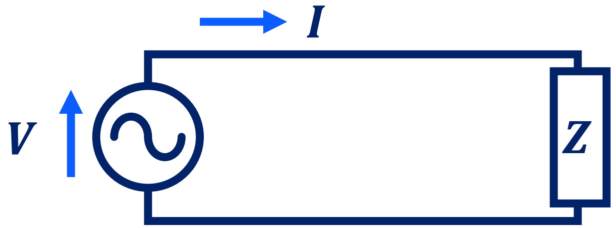
# 電子回路：第6回　交流電力・歪み波交流

基礎工学部情報科学科
粟野 皓光
awano@ist.osaka-u.ac.jp

# 交流回路の電力

インピーダンス$Z$の負荷が接続された回路を考える




この時，実効値表示された複素電圧の共役×実効値表示された複素電流 を 複素電力と呼ぶ

**複素電力**

$$S = \bar{V}I = P + jQ$$

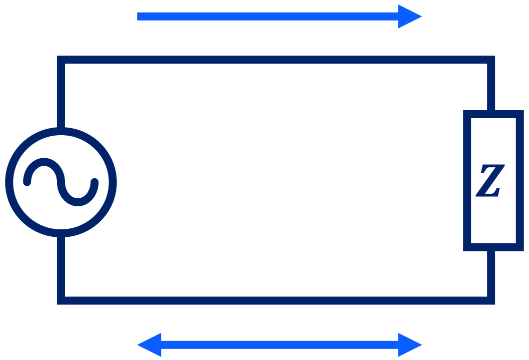
$|S|$：皮相電力　$P$：有効電力　$Q$：無効電力

例）ある回路に$100\sqrt{2}\sin\omega t$の電圧を印加した時，$5\sqrt{2}\sin(\omega t - 30°)$の電流が流れた。電圧の複素数表示は$V = 100$，複素電流は$I = 4.33 - j2.5$となる。よって複素電力は

$$S = 100 \cdot (4.33 - j2.5) = 433 + j250$$

有効電力：433[W]，無効電力：250[var]，皮相電力：500[V・A]

有効電力：負荷で消費される電力




無効電力：負荷で消費されない電力

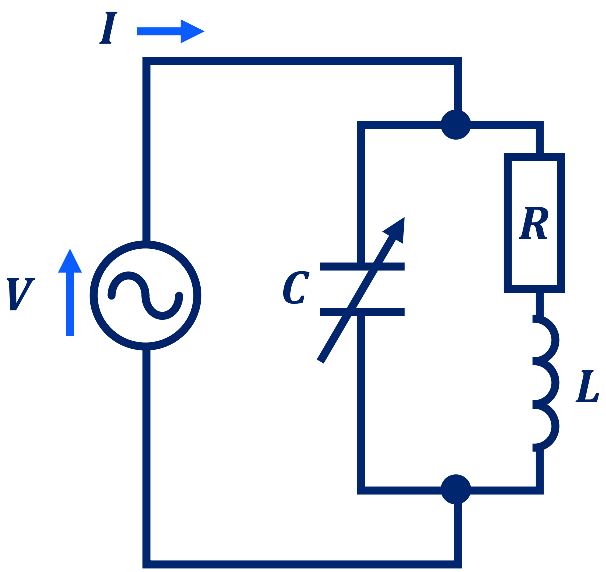
（電源と負荷と行き来しているだけの電力）

**力率**：有効電力と皮相電力の比

$$\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

送電ロスを考慮すると，力率は1に近い方が効率が良い

# 例題：力率改善




【問】図の回路で，力率を1にするためのキャパシタンスを求めよ．電源の角周波数は$\omega$とする．

【解】合成アドミタンスは

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left\{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right\}$$

電流$I$は

$$I = YV = \left[\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left\{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right\}\right]V$$

となる．複素電力を計算すると

$$S = \bar{V}I = \left[\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left\{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right\}\right]V^2 = P + jQ$$

力率は$P/\sqrt{P^2 + Q^2}$なので，$Q = 0$であれば，力率=1を達成出来る．よって求める条件は，

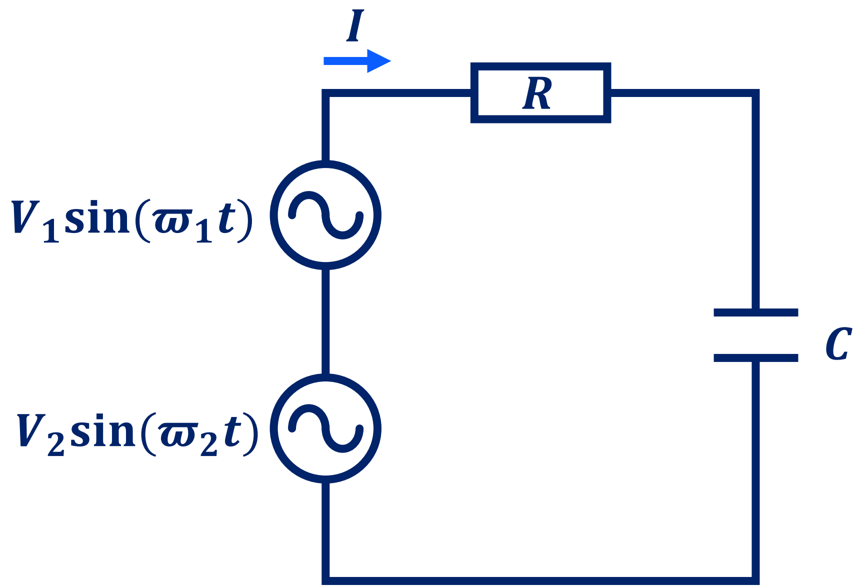
$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$ をCについて解いて，

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$$ となる．

# 角周波数の異なる複数の電源を含む場合の回路解析

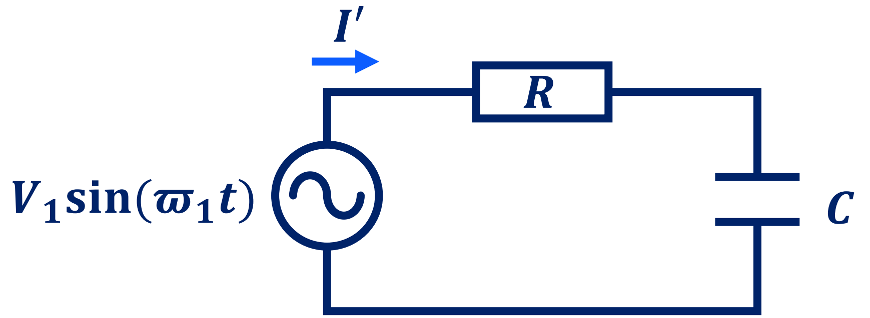
**交流回路理論の前提：角周波数$\varpi$は回路全体で共通**

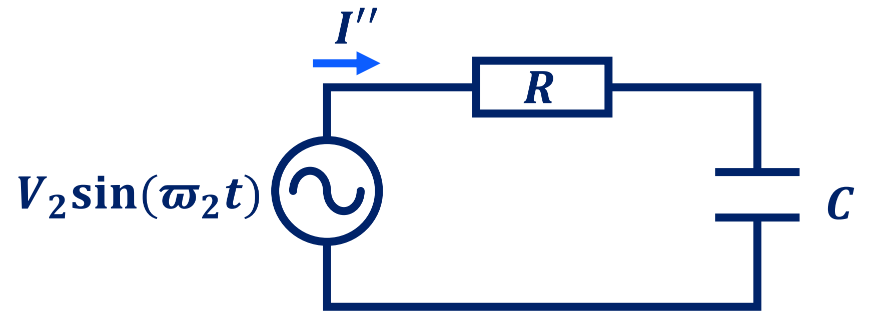
図の様に角周波数の異なる複数の電源を含む場合は，
交流回路理論はそのままでは適用できない




回路が受動素子（増幅・整流などの能動動作を行わないもの）で構成される場合には，重ね合わせの理が成り立つので各周波数成分毎の解析結果を足し合わせれば良い

(Step1) 以下の2つの回路について$I'$と$I''$を求める

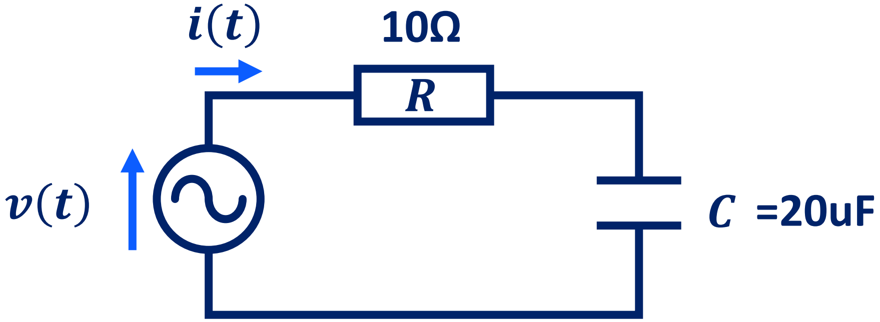



(Step2) $I'$と$I''$を瞬時値表示に直してから足し合わせる

（複素数表示の演算が成り立つのは同じ角周波数の時のみ）

# 例題（1/2）




$$v(t) = 10 + 50\sqrt{2}\sin\varpi t + 20\sqrt{2}\sin\left(2\varpi t + \frac{\pi}{4}\right) + 10\sqrt{2}\sin 3\varpi t$$

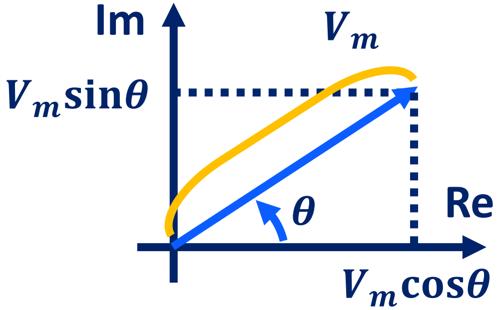
【問】$i(t)$を求めよ．ただし，$\varpi = 500$[rad/s]とする．

【解】交流電圧源の電圧が$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$のとき，これを複素数表示に直すと

$$V = V_m(\cos\theta + j\cdot\sin\theta) = V_m e^{j\theta}$$

直列インピーダンスは

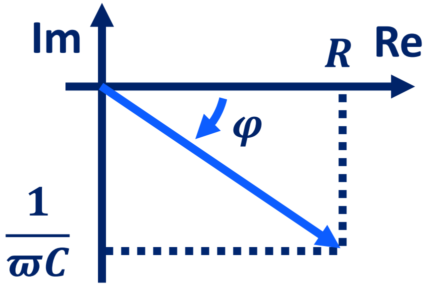
$$Z = R + \frac{1}{j\varpi C} = R - j\frac{1}{\varpi C}$$




極形式に直すと

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\varpi C}\right)^2}\, e^{j\varphi}$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\frac{1}{\varpi CR}$$




よって，電流は

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\varpi C}\right)^2}} e^{j(\theta - \varphi)}$$

瞬時値表示では

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\varpi C}\right)^2}} \sin(\varpi t + \theta - \varphi)$$

# 例題（2/2）

$$v(t) = V_m \sin(\varpi t + \theta)$$

$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\varpi C}\right)^2}} \sin(\varpi t + \theta - \varphi) \\ \varphi = -\tan^{-1} \dfrac{1}{\varpi CR} \end{cases}$$

- $50\sqrt{2}\sin \varpi t$に対する電流$i_1(t)$：
  - $V_m = 50\sqrt{2}$
  - $\theta = 0$
  - $R = 10$
  - $C = 20 \times 10^{-6}$
  - $\varpi = 500$

$$\Rightarrow \quad i_1(t) = 0.704 \cdot \sin(500t + 84.3°)$$

関数電卓を持ってない人は，Googleの検索窓で代用可
例えば，「50*sqrt(2) / sqrt( 10**2 + (1/(500*20*10**-6))**2 )」で検索
arctanやpiもOK

- $20\sqrt{2}\sin\left(2\varpi t + \frac{\pi}{4}\right)$に対する電流$i_2(t)$：
  - $V_m = 20\sqrt{2}$
  - $\theta = \pi/4$

$\varpi$の2倍を忘れないこと

$$\Rightarrow \quad i_2(t) = 0.218 \cdot \sin(1000t + 124°)$$

- $10\sqrt{2}\sin 3\varpi t$に対する電流$i_3(t)$：
  - $V_m = 10\sqrt{2}$
  - $\theta = 0$

$\varpi$の3倍を忘れないこと

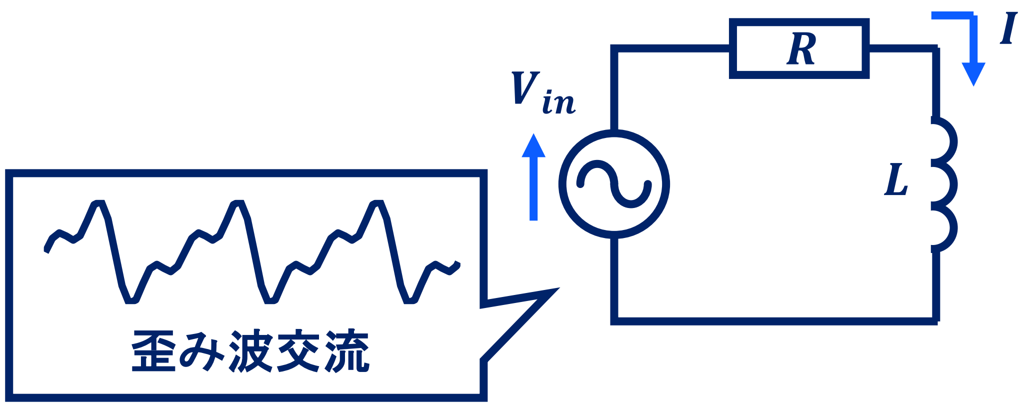
$$\Rightarrow \quad i_3(t) = 0.406 \cdot \sin(1500t + 73.3°)$$

- 10に対する電流$i_{dc}(t)$：
  - $\varpi = 0$　⇒明らかに$i_{dc}(t) = 0$

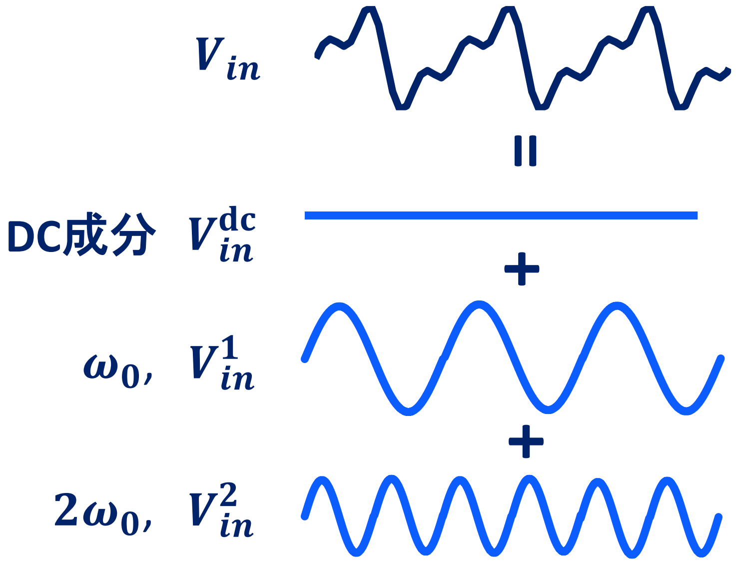
以上から

$$\begin{aligned} i(t) = {} & 0.704 \cdot \sin(500t + 84.3°) \\ & +0.218 \cdot \sin(1000t + 124°) \\ & +0.406 \cdot \sin(1500t + 73.3°) \end{aligned}$$

# 電源がsin/cosの形で与えられていない場合：フーリエ級数展開を使う




フーリエ級数展開によって入力信号を三角関数の和の形に変換してから重ね合わせの理を用いて解く



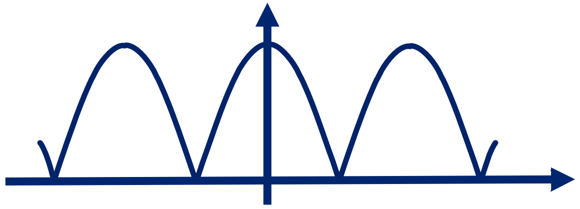

## 周期$T$の関数$f(t)$のフーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varpi t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varpi t$$

- $\varpi = \dfrac{2\pi}{T}$
- $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\varpi t\, dt$
- $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\varpi t\, dt$

### 偶関数のとき

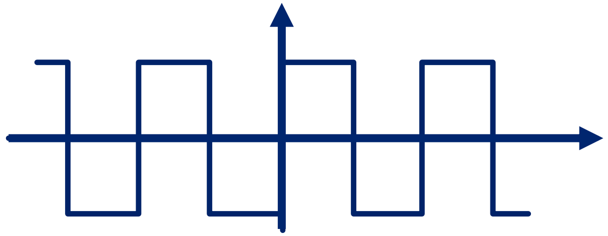
$b_n = 0$　cos成分のみ



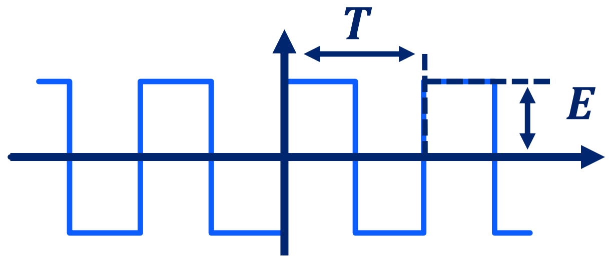
$f(t) = f(-t)$

### 奇関数のとき

$a_n = 0$　sin成分のみ（直流成分も0）



# 方形波のフーリエ級数展開




奇関数なので$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\varpi t\,dt =$$

$$= \frac{2E}{T}\left(\int_0^{T/2}\sin n\varpi t\,dt - \int_{T/2}^{T}\sin n\varpi t\,dt\right)$$

$$= \frac{2E}{T}\left(\left[-\frac{1}{n\varpi}\cos n\varpi t\right]_0^{T/2} - \left[-\frac{1}{n\varpi}\cos n\varpi t\right]_{T/2}^{T}\right)$$

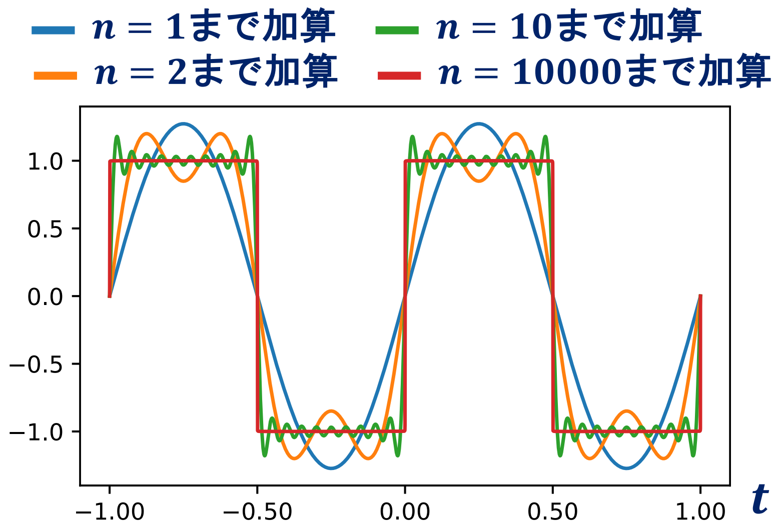
$$= \frac{2E}{n\varpi T}\left(-\cos\frac{n\omega T}{2} + \cos 0 + \cos n\varpi T - \cos\frac{n\varpi T}{2}\right)$$

…A

$\varpi = \frac{2\pi}{T}$ なので　A$= \frac{2E}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$

よって　$b_n = f(x) = \begin{cases} \frac{4E}{n\pi}, & n: 奇数 \\ 0, & n: 偶数 \end{cases}$

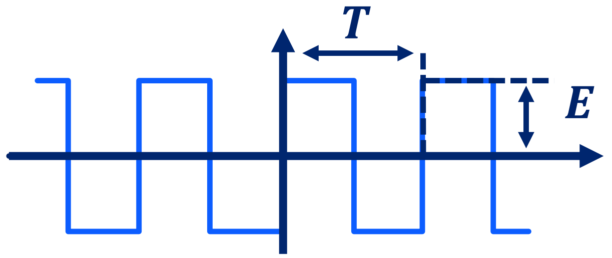
$$\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\varpi t$$

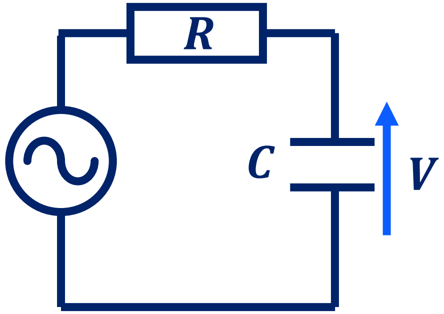



$E = T = 1$の例

# 回路解析への応用例（1/2）

下記の回路で電源に方形波を接続した時のキャパシタの両端の電圧を求める




**方針**

前ページの結果から $e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\varpi t$ と展開出来る

よって交流電圧源 $e_n(t) = \frac{4E}{n\pi} \sin n\varpi t$ が単独で存在する回路を考え，

各々の部分回路に対して解いた結果を足し合わせれば良い

交流電圧源を複素数表示すると $E_n = 4E/n\pi$ となる．これが，抵抗とキャパシタで分圧されていると考えれば良い．分圧比は

$$\frac{\frac{1}{jn\varpi C}}{R + \frac{1}{jn\varpi C}} = \frac{1}{1 + jn\varpi CR}$$

となるため，キャパシタの電圧は

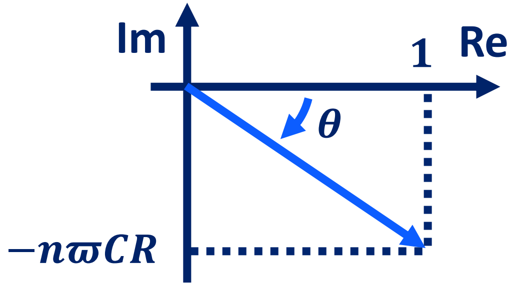
$$V_n = \frac{1}{1 + jn\varpi CR} \frac{4E}{n\pi} = \frac{1 - jn\varpi CR}{1 + (n\varpi CR)^2} \frac{4E}{n\pi}$$ となる

瞬時値表示に戻すと

$$v_n(t) = |V_n| \sin(n\varpi t + \theta)$$

$$|V_n| = \frac{1}{\sqrt{1 + (n\varpi CR)^2}}$$

$$\angle V_n = \theta = -\tan^{-1} n\varpi CR$$



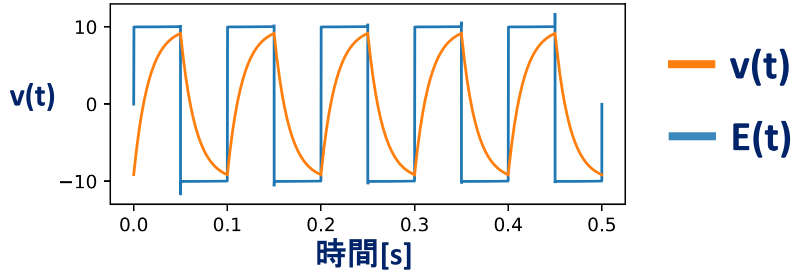

よって，重ね合わせの理を用いて $v(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} v_n(t)$

複素数表示に対して $I = I_1 + I_2 + \cdots$ という式は成立しないことに注意！
（複素数表示間の演算が定義できるのは電源が同じ周波数の場合のみ）

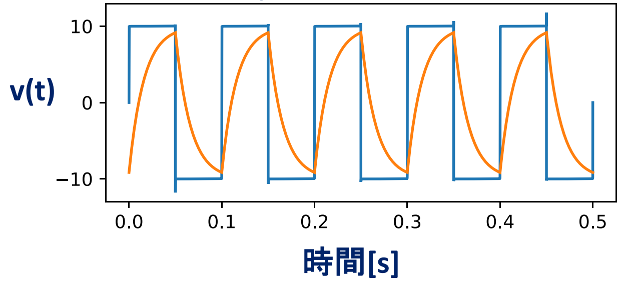
# 回路解析への応用例（2/2）

R: 100[Ω]，C: 160[uF]，E: 10[V]での可視化例

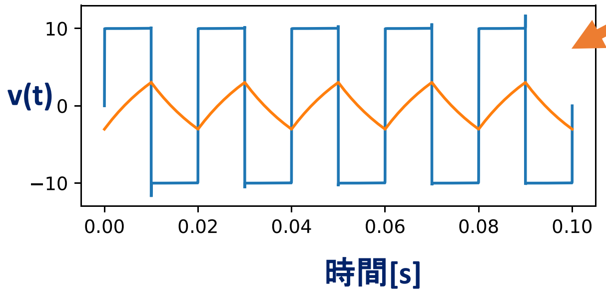
T=1/5（5Hz）の時




T=1/10（10Hz）の時

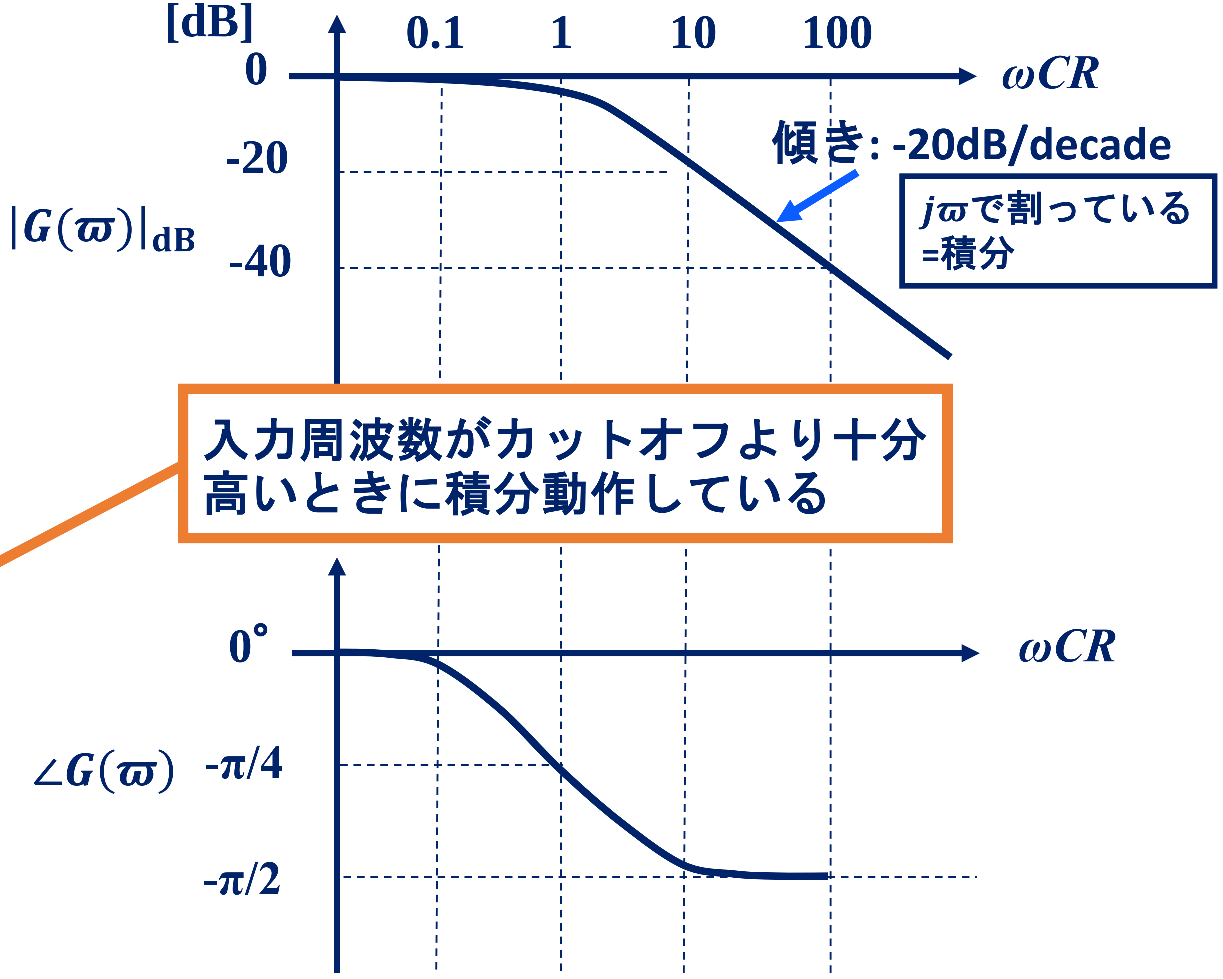



T=1/50（50Hz）の時




この回路は前回出てきたローパスフィルタ

カットオフ周波数＝1/(2πRC)≒9.9[Hz]




入力周波数がカットオフより十分高いときに積分動作している