情報論理学
第13回: mgu, 論理型プログラミング言語

基礎工学部情報科学科　中川 博之

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (再掲)

- 次の論理式が充足不能であることを，以下の手順で確かめよ

  $\neg((\forall x \forall y(p(x, y) \to q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(r(x) \to p(x, b))) \to \exists y\, q(y))$

  - (1) 与式と等価な冠頭標準形を示せ
  - (2) (1)で得られた論理式のスコーレム標準形を示せ
  - (3) (2)で得られた結果に対し，基礎節を用いた導出原理により充足不能であることを示せ

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (解答)

- $\neg((\forall x \forall y(p(x, y) \to q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(r(x) \to p(x, b)))$
  $\to \exists y\, q(y))$

(1-1)冠頭標準形

- $\neg(\neg(\forall x \forall y(\neg p(x, y) \lor q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(\neg r(x) \lor p(x, b)))$
  $\lor \exists y\, q(y))$
- $(\forall x \forall y(\neg p(x, y) \lor q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(\neg r(x) \lor p(x, b)))$
  $\land \neg \exists y\, q(y)$
- $\forall x \forall y(\neg p(x, y) \lor q(f(y))) \land \exists x\, r(x) \land \forall x(\neg r(x) \lor p(x, b))$
  $\land \forall y \neg q(y)$
- $\exists x(\forall x \forall y(\neg p(x, y) \lor q(f(y))) \land r(x) \land \forall x(\neg r(x) \lor p(x, b))$
  $\land \forall y \neg q(y))$
- $\exists x \forall z \forall y((\neg p(z, y) \lor q(f(y))) \land r(x) \land (\neg r(z) \lor p(z, b))$
  $\land \neg q(y))$

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (解答)

(1-2)スコーレム標準形

- $\exists x \forall z \forall y((\neg p(z, y) \vee q(f(y))) \wedge r(x) \wedge (\neg r(z) \vee p(z, b)) \wedge \neg q(y))$

- $\exists x$に対して新たな定数記号aを導入して
  $\forall z \forall y((\neg p(z, y) \vee q(f(y))) \wedge r(a) \wedge (\neg r(z) \vee p(z, b)) \wedge \neg q(y))$

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (解答)

- (1-3)基礎節を用いた導出原理
- $\forall z \forall y((\neg p(z, y) \vee q(f(y))) \wedge r(a) \wedge$
  $(\neg r(z) \vee p(z, b)) \wedge \neg q(y))$
  の充足不能性を確認する

- $C_1 = \neg p(z, y) \vee q(f(y))$
- $C_2 = r(a)$
- $C_3 = \neg r(z) \vee p(z, b)$
- $C_4 = \neg q(y)$

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (解答)

- $C_1 = \neg p(z, y) \lor q(f(y))$
- $C_2 = r(a)$
- $C_3 = \neg r(z) \lor p(z, b)$
- $C_4 = \neg q(y)$

HD = {a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), … }

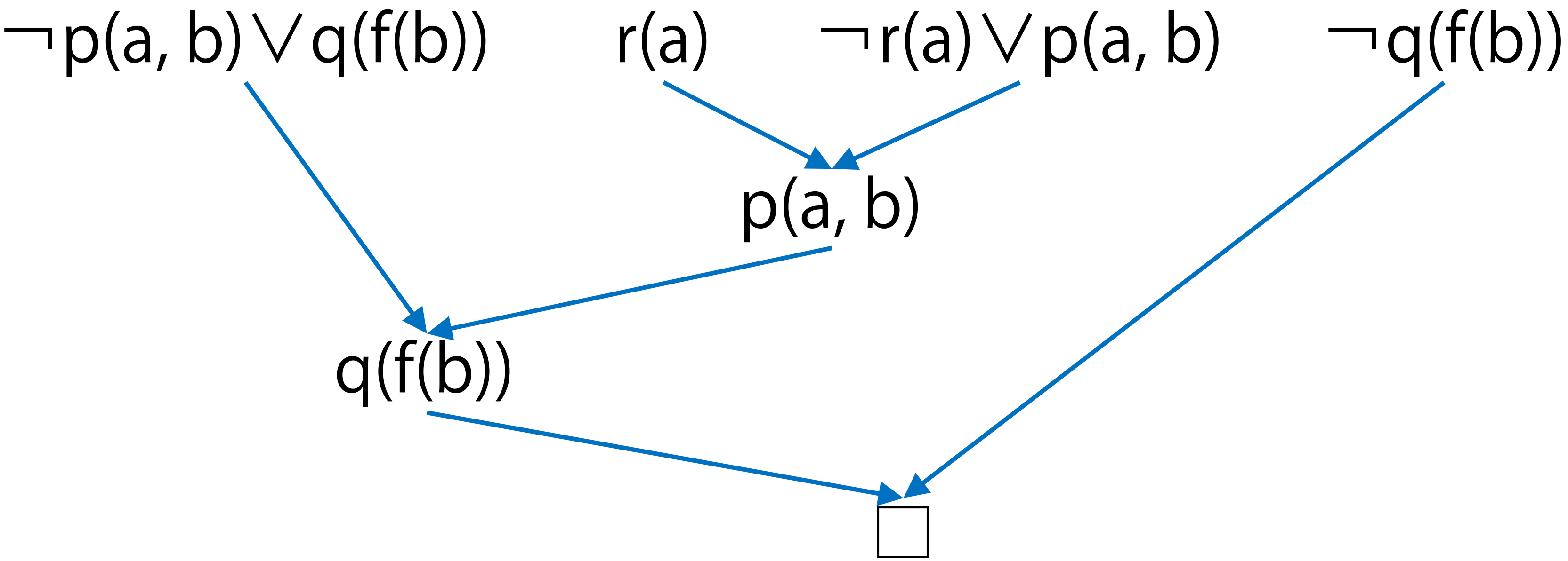
適切な代入による基礎節の選択

- $C_1' = \neg p(a, b) \lor q(f(b))$ $y \leftarrow b, z \leftarrow a$
- $C_2' = r(a)$
- $C_3' = \neg r(a) \lor p(a, b)$ $z \leftarrow a$
- $C_4' = \neg q(f(b))$ $y \leftarrow f(b)$

レポート課題

レポート課題: 問12-1 (解答)

- $C_1' = \neg p(a, b) \vee q(f(b))$
- $C_2' = r(a)$
- $C_3' = \neg r(a) \vee p(a, b)$
- $C_4' = \neg q(f(b))$



基礎節を用いた導出原理

- エルブラン列は無限にあるが, 基礎節を適切に選んで充足不能性を示せばよい
- ただし, 最初に基礎節選択時の適切な代入を考える必要がある
- どのように選べばよい？

単一化

- 単一化(unification): 複数 (通常2つ) の項に対して代入を施すことで同一の項にすること
  - このときの代入を単一化代入 (単一化子, unifier)と呼ぶ

- 例) 2つの項 p(u), p(f(v)) は
  $\theta = \langle u \leftarrow f(a), v \leftarrow a \rangle$ により
  項p(f(a))に単一化される
  - このときの単一化代入は代入θ

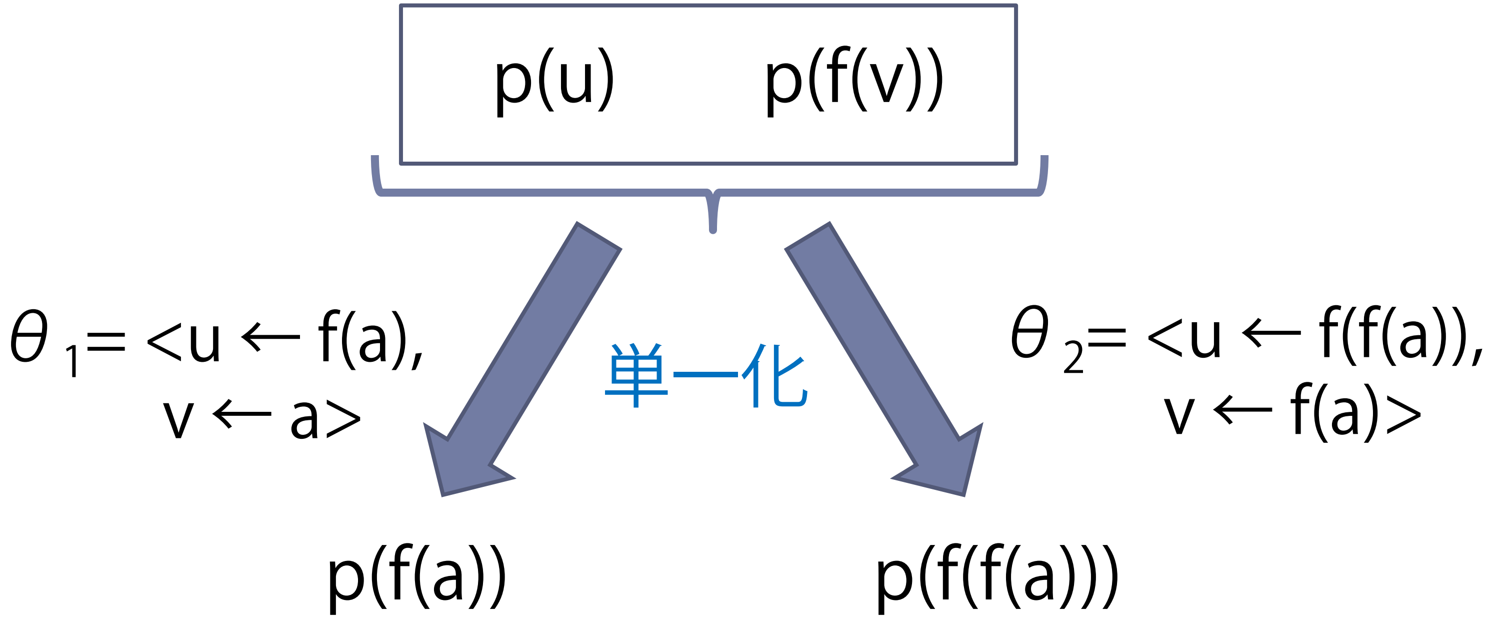
p(u)　　p(f(v))

単一化　$\theta = \langle u \leftarrow f(a),$
$v \leftarrow a \rangle$

p(f(a))

単一化

- 単一化代入は一般に複数存在する



単一化とmgu

- 最も一般的な単一化代入をmgu (most general unifier)と呼ぶ
  - 再汎単一化子, 最汎単一化代入などとも呼ぶ

- 単一化代入θがmguである条件：

  任意の単一化代入ρに対し,
  $\rho = \theta\gamma$ なる代入γが存在する

mguの例

$f(g(x), x)$　　$f(y, h(z))$

$\theta_1 = \langle x \leftarrow h(z),\ y \leftarrow g(h(z)) \rangle$

単一化

$\theta_2 = \langle x \leftarrow h(a),\ y \leftarrow g(h(a)),\ z \leftarrow a \rangle$

$f(g(h(z)), h(z)) \Rightarrow f(g(h(a)), h(a))$

$\gamma = \langle z \leftarrow a \rangle$

$\theta_2 = \theta_1 \gamma$ であり, θ_1がmgu

mguの求め方

- 前から順にマッチングを進めると良い
  - 事前に変数集合が互いに素であることを確認する

- 例: p(f(x), y)　p(z, z)
  - 変数は{x, y}と{z}で互いに素
  - 第1引数をそろえるために z←f(x)
  - p(f(x), y)　p(f(x), f(x))
  - 第2引数をそろえるために y←f(x)
  - p(f(x), f(x))　p(f(x), f(x))
  - よってmguは θ =< y←f(x), z←f(x) >

mguの求め方

- 前々スライドの例: f(g(x), x) f(y, h(z))
  - 変数は{x}と{y, z}で互いに素
  - 第1引数をそろえるために y ←g(x)
  - f(g(x), x) f(g(x), h(z))
  - 第2引数をそろえるために x←h(z)
  - f(g(h(z)), h(z)) f(g(h(z)), h(z))
  - よってmguは θ =<x←h(z), y←g(h(z)) >

mguの求め方 (互いに素でない場合)

- 例: p(x, h(g(u,u)), g(x,v))　p(h(y), h(x), x)
  - 変数は{x, u, v}と{x, y}でxが重複
    → 第2項の変数 x を新規変数 z に替える (x←z)
  - p(x, h(g(u,u)), g(x,v))　p(h(y), h(z), z)
  - 第1引数をそろえるために x←h(y)
  - p(h(y), h(g(u,u)), g(h(y),v))　p(h(y), h(z), z)
  - 第2引数をそろえるために z←g(u,u)
  - p(h(y), h(g(u,u)), g(h(y),v))　p(h(y), h(g(u,u)), g(u,u))
  - 第3引数をそろえるために u←h(y), v←h(y)
  - p(h(y), h(g(h(y), h(y))), g(h(y), h(y)))　p(h(y), h(g(h(y), h(y))), g(h(y), h(y)))

  - よってmguは 第1項 θ_1=< x←h(y), u←h(y), v←h(y)>
    第2項 θ_2=< x←g(h(y), h(y))>

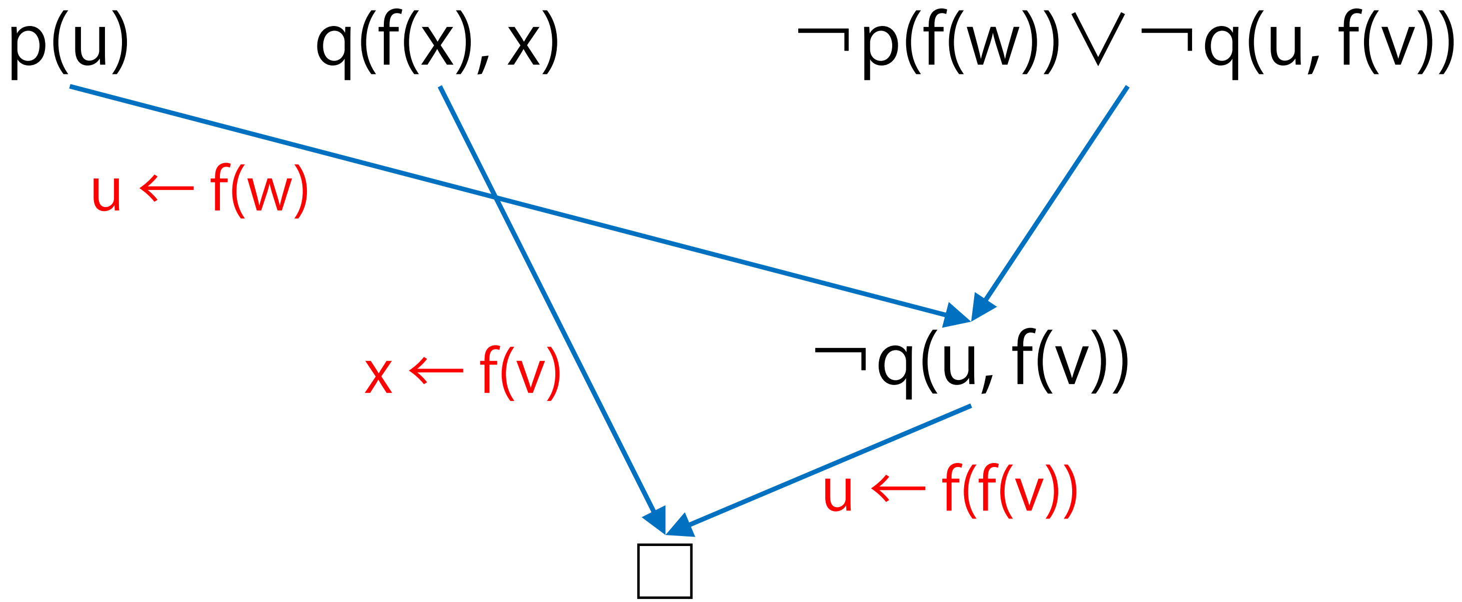
mguを用いた導出原理の例

- $\forall u\ \forall v\ \forall w\ \forall x$
  $(p(u) \land q(f(x),x) \land (\neg p(f(w)) \lor \neg q(u, f(v))))$
  の充足不能性を確認する

- $C_1 = p(u)$
- $C_2 = q(f(x),x)$
- $C_3 = \neg p(f(w)) \lor \neg q(u, f(v))$

mguを用いた導出原理例

- $C_1 = p(u)$
- $C_2 = q(f(x),x)$
- $C_3 = \neg p(f(w)) \vee \neg q(u, f(v))$



mguを用いた導出原理例

ポイント

- 肯定と否定の項 (述語ペア)のある節を見つけてマッチングする
- このとき, 節単位で代入を適用
  - 述語ペア以外の項にも代入を適用する

レポート課題

レポート課題: 問13-1

- 以下のそれぞれの組み合わせに対してmguを求めよ.
  - (1) p(x, u) と p(g(y), y)
  - (2) p(f(x), y, g(z)) と p(u, u, v)
  - (3) p(a, x, h(g(z))) と p(z, h(y), h(y))

レポート課題

レポート課題: 問13-2

- 先週のレポート課題 問12-1 (2)で得られたスコーレム標準形に対し，mguを用いた導出原理により充足不能であることを示せ.
  - 問12-1 (2)の解答は本日のスライドを参照のこと

論理型プログラミング言語

Prolog

- Prolog: 論理型プログラミング言語の1つ
  - PROgrammation en LOGique (Programming in Logic)
  - 論理式の恒真性を問う形で記述する

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \ldots \wedge B_{1n1} \rightarrow A_1) \\
\wedge\ &\forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \ldots \wedge B_{2n2} \rightarrow A_2) \\
&\ldots \\
\wedge\ &\forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \ldots \wedge B_{mnm} \rightarrow A_m) \\
\rightarrow\ &\exists x_1 \exists x_2 \ldots (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k)
\end{aligned}
$$

  - ただし, n1, n2, ..., nm ≧ 0, 各B, A, C は原始論理式

Prologにおける恒真性判定

- 前式の否定を取り, 充足不能性を判定すれば良い
- 前式の否定

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{11} \land B_{12} \land \ldots \land B_{1n1} \to A_1) \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{21} \land B_{22} \land \ldots \land B_{2n2} \to A_2) \\
&\qquad \ldots \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{m1} \land B_{m2} \land \ldots \land B_{mnm} \to A_m) \\
&\quad \to \exists x_1 \exists x_2 \ldots (C_1 \land C_2 \land \ldots \land C_k)) \\
&= \forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{11} \land B_{12} \land \ldots \land B_{1n1} \to A_1) \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{21} \land B_{22} \land \ldots \land B_{2n2} \to A_2) \\
&\qquad \ldots \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (B_{m1} \land B_{m2} \land \ldots \land B_{mnm} \to A_m) \\
&\quad \land \neg \exists x_1 \exists x_2 \ldots (C_1 \land C_2 \land \ldots \land C_k) \\
&= \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{11} \land B_{12} \land \ldots \land B_{1n1}) \lor A_1) \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{21} \land B_{22} \land \ldots \land B_{2n2}) \lor A_2) \\
&\qquad \ldots \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{m1} \land B_{m2} \land \ldots \land B_{mnm}) \lor A_m) \\
&\quad \land \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(C_1 \land C_2 \land \ldots \land C_k)
\end{aligned}
$$

Prologにおける恒真性判定

$$= \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{11} \wedge B_{12} \wedge \ldots \wedge B_{1n1}) \vee A_1)$$
$$\wedge\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{21} \wedge B_{22} \wedge \ldots \wedge B_{2n2}) \vee A_2)$$
$$\ldots$$
$$\wedge\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg(B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \ldots \wedge B_{mnm}) \vee A_m)$$
$$\wedge\ \forall x_1\ \forall x_2 \ldots (\neg(C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k)$$

$$= \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg B_{11} \vee \neg B_{12} \vee \ldots \vee \neg B_{1n1} \vee A_1)$$
$$\wedge\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg B_{21} \vee \neg B_{22} \vee \ldots \vee \neg B_{2n2} \vee A_2)$$
$$\ldots$$
$$\wedge\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg B_{m1} \vee \neg B_{m2} \vee \ldots \vee \neg B_{mnm} \vee A_m)$$
$$\wedge\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \ldots \vee \neg C_k)$$

Prologにおける恒真性判定

- 限定作用素を括りだすと

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots [(\neg B_{11} \lor \neg B_{12} \lor \ldots \lor \neg B_{1n1} \lor A_1)$$
$$\land (\neg B_{21} \lor \neg B_{22} \lor \ldots \lor \neg B_{2n2} \lor A_2)$$
$$\ldots$$
$$\land (\neg B_{m1} \lor \neg B_{m2} \lor \ldots \lor \neg B_{mnm} \lor A_m)$$
$$\land (\neg C_1 \lor \neg C_2 \lor \ldots \lor \neg C_k)]$$

導出原理が使える！

Prolog

- Prologでは下記のように書く
  - 帰結部を先頭に. 限定作用素省略. “∧”→”,”. 各行ごとに記述

$A_1 \leftarrow B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1n1}$.

$A_2 \leftarrow B_{21}, B_{22}, \ldots, B_{2n2}$.

…

$A_m \leftarrow B_{m1}, B_{m2}, \ldots, B_{mnm}$.

$\leftarrow C_1, C_2, \ldots, C_k$.

・実際のプログラムでは, “←” は ”:-” とする場合が多い
・本講義では各行最後のピリオドは省略する

- 解釈
  - B_{11} かつ B_{12} かつ … B_{1n1} が成り立つならA_1が成り立つ
  - B_{21} かつ B_{22} かつ … B_{2n2} が成り立つならA_2が成り立つ
  - …
  - これらの状況下でC_1 かつ C_2 かつ… C_k が成り立つか？

Prolog

- $\leftarrow C_1, C_2, \ldots, C_k$: ゴール節 (GC), 目標節
- $A_i \leftarrow B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{ini}$: プログラム節 (PC), 確定節

  特に,
  - $A_i \leftarrow B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{ini}$ (ni>0): 規則節 (ルール節)
  - $A_i \leftarrow$ (ni=0): 事実節 (ファクト節)

  と呼ばれる

- GC, PCはホーン節 (Horn clause) と呼ばれる
  - 肯定の原子論理式(リテラル)が高々一つの節