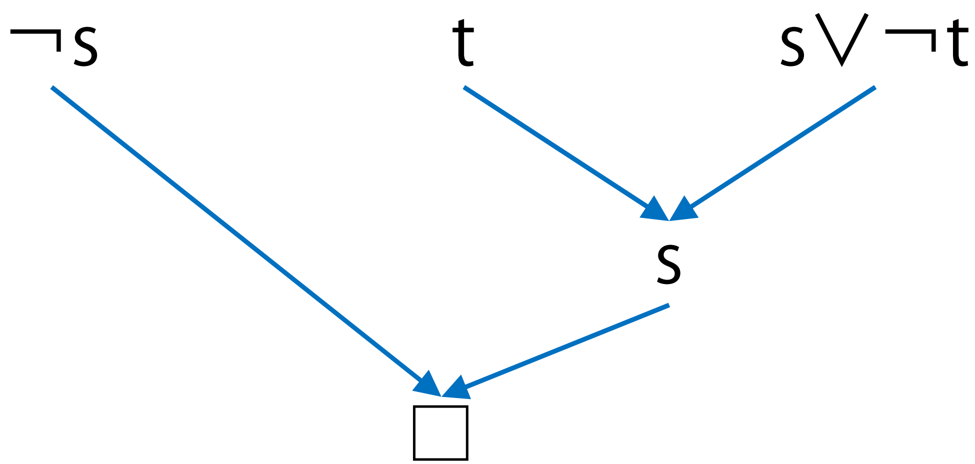
- エルブランの定理と$\wedge$の定義から
- ある有限個の基礎節の論理積がエルブラン解釈のもとで充足不能
  $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \ \ldots \forall x_n \, A[x_1, \ldots, x_n]$ が充足不能

→つまり, 基礎節から充足不能となる組み合わせを
　持ってくればよい

- 例えば, 例5.3.3のエルブラン列では,
  基礎節集合 $\{C_2^1, C_3^1, C_1^5\}$ つまり
  $\{\neg p(f(a)), q(f(a)), p(f(a)) \vee \neg q(f(a))\}$
  の論理積 $C_2^1 \wedge C_3^1 \wedge C_1^5$は充足不能

導出原理

- 先ほどの {¬p(f(a)), q(f(a)), p(f(a))∨¬q(f(a))}は
  二つの命題記号 s = p(f(a)), t = q(f(a)) で置き換えると
  {¬s, t, s∨¬t} となる
- この充足不能性は導出原理により確認可能
  - 空節を導出する行為を 反駁(refutation) と呼ぶ



基礎節を用いた導出原理例

- $\forall u\ \forall v\ \forall w\ \forall x$
  $(p(u) \wedge q(f(x),x) \wedge (\neg p(f(w)) \vee \neg q(u, f(v))))$
  の充足不能性を確認する

- $C_1 = p(u)$
- $C_2 = q(f(x),x)$
- $C_3 = \neg p(f(w)) \vee \neg q(u, f(v))$

- $HD = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$

基礎節を用いた導出原理例

- $C_1 = p(u)$
- $C_2 = q(f(x),x)$
- $C_3 = \neg p(f(w)) \vee \neg q(u, f(v))$

$HD = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}$

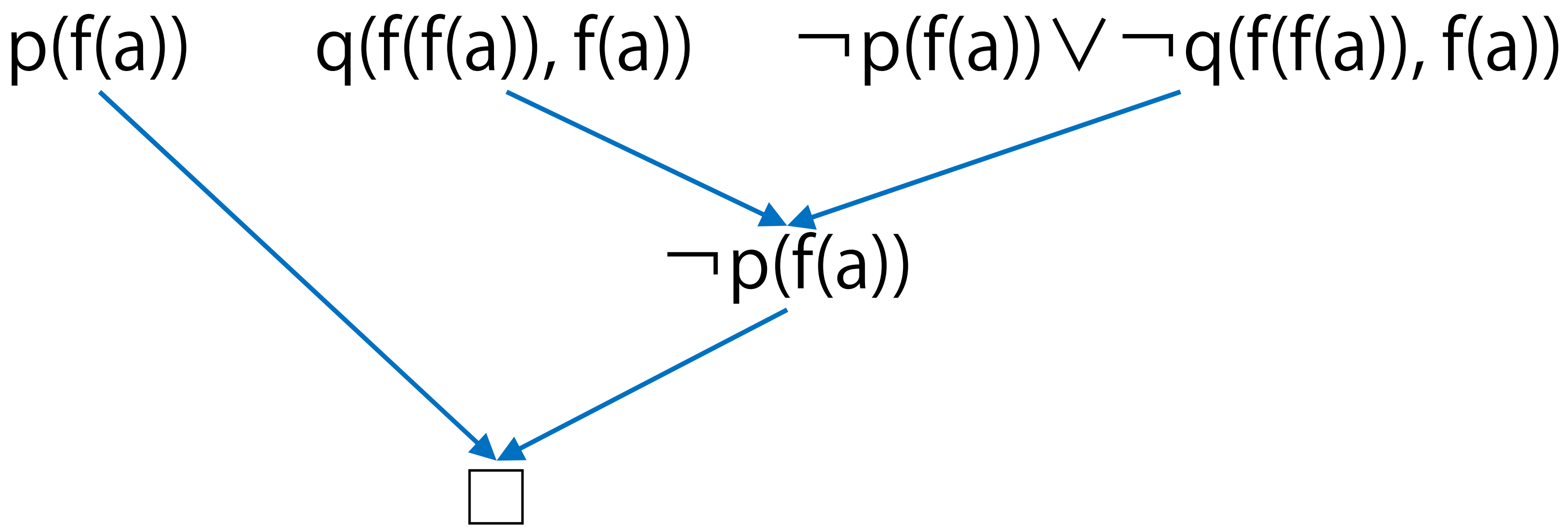
適切な代入による
基礎節の選択

- $C_1' = p(f(a))$ $\quad u \leftarrow f(a)$
- $C_2' = q(f(f(a)), f(a))$ $\quad x \leftarrow f(a)$
- $C_3' = \neg p(f(a)) \vee \neg q(f(f(a)), f(a))$

$u \leftarrow f(f(a)),\ v \leftarrow a,\ w \leftarrow a$

基礎節を用いた導出原理例

- $C_1' = p(f(a))$
- $C_2' = q(f(f(a)), f(a))$
- $C_3' = \neg p(f(a)) \vee \neg q(f(f(a)), f(a))$



レポート課題

レポート課題: 問12-1

- 次の論理式が充足不能であることを，以下の手順で確かめよ

$\neg((\forall x \forall y(p(x, y) \to q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(r(x) \to p(x, b))) \to \exists y\, q(y))$

  - (1) 与式と等価な冠頭標準形を示せ
  - (2) (1)で得られた論理式のスコーレム標準形を示せ
  - (3) (2)で得られた結果に対し，基礎節を用いた導出原理により充足不能であることを示せ