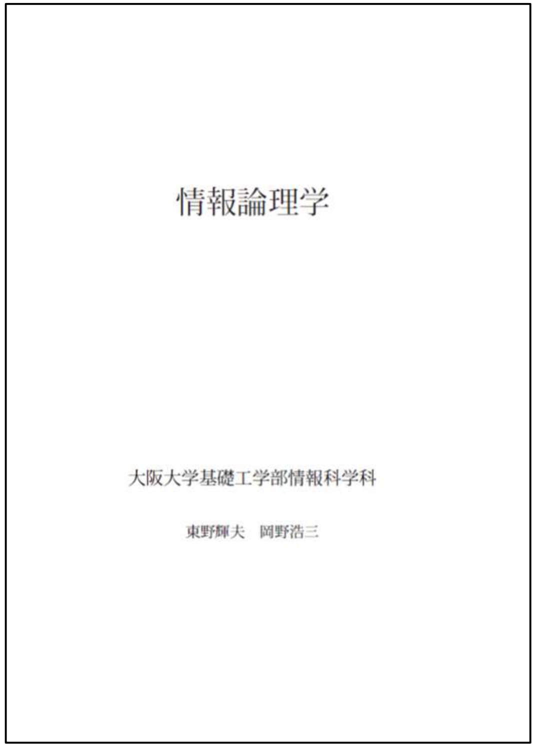
情報論理学
第8回：導入・述語論理の論理式

基礎工学部情報科学科　中川 博之

講義スタイル

- 「情報論理学」の教科書に沿って進める
  - 講義では極力例を示します
- 毎回レポート課題を用意
  - 翌週講義の前日(火曜日) 23:59までにCLEにて提出
  - 出席確認用なのでできていなくても良いです
  - 手書きのものを撮影する形で構いません
- 質問について
  - nakagawa@ist.osaka-u.ac.jp で随時受付
  - 授業時間中はZoomでも受け付けます
  - メールを頂ければ柔軟に対応します
  - 講義の進め方についても要望があれば連絡ください



後半 (中川担当分)で扱う話題

- テキストの4章～6章
  - 4章 述語論理の公理系
    - 始めに述語論理の基礎 (3章) を簡単に復習
    - 4.2節 は結果のみ用いる
  - 5章 述語論理の定理の証明法
  - 6章 論理型プログラミング言語

- 目標
  - 述語論理式を理解する
  - 述語論理式を記述できる
  - 述語論理式の恒偽性の確認手段を習得する
    - あるクラスの論理式であれば, コンピュータを用いて自動的に恒偽 (充足不能)であることを確認できる

[復習] 述語論理とは？

- 命題論理 (propositional logic): 命題を構成要素として持つ論理体系
  - 命題 (proposition): 真か偽のいずれかである主張
    - 「情報論理学の講義は水曜日の2限に開催される」
    - 「アメリカの首都はNYであり, かつ日本の首都は京都である」
  - 各命題の内部構造にまでは立ち入らない
  - 否定詞と接続詞の論理学

- 述語論理 (predicate logic):
  - 命題の内部構造を形式化した論理体系
  - 述語 (predicate): 変数を含んだ命題
  - 量について言及できる
    - 「すべての . . . に対して . . . 」, 「ある . . . が存在して . . .」
      - 「すべての国に対して, 首都が一つある」
      - 「ある国が存在して, その首都は東京である」

述語論理式 (構文)

- 登場記号
  - 定数記号: a, b, c, d, e (アルファベット小文字の前半)
  - 変数記号: u, v, w, x, y, z (アルファベット小文字の後半)
  - 関数記号: f, g, h
  - 述語記号: p, q, r
  - 論理記号: ¬, ∨, ∧, →, (⇔), ∀, ∃
    - ⇔は双方向の→に分解する
    - ∃ x A は¬∀x ¬Aの略記
- (本講義での) 論理記号の優先度(結合強度)

1. ¬, ∀, ∃
2. ∧ (左結合とする)
3. ∨ (左結合とする)
4. → (左結合とする)

優先度の確認 (1)

- $p(x) \land q(y) \land r(z) = ((p(x) \land q(y)) \land r(z))$
- $p(x) \lor q(y) \lor r(z) = ((p(x) \lor q(y)) \lor r(z))$

  → 左結合

- $p(x) \lor q(y) \land r(z) = (p(x) \lor (q(y) \land r(z)))$

  → ∧が∨よりも強い

- $(p(x) \lor q(y)) \land r(z) = ((p(x) \lor q(y)) \land r(z))$

  → ()で優先度を制御できる

優先度の確認 (2)

- $p(x) \to q(y) \to r(z) = ((p(x) \to q(y)) \to r(z))$
  → 左結合
- $\neg p(x) \to q(y) \lor r(z) = ((\neg p(x)) \to (q(y) \lor r(z)))$
  → ¬は∨, ∧, →よりも強い
  → ∨, ∧は →よりも強い
- $\forall x\, p(x) \land q(x) = ((\forall x\, p(x)) \land q(x))$
  → ∀, ∃は∧よりも強い
- $\forall x\, (p(x) \land q(x)) = (\forall x\, (p(x) \lor q(x)))$
  → ()で優先度を制御できる

束縛変数とスコープ

- 束縛変数 (bound variable): 限定作用素(∀, ∃)により明示的に利用法が定められた変数
  - 限定作用素により束縛されている変数
  - 限定作用素は限量子とも呼ばれる

- スコープ (scope): 限定作用素が影響を及ぼす範囲

- 例) $\forall x\,(p(x) \land \forall x\, q(x))$
  xは束縛変数
  - 1つ目の$\forall x$のスコープ: $p(x) \land \forall x\, q(x)$
  - 2つ目の$\forall x$のスコープ: $q(x)$
  - 1つ目の$\forall x$は, $p(x)$ のみを束縛する
    - 複数の限定作用素により修飾されている場合, 一番近い限定作用素に束縛される (複数の限定作用素に束縛されることはない)

限定作用素

- 変数名: 差し替え可能
  - 他と区別するためのものであり, 区別できるのであれば名前は替えてもよい

- 例: 以下の論理式は同等

$$\neg \forall x\, p(x, y) \qquad \neg \forall z\, p(z, y)$$

- 例: 以下の論理式は異なる

$$\neg \forall x\, p(x, y) \qquad \neg \forall x\, p(z, y)$$

- ただし, 限定作用素の順序には意味がある

限定作用素の順序

- $\forall x \exists y \; x > y$
  - 全てのxについて,「ある yが存在して, x > y」が成り立つ

➔ 各 x に対して, うまくyを定めると x > yが成り立つ

  - 対象領域：整数集合, > の解釈を通常の > とすれば真

- $\exists y \forall x \;\; x > y$
  - あるyが存在して,「すべてのxについて x>y」が成り立つ

➔ まず上手くyを定めると, そのyに対してどんなxについてもx>yが成り立つ

  - 対象領域：整数集合, > の解釈を通常の > とすれば偽
  - 対象領域：正整数集合, > の解釈を ≧ とすれば真

自由変数

- 自由変数 (free variable): どの限定作用素にも束縛されていない変数

$$\forall x\,(p(x, y) \rightarrow \exists y\, q(x, y))$$

- 束縛関係を変えない限り, 変数の名前は自由に付け替えてよい
  - 束縛関係を意識することが重要

$$\forall z\,(p(z, u) \rightarrow \exists w\, q(z, w)) \qquad \forall x\,(p(x, y) \rightarrow \exists y\, q(y, y))$$

閉論理式

- 閉論理式 (closed formula):
  - すべての変数がいずれかの限定作用素に束縛されている論理式

    → 自由変数を含まない論理式

  - ∀x p(x) ∧ q(x)

  → q(x)の変数xが束縛されていない(自由変数を含む)ので閉論理式ではない

  - ∀x (p(x) ∧ q(x))

  → p(x), q(x)双方の変数xが束縛されているので閉論理式

レポート課題

レポート課題: 問8-1

- 例にならい，各論理式の束縛関係を示すとともに，自由変数を指摘せよ.

- 例) $\forall x\,(p\,(x, y) \rightarrow \exists y\, q(y, y))$

- (1) $\forall x \exists y((p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow \exists z(p(x) \rightarrow q(z)))$

- (2) $\neg \forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow q(y) \rightarrow \exists z(p(z) \rightarrow q(x))$

- (3) $\forall y \exists z(\exists x\, p(x, y, z) \rightarrow \neg q(x, z)) \rightarrow (p(y) \rightarrow \forall x \neg r(x, y))$

代入

- 論理式 T と自由変数 x の関係に着目して, Tを T(x) と書くことがある

- 代入: 自由変数を指定の項で置き換えること
  - x に項tを代入した結果を T(t) , あるいは $T^{x \leftarrow t}$のように書く
  - <u>代入がなされるのは自由変数に対してのみ</u>

- 例) ∀x p(x) ∧ ∃y q(x, y)
  - 自由変数は？
  - x ← a を代入すると？

  → ∀x p(x) ∧ ∃y q(a, y)
  - (注意) ∀x p(a) ∧ ∃y q(a, y)ではない
    - p(x)の変数xは∀xで束縛されているので自由変数ではない
    - q(x,y)の変数xはどの限定作用素にも束縛されていないので自由変数

代入

- 自由変数が複数ある論理式に代入するときには,
どの変数に代入するのかを明示しなければならない

- $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(x, y)$ に対してaを代入
  - 自由変数は x のみのため, 代入 $x \leftarrow a$と理解できる (OK)

- $\forall x\, p(x) \wedge q(x, y)$ に対してaを代入
  - 自由変数は x, y の2つであり, 代入指定が曖昧 (NG)

- $\forall x\, p(x) \wedge q(x, y)$ に対して代入$x \leftarrow a$を代入
  - 代入対象が明確である (OK). 結果は $\forall x\, p(x) \wedge q(a, y)$

代入の制限

- 既存の限定作用素に束縛されない代入のみが可能
  - 束縛関係が変わってしまうため
- その時に代入される t は T(x)の x に対して自由であると呼ぶ

- $T(x) = \forall x\, r(x) \land \exists y\, p(x, y)$
  - 代入θ: $x \leftarrow g(x, y)$を施すと …
  - $\forall x\, r(x) \land \exists y\, p(g(x, y), y)$ となりそうだが…
    - g(x, y) 中のy が ∃y のスコープ内となり，束縛されて論理式の構造が変わってしまう
  - 従って, g(x, y) は T(x)のx に対して自由ではない (代入可能ではない)

問3.1.1 (p.58)

- $T(x) = (\forall x\, r(x) \to p(x)) \to \forall y\, \neg(r(y) \to q(x, y))$

- $t_1 = f(x, y)$に対し
  $T(t_1) = (\forall x\, r(x) \to p(f(x, y))) \to \forall y\, \neg(r(y) \to q(f(x, y), y))$
  →$\forall y$に束縛されるため, t_1は$T(x)$ 中の x に対して自由ではない

- $t_2 = g(x)$
  $T(t_2) = (\forall x\, r(x) \to p(g(x))) \to \forall y\, \neg(r(y) \to q(g(x), y))$

- $t_3 = h(a, v)$
  $T(t_3) = (\forall x\, r(x) \to p(h(a, v))) \to \forall y\, \neg(r(y) \to q(h(a, v), y))$

  →t_2, t_3は$T(x)$ 中の x に対して自由

ポイント

- (1) y は T(x) の xに対して自由であるとは限らない
  - y は $T(x) = \forall y\, p(x, y)$の x に対して自由ではない
  - y は $T(x) = \forall z\, p(x, z)$の x に対して自由
- (2) tが自由変数を含まない項なら, tはT(x)のxに対して自由である
  - 代入により束縛されることがないため
- (3) xはT(x)のxに対して自由である
  - 代入後も Tは変化しない

    → 変数 x に変数 x を代入してもよい

レポート課題

レポート課題: 問8-2

- 各論理式に対して, 与えられた代入は可能であるか. 代入可能であれば適用結果を示せ. 代入可能でなければそう答えよ.
  - (1) $\forall x(\exists y\, p(x, y) \rightarrow q(y))$ に項$f(z)$を代入
  - (2) $\forall y \exists x\, p(x, y) \rightarrow q(y) \wedge \neg \exists z\, r(z) \vee s(y)$ に項$f(x, z)$を代入
  - (3) $\forall y \exists x\, p(x, y) \rightarrow q(y) \wedge \neg\, r(z) \vee s(y)$ に項$f(x, z)$を代入
  - (4) $\forall y \exists x\, p(x, y) \rightarrow q(y) \wedge \neg \exists z\, (r(z) \vee s(y))$ に項$g(z)$を代入

述語論理の解釈

- 一階述語論理式の解釈(interpretation) I は次の (D, C, F, P) の4項組で与えられる
  - D : 対象領域 (値の集合)
  - C : 各定数記号への D の要素の割り当て
  - F : 各 n 引数関数記号への $(D^n \to D)$ の要素の割り当て
  - P : 各 n 引数述語記号への $(D^n \to$ {true, false}) の要素の割り当て

- 例) 一階述語論理式 $\forall x\ p(f(b, x), a)$ に対して，解釈 I として
  - D : 非負整数全体からなる集合
  - C : a, b それぞれへ非負整数値 0,1 を割り当てる
  - F : 2引数関数記号f(u,w) へ非負整数上の加算u + w を割り当てる
  - P: 2 引数述語記号p(u,w) へ非負整数上の比較演算u > w を割り当てる
- このとき，解釈 I のもとで $\forall x\ p(f(b, x), a)$ はtrue となる

問

- 以下の各論理式が(a) 恒真, (b) 充足可能であるが恒真でない，(c) 充足不能のいずれであるか判断し記号で答えよ．(b) である場合は，真になる解釈と偽になる解釈を１つずつ挙げよ.
- 1. $\forall x\, p(x) \rightarrow p(a)$　　a は定数
- 2. $\exists x\, p(x) \rightarrow p(a)$　　a は定数

- 答
- 1. 恒真
- 2. 充足可能であるが恒真ではない

2. の解釈

2. $\exists x\, p(x) \rightarrow p(a)$　 a は定数

- 真にする解釈
  - *D*: {0, 1}
  - *C* : a へ1 を割り当てる
  - *F* : なし
  - *P*: p(0)=false, p(1)= true

- 偽にする解釈
  - *D*: {0, 1}
  - *C* : a へ1 を割り当てる
  - *F* : なし
  - *P*: p(0)= true, p(1)= false

レポート課題: 問8-3

- 以下の各論理式が, (a) 恒真, (b) 充足可能であるが恒真でない, (c) 充足不能のいずれであるかを判断し, 記号で答えよ． (b) である場合は, 真になる解釈と偽になる解釈を１つずつ挙げよ.
- (1) $\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x(p(x) \wedge q(x))$
- (2) $\forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, p(x, y)$