情報論理学
第11回：述語論理の定理の証明法

基礎工学部情報科学科　中川 博之

レポート課題

レポート課題: 問10-1(解答)

- 問4.1.3 (8)
- $\vdash \forall x(A \to B) \Leftrightarrow (\exists x\, A \to B)$
  - Bはxを自由変数として含まない

  - 左辺 ⇒ 右辺　と　左辺 ⇐ 右辺 の証明が必要
  - これまでに例や問で登場した定理を証明無しで使ってよい
  - 演繹定理も使うと良い
  - 左辺 ⇐ 右辺 の証明には,
    - $\vdash X \to \neg\neg X$　[問2.1.2(4)]
    - $\vdash (\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$　[問2.1.2(5)]

  が役立つかもしれない

レポート課題

レポート課題: 問10-1(解答)

- $\vdash \forall x\,(A \to B) \Leftrightarrow (\exists x\,A \to B)$
  - Bはxを自由変数として含まない

- $\vdash \forall x\,(A \to B) \to (\exists x\,A \to B)$ (左辺 ⇒ 右辺)の証明
  - 1. $\forall x\,(A \to B)$ (仮定)
  - 2. $A \to B$ (1 と 例4.1.2 (1)より)
  - 3. $\exists x\,A \to B$ (2 と 問4.1.2 (1)より)
  - よって, $\forall x\,(A \to B) \vdash \exists x\,A \to B$
  - 演繹定理より $\vdash \forall x\,(A \to B) \to (\exists x\,A \to B)$

例4.1.2(1) $\forall x\,A(x) \vdash A(x)$
問4.1.2(1) $A \to B \vdash \exists x\,A \to B$
ただしBはxを自由変数として含まない

レポート課題

レポート課題: 問10-1(解答)

- $\vdash (\exists x\, A \to B) \to \forall x\, (A \to B)$ (右辺 ⇒ 左辺)の証明
  - 1. $\exists x\, A \to B$ (= $\neg \forall x \neg A \to B$) (仮定)
  - 2. $B \to \neg\neg B$ (問2.1.2(4))
  - 3. $\neg \forall x \neg A \to \neg\neg\neg B$ (1,2と三段論法より)
  - 4. $(\neg \forall x \neg A \to \neg\neg\neg B) \to (\neg B \to \forall x \neg A)$ (問2.1.2(5)より)
  - 5. $\neg B \to \forall x \neg A$ (3, 4 とMPより)
  - 6. $(\neg B \to \forall x \neg A) \to \forall x(\neg B \to \neg A)$ (問4.1.3(7))
  - 7. $\forall x(\neg B \to \neg A)$ (5, 6 と MPより)
  - 8. $\neg B \to \neg A$ (7 と 例4.1.2(1))
  - 9. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (問2.1.2(5))
  - 10. $A \to B$ (8, 9 と MPより)
  - 11. $\forall x(A \to B)$ (10と例4.1.2(2)より)
  - よって, $\exists x\, A \to B \vdash \forall x(A \to B)$
  - 演繹定理より, $\vdash (\exists x\, A \to B) \to \forall x\, (A \to B)$

問4.1.3(7) $\vdash \forall x\, (A \to B) \Leftrightarrow (A \to \forall x\, B)$
ただしAはxを自由変数として含まない

述語論理の定理の証明

- 論理式 Pが証明可能 : G |- P
  - Gは特殊公理

  を決定する問題を考える

- Gの集合を$\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ (各g_iは閉論理式)とすると

$$\vdash g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_m \rightarrow P$$

  かどうかの判定問題となる

  しかし，この判定は一般に決定不能

  - 入力 (ここでは論理式) が与えられ, yes/noを答える問題に対して, 有限ステップ数以下で正しい答えを導くことができない

述語論理の定理の証明

- ただし, G |-P が成り立つときに, これを確認することは可能
  - このような判定は半判定(半決定)手続き, 部分判定(部分決定)手続きと呼ぶ

- なお, G |- P でないことは確認することもできない
  - 半判定手続きが存在しない

- ここからは, 現実的な

$$\vdash g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_m \rightarrow P$$

  の確認法を説明する

では, どうやって証明可能性を確かめる?

- 閉論理式 A (= $g_1 \land g_2 \land \ldots \land g_m \to P$) が証明可能であることを確認するには...

  → 完全性・健全性の定理より $\vdash A \Leftrightarrow\ \models A$,
  つまり「Aが恒真である」ことを確かめると良い

- 「A が恒真である」ことを確かめるには...

  → 「¬A が恒偽(充足不能)である」ことを確かめると良い

恒偽性の判定手段といえば...

(復習) (命題論理式に対する)導出原理

- 導出節 (resolvent): 節C1, C2の導出節Cは, C1, C2にちょうど1組の肯定と否定のリテラルが含まれているときに定義することができる節
  - 同リテラルを除いて, C1とC2に含まれるリテラル (命題記号またはその否定) の論理和を取ったもの
  - 重複するリテラルは1つにまとめる

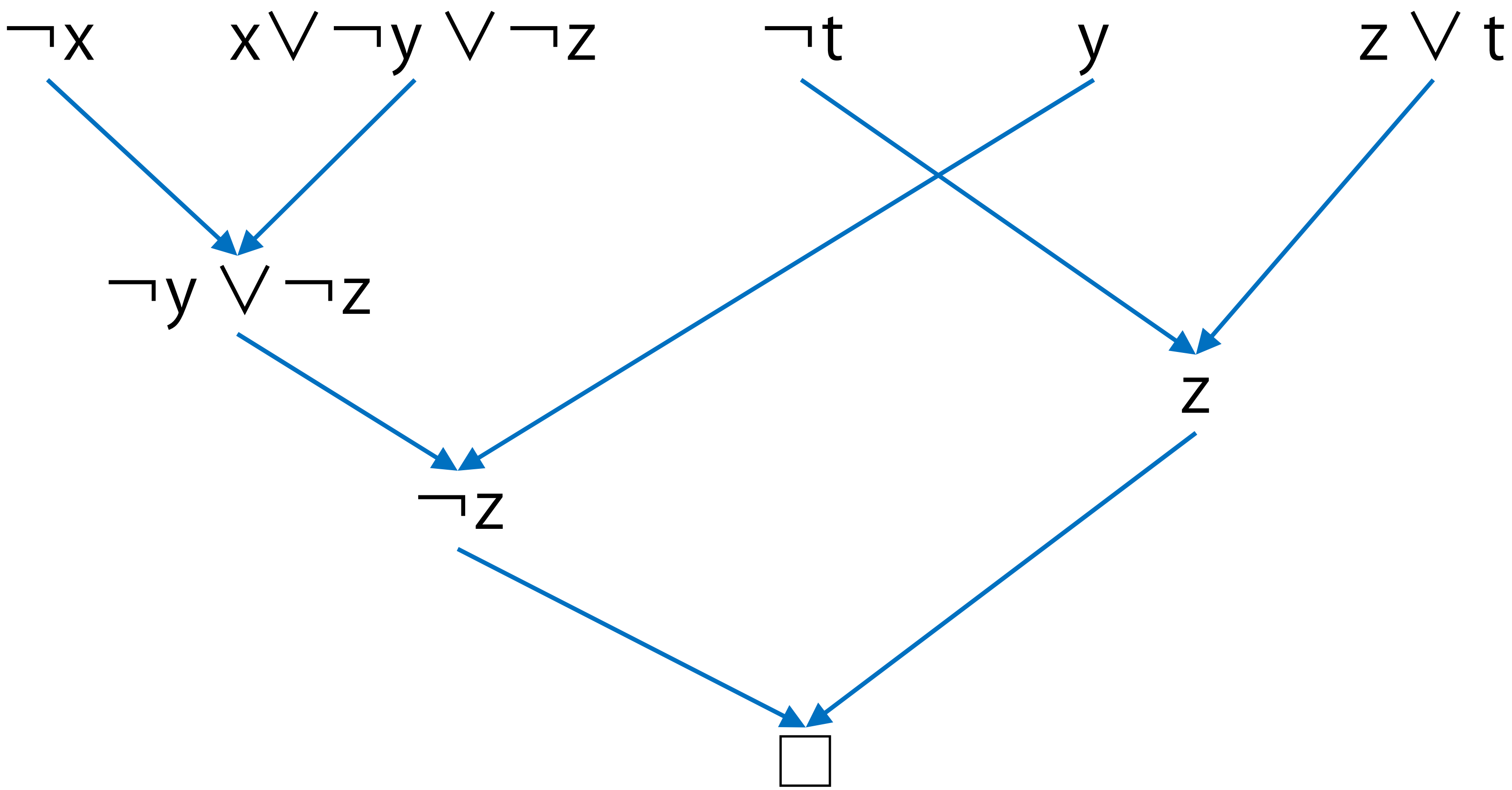
- $C1 = t \vee s_1 \vee \ldots \vee s_n$
  $C2 = \neg t \vee u_1 \vee \ldots \vee u_m$ とすると

  $\rightarrow \quad C = s_1 \vee \ldots \vee s_n \vee u_1 \vee \ldots \vee u_m$

- 例) $C1 = \neg u \vee v \vee \neg w$, $C2 = \neg u \vee w \vee x$ のとき,
  $C = \neg u \vee v \vee x$

(復習) 導出原理の適用

- $\neg x \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge \neg t \wedge y \wedge (z \vee t)$



充足不能性を確かめる手段

- 述語論理式A の充足不能性を確かめる方法

- Step 1. Aの冠頭標準形 を求める
- Step 2. スコーレム標準形を求める
- Step 3. 導出原理により空節を導出する

冠頭標準形

- 冠頭標準形 (prenex normal form): 限定作用素を先頭に集約した形式

$$Q_1\ x_1\ Q_2\ x_2\ \dots\ Q_n\ x_n\ M$$

  - ただし, Q_i は限定作用素 (∀または∃)
    Mは限定作用素を含まない

- すべての述語論理式は冠頭標準形に変換可能

冠頭標準形への変換手順１

論理式中の ⇔ と→を置き換える

- $C \Leftrightarrow D$ は $(C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow C)$ に置き換える
- $C \rightarrow D$ は $\neg C \vee D$ に置き換える

冠頭標準形への変換手順２

論理式中の ¬ を, 下記の変換を用いて述語記号の直前へ
(外側から内側へ) 移動させる

- 1. $\neg(C \vee D)$ は, $\neg C \wedge \neg D$ に置き換える
- 2. $\neg(C \wedge D)$ は, $\neg C \vee \neg D$ に置き換える
- 3. $\neg \forall x\, C$ は, $\exists x \neg C$ に置き換える
- 4. $\neg \exists x\, C$ は, $\forall x \neg C$ に置き換える
- 5. $\neg\neg C$ は, C に置き換える

※なお, このタイミングで和積標準形に変換しておくと良い

$(\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots)$

冠頭標準形への変換手順３

論理式中の限定作用素を, 下記の変換を用いて論理式の先頭 (内側から外側)へ移動させる

- ただしCが自由変数 (束縛されていない変数) xを含んでいないこと

- 1. $C \lor \forall x\, D$　は,　 $\forall x\, (C \lor D)$　に置き換える
- 2. $C \land \forall x\, D$　は,　$\forall x\, (C \land D)$　に置き換える
- 3. $C \lor \exists x\, D$　は,　 $\exists x\, (C \lor D)$　に置き換える
- 4. $C \land \exists x\, D$　は,　 $\exists x\, (C \land D)$　に置き換える

- 注意
  - 限定作用素は∨, ∧の左辺についていても良い
    - 例) $\forall x\, C \lor D$ に対しても1.は適用できる

冠頭標準形への変換手順３'

もし,「ただしCが自由変数xを含んでいないこと」の制約により変換手順３が適用できない場合は, 事前に次のルールを適用する

[補助ルール1]

- 1. $\forall x\, D$　を　$\forall y\, D^{x \leftarrow y}$　に置き換える
  - ただし, y はxに代入可能な変数で, Cが自由変数として含んでいない変数
- 2. $\exists x\, D$　を　$\exists y\, D^{x \leftarrow y}$　に置き換える
  - ただし, y はxに代入可能な変数で, Cが自由変数として含んでいない変数

<u>要は, 変数名を付け替える</u>

変換例

- $\forall x\, A(x, y) \lor \exists x\, B(x)$

- まず 手順3により, ∃を前に出す
  - ∀を先に出してもよいが, ∃を先に出した方が後々嬉しい

$$\Rightarrow \exists x\, (\forall x\, A(x, y) \lor B(x))$$

  - Aにもxがあるが, 変数のスコープにより等価関係が保たれる

- 次に∀を前に出す

変換例 (続き)

$\exists x\ (\forall x\ A(x, y) \lor B(x))$

- そのまま∀を前に出すと, $\exists x\ \forall x\ (A(x, y) \lor B(x))$
  - これはBが自由変数xをもっているため不可！
- 従って補助ルールを適用し, A, Bに含まれていない新たな変数zに置き換える

$$\Rightarrow \exists x\ (\forall z\ A(z, y) \lor B(x))$$

- これにより∀にも手順3が適用でき,

$$\Rightarrow \exists x \forall z\ (A(z, y) \lor B(x))$$

ちなみに∀xを先に出すと $\forall x\ \exists z\ (A(x, y) \lor B(z))$ となる

補助ルール２

以下のルールを適用すれば, 限定作用素を減らすことができる

[補助ルール2]

- 1. $\forall x\, C \wedge \forall x\, D$　を　$\forall x\, (C \wedge D)$　に置き換える
- 2. $\exists x\, C \vee \exists x\, D$　を　$\exists x\, (C \vee D)$　に置き換える

- 注意: 下記の変換は意味が変わるので適用不可！
  - $\forall x\, C \vee \forall x\, D$　を　$\forall x\, (C \vee D)$　に置き換える → ×
  - $\exists x\, C \wedge \exists x\, D$　を　$\exists x\, (C \wedge D)$　に置き換える → ×

レポート課題

レポート課題: 問11-1

- 以下の各式の冠頭標準形を求めよ
  - (1) $\forall x\, p(x) \wedge \exists x \neg q(x)$
  - (2) $(\forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, \neg q(x)) \wedge (\forall x\, r(x) \vee \exists x\, s(x))$
  - (3) $(\forall x\, \neg p(x) \rightarrow \exists x\, \neg q(x)) \wedge (\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x))$

スコーレム標準形

- スコーレム標準形 (Skolem normal form):
  - 存在記号 ∃ を持たない冠頭標準形

$$\forall x_1 \ \forall x_2 \ \dots \ \forall x_n \ A[x_1, \dots, x_n]$$

- 先のステップで用意した冠頭標準形から, 存在記号を除去することでスコーレム標準形を得る
  - この変換をスコーレム化 (Skolemization) と呼ぶ

スコーレム化のアイデア

- どのようにして存在記号を除去するか？
  - $\forall x_1\ \exists x_2\ (x_1 > x_2)$
    - それぞれのx_1に対して上手くx_2を選べば $x_1 > x_2$が成り立つ
  - $\exists x_2\ \forall x_1\ (x_1 > x_2)$
    - うまくx_2を選べばどのようなx_1に対しても$x_1 > x_2$が成り立つ
- 各イメージに近いように存在記号を除去すると…
  - $\forall x_1\ (x_1 > f(x_1))$
    - それぞれのx_1に対して, x_1により決定する$f(x_1)$が存在して，$x_1 > f(x_1)$が成り立つ
  - $\forall x_1\ (x_1 > a)$
    - うまく定数aを選べばどのようなx_1に対しても$x_1 > a$ が成り立つ

スコーレム化

- $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6\, M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
- 存在記号∃により修飾される x_i を削除する
- その際に, 同変数 x_i は x_j $(j < i)$ に依存するため, **これらの変数を引数として持つ関数** (f など) を新たに導入して, x_i と置き換える
- i = 1のときは新たな**定数記号** (a など) で置き換える
- 導入する関数 (定数も含めて) を **スコーレム関数 (Skolem function)** と呼ぶ

スコーレム化の例

- $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6\, M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
- 以下, 順次スコーレム化を進めると

→ $\forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6\, M(a, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

→ $\forall x_2 \forall x_4 \forall x_5 \exists x_6\, M(a, x_2, f(x_2), x_4, x_5, x_6)$

→ $\forall x_2 \forall x_4 \forall x_5\, M(a, x_2, f(x_2), x_4, x_5, g(x_2, x_4, x_5))$

- 注意
  - 定数記号, 関数記号は出現していないものを用いる
  - 等価な変換ではないため, 式間を ＝ で繋いではいけない！

スコーレム標準形, スコーレム化のポイント

- 変換前の論理式とスコーレム化した論理式 (スコーレム標準形) は等価ではない
- 等価ではないが, 変換前の論理式とスコーレム化した論理式においては充足不能性が同じである (定理5.2.1)

- 変換のテクニック
  - 冠頭標準形への変換時に, ∃はなるべく早めに出しておくとよい
    - スコーレム関数が複雑にならないため

レポート課題

レポート課題: 問11-2

- スコーレム標準形を求めよ．変換過程も示すこと．
  - $\exists u \forall v \forall w \exists x \forall y (\neg p(u) \wedge (\neg q(w) \vee \neg r(a, x)) \wedge (q(y) \vee r(u, x)))$