情報論理学

大阪大学基礎工学部情報科学科

東野輝夫　岡野浩三

目 次

0　序

論理式はいろんな問題を記述することができるひとつの極めて標準的な記述言語である．まず，入門として，自然語で表現した内容を論理式でどう表すかを 0.1 節 (と 0.2 節) で学ぼう．論理式で書いたあとにどんな良いことがあるのかについてはこの授業の本題ででである 1 章以降で学ぶ．

0.1　自然語と論理式

P や Q を「$\cdots$ である」調の真か偽である陳述 (**言明，命題，***proposition*) としよう．例えば,「整数 2 は 5 より大きい」,「9 年度情報科学科 3 年生には 5 名以上の女子学生がいる」,「整数 x は 5 より大きい」,「どの整数も素数の積に等しい」などが陳述の例である.「整数 x は 5 より大きい」は引数 x をもち，x に具体的な値を代入したら真か偽かが決まる (引数 x をもつ**述語** *(predicate)* という)．このようなタイプの陳述もある．陳述 P や Q を次のように組み合せてできるものも陳述であり，右のような論理式に対応する．

(1). P かつ Q である
　P と Q が共に成り立つ
　P が成り立ち，かつ Q も成り立つ　　$P \wedge Q$

(2). P または (あるいは)Q である
　P と Q の少なくとも一方が成り立つ
　P が成り立つかあるいは Q が成り立つ　　$P \vee Q$

(3). P でない (P の否定)
　P が成り立たない
　P であるということはない　　$\neg P$

(4). P ならば Q である
　もし P が成り立つなら Q も成り立っている　　$P \to Q$
　(P が成り立たないかあるいは Q が成り立つ)
　(P が成り立っているのに Q が成り立っていない，ということはない)

集合の要素を表す引数をもつ陳述 ($R(x), R'(x)$ と表す) に対し

(5). すべての x について $R(x)$ が成り立つ　　$\forall x\ R(x)$
　(どの x についても)
　(任意の x について)

(6). 集合 M に属するすべての x について $R'(x)$ が成り立つ　　$\forall x \in M\ R'(x)$
　(すべての $x \in M$ について)

集合の要素を表す引数をもつ陳述 ($R(x), R'(x)$ と表す) に対し

(7). ある x があって (存在して)$R(x)$ が成り立つ
$R(x)$ が成り立つような x が存在する　　$\exists x\ R(x)$

(8). 集合 M に属するある x があって $R'(x)$ が成り立つ
(ある $x \in M$ があって)
$R'(x)$ が成り立つような $x \in M$ が存在する　　$\exists x \in M\ R'(x)$
($\forall x \in M \cdots$ や $\exists x \in M \cdots$ の形の式は厳密には論理式と言わない．後述)

元となる基本的ないくつかの陳述から上のような組み合せを繰り返して得られるような陳述だけをこの授業では対象にする.「x は多分 5 より大きいだろう」,「「x は 5 より大きい」または「x は 3 より小さい」の少なくとも一方は成り立つかもしれない」などはここで対象とする陳述ではない.

休憩コラム 0.1

「授業に殆ど出ないお前が情報論理学に 80 点とるなら，俺は A 群全科目 100 点さ」
ほんとはお前がどうだと言いたいのでしょう．答え：$\boxed{\quad\quad\quad}$
「 P ならば Q である」はどういうときに成り立つのかちょっと慣れないと分りにくい.「 P ならば Q」は，P が真でかつ Q が偽のとき，かつそのときのみ，偽となる (成り立たない)．したがって，P が偽なら，Q の真偽にかかわらず，全体「 P ならば Q である」は$\boxed{\quad\quad\quad}$である．
全体が真で Q が偽なら P は$\boxed{\quad\quad\quad}$でなくてはいけない．
全体が真で P が真なら Q は$\boxed{\quad\quad\quad}$でなくてはいけない．上のように言った本人は当然全体としては真であることを言ってるつもりであろう．A 群全科目 100 点というのは偽であろう．したがって，お前が情報論理学に 80 点とるというのは偽である (80 点取ることはありえない) と言いたいのでしょう．

$\forall$ や $\exists$ をつける変数は (x でも y でも) 何であっても，例えば，$\forall x R(x)$ と $\forall y R(y)$ は，意味的に同じことを表す.

上述の組み合せの構造は，論理式では括弧 (,) で表される (曖昧さがないときは括弧は省略されることがある)．例えば，$\forall x R(x)$ の $R(x)$ が $\exists y\ p(x, y) \to q(x)$ のとき，$\forall x\ (\exists y\ p(x, y) \to q(x))$ のように書く.

式が複雑なときは，条件を取り出して書くとよい.

$\forall x\ (\exists y\ p(x, y) \to q(x))$
どの x についても次のことが成り立つ：
　　もし $p(x, y)$ が成り立つ y が存在するなら，$q(x)$ が成り立つ.

$\exists x\ (\forall y\ p(x, y) \to q(x))$
次のことが成り立つような x が存在する：
　　もしどの y についても $p(x, y)$ が成り立つなら，$q(x)$ が成り立つ.

$\forall x\ (\forall y\ R(x, y))$(括弧を省略すれば $\forall x \forall y\ R(x, y)$) は
「どの x についても次のことが成り立つ：
　　どの y についても $\forall y\ R(x, y)$ が成り立つ」

を表します．

これは，例えば集合を $\{a, b, c\}$ とすると，
$x = a$ について，$\forall y\, R(a, y)$ が成り立つ (どの y についても $R(a, y)$ が成り立つ)，すなわち，$R(a, a)$，$R(a, b)$，$R(a, c)$ が成り立つ，
$x = b$ についても，$\forall y\, R(b, y)$ が成り立つ，すなわち，$R(b, a)$，$R(b, b)$，$R(b, c)$ が成り立つ，
$x = c$ についても，$\forall y\, R(c, y)$ が成り立つ，すなわち，$R(c, a)$，$R(c, b)$，$R(c, c)$ が成り立つ，
を表す．すなわち，引数のすべての組み合せで成り立つことになる．
よって，そのことを，我々は普通「どの x, y についても $R(x, y)$ が成り立つ」というようにまとめて言い表す．

同様に，$\exists x\, (\exists y\, R(x, y))$ (括弧を省略すれば $\exists x\, \exists y\, R(x, y)$) は，普通「ある x, y があって $R(x, y)$ が成り立つ」というようにまとめて言い表す．変数の順を変えても (どの y, x についてもと言っても，ある y, x があってと言っても) 同じ意味になる．

$\exists x\, p(x)$ の否定 $\neg\exists x\, p(x)$ は
「$p(x)$ が成り立つような x が存在する，ということはない」
「$p(x)$ が成り立つような x は存在しない」

$\exists x\, \exists y\, R(x, y)$ の否定 $\neg\exists x\, \exists y\, R(x, y)$ は
「$R(x, y)$ が成り立つような x, y が存在する，ということはない」
「$R(x, y)$ が成り立つような x, y は存在しない」

$\forall x\, p(x)$ の否定 $\neg\forall x\, p(x)$ は
「すべての x について $p(x)$ が成り立つ，ということはない」

この式は「すべての x について $p(x)$ が成り立たない」ではありません．「すべての x について $p(x)$ が成り立たない」は $\forall x\, \neg p(x)$ です．

$\forall x\, \forall y\, R(x, y)$ の否定 $\neg\forall x\, \forall y\, R(x, y)$ は
「すべての x, y について $R(x, y)$ が成り立つ，ということはない」

$\exists x\, \neg\exists y\, R(x, y)$
「ある x があって，$R(x, y)$ が成り立つような y が存在しないということが成り立つ」
「$R(x, y)$ が成り立つような y が存在しないというような x がある」

論理式で表す簡単な例をやってみよう．

どの男の人についても，ある女の人がいてその男の人はその女の人を愛する． (1)

どんな集合を使うか，何を一つの記号で表すかを決めなければならない．男の人の集合を M，女の人の集合を F で，u が v を愛することを love(u, v) で表すとしよう．引数に値を代入したとき，関数値が真か偽であるような関数を述語という．述語を表す論理式中の記号は述語記号と呼ばれる．

love は 2 引数の述語記号である．

全体の形は　$\forall x \in M\ q(x)$

$q(x)$：ある女の人がいて x はその女の人を愛する

$q(x)$ は　$\exists y \in F\ \ \text{love}(x, y)$

よって，文 (1) に対応する論理式は

$\forall x \in M\ \exists y \in F\ \ \text{love}(x, y)$ (1’)

厳密には $\forall x \in M\ (\exists y \in F\ \ \text{love}(x, y))$ であるが，通常，かっこ (,) は省略する．

ある女の人がいて，どの男の人もその女の人を愛する． (2)

全体の構造は　$\exists w \in F\ q(w)$

$q(w)$：どの男の人も w を愛する

$q(w)$ は　$\forall z \in M\ \ \text{love}(z, w)$

よって，文 (2) に対応する論理式は

$\exists w \in F\ \forall z \in M\ \ \text{love}(z, w)$ (2’)

変数 w や z は何を使ってもよい．例えば　$\exists y \in F\ \forall x \in M\ \ \text{love}(x, y)$ (2”)

コメント:

(a). (1’) と (2”) を見て分かるように，∃，∀ の順で意味が全く異なる．(1’) は，M に属するどの要素 a についても，その a に依存して決まる要素 b_a があって，love(a, b_a) を真にするという意味である．

(2”) は，ある一つの要素 $c \in F$ があって，この c に対しては，どんな要素 $d \in M$ についても，love(d, c) は真になるという意味である．この例のように，外側から書いていくことを勧める．

(b). 自然語でも，前から全体に効くのが普通である．
ある整数をどの整数に加えても値はゼロになる． (偽)
どの整数でもある整数を加えると値はゼロになる． (真)
ある整数をどの整数に掛けても値はゼロになる． (真)
0 以外のどの整数でもある有理数を掛けると値は 1 になる． (真)
ある新聞をみんな取る．みんなある新聞を取る． (曖昧だが)

(c). $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ を表す普通の日本語表現で「どの x に対しても，$P(x, y)$ が成り立つような y が存在する」,「すべての x に対し，ある y があって $P(x, y)$ が成り立つ」などは分かりにくい．コンマを省いて「どの x に対しても $P(x, y)$ が成り立つような y が存在する」,「すべての x に対しある y があって $P(x, y)$ が成り立つ」とすればなおさらである．

「どの x に対しても，それぞれある y があって $P(x, y)$ が成り立つ」,「各 x に対し，$P(x, y)$ が成り立つような y がそれぞれ存在する」などと書けば誤解がない．

例 0.1.1

男の人の集合を M，女の人の集合を F で，u が v を愛することを love(u,v) で表す．次の論理式を考える．

$\neg\exists y \in M\ (\forall x \in F\ \mathrm{love}(x,y) \vee \neg\forall x \in F\ \mathrm{love}(y,x))$

(質問 1) この論理式にそのまま対応する日本語は

「次の (a)，(b) のうち少なくとも一方を満たすような男の人 y は存在しない：

(a) $\boxed{}$

(b) その男の人 y はすべての女の人を愛する，ということはない.」

注意

上記の (b) は，その男の人 y はすべての女の人を愛さない (その男の人 y はどの女の人をも愛さない)($\forall x \in F\ \mathrm{love}(y,x)$) ではない．

(質問 2) その論理式と同じ意味で，より簡単な言い方は？ 例えば (b) は 「その男の人 y が愛さないような女の人が存在する」

全体は次のようにも言える：

「すべての $\boxed{}$ が愛するような $\boxed{}$ はいないが，$\boxed{}$ はだれでも，すべての $\boxed{}$ を愛する」

(すぐに分りますか．(日本人には) 日本語には慣れているのですが $\cdots$)

文構造の変形は論理式のうえで記号的に変形すれば間違いにくい．

(質問 3) 次の変形のルールを用いて，質問 2 の構造の日本語文に対応する論理式を得よ．

等価な (意味的に同じ内容を表す) 変形の例

$\neg\neg P$	P	(1)
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	(2)
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	(3)
$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	(4)
$\neg(P \to Q)$	$P \wedge \neg Q$	(5)
$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	(6)
$(P \to Q) \vee (P \to R)$	$P \to (Q \vee R)$	(7)
$(P \to Q) \wedge (P \to R)$	$P \to (Q \wedge R)$	(8)
$(P \to R) \wedge (Q \to R)$	$(P \vee Q) \to R$	(9)
$\forall x\, \forall y\ p(x,y)$	$\forall y\, \forall x\ p(x,y)$	(10)
$\neg\forall x\ \neg p(x)$	$\exists x\ p(x)$	(11)
$\neg\exists x\ \neg p(x)$	$\forall x p(x)$	(12)
$\forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$	$\forall x\ (p(x) \wedge q(x))$	(13)
$\exists x\ p(x) \vee \exists x q(x)$	$\exists x\ (p(x) \vee q(x))$	(14)

注意

(注 1). $\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$ と $\forall x\ (p(x) \vee q(x))$ は等価ではない．

(注 2). q に引数 x がなければ $\forall x\ (p(x) \vee q)$ は $\forall x\ p(x) \vee q$ と等価である．

(注 3). $\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$ と $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$ は等価ではない．

(注 4). q に引数 x がなければ $\exists x\ (p(x) \wedge q)$ は $\exists x\ p(x) \wedge q$ と等価である．

(注 5). $\exists x\ (p(x) \to q(x))$ と $\exists x\ p(x) \to \exists x\ q(x)$ は等価ではない．

(注 6). $\exists x\ (p(x) \to q(x))$ は $\forall x\ p(x) \to \exists x\ q(x)$ と等価である．

(注 7). $\forall x\ (p(x) \to q(x))$ と $\forall x\ p(x) \to \forall x\ q(x)$ は等価ではない．

(注 8). $\forall x\ (p(x) \to q(x))$ は $\neg\exists x\ (p(x) \wedge \neg q(x))$ と等価である．

(注 9). $\forall x \in M$，$\exists x \in M$ などに対しても成り立つ．ただし (13)，(14) はそれぞれ同じ一つの M で成り立つ．

上の (13) と (14) の変形はよく使われます．(注 1),(注 3) にあげた間違った変形をしないこと．

例えば，集合を $\{a, b, c\}$ とし，$p(a) =$ 偽，$p(b) =$ 真，$p(c) =$ 偽，$q(a) =$ 真，$q(b) =$ 偽，$q(c) =$ 偽とすると，$\exists x\ p(x)$，$\exists x\ q(x)$ は共に真ゆえ，$\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$ は真になる．しかし，$p(a) \wedge q(a) =$ 偽，$p(b) \wedge q(b) =$ 偽，$p(c) \wedge q(c) =$ 偽ゆえ，$\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$ は偽となる．したがって，$\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$ と $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$ は等価でない　(注 3).
$\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ が真とすると，$\exists x\ p(x)$ と $\exists x\ q(x)$ の少なくとも一方は真である．$\exists x\ p(x)$ が真のときはある元 d があって $p(d) =$ 真である．$q(d)$ の真偽にかかわらず $p(d) \vee q(d)$ は真であるので，$\exists x\ (p(x) \vee q(x))$ は真である．$\exists x\ q(x)$ が真のときも同様である．よって，$\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ が真なら $\exists x\ (p(x) \vee q(x))$ も真である．逆に，$\exists x\ (p(x) \vee q(x))$ が真とすると，ある元 e があって $p(e) \vee q(e)$ が真になる．よって，$p(e)$ か $q(e)$ の少なくとも一方は真である．$p(e)$ が真のときは，$\exists x\ p(x)$ は真になり，$\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ も真になる．$q(e)$ が真のときも同様である．よって，$\exists x\ (p(x) \vee q(x))$ が真なら $\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ も真である．したがって，(14) に示すように，$\exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$ と $\exists x\ (p(x) \vee q(x))$ は等価である．

等価の厳密な定義や等価であることの示し方はこの授業で学ぶ.

問 0.1.1

「ある元 x が存在して $p(x, y)$ が成り立つような y は存在しない」
は曖昧である．可能な取り方のそれぞれに対応する論理式を表し，曖昧さのない日本語で言い換えなさい．

問 0.1.2

次の論理式で表される内容を分り易いと思う日本語で表せ (文の構造は変ってよい).
$\forall x \in S\ \exists w \in F(p(w) \wedge q(x, w))$

この 0 章では，数学などでよく使われる $\forall x \in M\ \exists y \in \mathbb{N}\ R(x, y)$ のような書き方も便宜上「論理式」と呼んでいるが，普通，論理式というときには，1 章以降で述べるように，$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ のような書き方しか許さない．各述語記号の各引数に対してそれぞれ集合を対応させるので，式自体には集合は書かない.

「大阪の人は金持ちでけちだ」

この例では人の集合を考えるのが自然である．日本人の集合でもよい．人 x が大阪の人であることを osaka(x) で，金持ちであることを kane(x) で，けちであることを kechi(x) で表すと，

$$\forall x\ [\ \text{osaka}(x) \to \text{kane}(x) \wedge \text{kechi}(x)] \qquad (*1)$$

注意

式 (*1) にそのまま対応する日本語は
どの人についても「もしその人が大阪の人なら，金持ちでけちである」が成り立つことである．大阪の人でない人に対しては金持ちとかけちについては何も要求していない．
人の集合の要素をそれぞれ記号 $a, b, c \ldots$ で表すことにする．式 (*1) は
osaka$(a) \to$ kane$(a) \wedge$kechi(a)
osaka$(b) \to$ kane$(b) \wedge$kechi(b)
osaka$(c) \to$ kane$(c) \wedge$kechi(c)
$\cdots$
がすべて真であることを表す．いま，a，c，... を大阪の人，b，... を大阪の人でないとする．大阪の人

でない b に対しては osaka(b) は偽ゆえ osaka(b) $\to$ kane(b)$\wedge$ kechi(b) は自動的に真になる．大阪の人 a に対しては osaka(a) は真ゆえ osaka(a) $\to$ kane (a)$\wedge$kechi(a) を真にするには kane(a)$\wedge$kechi(a) が真でなければならない．他の人についても同様である．したがって，式 (*1) が成り立つこと (という性質・条件) と，大阪のすべての人 a，c，... に対し

kane(a)$\wedge$kechi(a)

kane(c)$\wedge$kechi(c)

...

がすべて真であること (という性質・条件) とは，同じことである．

コメント:

(1). 大阪の人の集合を考え，大阪の人 x が金持ちであることを kane(x) で，けちであることを kechi(x) で表すと，$\forall x$ (kane(x)$\wedge$kechi(x)) と書ける．

(2). 人の集合を考え, x が金持ちでかつけちであることを kanekechi(x) で表すと, $\forall x$ [osaka(x) $\to$ kanekechi(x)] と書ける．また，大阪の人の集合を考え，大阪の人 x が金持ちでかつけちであることを kanekechi(x) で表すと，$\forall x$ kanekechi(x) と書ける．しかし，できるだけ細かいことがらをそれぞれ別の記号で表した方が精密な議論ができる．

想定している集合の部分集合 M を考える．x が M に属する ($x \in M$) ことを述語 $m(x)$ で表すことにすると，次の式はそれぞれ同じことを表す．

$\forall x \in M\ R(x) \qquad \forall x \in \{y \mid m(y)\}R(x) \qquad \forall x[m(x) \to R(x)]$

どの x についても，もし x が M に属している ($m(x)$ を満たす) なら x は R を満たす.

M に属している ($m(x)$ を満たす) どんな x についても，x は R を満たす.

$\exists x \in M\ R(x) \qquad \exists x \in\ \{y \mid m(y)\}\ R(x) \qquad \exists x\ [m(x) \wedge R(x)]$

M に属するある x があって ($m(x)$ を満たす x があって)，x は R を満たす.

「どの x についても，もし x が $P(x)$ を満たすならば x は $Q(x)$ も満たす」

「$P(x)$ を満たす x はすべて $Q(x)$ を満たす」

$\forall x\ [P(x) \to Q(x)]$

「$P(x)$ を満たすようなある x があって，x は $Q(x)$ を満たす」

「$P(x)$ を満たすような x のなかで，$Q(x)$ を満たす x が存在する」

$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$

M の中で，さらに条件 P を課して，P を満たすような x なら R を満たすとか，P を満たす x がある，ということは，それぞれ，次の論理式で表される．

$\forall x\ [m(x) \to (\mathrm{P}(x) \to R(x))]$ あるいは $\forall x\ [m(x) \wedge P(x) \to R(x)]$

$\exists x\ [m(x) \wedge P(x) \wedge Q(x)]$

例 0.1.2

$\{A$ 君, B 君, C 君, D 君, E 君, F 君$\}$ からなるクラスについて，ある科目の試験得点，レポート良否，合否結果が次のようであった状況を考える．(E 君はレポートの内容が特に良かったので 60 点未満でも合格になった．)

A 君	75 点	良	合格	B 君	40 点	否	不合格
C 君	63 点	否	合格	D 君	84 点	良	合格
E 君	56 点	良	合格	F 君	55 点	否	不合格

x 君の得点を $f(x)$ で，x 君のレポートが良かったことを $r(x)$ で，x 君が合格していることを $p(x)$ で表す．(f は関数，r と p は述語である．)

「60 点以上の人はみな合格している」を表す論理式は

$$\forall x\,(f(x) \geq 60 \to p(x)) \tag{1}$$

「55 点以上の人はみな合格している」を表す論理式は

$$\forall x\,(f(x) \geq 55 \to p(x)) \tag{2}$$

「50 点以上でレポートが良かった人はみな合格している」を表す論理式は

$$\forall x\,(f(x) \geq 50 \land r(x) \to p(x)) \tag{3}$$

「85 点以上の人はみなレポートが良かった」を表す論理式は

$$\forall x\,(f(x) \geq 85 \to r(x)) \tag{4}$$

「x 君は 60 点以上あり，かつレポートは良である」を表す論理式は

$$f(x) \geq 60 \land r(x) \tag{5}$$

いま考えている状況では論理式 (1) は真，(2) は偽，(3) は真，(4) は真である．

論理式 (4) については，

$f(A) \geq 85 \to r(A)$
$f(B) \geq 85 \to r(B)$
$\cdots$
$f(F) \geq 85 \to r(F)$

の各式において，$f(A) \geq 85$，$f(B) \geq 85$，$\ldots$，$f(F) \geq 85$ は偽であるので，

$f(A) \geq 85 \to r(A)$
$f(B) \geq 85 \to r(B)$
$\cdots$
$f(F) \geq 85 \to r(F)$

はすべて真であり，したがって，(4) は真となる．

論理式 (5) は引数 x に値を代入しないと真偽が決まらない．x に A を代入して得られた式 $f(A) \geq 60 \land r(A)$ は真であり，x に C を代入して得られた式 $f(C) \geq 60 \land r(C)$ は偽である．

コメント:
我々が通常「85 点以上の人はみなレポートが良かった」などと言うときは 85 点以上の人がいるという状況で使うのが普通である．したがって，上記のような状況で「85 点以上の人はみなレポートが良かった」と言えば「うそ」のように聞こえ，これは「偽」だと思ってしまうかもしれない．しかし，この授業で，論理式として議論するときは (4) は上記のような状況では真である.「85 点以上の人は (もしいれば) みなレポートが良かった」と書けば論理式の意味をより正確に表現している．

論理式で表すには，

どんな集合を考えるか，

その上のどんな関数 (定数も含む)，述語を用いるか

を決めなければならない．

「どの男の人についても，ある女の人がいてその男の人はその女の人を愛する」

人の集合を考えよう．人 x が男の人であることを $m(x)$ で，女の人であることを $w(x)$ で，人 u が人 v を愛することを love(u, v) で表すと，この陳述は次のように表せる．

$$\forall x\,(m(x) \to \exists y\,(w(y) \land \text{love}(x, y)))$$

問 0.1.3

次のことを表す論理 式を書け (上述のように，人の集合を考え，u が v を愛することを love(u, v) で表せ).

(a) 誰かが誰かを愛していれば，万人が万人を愛する．

(b) 誰かを愛している人をみんなが愛する．

整数上の述語 $<$, $=$ を用いて

「整数 i, j, k のうち j が最大である」

ことを表す論理式は, $(i < j \vee i = j) \wedge (k < j \vee k = j)$ と書ける.
述語 $\leq$ を用いると, $i \leq j \wedge k \leq j$ と書ける.
これは i, j, k に関する性質記述である. 述語 $<$, $=$ などの意味は決っているので, i, j, k にそれぞれ具体的な整数値を代入すると真か偽かが決まる.
「整数 $a(1)$, $a(2), \ldots, a(5)$ のうち $a(3)$ が最大である」
ということを表す論理式は

$a(1) \leq a(3) \wedge a(2) \leq a(3) \wedge a(4) \leq a(3) \wedge a(5) \leq a(3)$

でよい. では
「整数 $a(1)$, $a(2), \ldots, a(N)$ のうち $a(3)$ が最大である」ということを表す論理式は？

$a(1) \leq a(3) \wedge a(2) \leq a(3) \wedge a(4) \leq a(3) \wedge \cdots \wedge a(N) \leq a(3)$

は論理式ではない. $\forall$ を用いて

$\forall i\, [1 \leq i \wedge i \leq N \to a(i) \leq a(3)]$

のように書かねばならない. これは整数 $\mathbb{N}$ と配列 (あるいは関数) a についての ($\mathbb{N}$ と a を引数とする) 陳述である.

問 0.1.4

d, m を正整数, a を (要素数が m 以上の) 整数配列とする. 整数上の変数と整数上の述語 $<$, $=$, $\leq$ などを用いて「整数 $a(1)$, $a(2), \ldots, a(m)$ はどれも d 以下である」ことを表す論理式を書け.
これは, 整数 m, d, 配列 a を引数とする陳述である. これを $R(a, m, d)$ で表すとすると, $A(1) = 5$, $A(2) = 3$, $A(3) = 8$, $A(4) = 6$, $A(5) = 3$, $\ldots$ なる配列 A に対し, $R(A, 2, 4)$ は偽であり, $R(A, 3, 8)$ は真である.

問 0.1.5

整数上の述語 $<$, $=$, $\leq$ などを用いて「整数 $a(1)$, $a(2)$, $\ldots$, $a(m)$ のうち最大値は d である」ということを表す論理 式を書け.
ヒント:
各 $i(1 \leq i \leq m)$ に対し $a(i) \leq d$ であり, かつ, $a(i) = d$ であるような $i(1 \leq i \leq m)$ が存在する.

問 0.1.6

2 進数表現がそれぞれ
$a(m)a(m-1)\cdots a(2)a(1)$,
$b(m)b(m-1)\cdots b(2)b(1)$
(ただし $a(1)$, $b(1)$ が下位の桁) である 2 つの整数に対し,「$a(m)\cdots a(1)$ の方が $b(m)\cdots b(1)$ より大きい」ということを表す論理式をビット上の述語 $<$, $=$, $\leq$ および整数上の述語 $<$, $=$, $\leq$ などを用いて書け.

使える述語だけを用いて, もとの内容を言い直し, それを論理式で表す. 書いた論理式が正しいかどうかを確認するには, その論理 式に対応する日本語文を書いてみよう. そして, その日本語文の内容が, もとの内容と同じかどうかをチェックしよう. もとの内容と同じかどうかがすぐに分からないようなややこしい内容の論理式, 例えば

$\neg\exists i\, (1 \leq i \wedge i < m \wedge a(i) < b(i) \wedge \neg\exists j\, (\cdots)) \vee \cdots$

などは避けよう. 順序回路で作れるような論理が分りやすい.

論理式には，集合上の述語だけでなく，関数 (演算) や定数も用いてよい．例えば，整数上の述語 $=$，関数 $+$，定数 1 を用いると,「整数 x は奇数である」という陳述は，$\exists z\ (x = z + z + 1)$ のように表せる．

問 0.1.7

「二つの奇数の和は偶数である」を論理式で表せ．
集合は整数を考える．整数上の述語 $=$，関数 $+$，定数 1 を用いて表せ．
ヒント:
奇数である，偶数であることを表す述語 odd()，even() がもし使えるなら，論理式の形は
$\forall x\, \forall y\ (\mathrm{odd}(x) \wedge \mathrm{odd}(y) \to \mathrm{even}(x + y))$

問 0.1.8

フェルマーの最終定理の内容 (n が 3 以上の整数なら $x^n + y^n = z^n$ を満たすような正整数 x，y，z はない) を論理式で表せ．集合を何にするかによって論理式は違ってくる．整数，非負整数，正整数のそれぞれの場合について書け (もちろん，述語や演算を何にするか，どんな定数を使うかによってもかわる)．
ヒント:
演算に累乗 x^n，加算 $x + y$ を用いる．述語に $\geq$，$=$ を用いてみよう．定数は適宜用いる．非負整数や正整数の集合上の論理式では,「n が 3 以上」を表すのに述語は $=$ のみを用いても書ける．正整数の集合上の論理式では，次の二つは同じことを表す．

$\forall n\ (n \geq 3 \to \boxed{})$

$\forall n\ (\neg n = 1 \wedge \neg n = 2 \to \boxed{})$

問 0.1.9

全体を一つの論理式で表せ．

(1). だれでも真剣にやれば情論にとおる．一郎は真剣にやる．だから，一郎は情論にとおる．「u は真剣にやる」を $p(u)$ で,「u は情論にとおる」を $q(u)$ であらわすと，
$\forall x\ (p(x) \to q(x)) \wedge p(\text{一郎}) \to \boxed{}$

(2). だれでも，情論の勉強をすれば情論の試験にいい点をとるのであったら，情論にとおる．一郎は情論の勉強はしない． よって，一郎は情論にとおる．「u は情論の勉強をする」を勉強 (u) で,「u は情論の試験にいい点をとる」をいい点 (u) で,「u は情論にとおる」を合格 (u) で表せ．

また,「u は w の勉強をする」を勉強 (u, w) で,「u は w の試験にいい点をとる」をいい点 (u, w) で,「u は w にとおる」を合格 (u, w) で表せ．

注意：ここでは，人の集合と科目の集合の二つを考えている．述語 勉強 の第 1 引数の集合は人の集合で，第 2 引数の集合は科目の集合である．この授業では，基本的には，想定している集合はただ一つであるようなものを対象にするが，場合によっては，このように多ソート (複数のデータタイプ) の述語を扱うこともある．このような述語 勉強，いい点 を用いれば,「だれでも，どの科目に対しても，勉強をすれば試験にいい点をとる」は，
$\forall x\, \forall y$ (勉強 $(x, y) \to$ いい点 (x, y)) のように書ける．

もし，単一ソートの述語しか許さないとすると，集合は人と科目の和集合を考えることになる．そして，要素 z が人であることを $h(z)$ で，科目であることを $k(z)$ で,「u は w の勉強をする」を $b(u, w)$ で,「u は w の試験にいい点をとる」を $i(u, w)$ で表すことにすると，
$\forall x\ (h(x) \to \forall y\ (k(y) \to (b(x, y) \to i(x, y))))$

等価な式は，例えば，
$\forall x\, \forall y\ (h(x) \wedge k(y) \to (b(x, y) \to i(x, y)))$
$\forall x\, \forall y\ (h(x) \wedge k(y) \wedge b(x, y) \to i(x, y))$

(3). 花子は実験が好きだ．花子は情論も好きだ．実験が好きな者はみな情論は好きでない．ゆえに花子は情論にとおる．上述のようになるべく簡単なことを一つの記号で表せ．

問 0.1.10

科目 x が A 群に属していることを述語 $A(x)$ で，B 群に属していることを $B(x)$ で表す．学生 y が科目 x の試験に z 点取ったことを述語 $s(y,x,z)$ で表す．次のことを表す論理式を書け．点数間の大小関係を表す述語 $<$, $\leq$ などを用いてよい．
(a) 学生 J は，ある A 群科目で 90 点以上の点を取った．
(b) どの学生も，それぞれ，B 群科目で取ったどの点数よりも高い点をある A 群科目で取った．

問 0.1.11

記号集合 (アルファベット)Σ 上のすべての記号列の集合を Σ^* で表す．記号列の集合 (Σ^* の部分集合) を言語という．記号系列 w の長さを $\mid w \mid$ で表す．記号系列 w と u を連接して得られる系列を wu で，w を i 個連接して得られる系列を w^i と書く．x が集合 Z の要素であることを $x \in Z$ で表す．x，y が同じ系列であることを $x = y$ で表す．

次のことを論理式で表せ．(便宜的な $\forall x \in D \cdots$ の形の式を書け)

(1). 「各正規言語 L に対し，
もし，$w \in L$ かつ $\mid w \mid \geq p$ なら，
$w = xyz$　ただし，$0 <\mid y \mid \leq p$ と表せ，かつ
すべての j ($j \geq 0$) について $xy^jz \in L$
であるような正整数 p が存在する」
正規言語の集合を $\mathcal{L}$，言語 L を構成する記号集合を Σ_L とする．正整数の集合を $\mathbb{N}$ とする．

(2). 「任意の文脈自由言語 L に対して，ある正整数 p が存在してもし $z \in L$ かつ $\mid z \mid \geq p$ なら $z = uvwxy$，ただし，$\mid vwx \mid \leq p$ かつ $\mid vx \mid > 0$ と分割でき，任意の $i \geq 0$ に対して，$uv^iwx^iy \in L$ が成立する」(都倉著：「オートマトンと形式言語」より)
「任意の文脈自由言語 L に対して，それぞれ，次の条件を満たすような正整数 p が存在する：
$\mid z \mid \geq p$ であるようなどんな系列 $z \in L$ に対しても，
次のことが成り立つように $z = uvwxy$ と分割できる：
$\mid vwx \mid \leq p$，$\mid vx \mid > 0$，かつ，任意の $i \geq 0$ に対して $uv^iwx^iy \in L$」
文脈自由言語の集合を $\mathcal{L}$，言語 L を構成する記号集合を Σ_L とする．正整数の集合を $\mathbb{N}$ とする．

ヒント:
(1) $\forall L \in \mathcal{L}\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall w \in \Sigma_L^* (w \in L \wedge \mid w \mid \geq p \rightarrow \exists x \in \Sigma_L^*\ \exists y \in \Sigma_L^*\ \exists z \in \Sigma_L^*\ (\boxed{}))$

いままでは，正整数とか $\geq$ とか具体的な集合や述語，演算，定数を用いて，論理式を考えてきたことが多かった．論理式を単に表現手段ととらえるときにはそれでよい．しかし，厳密には，論理式というのは，1 章および 3 章で学ぶように，具体的な述語，関数，定数を用いるのではなく，それらに表す単なる記号を用いて書く．集合や述語記号，関数記号，定数記号の意味を元のものとすれば，その論理式は元の自然語文の内容をそのまま表している．しかし，記号で書けば，それらの記号の意味を元の自然文以外にも取ることができる．具体的な何をとるかの指定を「(論理式に対する) 解釈」という．論理式 $\exists z\, q(x, f(z))$ に対し，集合を整数集合，$q(u,v)$ を「u と v が等しい」，$f(u)$ を「u に 5 を加えた値」とする解釈を考えることもできるし，集合を記号 a，b の文字列の集合，$q(u,v)$ を「u は v の部分列である」，$f(u)$ を「u を 2 回繋いだ文字列」とする解釈を考えることもできる．一般に同じ論理式でもある解釈では真になり，また別の解釈では偽になる．記号論理学では，記号で書かれた論理式を対象に，例えば「その論理式はどんな解釈に対しても必ず真か」といったことを調べる方法などについて学ぶ．例えば

$$\forall x\, ((p(f(x)) \vee q(x)) \rightarrow \exists y\, r(y,x)) \wedge \forall y\, \neg r(y,a) \rightarrow \exists x\, \neg p(f(x))$$

はどんな解釈に対しても真である．どんな解釈に対しても必ず真であれば，元の自然語文に対応する解釈でも真であり，当然もとの自然語文は論理的に正しい文ということになる．

0.2　記号論理学の利用例

記号論理は一般の記述言語としてもよく使われる．ここでは，記号論理を基礎にするような三つの分野を紹介する．

データベース

例 0.2.1

学生の受講科目，教員の部屋，科目の担当教員のデータがある．

受講

学生名	科目名
一郎	基礎 B
次郎	論理学
一郎	プログラミング A
花子	基礎 B
花子	論理学

部屋

教員名	部屋番号
東野	A501
岡野	G213
大下	G620

担当

科目名	教員名
論理学	東野
基礎 B	岡野
プログラミング A	大下

(a). 「一郎が受講している科目 x は部屋 z にいる y 先生が教えている」ということを表す論理式は
受講 (一郎, x) $\wedge$ 担当 $(x, y) \wedge$ 部屋 (y, z)
したがって,「上記のデータのもとで，一郎が習っている科目と教官名とその教官の部屋は?」という問題は,
「受講 (一郎, 基礎 B)　$\wedge \cdots \wedge$ 受講 (花子, 論理学)
$\wedge$ 部屋 (東野，A501)$\wedge \cdots \wedge$ 部屋 (大下, G620)
$\wedge$ 担当 (東野，論理学)$\wedge \cdots \wedge$ 担当 (大下, プログラミング A)
$\rightarrow$　受講 (一郎,x)$\wedge$ 担当 (x, y)$\wedge$ 部屋 (y, z)
を真にする x, y, z の組を全て求めよ.」
という問題になる.

(b). 「以上のデータのもとで，花子は大下先生に教わっているか?」という問題は,
「$\boxed{}$が真か (成り立つか)?」
という問題になる.

ここでも多ソートの述語を使っている.

注意

「花子が受講していてかつ大下先生が担当しているような科目がある」というのと「花子は大下先生に教わっている」というのとは一般には同じではない．どんなとき違うか.

例 0.2.2

ある銀行の各支店の資産，所在地，電話番号，顧客の住所，電話番号，各支店にある預金口座の口座番号，顧客名，預金残高，各支店にある融資口座の口座番号，顧客名，融資残高のデータがある．

店舗

支店名	資産	所在地	電話番号
淀川	1,200	大阪市	06-6ZZZ-5FGH
河原町	3,500	京都市	075-3CX-1VDD
大阪南	2,350	大阪市	06-6YDD-34BB
⋮	⋮	⋮	⋮
豊中北	800	豊中市	06-6850-TT01

顧客

顧客名	住所	電話
鈴木	京都市 ···	075-4DS-1TYB
佐藤	神戸市 ···	078-3GS-2DFG
田中	豊中市 ···	06-6GGS-1RTH
⋮	⋮	⋮
山田	宝塚市 ···	0797-HJ-34GL

預金

支店名	預金口座番号	顧客名	預金残高
淀川	956-8257	田中	1,921,885
淀川	956-6769	田中	53,002
淀川	956-2865	山田	87,921
河原町	886-7241	鈴木	809,821
⋮	⋮	⋮	⋮
豊中北	997-2251	山田	291,827

融資

支店名	預金口座番号	顧客名	融資残高
淀川	956-0123	佐藤	3,000,000
河原町	886-0877	佐藤	500,000
⋮	⋮	⋮	⋮
豊中北	997-0256	田中	4,000,000

(a). 「顧客 z は融資残高が w の融資口座を (どこかの支店に) もっている」ということは $\exists x\ \exists y$ (融資 (x, y, z, w) で表される (ある支店 x，ある融資口座番号 y があって，述語 (x, y, z, w) が真になる)．また,「顧客 z は融資残高が 300 万円以上の融資口座を (どこかの支店に) もっている」ということは，

$\exists x\ \exists y\ \exists w$(融資 $(x, y, z, w) \wedge w \geq 3,000,000)$

であらわされる．したがって，

「以上のデータのもとで，融資残高が 300 万円以上の融資口座をもつ顧客を全て求めよ」という問題は，

「　店舗 (淀川,1,200, 大阪市,06-6ZZZ-5FGH)

$\wedge \cdots$

$\wedge$ 融資 (豊中北, 997-0256, 田中，4,000,000)

$\rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists w$(融資 $(x, y, z, w) \wedge w \geq 3,000,000)$

であるような z を全て求めよ」

という問題になる．

(b). 「以上のデータのもとで，大阪市内の全ての支店に預金口座をもつ顧客と住所を全て求めよ」という問題は，

「　店舗 (淀川,1,200, 大阪市, 06-6ZZZ-5FGH)

$\wedge \cdots$

$\wedge$ 融資 (豊中北, 997-0256, 田中，4,000,000)

$\rightarrow [\forall x\ \{\exists y\ \exists z$ 店舗 $(x, y,$ 大阪市$, z)$

$\rightarrow \boxed{}\ \}$

$\wedge \boxed{}\ ]$

であるような顧客 v，住所 s の組を全て求めよ.」

という問題になる (大阪市内には支店があるとする)．

ヒント:

顧客 v は大阪市内の全ての支店に預金口座をもっている

$\forall x\ \{$ 支店 x は大阪市にある $\rightarrow$ 顧客 v は支店 x に預金口座をもっている $\}$

支店 x は大阪市にある

$\exists y\ \exists z$ 店舗 $(x, y,$ 大阪市$, z)$

顧客 v は支店 x に預金口座をもっている

$\exists u\ \exists w$ 預金 (x, u, v, w)

顧客 v の住所は s である

$\exists t$ 顧客 (v, s, t)

「上記のデータのもとで $\cdots$ か」ということを表す論理式は

データ部を表す論理式 $\to \cdots$

の形をとる ($\cdots$ の部分を表す論理式にはデータ部は含まれない)．検索用の言語では，普通，$\cdots$ の部分を表す論理式に相当する文のみ記述する．

問題 (あるいは制約条件) を論理式で表現している．論理式の「意味」や解法に関してこの授業で学ぶ．

データベースのどんな問題をどう表現するかなどは「データベース」で学ぶ．

問 0.2.1

例 0.2.1 の述語を用いて，次のことを論理式で表せ．

(1). 預金残高が負の口座があれば，その支店にその客の融資口座はない．

(2). 預金残高が 100,000 以上である預金口座を大阪市内と神戸市内の全ての支店に持っているような顧客はいない．

(3). 田中は京都市の支店にある彼のどの預金口座の預金残高よりも多い額の融資残高をもつ融資口座を大阪市のある支店に持っている．

(4). 上の (3) の「大阪市の」を「大阪市か神戸市の」に変えたもの．

問題解決・推論

例 0.2.3

7 リットルと 5 リットルの容器がある．7 リットルの容器に 4 リットルの水を残せるか．もしそうできるなら，その操作手順は? ただし，次の操作が使えるとする．

- 容器に水を一杯いれる
- 容器をからにする
- 一方から他方へ，空になるか，一杯になるまで，注ぐ．

7 リットル，5 リットルの容器にそれぞれ u リットル，v リットル入っている状況を state(u, v) であらわすと，「7 リットルの容器に 4 リットルの水を残せるか」という問題は

「 state(0,0)
$\wedge \forall x\, \forall y\ (\text{state}(x, y) \to \text{state}(7, y))$
$\wedge \forall x\, \forall y\ (\text{state}(x, y) \to \text{state}(x, 5))$
$\wedge \forall x\, \forall y\ (\text{state}(x, y) \to \boxed{})$
$\wedge \forall x\, \forall y\ (\text{state}(x, y) \to \boxed{})$
$\wedge \forall u\, \forall v\ (\text{state}(u, v) \wedge u + v \leq 7 \to \text{state}(u + v, 0))$
$\wedge \forall u\, \forall v\ (\text{state}(u, v) \wedge u + v \leq 5 \to \text{state}(0, u + v))$
$\wedge \forall u\, \forall v\ (\text{state}(u, v) \wedge u + v \geq 7 \to \boxed{})$
$\wedge \forall u\, \forall v\ (\text{state}(u, v) \wedge u + v \geq 5 \to \boxed{})$
$\to \boxed{}$ が成り立つか」

という問題になる．成り立つという証明を行うと，操作手順がわかる．

証明法についてこの授業で学ぶ．一般にどんな問題ならどんなふうに記述すべきかのノウハウなどは,「知識工学」で学ぶ．

例 0.2.1(a)(b)，例 0.2.2(a)，例 0.2.3 などの問題は，その論理式を論理型プログラミング言語 Prolog で記述して解くことができる．もちろん，データベースでは質問内容だけを検索用言語で記述し，

処理系で実行する．論理型プログラミング言語の処理系ではどのように実行して解いているのか，その解き方で答えが必ず求まるのかなどについてこの授業の後半で学ぶ．

自然言語の意味記述の基礎

例 0.2.4

どの男の人でも愛する女の人がいる．

男の人の集合を M で，女の人の集合を W で，u が v を愛することを $\text{love}(u,v)$ で表す．この文はあいまいであるが，考えられる論理構造は

- $\forall x \in M\ \exists y \in W\ \ \text{love}(x,y)$
  男の人は誰でも，それぞれ少なくとも一人の女の人を愛する．
  男の人には愛する女の人がいる．
  (男の人が愛するその女の人というのは，きっとその男のお母さんだろう．男は皆自分の母親を愛するものさ．)
- $\exists y \in W\ \forall x \in M\ \ \text{love}(x,y)$
- $\exists x \in W\ \forall y \in M\ \ \text{love}(x,y)$
- 他の可能性は?

例 0.2.5

情太はすべての女の人に愛される．

上述の記号を用いると　$\forall x \in W\ \text{love}(x, \text{情太})$

受け身形でなく，もとの内容を表現している．意味はもとの形で議論するのが普通．

例 0.2.6

(1). その患者達 の X 線写真 は(どれも) 血行障害 を 映し出していた．

$T(x,y)$	:x は y の X 線写真
写 (u,v)	:u は v を映し出していた
P	:その患者達の集合
X	:X 線写真の集合

- $\forall p \in P\ \forall x \in X[T(x,p) \to \text{写}\ (x, \text{血行障害})]$
- $\forall p \in P\ \forall x \in \{y \in X \mid T(y,p)\}\ \text{写}\ (x, \text{血行障害})$

(2). その学生達 の 授業担当教員 は(皆) 宿題 を 課した．

$L(x,y)$	:x は y の授業担当教員
課 (u,v)	:u は v を課した
S	:その学生達の集合
A	:授業担当教官の集合

-
-

文章の論理構造は論理式で表せる．自然語文から論理式をどのように求めるかなどについては「言語処理工学 B」で学ぶ．

問 0.2.2

次のことを表す論理 式を書け (何をどんな記号で表すかも書け).

(1). 春に雨が多ければ，夏に雨が多くない.

(2). 春に雨が多いか，または秋に雨が多い.

(3). 春か秋に雨が多い.

問 0.2.3

次のことを表す論理 式を書け (何をどんな記号で表すかも書け).
花子が好きな情太が本を貸した人に会った．花子はその人からその本を預かった.

0.3　証明について

証明とはなにか，どうであったら証明と言えるのか，などについてはこの授業で学ぶ．ここでは，日常，余り気にしていなかった (と思う) ことを少し振り返っておこう．

例 0.3.1

「任意の正整数 k に対し　$2^{k+2} < 3^{k+1}$ である」ことを示せ．

正整数の集合を $\mathbb{N}$ とおく．$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つことを示せということ．

解 1
$k = 1$ のとき左辺は $2^{1+2} = 8$，右辺は $3^{1+1} = 9$ で，$8 < 9$ ゆえ与式は成り立つ．
$k = m$ のとき $2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ，すなわち $2^{m+2} < 3^{m+1}$ が成り立つと仮定する．
$k = m+1$ のとき左辺は $2^{m+1+2} = 2^{m+2} \times 2$，右辺は $3^{m+1+1} = 3^{m+1} \times 3$．
(帰納法の) 仮定より $2^{m+2} < 3^{m+1}$ であり，また $2 < 3$ ゆえ，$2^{m+2} \times 2 < 3^{m+1} \times 3$ である ($0 < a < b$，$0 < c < d$ なら $a \times c < b \times d$ であることと，$0 < 2^{m+2}$，$0 < 2$ を用いた)．
ゆえに，$k = m+1$ のときも与式は成り立つ．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 1’
$k = 1$ のとき左辺は 2^{1+2}，右辺は 3^{1+1} ゆえ与式は成り立つ．
$k = m$ のとき $2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ，すなわち $2^{m+2} < 3^{m+1}$ が成り立つと仮定する．
$k = m+1$ のとき左辺は $2^{m+1+2} = 2^{m+2} \times 2$，右辺は $3^{m+1+1} = 3^{m+1} \times 3$ ゆえ，$k = m+1$ のときも与式は成り立つ．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 1”
$k = 1$ のとき与式は成り立つ．
$k = m$ のとき成り立つと仮定すると，$k = m+1$ のときも与式は成り立つ．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 2
h を正整数とする．
$2^{h+2} = 2^{h-1} \times 8$，$3^{h+1} = 3^{h-1} \times 9$ であり，$(0 <)2^{h-1} \leq 3^{h-1}$ かつ $(0 <)8 < 9$ ゆえ $2^{h+2} < 3^{h+1}$ である ($0 < a \leq b$，$0 < c < d$ なら $a \times c < b \times d$ であることを用いた)．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 2’
h を正整数とする．
$2^{h+2} = 2^{h-1} \times 8$，$3^{h+1} = 3^{h-1} \times 9$ ゆえ $2^{h+2} < 3^{h+1}$ が成り立つ．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 2”
h を正整数とする．
$2^{h+2} < 3^{h+1}$ は成り立つ．
したがって，$\forall k \in \mathbb{N}\ 2^{k+2} < 3^{k+1}$ が成り立つ．

解 3
$k = 1$ のとき $2^{1+2} = 8$，$3^{1+1} = 9$，$8 < 9$ ゆえ成り立つ．
$k = 2$ のとき $2^{2+2} = 2 \times 8$，$3^{2+1} = 3 \times 9$，$2 < 3$，$8 < 9$ ゆえ成り立つ．
$k = 3$ のとき $2^{3+2} = 2^2 \times 8$，$3^{3+1} = 3^2 \times 9$，$2^2 < 3^2$，$8 < 9$ ゆえ成り立つ．
$\cdots$
したがって，任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立つ．

コメント:
3 つの解法のいずれも「したがって $\forall k \in \mathbb{N} \cdots$」と結論づけているが，納得できるか．納得さえすればよいのか．
解法 1 は数学的帰納法，解法 2 は任意の正整数を表すひとつの定数，解法 3 は $\cdots$ (以下同様に無限にやると) を用いている．

コメント:
例えば整数に関するどんな性質を用いてよいのか．どんな性質を使うかを書かなくてもよいのか．解 1’ は解 1 に比べ，使う性質を書いていない．

コメント:
どんな推論が許されるのか．論理のギャップはどれだけあってもよいのか．
解 1' は解 1 に比べ，ギャップがある．解 1" は解 1' に比べ，ギャップがある．

我々が自然語で書くときは，分る範囲で簡潔にということになろう．

帰納法による証明はこの授業でもしばしば使う．少し触れておこう．

集合 $\mathbb{Z}$ を次の (1)，(2)，(3) を満たす集合とする．

(1). $0 \in \mathbb{Z}$

(2). $d \in \mathbb{Z}$ ならば $d + 1 \in \mathbb{Z}$

(3). $\mathbb{Z}$ はこの (1)，(2) から作られる元のみからなる．0 を整数のゼロ 0，$+1$ を整数 1 の加算に対応づけると $\mathbb{Z}$ は非負整数の集合となる．

$\mathbb{Z}$ の元 k を引数にするある性質 $P(k)$ について
$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$
を結論づける論法として，(数学的) 帰納法の原理がある．
帰納法の原理とは，次の (i),(ii) が言えれば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つと結論づける「原理」である．

(i) $P(0)$ が成り立つ

(ii) $P(d)$ を仮定すれば $P(d + 1)$ が成り立つ

0 に相当する元が何個か，$+1$ に相当する演算が何個かあっても，それぞれについて (i)，(ii) が言えればよい．(i)，(ii) の証明を，それぞれ，**基底段階**，**帰納段階**の証明という．
これは「原理」であって，証明できることではない．

問 0.3.1

「(i)，(ii) が成り立てば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ」ということを示そうとして次のように考えた．どこがまずいか．
(証明 1)
P について (i)，(ii) が成り立っているとし，かつ，$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ でないとする．
$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ でないから，$P(k)$ が成り立たないような元 $k \in \mathbb{Z}$ が存在する．そのような元のひとつを k_1 とする．(i) より $P(0)$ は成り立つので，k_1 は 0 ではない．したがって，(2)，(3) より，$k_2 + 1$ が k_1 に一致するような元 k_2 が存在する．(ii) より $P(k_2)$ は成り立たない (もし $P(k_2)$ が成り立てば，(ii) より $P(k_2 + 1)$ は成り立つことになるが，これは $P(k_1)$ は成り立たないことに反する)．
(i) より k_2 は 0 ではなく，したがって (2)，(3) より $k_3 + 1$ が k_2 に一致するような元 k_3 が存在する．
(ii) より $P(k_3)$ は成り立たない．
この議論を繰り返すと，P が成り立たないような k_1，k_2，k_3，... が得られるが，k_1，k_2，k_3，... はいつか 0 に到達するので，$P(0)$ は成り立たないということになる．これは (i) に反する．
よって，(i)，(ii) が成り立てば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ．
(証明 2)
P について (i)，(ii) が成り立っているとし，かつ，$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ でないとする．
$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ でないから，$P(k)$ が成り立たないような元 $k \in \mathbb{Z}$ が存在する．そのような元 k のうち最小の (0 から最小回数の $+1$ の演算で得られる) 元を h とする．
(i) より $P(0)$ は成り立つので，h は 0 ではない．したがって，(2)，(3) より，$g + 1$ が h に一致するよう

な元 g が存在する．h の最小性より，$P(g)$ は成り立つ．(ii) より $P(g+1)$ は成り立つことになるが，これは $P(h)$ は成り立たないことに反する．
よって，(i)，(ii) が成り立てば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ．

強帰納法 (呼び方は決まっていない．**累積帰納法**とも呼ばれる)
次の (i')，(ii') を示して $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つと結論づける方法

(i') $P(0)$ が成り立つ

(ii') m 以下の (m 回以下の $+1$ の演算で得られる) すべての元 d について $P(d)$ を仮定すれば 元 $m+1$($m+1$ 回の $+1$ の演算で得られる元をこう書くことにする) について $P(m+1)$ が成り立つ

問 0.3.2

「強帰納法における (i')，(ii') が成り立てば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ」ということを示そうとして次のように考えた．どこがおかしいか．

P について強帰納法における (i')，(ii') が成り立っているとし，かつ，$P(k)$ が成り立たないような元 $k \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定する．そのような元 k のうち最小の (最小回数の $+1$ の演算で得られる) 元を h とする．(i') より $P(0)$ は成り立つので，h は 0 ではない．そこで，h より小さいすべての元を考えると，h の最小性より，P はそのようなすべての元に対して成り立っている．よって (ii') より P は h に対して成り立つことになるが，これは，h は P が成り立たないような元の一つであるという仮定に反する．したがって，(i')，(ii') が成り立つなら，$P(k)$ が成り立たないような元 k は存在しない，すなわち，$\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ．

強帰納法が正しいことは，帰納法の原理を用いれば証明できる．

問 0.3.3

「強帰納法における (i')，(ii') が成り立てば $\forall n \in \mathbb{Z}\, P(n)$ が成り立つ」ということを，帰納法の原理を用いて示せ．

ヒント:
簡単のため k 回の $+1$ の演算で得られる元を k で表そう．k 以下の すべての元 d について $P(d)$ が成り立つということを，すなわち，$P(0)$，$P(1)$，$P(2)$，...，$P(k)$ がすべて成り立つことを $R(k)$ で表せ．
この $R(k)$ について，(通常の) 帰納法の原理を用いて $\forall n \in \mathbb{Z}\, R(n)$ を示せ．
任意の k について $R(k)$ が真，任意の k について $R(k) \to P(k)$ が真なら，任意の k について $P(k)$ は真である (この推論は使ってよい．どんな推論を使っていいのかは，以降この授業で学ぶ)．

問 0.3.4

3 円と 5 円の切手があれば，8 円以上何円分でもそろうことを示せ．

ヒント:
いろんな議論の仕方があろう．しかし，ここでは帰納法を学んでいるのであるから，帰納法あるいは強帰納法を用いてみよう．簡単のため，x 円分が 3 円と 5 円の切手でできることを $p(x)$ で表す．

- 帰納法
  $p(k)$ を仮定し $p(k+1)$ を示す (1 円分増やす) にはどうするか．5 円切手が含まれていれば 5 円切手を 1 枚除いて 3 円切手 2 枚を追加すればよい．もし 5 円切手が 1 枚も含まれていなければ，3 円切手 3 枚除いて 5 円切手 2 枚追加すればよい．しかし，5 円切手が含まれていなければ 3 円切手は 3 枚以上あるのか．$k \geq 9$ のときはそうであるので，そのような議論で 1 円分増やすことができるが，$k=8$ に対しては別に議論をする必要がある．すなわち，$p(8)$ は別に示すことにし，基底段階で $p(9)$ を示し，帰納段階で $p(k)(k \geq 9)$ を仮定し $p(k+1)$ を示す．
  $p(8)$ を基底段階にして帰納法で議論することもできる．帰納段階で，$k=8$ のときと $k \geq 9$ のと

きとで場合分けをして議論すればよい．

- 強帰納法
  帰納段階の $p(8)$，...，$p(k)$ を仮定して $p(k+1)$ を示すのに，例えば，$k-2$ に 3 を加えると $k+1$ になるということを利用するのが一つの方法である．$8 \leq k-2$ でないときは帰納法の仮定が使えない．そこで，$R(10)=p(8)\wedge p(9)\wedge p(10)$，$R(11)=p(11)$，$R(12)=p(12)$，... のように R を定義し，基底段階で $R(10)$ を示し，帰納段階で $R(10)$，...，$R(k)$ を仮定し $R(k+1)$ を示せばよい．
  $p(8)$ を基底段階として強帰納法で議論することもできる．帰納段階で $p(8)$，...，$p(k)$ を仮定して $p(k+1)$ を示すとき，$k \geq 10$，$k=9$，$k=8$ に場合分けをして議論すればよい．

問 0.3.5

2 以上の整数は，素数であるか，あるいは素数の積に等しいということを示せ．強帰納法および通常の帰納法の両方で示せ．

問 0.3.6

n 個のピースをはめるジグソーパズルでは何回のはめる動作をするか．ただし，何個かのピースでできている一つのブロックと他のブロック (あるいは一つのピース) をはめるときも 1 回と数える．

問 0.3.7

$F_0=0$，$F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n>1)$ で定義されるフィボナッチ (Fibonacci) 数 F_n は，任意の $n \geq 1$ に対し，

$\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1}$, ただし ϕ は黄金比 $\phi=(1+\sqrt{5})/2$

であることを示せ．

休憩コラム 0.1

(1). このクラスは皆情論好き??
0 人のグループを考えると，空集合だからそのグループ内の皆情論好きが成り立つ．$n(n \geq 0)$ 人のグループなら，そのグループ内の皆情論好きが成り立つと仮定する．$n+1$ 人のグループを考える．一人除くと，残りの n 人は，仮定より皆情論好き．この中の一人を退けてさきほどの一人を加えると，n 人ゆえ仮定より皆情論好き．退けた一人は情論好きだったから，退けた一人をもどすと，$n+1$ 人は皆情論好き．
よって，何人のグループでも，そのグループ内の皆情論が好きでーす．

(2). $n(n+1)\div 2+1 < n(n+1)\div 2$??
$n(n \geq 1)$ 以下のすべての k について

$k(k+1)\div 2+1 < k(k+1)\div 2$

を仮定しよう．$k=n-1$ とおくと

$(n-1)(n-1+1)\div 2+1 < (n-1)(n-1+1)\div 2$

両辺に n を加えると

$n(n+1)\div 2+1 < n(n+1)\div 2$

が得られる．

例 0.3.2

人は正直かうそつきかのどちらかである．A，B，C の 3 人がいて，A が「B は正直である」と言った．B が「C はうそつきである」と言った．C が「A は · · · である」と言った．· · · は “うそつき” か “正直” のどちらかであったが，よく聞き取れなかった．· · · は “うそつき” しかありえないということを示せ．
証明：C が「A は正直である」と言ったと仮定する．
C がうそつきの場合：　C が「A は正直である」と言った仮定より，A はうそつきである．よって，A が「B は正直である」と言ったことより，B もうそつきである．よって，B が「C はうそつきである」と言ったことより，C は正直となり，矛盾する．
C が正直の場合：　C が「A は正直である」と言った仮定より，A は正直である．よって，A が「B は正直である」と言ったことより，B も正直である．よって，B が「C はうそつきである」と言ったことより，C はうそつきとなり，矛盾する．
よって，C は「A はうそつきである」と言ったと結論される．

これらの証明の文章は「論理的」と言えるだろうか．
問題文には陽に書かれていないが，この問題に関して使っている前提は何か．
証明の議論の中で，どんな前提や途中結果を使って，(いまの問題に依存しない) どのような論理的な推論を行っているか．
これらが書かれていないと「論理的」とは言えない (自明ならよいが).

x が正直であることを $H(x)$ で，うそつきであることを $L(x)$ で表す．x が「y は正直である」と言ったことを $T_H(x,y)$ で，x が「y はうそつきである」と言ったことを $T_L(x,y)$ で表す．上の問題文は，次の (1)∼(4) が成り立つ (真) なら (5) が成り立つ (真) か，と聞いている．

$$\forall x\,((H(x) \lor L(x)) \land (\neg H(x) \lor \neg L(x))) \tag{1}$$
$$T_H(A,B) \tag{2}$$
$$T_L(B,C) \tag{3}$$
$$T_L(C,A) \lor T_H(C,A) \tag{4}$$
$$T_L(C,A) \tag{5}$$

上記の証明を論理式の上で追ってみよう．

$$T_H(C,A) \tag{6}$$

を仮定する ((6) が真であると仮定する).
$L(C)$ が真の場合：(6) より

$$L(A) \tag{7}$$

が成り立つ．よって，(2) より

$$L(B) \tag{8}$$

が成り立つ．よって，(3) より

$$H(C) \tag{9}$$

が成り立ち，矛盾する．
$H(C)$ が真の場合：(6) より

$$H(A) \tag{10}$$

が成り立つ．よって，(2) より

$$H(B) \tag{11}$$

が成り立つ．よって，(3) より　$L(C)$ (12)
が成り立ち，矛盾する．よって，(5) が成り立つ．

述語の意味を考えず，単に記号としてみれば，論旨にギャップがあることが分るであろう (計算機に証明をチェックさせるのは無理であろう)．例えば
$L(C)$ が真の場合：(6) より

$$L(A) \tag{7}$$

が成り立つと結論している (すなわち，$L(C) =$ 真と $T_H(C,A) =$ 真から $L(A) =$ 真を結論している) が，これは，例えば，陽に書かれていない仮定

$$\forall x\,\forall y\,(L(x) \land T_H(x,y) \to L(y)) \tag{13}$$

を用い，この x に C を y に A を代入した式

$$L(C) \land T_H(C,A) \to L(A) \tag{14}$$

を得て，これと $L(C) =$ 真，$T_H(C,A) =$ 真から $L(A) =$ 真を導き出しているのであろう．
また，背理法を用いていて，
$L(C)$ が真の場合，矛盾，
$H(C)$ が真の場合，矛盾，
と言っているが，$T_H(C,A)$ を仮定したら，すべての場合について矛盾になるとは説明されていない．これは，(1) より，

$$\forall x(H(x) \lor L(x)) \tag{15}$$

したがって，

$$H(C) \lor L(C) \tag{16}$$

であり，性質「$x \to z$，$y \to z$，$x \lor y$ ならば z」を用いて，($T_H(C,A)$ を仮定したら) 矛盾になるという議論を省いているのであろう．
背理法で直接得られる結論は「$T_H(C,A)$ でない」，すなわち,「$T_H(C,A)$」であって，(5) の「$T_L(C,A)$」ではない．ここにもギャップがある．

この授業を受けると，証明とはなにか，証明にはどんな推論を使ってよいのか，などが分かります．また，問題と使う前提を論理式で書きさえすれば，あとは (述語記号の意味などを抜いて) 記号だけの世界で半自動で証明できる (計算機に証明させることができる) ようになります．記号だけで議論するのが記号論理学です．どのような方法で証明するのか，その方法で必ず証明できるのか，などについても学びます．論理式が成り立つような変数の値 (解) を求める方法などについても学びます.

1　命題論理の論理式と意味論

1.1　命題論理の論理式

(1). 記号集合
命題記号　$p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ 等，その集合を一つ定める：P (命題変数ともいわれる)
論理記号　$\rightarrow, \neg$
補助記号　(,)

(2). P にもとづく論理式 (表現式) の集合 L(P)

(a) 命題記号はそれ自身で論理式である

(b) P, Q が論理式ならば $\neg(P), (P) \rightarrow (Q)$ はそれぞれ論理式である

(c) 上の (a)，(b) でつくられるもののみが論理式である

注意

命題記号は引数を持ってはいけない．$p(x)$ などは命題記号ではない．引数を持つものは述語記号と呼ばれる．3 章以降で扱う．

かっこ (,) は慣例にしたがって省略することがある．
$\neg$ は $\rightarrow$ より “強い”($\neg > \rightarrow$).
例えば　$\neg\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ のもとの形は?
P にもとづくといちいち断わらずに，論理式 $\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$，$(p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg\neg p_2$ などと書く．

注意

論理式は単なる「記号列」であって，真である，偽であるとか，成り立つ，成り立たないとかの概念はない．ただし，論理式は上の (2) の (b) の操作をどのように適用して得られたかを表す「構文」をもつ．

問 1.1.1

上記 (2) の (b) にしたがって，P $= \{p, q, r\}$ に対し，論理式集合 L(P) を生成する文脈自由文法を書け.「構文」はその「導出木」で与えられる．(文脈自由文法は「計算論 A」で学ぶ．)
$G = (\{S\}, \{p, q, r, (,), \neg, \rightarrow\}, R, S)$
書換え規則の集合 R は $\{S \rightarrow p, S \rightarrow q, S \rightarrow r, S \rightarrow \neg(S), S \rightarrow (S) \rightarrow (S)\}$

$\neg$ のかわりに，$\sim$ を使うこともある．$\rightarrow$ のかわりに，$\supset$ を使うこともある．
左の論理式を右のように略記することがある．

$\neg P \rightarrow Q$	$P \vee Q$
$\neg(P \rightarrow \neg Q)$	$P \wedge Q$　又は $P \cdot Q$　又は　省略して　PQ
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$　又は　$P \equiv Q$

注意

$P \rightarrow Q$ はもともとの簡単な論理式であるので，なにかで略記することはない．
(このテキストの体系では) $P \rightarrow Q$ を $\neg P \vee Q$ と略記するというのは間違い．

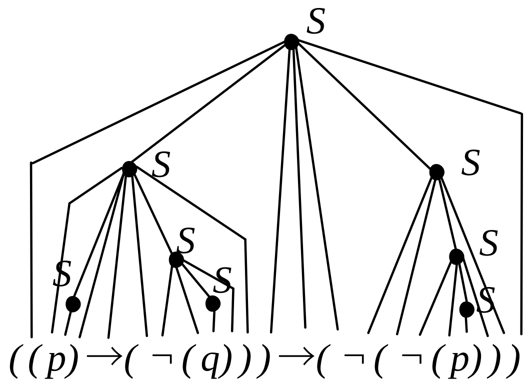


図 1.1.1: 構文を示す導出木

　強　　　　　　　　　弱

$\neg$ ＞ $\wedge$ ＞ $\vee$ ＞ $\to$ ＞ $\leftrightarrow$ として，( ) を省いてもよい．ややこしいので，$\vee$　$\to$　$\leftrightarrow$ は () を用いて区別する方がよい．

かっこ ( ) は，それ以外にも { } や [ ] を用いることがある．

1.2 命題論理の意味論

$\mathsf{P} = \{kbto, kb\}$ とする．

ここで，対象とする世界を「現在の日本の都市」としてみよう．そうすると，それに関する色々な命題の真偽が決まる．

東京は最大の都市である	：真
京都は大阪より大都市である	：偽
京都は最大の都市である	：偽
横浜は関東で 4 番目の大都市である	：偽
⋮	

ここで例えば，命題記号 $kbto$ に命題「京都は大阪より大都市である」を，命題記号 kb に命題「京都は最大の都市である」を対応させると，その対応のもとで，命題記号に真偽を割り当てたことになる．

このように，対象とする世界を決め，そこで真偽の決まっている具体的な命題を各命題記号に割り当てることを (命題記号の) **解釈** *(interpretation)* という．

一つの解釈を決めると，各命題記号の真偽が決まる．したがって，各命題記号への真偽の割り当て方を単に解釈ということもある．

対象とする世界を「平安時代の日本の都市」,「平安時代のアジアと日本の都市」などとすると，同じ命題であっても一般にその真偽は異なる．例えば「京都は最大の都市である」は前者においては真，後者においては偽であろう．命題記号への命題の割当が同じであっても，命題記号へ割り当てられたその真偽は異なり得る．

真，偽を，それぞれ，$\mathtt{tt}$ (true, T, 1, $\top$)，$\mathtt{ff}$ (false, F, 0, $\bot$) で表す．

論理式 A の解釈 $\mathscr{I}$ のもとでの真理値 (真偽)$[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ とは?

例えば A を $(\neg p \to q) \to \neg r$ とし， p, q, r に対応する命題の真偽 (単に，p, q, r の真偽といってもよい) をそれぞれ，$\mathtt{ff}, \mathtt{tt}, \mathtt{tt}$ とする解釈を $\mathscr{I}$ とする．

論理式の値 (真偽) を評価するとき，$\to$ を 論理演算子 $\to$ (含意) に，$\neg$ を 論理演算子 $\neg$ (否定) にそれぞれ対応させて評価する．

x	y	$x \to y$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	tt	tt
tt	ff	ff

x	$\neg x$
ff	tt
tt	ff

厳密には評価の方法を定義する必要があるが，直観的にわかるであろう．式の内側から (構文木の葉の方から) 順に評価していく．

問 1.2.1

上記の解釈 $\mathscr{I}$ のもとで A の真理値 $[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ を評価をせよ．

$[\![A]\!]^{\mathscr{I}} = [\![(\neg p \to q) \to \neg r]\!]^{\mathscr{I}}$

$= (\neg[\![p]\!]^{\mathscr{I}} \to [\![q]\!]^{\mathscr{I}}) \to \neg[\![r]\!]^{\mathscr{I}}$
$= \boxed{}$

$\vee$, $\wedge$ などの略記も，その定義から，真理値を評価する際，論理演算子 $\vee$ (or)，$\wedge$ (and) などと一致することが分かる．

問 1.2.2

次の各論理式の各解釈における値を求めよ．各行における p, q への真理値の割り当てが一つの解釈である．

	p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$ ($p \vee q$ と略記)
$\mathscr{I}_1$	ff	ff	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$
$\mathscr{I}_2$	ff	tt	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$
$\mathscr{I}_3$	tt	tt	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$
$\mathscr{I}_4$	tt	ff	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$

	p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$($p \wedge q$ と略記)
$\mathscr{I}_1$	ff	ff	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_1} =$
$\mathscr{I}_2$	ff	tt	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_2} =$
$\mathscr{I}_3$	tt	tt	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_3} =$
$\mathscr{I}_4$	tt	ff	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_4} =$

二つの論理式 P，Q に対し，任意の解釈 $\mathscr{I}$ について $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} = [\![Q]\!]^{\mathscr{I}}$ であるとき，P，Q は**論理的に同値** *(***等価***)* であるという．

論理演算子 $\vee$，$\wedge$ は結合律を満たす．したがって，略記 $\vee$，$\wedge$ においても $(p \wedge q) \wedge r$ と $p \wedge (q \wedge r)$ は等価ゆえ，$p \wedge q \wedge r$，$\neg p \vee q \vee \neg r$ のように書くこともある．しかし，もとの形は一意には決らない．

$p \wedge q \wedge r$ は，$(p \wedge q) \wedge r = \neg(\neg(p \to \neg q) \to \neg r)$ と $p \wedge (q \wedge r) = \neg(p \to \neg(\neg(q \to \neg r)))$ の 2 通りある．

論理式 P が **恒真** *(valid)* である，**恒真式 又は 妥当式** *(valid formula)* である，**トートロジー** *(tautology)* であるとは：

任意の解釈 $\mathscr{I}$ について，$\mathscr{I}$ のもとで P は真 (すなわち $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} =$ tt (または 1)(true))

P が**充足可能** *(satisfiable)* とは：

P を真にするような解釈 $\mathscr{I}$ が存在する

P が**充足不能** *(unsatisfiable)* **または恒偽**とは：

P を真にするような解釈 $\mathscr{I}$ が存在しない

任意の解釈 $\mathscr{I}$ について，$\mathscr{I}$ のもとで P は偽 (すなわち $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} =$ ff(または 0) (False))

P が恒真であることを $\models P$ で表わす．

Γ を論理式の集合とする (無限集合でもよい)．Γ 中の全ての論理式を真とするような解釈を Γ の**モデル**という．Γ の全てのモデルで P が真であることを

$\Gamma \models P$

で表わす．$\Gamma = \emptyset$(空) のときは上述の恒真に一致する．$\Gamma = \emptyset$ なら,「Γ 中の全ての論理式を真とする」という条件が実質無くなって，どんな解釈でもその条件は満たすということになる．したがって，$\Gamma = \emptyset$ のときの $\Gamma \models P$ は，どんな解釈 $\mathscr{I}$ に対しても P が $\mathscr{I}$ のもとで真ということ，すなわち，P が恒真になる．

例　$\{p, \neg p \vee \neg q \vee r\} \models (p \to r) \vee (q \to r)$

注意

集合を表す括弧 {, } を省略して，上式を次のように書くことがある．

$p, \neg p \vee \neg q \vee r \models (p \to r) \vee (q \to r)$

また，$\Gamma \cup \{A\} \models P$ を $\Gamma, A \models P$ のように書くことがある．

解釈は，命題記号集合に対するものであるが，それを陽に指定せず，対象とする論理式あるいはその集合を考え，単に，それらに対する解釈ということが多い．$\Gamma \models P$ かどうかを定義にしたがって確かめるには，基本的には，Γ と P に現れている各命題記号への真偽のすべての割り当て (一つの割り当てが一つの解釈に当る) を考え，Γ 中の全ての論理式を真とするような割り当て (Γ のモデル) なら，その割り当てで P も真になることを確かめればよい．Γ のすべてのモデルがうまく列挙できるなら，そのモデルに対して，P の真偽を調べればよい．

$\Gamma \models P$ かどうかの (効率的な) 判定法は後述する．

定義より二つの論理式 P，Q に対し，P，Q が論理的に同値 (等価) であるというのは，$P \models Q$ かつ $Q \models P$ であるときである．そのとき $P \models\!\!\!= \!\!\!\mid Q$ とも書く．$P \models\!\!\!=\!\!\!\mid Q$ であるのは $P \equiv Q$ すなわち $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ のときかつそのときに限る (分る?).

定義より，P が恒真 $\Leftrightarrow \neg P$ が恒偽

記法 $R \Rightarrow R'$： R が成り立つならば R' が成り立つ

$R_1 \Leftrightarrow R_2$ ：R_1 if and only if R_2 (R_1 iff R_2 と略記)

(R_1 が成り立つのは，R_2 が成り立つときかつそのときに限る)

$R_2 \Rightarrow R_1$ かつ $R_1 \Rightarrow R_2$

$\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ とする (注：m は有限)．定義から，確かめられるように，

$$\Gamma \models Q \Leftrightarrow \models g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to Q \qquad (*1)$$

特に

$$P \models Q \Leftrightarrow \models P \to Q \qquad (*2)$$

である．

したがって，$\Gamma \models Q$ かどうかを判定するには，$g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to Q$ の恒真性を判定すればよい．

***P* の恒真性の判定法**は，例えば

(A) 「全ての解釈 (k 個の命題記号があれば 2^k とおり) に対して，それぞれの解釈のもとで P は真」なら恒真．そうでなければ (すなわち，P が偽になるような解釈があれば)[1]，P は恒真で

[1]少なくとも一つの解釈が存在してその解釈のもとで P が偽であれば　と言っても同じ．

はない．全ての解釈についてそれぞれ真理値を計算することによって判定できる．

(B) 等価な積和形に変換し，それに対しコンセンサス法を適用し，1 なる項が出れば P は恒真，そうでなければ (1 なる項が出なければ)P は恒真ではない．

(C) 全ての解釈に対して $\neg P$ が偽であるなら，P は恒真．そうでなければ，P は恒真ではない．全ての解釈について調べれば良い．

(D) $\neg P$ を等価な和積形に変換し，それに対しリゾルベント法を適用し，0 なる節 (和項) が出れば，$\neg P$ は恒偽，したがって P は恒真，そうでなければ (0 なる節が出なければ)，$\neg P$ は恒偽でない，したがって P は恒真でない．

(A) や (C) の方法は，命題記号の数が 50 とか 100 とかであれば，現実には実行不可能．

問 1.2.3

恒真か，恒偽か，いずれでもないか
$(p \land \neg q) \land (\neg p \lor q)$
$(p \to r) \land (q \to r) \leftrightarrow ((p \lor q) \to r)$

調べ方

- 恒真であることを示す．あるいは
- 恒偽であることを示す．あるいは
- 恒偽でないことを示し，さらに，恒真でないことを示す．すなわち，真にする解釈 $\mathscr{I}_1$ と偽にする解釈 $\mathscr{I}_2$ を与え，$\mathscr{I}_1$ で真になり，$\mathscr{I}_2$ で偽になることを示す．

導出節 (リゾルベント) を作っていくことにより,「和積形論理式の恒偽性」が判定できる．導出節を作る操作のことを「**導出原理** *(resolution principle)*」という．

節 (和項)t_1 と t_2 の**導出節** *(resolvent)* $\mathrm{res}(t_i, t_j)$ とは：

> ただ一組の変数だけ肯定と否定が含まれているとき，それを除いて，t_1 と t_2 に含まれるリテラル (命題記号またはその否定) の $\lor$ をとったもの (重複するリテラルは一つにまとめる)．(リテラル p と $\neg p$ は相補的であるともいう．)

$\neg u \lor w \lor x \lor \neg y$ と $\neg u \lor w \lor x \lor y \lor z$ のリゾルベントは $\neg u \lor w \lor x \lor z$
$\neg u \lor w \lor x \lor \neg y$ と $\neg u \lor \neg w \lor x \lor y \lor z$ のリゾルベントはない．
$\neg u \lor w \lor x \lor \neg y$ と $\neg u \lor w \lor z$ のリゾルベントはない．

性質 1.2.1 (リゾルベントの性質)
和項 t_1 と t_2 のリゾルベント $\mathrm{res}(t_1, t_2)$ に対し　$t_1 \land t_2 \leq \mathrm{res}(t_1, t_2)$

$\leq$ の定義はいい? (各変数への $\mathtt{tt}$，$\mathtt{ff}$ のどの割当てに対しても，左辺と右辺の論理式の値が $\leq$ のこと，ただし，$\mathtt{ff} \leq \mathtt{ff}$，$\mathtt{ff} \leq \mathtt{tt}$，$\mathtt{tt} \leq \mathtt{tt}$)

例えば

$$(\neg u \lor w \lor x \lor \neg y) \land (\neg u \lor w \lor x \lor y \lor z) \leq (\neg u \lor w \lor x \lor z)$$

これが成り立つことを確認せよ (なるべく簡単に調べるにはどうする?)

和積形論理式 f の恒偽性を，リゾルベント (導出節) をつくっていくことにより判定する方法:
$f \equiv 1$ でないとする．$f = t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_n$ とする．各 t_i は節 (和項) で 0 でないとする．

(1). S を与えられた節集合 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ に初期設定

(2). (a) S 中のどの t_i，t_j についても

i. t_i，t_j のリゾルベントがない，か又は

ii. 存在してもそのリゾルベント res(t_i, t_j) に対し，res$(t_i, t_j) \geq t_k$ なる t_k が S にある

をみたすならば終了，f は恒偽でないと判定.

(b) そうでないとき，

「どの $t_k \in S$ に対しても　res$(t_i, t_j) \not\geq t_k$」なる res(t_i, t_j) を一つ見つける．それが 0 なら終了，f は恒偽であると判定．0 でなければ，S に追加し，(2) をくりかえす.

証明

(2) の (b) で終了したとき (0 なるリゾルベントが出てきたとき)，f は恒偽であること (すなわち，恒偽であるという判定が正しいこと).

t_1 と t_2 のリゾルベント res(t_1, t_2) に対し (性質 1.2.1 より) $t_1 \wedge t_2 \leq$res(t_1, t_2) である．したがって，いつの時点でも S 中の節 t_i は f より小さくなく ($f \leq t_i$)，出てくるリゾルベント τ はいつも $f \leq \tau$ を満たす.

$\tau = 0$ なるリゾルベント (空節という) がでれば，$f \leq 0$ すなわち f は恒偽.

(2) の (a) で終了したとき，f は恒偽ではないこと (すなわち恒偽でないという判定が正しいこと).

(2) の (a) で終了した時点で

(1). $f \leq t$ かつ

(2). $f \leq t' \leq t$ で $t' \neq t$ なる節 t' はない

のような節 t(積和形論理式のところで学んだ主項に対応して，このような節を仮に f の “主節” と呼ぼう) の全体が S に含まれている (すなわち，f の主節がすべて求まっている) ことを示そう.

(2) の (a) で終了するとき S には 0 なる節は含まれないこと，また，

0 なる f の主節がない　$\Leftrightarrow$　$f \equiv 0$(f は解釈によらず恒等的に 0) でない

が成り立つことより，もし上のこと (S は f のすべての主節を含むこと) が言えれば，S は恒偽でないという判定が正しいことになる.

$f \leq t$ なる節 t(f-節と呼ぶ) はどれも，それぞれ，少なくとも一つの f の主節 c があって $c \leq t$ が成り立つ．よって，f の主節が全て S に入っていれば，f-節 t はどれも，それぞれ,「少なくとも一つの $t_i \in S$ があって $t_i \leq t$」が成り立つ．すなわち,「どの $t_i \in S$ に対しても $t_i \not\leq t$」であるような f-節 t は存在しないということになる.

しかし，逆に，f のある主節 t で S に属さないものがあると仮定してみよう．t は主節なので，$f \leq t' \leq t$ のような節 t' は t 自身しかない．t 自身は S に属さないので，(S 中の

節はすべて f-節であることから) $t_i \leq t$ なるような S 中の節 t_i はない．よって,「$t_i \leq \tau$ なるような S 中の節 t_i はない」ような f-節 (f の主節とは限らない)τ があることになる (t 自身がそうである)．しかし，そんな τ があれば矛盾になる．

すなわち，そんなある τ で，ある $t_i \in S$ があって $t_i \leq \tau$ が成り立ってしまう．

このことを以下で説明しよう．そのような τ のうち，極大の ものを選んでおけば，$t_i \leq \tau$ のような $t_i \in S$ が存在しやすいので，そのように議論する．

S に基づいて，$f \leq t$ なる節 t(f-節と呼ぶ) の全体を S' と T に分割する：

$S' \triangleq \{t \mid t$ は f-節で，少なくとも一つの $t_i \in S$ があって $t_i \leq t\}$

$T \triangleq S'$ に属さない f-節の集合

$= \{t \mid t$ は f-節で，どの $t_i \in S$ に対しても $t_i \not\leq t\}$

f のある主節 t で S に属さないものがあると仮定しよう．

主節の定義より，$f \leq t_i \leq t$ なる節 t_i があるとしても t 自身であり，t 自身は S に属さないので，$t \in T$.

ゆえに T は空ではないので，T の中の $\leq$ に関する極大元を一つ選び，それを τ_0 とする．τ_0 を "最大節"(すべての変数の肯定又は否定の $\vee$) とすると，

$f = S$ の中のすべての節 t_i の論理積 ($f \equiv 1$ でないので)

τ_0 は $f \leq \tau_0$ を満たし，かつ最大節

より，$t_j \leq \tau_0$ なる $t_j \in S$ が存在することになり，$\tau_0 \in T$ に矛盾するので，τ_0 は最大節ではない．

したがって，ある変数 x_h が存在して，リテラル x_h , $\neg x_h$ ともに τ_0 に含まれない．

τ_0 は x_h を含まないので $\tau_0 < \tau_0 \vee x_h$. τ_0 は T の極大元ゆえ $\tau_0 \vee x_h \notin T$．一方，$\tau_0 \vee x_h$ は f-節ゆえ，ある $t_i \in S$ が存在して $t_i \leq \tau_0 \vee x_h$．同様に，ある $t_j \in S$ が存在して $t_j \leq \tau_0 \vee \neg x_h$.

したがって，t_i は $\tau_0 \vee x_h$ に含まれる文字のみ含み，t_j は $\tau_0 \vee \neg x_h$ に含まれる文字のみ含む．ところで t_i はもし x_h を含まなければ $t_i \leq \tau_0$ となり，$\tau_0 \in T$ に矛盾するので，t_i は文字 x_h を必ず含む．同様に t_j は文字 $\neg x_h$ を必ず含む．ゆえに t_i と t_j のリゾルベント res(t_i, t_j) が存在して res$(t_i, t_j) \leq \tau_0$ が成り立つ．ところが，停止条件の (2)(a)ii より，$t_k \leq$ res(t_i, t_j) なる $t_k \in S$ があり，その t_k に対し $t_k \leq \tau_0$ となるので $\tau_0 \in S'$ が結論され，$\tau_0 \in T$ に矛盾する．

以上で，f の主節はすべて S に属することを示した． □

(お見事な論法に感心してね)

コメント:

正確に主節の集合だけを求めたければ，S の中から主節でないのを除けばよい．

注意

なぜ，もとの論理式の恒真性でなく，その否定の和積形の恒偽性を調べようとするのか．また，一般の式を和積形へ変換するアルゴリズムの計算時間量はどれくらいだろうか．

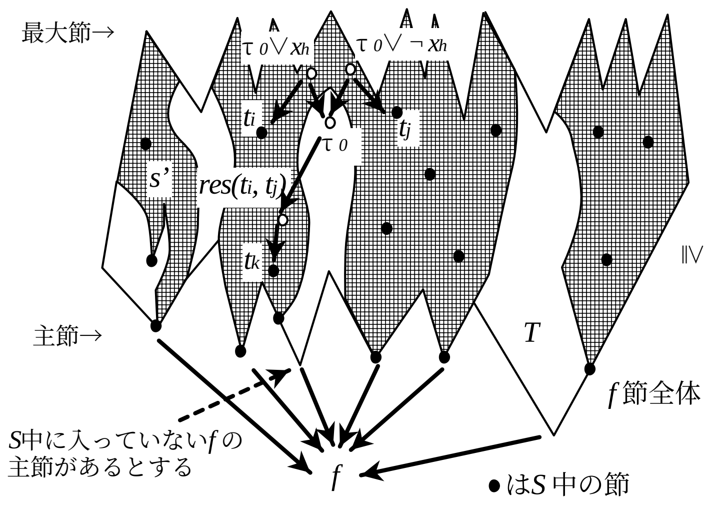


図 1.2.2: T 中の極大元 τ_0 に関連する節の大小関係

例 1.2.1

$(A \to \neg B)$
$\wedge (\neg A \wedge B \to D)$
$\wedge (\neg B \to \neg D)$
$\wedge (\neg C \to \neg D)$
$\to (\neg A \wedge C \wedge D \vee \neg B \wedge \neg D)$
の恒真性を示せ．ただし，この否定が恒偽であることを，リゾルベントをつくっていく方法により示せ．($\cdots$ が恒偽であることを空節を導出することにより示せ，というような言い方をすることもある．また,「$\cdots$ の否定が恒偽であることを」といちいち言わずに，$\cdots$ が恒真であることを導出原理を利用して示せ，などと言うこともある．)

与式を P とおく．$\neg P$ を和積形に直す．
$\neg P \equiv \quad (A \to \neg B)$
$\wedge (\neg A \wedge B \to D)$
$\wedge (\neg B \to \neg D)$
$\wedge (\neg C \to \neg D)$
$\wedge \neg(\neg A \wedge C \wedge D \vee \neg B \wedge \neg D)$

したがって，$\neg P$ の和積形の各節は次のようになる．

$\neg A \vee \neg B$	(1)
$A \vee \neg B \vee D$	(2)
$B \vee \neg D$	(3)
$C \vee \neg D$	(4)
$A \vee \neg C \vee \neg D$	(5)
$B \vee D$	(6)

リゾルベントを求めていく (例えば)

(3) と (6) より	B	(7)
(1) と (7) より	$\neg A$	(8)
(2) と (7) より	$A \vee D$	(9)
(8) と (9) より	D	(10)
(4) と (10) より	C	(11)
(5) と (8) より	$\neg C \vee \neg D$	(12)
(11) と (12) より	$\neg D$	(13)
(10) と (13) より	0	(敢えて長いものを挙げておく)

ゆえに $\neg P$ は恒偽．したがって，与式は恒真．

論理式 R に対し「$\neg R$ を和積形で表し，リゾルベントをとっていって空節 0 を導出する」ことによって，R の恒真性を示すやり方は,「**背理法 (帰謬 (きびゅう) 法)**」と見なせる．

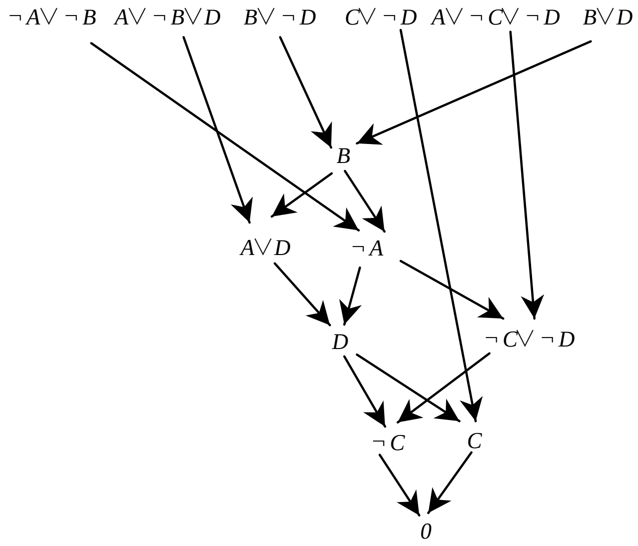


図 1.2.3: 節 0 の導出過程を表す図

$\neg R$ を仮定する．そうすると，$\neg R$ の和積形の各節は真．節 t_i，t_j が真なら res(t_i, t_j) も真でなければならない ($t_i \wedge t_j \leq$res(t_i, t_j) より).

したがって，もとの節や出てきたリゾルベントの節は全て真．ある命題記号 p に対し，節 p と $\neg p$ が得られたなら，矛盾．リゾルベント法では res$(p, \neg p) = 0$ を求めて終る．よって，R は成り立つ (恒真) と結論する．

他の本では，互いに肯定，否定のリテラル (相補的なリテラル) がただ 1 組でなくても，そのうちの 1 組の相補的なリテラルを消す (もちろん重複はまとめる) という操作 (例えば $\neg A \vee B$ と $A \vee \neg B \vee C$ から例えば相補的なリテラル $\neg A$ と A を除いて $B \vee \neg B \vee C$ を作る) を許し，これも導出節と呼んでいる．この場合，導出節には相補的なリテラルが入ってくるが，そのまま残しておく．こういう操作も許したとしても，和積形論理式が充足不能であるとき，かつそのときに限り，空節 0 が導出されるので，恒偽性の判定は上述の方法と同じようにできる (新しい節は常にもとの二つの論理積より大きいということが成り立つからである).

このテキストでは，上記の手続きは，すべての主節を求めるという立場で書いた．そのときには，2 組以上の相補的なリテラルをもつ二つの節，例えば $\neg A \vee B$ と $A \vee \neg B \vee C$ から $B \vee \neg B \vee C$ を作るのは意味がない (元の f は恒等的に 1 ではないとしており，そのときは節 $B \vee \neg B \vee C = 1$ は主節を求めるのには役立たない).

問 1.2.4

$$r \wedge \neg s \wedge \neg p \wedge (\neg p \wedge r \wedge \neg s \to (q \vee t)) \wedge (\neg p \to \neg t) \to q$$

の恒真性を導出原理を利用して示せ.

[復習] 与えられた論理式 (∧，∨，¬，→，( ) あり) を等価な和積形に変換する方法は分っていますか.

問 1.2.5

　次の論理式の否定 (の論理式) を和積形で表せ．論理式を簡単化する必要はない[2]．

$\neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (p_1 \neg p_2 p_4 \to p_3 \neg p_5)$
$\wedge (\neg p_1 p_3 \to (p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5))$
$\wedge ((p_2 \vee \neg p_5) \to \neg p_1 p_4)$
$\wedge ((\neg p_1 \vee p_2 \vee p_5) \to (p_3 \vee \neg p_4))$
$\to (p_2 \neg p_5 \vee \neg p_1 p_2 p_4)$

　等価な式は $=$ で結ぶ．

$$(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

はよく使われる．

問 1.2.6

　次のことを和積形で表せ．

(1). p，q，r のうち正確に一つだけが真である．

(2). 上の (1) の否定．

(3). 「風が吹く」なら「ほこりが立つ」,「ほこりが立つ」なら「$\cdots$」，$\cdots$ 以上のことが成り立つなら，「風が吹く」なら「桶屋が儲かる」が成り立つ ($\cdots$ を世間の常識で補え)．

問 1.2.7

　次のことを命題論理式で表せ．

(1). 題材が興味深く，かつ講義が上手ならば，授業は楽しい．

(2). 題材が興味深くなく，かつ講義が上手でなければ，授業は楽しくない．

(3). 題材が興味深く，かつ講義も上手であるが，授業は楽しくない．

(4). 授業が楽しいのは，題材が興味深く，かつ講義が上手なときに限る．

(5). 講義が上手でなくても題材が興味深ければ授業は楽しい．

(6). 題材は興味深い．したがって，講義が上手なら授業は楽しい．

(7). 題材は興味深いけれど授業は楽しくない．それゆえ，講義は上手ではない．

(8). 題材は興味深いけれど授業は楽しくない．なぜなら，講義が上手じゃないから．

(9). 上の (1) の対偶

(10). 上の (1) の裏

(11). 題材が興味深く，かつ講義が上手ならば，授業は楽しいし，また逆も成り立つ．

　命題記号及びそれに否定がついたものをリテラルと呼ぶ．人工知能の分野では，次の形の論理式の恒真性を問うことが多い．

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$$

P_i は

(1). 一つのリテラル，又は

(2). いくつかのリテラルの論理積 $\to$ リテラル

((1) は前提の事実，(2) は推論の知識)

Q はいくつかのリテラルの論理積

この形なら，この否定の恒偽性を，リゾルベント (導出節) をつくっていくことにより調べるのが得策.

問 1.2.8

次のことは正しいか．命題論理式で表して調べよ.

A 点が高圧なら，C 点の流量は多い.
C 点が高圧でなく，かつ B 点の流量が多くなければ，A 点は高圧でない.
A 点，B 点，C 点がすべて高圧なら，C 点が異常である.
C 点が高圧で，かつ C 点の流量が多ければ，B 点が異常である.
A 点が高圧である.
B 点の流量は大でない.
そうなら，B 点が異常であるか?

ヒント:

論理的に正しいかを調べるには，論理式で表して，その論理式が恒真であることを確かめれば十分である.

A 点が高圧であることを命題記号 p_A で，B 点が高圧であることを p_B で，C 点が高圧であることを p_C で，B 点の流量が多いことを s_B で，C 点の流量が多いことを s_C で，B 点が異常であることを t_B で，C 点が異常であることを t_C で表すと，上の文は次の論理式で表せる.

$(p_A \to s_C)$
$\wedge (\neg p_C \wedge \neg s_B \to \neg p_A)$
$\wedge (p_A \wedge p_B \wedge p_C \to t_C)$
$\wedge (p_C \wedge s_C \to t_B)$
$\wedge\, p_A$
$\wedge \neg s_B$
$\to t_B$

この論理式の恒真性を確かめよ.

注意

命題論理式で議論できない例：

どの点でも，高圧なら流量は多い.
B 点の流量は多くない.
そうなら，B 点は高圧でないか?

は，例えば，x 点が高圧である，x 点の流量が多いをそれぞれ述語記号 $p(x)$，$s(x)$ で表して，

$\forall x(p(x) \to s(x)) \wedge \neg s(B) \to \neg p(B)$

が恒真かどうかを調べる.

「どの点でも，高圧なら流量は多い」,「B 点の流量は多くない」,「B 点は高圧でない」をそれぞれを命題記号 p，q，r で表すことは可能である．命題論理式は $p \wedge q \to r$ となる.

この論理式は恒真になるはずがないので，命題論理式で議論しても意味がない.

問 1.2.9

次のことを命題論理式で表して，その論理式が恒真であることを示せ.

敵が攻めて来るなら我々は撤退するのであったら，我々は勝つ．我々は撤退する．よって，我々は勝つ.

休憩コラム 1.1

「または」は排他的??

私は今度の休みに信州かまたは九州へ旅行に行きます (私は今度の休みに信州へ旅行に行くかまたは私は今度の休みに九州へ旅行に行きます).

論理式では，両方なりたつ場合も含め，真と決めています.

「ならば」

勉強しないならば，試験に落ちる．対偶は，試験に落ちないなら，勉強する．???　試験に落ちないんだったら，勉強なんかしやしない！でしょ．もとが正しかったら，対偶は正しいはずなのに · · ·
情報論理学にとおるには??

(1). 私が真剣にやれば私は情論にとおる．私は真剣にやる．だから，私は情論にとおる．

(2). 私は情論の勉強はしない．だから，私が情論の勉強をするなら私は情論にとおる．

(3). 私は情論におちるこちはない．なぜなら，私が情論の勉強をすれば情論におちる，ということはありえないからだ．

(4). 私が情論の勉強をすれば試験にいい点をとるのであったら，私は情論にとおる．私は情論の勉強はしない．よって，私は情論にとおる．

(5). 私が情論にとおらないなら実験にもおちる．私が実験におちるなら私は講義科目が好きだ．私が講義科目が好きなら私は情論にとおる．ゆえに私は情論にとおる．

(6). 私は実験が好きだ．私は情論も好きだ．私が実験が好きなら私は情論は好きでない．ゆえに私は情論にとおる．

(7). 私がさぼれば私は情論におちるのであったら，私はさぼらない．そして，私はさぼる．ゆえに，私は情論におちない．

(8). 私は病気であるなら私は勉強しないのであったら，私は情論にとおる．私は勉強しない．ゆえに私は情論にとおる．

適当な命題記号を用いて，(1)∼(8) のそれぞれを論理式で表してみよう．その論理式は恒真ですか?
もしそうなら，当然，それぞれもとの文章は論理的には正しいですよね．だったら，私は情論にとおる!

休憩コラム 1.2

(a). ギリシャ神話のスフィンクスは，道行く人に謎をかけ，解けなかった者を食い殺したという．その謎とは次のようなものであった．
「私が人魚であるなら私はスフィンクスである」が偽であるとすると，
　A :「私がスフィンクスなら私は女性である」
　B :「私がスフィンクスなら私は女性でない」
の真偽はどうじゃ．

ヒント:
私は人魚である，私はスフィンクスである，私は女性であるをそれぞれ命題記号で表せ．

(b). 情太は A 子，B 子，C 子の少なくとも一人を愛している．
情太が A 子を愛し，C 子を愛していないなら，情太は B 子を愛している．
情太は B 子と C 子をともに愛しているか，あるいは，その二人ともを愛していない．
情太が C 子を愛しているなら，情太は A 子を愛している．
情太は 3 人のうち誰を愛し，誰を愛していないか．

ヒント:
情太は A 子を愛している，情太は B 子を愛している，情太は C 子を愛しているをそれぞれ命題記号で表せ．

前提全体を積和形で表せば，導出節はその前提のもとで真となります (リゾルベントの性質 1).

誰であるかを導出節として直接求めましょう．答である誰かを予測してそれを含んだ式全体を改めて書き下し，その式に対し恒真性の判定を行うという必要はありません．

休憩コラム 1.3

(a). C はうそつきか正直者かのどちらかである．C は次のように言った．
　「A は金持ちだ．A と B がともに金持ちということはない」
C はうそつきか正直者か，また，A や B は金持ちかどうか．

ヒント:
正直者のいうことはどれも真であり，うそつきのいうことはどれも偽であるとする．

C は正直者である，A は金持ちである，B は金持ちであるということを表す命題記号をそれぞれ HC，RA，RB としよう (簡単のため，C はうそつきであるということを表す命題記号は用いない．C はうそつきであるということは C は正直者でない $\neg HC$ で表される)．問題は

$$(HC \to (RA \wedge (\neg(RA \wedge RB)))) \wedge (\neg HC \to (\neg RA \wedge \neg\neg(RA \wedge RB)))$$

が真であるという前提のもとで HC，RA，RB の真偽値を求めよということ．

上述の休憩コラム 1.2 (b) のヒントのようにして求めてもよいし，あるいは，HC の値 (真偽) で場合分けをして議論してもよい．

(注) 式自体としては，　$HC \wedge (\qquad) \vee \neg HC \wedge (\qquad)$　の形にも書ける．

上述の休憩コラム 1.2 (b) のヒントのようにして求めるのであれば，和積形に直しやすい方を採用する．

(b). 人はうそつきか正直者かどちらかである．ふたりのうち，ひとりが言いました.「私が正直者なら，おまえもそうだ.」しゃべった人と相手の人はそれぞれうそつきでしょうか，正直者でしょうか．

(c). H 氏とその息子は正直者で，L 氏とその息子はうそつきであった．4 人の誰かが作った箱に「この箱は H 氏の息子によって作られたものではない」と書かれてある．その箱は 4 人のうち誰が作ったのか．

(d). うそつきか正直者のみが住むある島で，旅人が Y 字路へさしかかった．一方は宿へ通じているが，案内板がない．島の人はみなどちらの道が宿へ通じているか知っている．通りがかった島の人に，答が「はい」か「いいえ」であるような質問を 1 回だけして，どちらが宿へ通じている道か聞き出しましょう．

ヒント:
質問として,「あなたは正直者である」,「右の道が宿へ通じている」を命題記号とする命題論理式を作れ．

(e). A はうそつきか正直者かどちらかである．答が「はい」か「いいえ」であるような質問を A に 1 回だけして，うそつきか正直者かを当てましょう．

ヒント:
この (e) は適当な命題，例えば「あなたは正直者である」などを命題記号とする命題論理式の形の質問では不可能である．奇抜な質問が必要．上の (d) もそのような奇抜な質問で，簡潔なのがある．

2 命題論理の公理系

2.1 公理系及び定理とその証明

1.1 で命題論理の論理式の集合 $L(\mathrm{P})$ を定義した．ここで，命題論理の**公理系** S を次のように定める．

(1). P，Q，R を任意の論理式を表す変数とする．S の**公理** *(axiom)* は次の 3 つである．

A1 $P \to (Q \to P)$

A2 $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3 $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$

> **注意**
>
> 記述の煩雑さを避けるため一部のかっこ ( ) を省略している．今後も慣例にしたがって省略する．

(2). S の**推論規則** *(inference rule)*

B1 P と $P \to Q$ から Q を得る．P，Q は任意の論理式.
(この規則を *modus ponens (detachment rule* **分離規則***)* 略して MP ともいう．)

この 3 つの公理で $\to$ と $\neg$ の性質を規定しようとしている．

A1 は，P が成り立つなら，Q にかかわらず P が成り立つことを表している．

A2 は，$\to$ のネストの性質に関するもので，$P \to (Q \to R)$ のもとで，$P \to Q$ が成り立っているなら $P \to R$ も成り立つ ($P \to (Q \to R)$ と $P \to Q$ が成り立っているなら $P \to R$ も成り立つ) ということを言っている．

A3 は，$\neg P \to \neg Q$ のもとで，$\neg P \to Q$ がなりたっているなら P が成り立つ ($\neg P \to \neg Q$ と $\neg P \to Q$ がなりたっているなら P が成り立つ) ということを言っている．

$\neg P$ が成り立つと仮定して $\neg Q$ と Q が (すなわち否定と肯定が) 共に得られるなら実は (仮定の否定記号を除いた)P も成り立つ，ということに対応している．$\neg$ の性質をこれだけで規定しているのは興味深い．

Γ を論理式のある集合とする．次のような論理式の有限列　$P_1, P_2, \ldots, P_n$ ただし $P_n = P$ が存在するとき，**S において論理式 P が Γ から導かれる**という．

各 i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

(1). P_i は Γ の要素であるか，又は

(2). P_i は S の公理[3]であるか，又は

(3). P_i が S の推論規則 B1 によって，ある P_j, P_k $(j < i, k < i)$ から直接導かれる．

[3]公理の変数 P，Q，R に具体的な論理式を代入して得られた論理式．公理の**具体例**あるいは公理の**インスタンス** *(instance)* ともいう．上の A1，A2，A3 を公理の**スキーム** *(schema)* といい，そのインスタンスを公理といういい方もある．

注意

P に $\neg r$，Q に p を代入した A3 のインスタンスは，

$(\neg\neg r \to \neg p) \to ((\neg\neg r \to p) \to \neg r)$

である．$(r \to \neg p) \to ((r \to p) \to \neg r)$ は A3 のインスタンスではない．

推論規則 B1 によって，例えば，$r \to q$ と $(r \to q) \to (r \to p)$ から $r \to p$ が得られる．しかし，「$P \to Q$ があるから P を Q でおきかえるのだな．そうなら，$P \to Q$ があれば，P を含んだ式において P を Q に置き換えてよい」などと思ってはいけない．例えば，$(p \to (r \to q)) \to (p \to q)$ と $(r \to q) \to (r \to p)$ から $(p \to (r \to p)) \to (p \to q)$ を得るなどというのは間違いである．

推論規則と公理とは違う．B1 は公理として $P \wedge (P \to Q) \to Q$，すなわち，$\neg(P \to \neg(P \to Q)) \to Q$ があるというのとは違う．推論規則がなければ，元の式から全く新しい式を生成することはできない．

そのような論理式の列 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を，Γ からの P の**証明** *(proof)* といい，Γ の要素をその**仮定** *(hypothesis)* という．n を**証明の長さ**という．役に立たない (以降で使われない)P_i が含まれていてもよい．

S において P が Γ から導かれる (証明がある) とき　$\Gamma \vdash_S P$ と書く (S を固定していてまぎらわしくないときは S を省略することが多い)．

Γ が有限集合 $\{A_1, \ldots, A_m\}$ のとき，$\Gamma \vdash P$ を $A_1, \ldots, A_m \vdash P$ と書き，また $\Gamma \cup \{A\} \vdash P$ を $\Gamma, A \vdash P$ のように書くことがある．

Γ が空集合のとき $\vdash P$ と書き，P は S で**証明可能** *(provable)* であるという．このとき，P を S の**定理** *(theorem)* という．

次のようなことは定義から明らか．

(i). P が公理 (のインスタンス) なら　$\vdash P$

(ii). $P \in \Gamma$ なら $\Gamma \vdash P$

(iii). $\Gamma \vdash P$，$\Gamma' \supseteq \Gamma$ なら $\Gamma' \vdash P$

(iv). $\Gamma \vdash P$，$P \vdash Q$ なら $\Gamma \vdash Q$

(v). $\Gamma \vdash P_1$，$\Gamma \vdash P_2$，$\{P_1, P_2\} \vdash Q$ なら $\Gamma \vdash Q$

例えば，(iv) で，$\Gamma \vdash P$ の証明を表す論理式の列と $P \vdash Q$ の証明を表す論理式の列があるとき，$\Gamma \vdash Q$ の証明を表す論理式の列を作ってみよ．

命題論理の公理系はいろいろあるが，ここではこの S を採用する．
次の系列が $X \to X$(X は任意の論理式) の証明である：

$(X \to ((X \to X) \to X)) \to ((\quad X \to (X \to X)) \to (X \to X))$

$X \to ((X \to X) \to X)$

$(X \to (X \to X)) \to (X \to X)$

$X \to (X \to X)$

$X \to X$

そうは言われてもほんとにそうか．与えられた論理式の列が長くなれば，それが「証明」の列かを確かめるのが面倒!

確かめる方法は?

その手間は?

Γ を有限集合とし，簡単のため，現れている各式の長さは一定値以下としよう．そうすると，

(1). 与えられた論理式 Q が仮定集合 Γ に属するかどうか,

(2). 与えられた論理式 Q が公理のインスタンスかどうか,

(3). 与えられた論理式 Q が与えられた 2 つの論理式 Q_1，Q_2 から MP により得られるかどうか,

は一定のコストで判定できる．与えられた論理式の列の長さが n のとき，手間のオーダはどうなるか．上記の Q_1，Q_2 の可能性の数のオーダは n^2，したがって，全体ではオーダ$\boxed{}$の手間.

もし，ものすごく「勘」がいい者ならどうする.「勘」を働かせて，その「勘」が合ってたことを確かめればよい.「勘」でどの Q_1，Q_2 から得られるのかを予測しよう.「勘」が全部当れば，オーダ$\boxed{}$の手間で与えられた論理式の列が正しい証明であるかどうか分るだろう.

また，証明自身を得ることもすっと (オーダ$\boxed{}$の手間で) できるだろう．(非決定性アルゴリズム!　これは極めて重要な概念 $\rightarrow$「計算論 B」)

試験などでは (チェックが大変なので) 普通「証明である論理式の列を書け」と言わず,「$\vdash R$ であることを示せ」などと言う.

「$\vdash R$ を示せ」とか「$\vdash R$ を証明せよ」という問題に答えるには，その証明である論理式の列を挙げ，それが証明の列になっているという理由 (説明) も書かねばならない．あるいは，証明の列全体を書かなくてもよいが，それを作れるということを論理的に説明しなければならない．例えば，$\Gamma \vdash A$，$A \vdash B$ であることを示してのち,「よって $\Gamma \vdash B$ である」などと結論する.

例 2.1.1

$\vdash X \rightarrow X$ を示せ (X は任意の論理式).

1. $(X \rightarrow ((X \rightarrow X) \rightarrow X)) \rightarrow ((X \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow (X \rightarrow X))$
   (A2 で $P = X$，$Q = X \rightarrow X$，$R = X$ とおいた)
2. $X \rightarrow ((X \rightarrow X) \rightarrow X)$ (A1 で $P = X$，$Q = X \rightarrow X$ とおいた)
3. $(X \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow (X \rightarrow X)$ (1，2 と MP により)
4. $X \rightarrow (X \rightarrow X)$ (A1 で $P = X$，$Q = X$ とおいた)
5. $X \rightarrow X$ (3，4 と MP により)

性質 2.1.1

$\vdash A$ であることが証明された A 中の各命題変数に任意の論理式を代入して得られる論理式 A' に対しても $\vdash A'$ である.

理由を考えてみよ.

以降では，この性質を用いたときでもいちいち言及しない.

次の演繹定理と呼ばれる性質は，$P \rightarrow Q$ の形の定理を証明するときに使うと便利である.

定理 2.1.1 (演繹定理 (えんえきていり，Deduction Theorem))
Γ を論理式のある集合，P，Q を論理式とするとき

$\Gamma, P \vdash Q$ ならば $\Gamma \vdash P \to Q$

特に Γ が空のとき $P \vdash Q$ ならば　$\vdash P \to Q$

証明
$\Gamma, P \vdash Q$ の証明を $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ とする ($Q_n = Q$)．すべての i ($1 \leq i \leq n$) について，$\Gamma \vdash P \to Q_i$ であることを i に関する強帰納法で示す.
$i = 1$ のとき：
証明の一行目 Q_1 は

(1). 仮定 $\Gamma \cup \{P\}$ に属するか，または,

(2). S の公理である

のいずれかである.
公理 A1 により $\vdash Q_1 \to (P \to Q_1)$ ゆえ，Q_1 が Γ の要素であるとき，MP(modus ponens) を用いて

$\Gamma \vdash P \to Q_1$

Q_1 が S の公理であるときも同様に，MP を用いて

$\vdash P \to Q_1$

が成立する．また,

$\vdash X \to X$(前出，例 2.1.1)

ゆえ，P と Q_1 が一致する ($Q_1 = P$) のときは

$\vdash P \to Q_1$

が成立する.
したがって，いずれの場合であっても $\Gamma \vdash P \to Q_1$ が成立する.
$i > 1$ とする:
$1 \leq k < i$ であるすべての k について

$\Gamma \vdash P \to Q_k$

を仮定する.
Q_i について次の 4 つの場合がある.

(1). $Q_i \in \Gamma$

(2). Q_i は P に一致

(3). Q_i は S の公理

(4). Q_i はある Q_j と Q_h(ただし Q_h は $Q_j \to Q_i$ の形であり，$j < i, h < i$) から MP により導かれた.

(1)~(3) の場合は $i = 1$ のときと同じ議論で $\Gamma \vdash P \to Q_i$ が示せる．(4) の場合は帰納法の仮定から

$\Gamma \vdash P \to Q_h$ すなわち $\Gamma \vdash P \to (Q_j \to Q_i)$

が成立しており，一方 A2 より

$$\vdash (P \to (Q_j \to Q_i)) \to ((P \to Q_j) \to (P \to Q_i))$$

この 2 つと MP より

$$\Gamma \vdash (P \to Q_j) \to (P \to Q_i)$$

また帰納法の仮定 $\Gamma \vdash P \to Q_j$ を用いて MP により $\Gamma \vdash P \to Q_i$ を得る．□

問 2.1.1

演繹定理が成り立つことを示すのに，公理 A1，A2，A3 と推論則 MP のどれを使ったか? 使わなかった公理や推論規則は?

例 2.1.2

(1). $X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$(いわゆる**三段論法**)

1.	$X \to Y$	仮定
2.	$Y \to Z$	仮定
3.	X	仮定
4.	Y	1，3 と MP より
5.	Z	2，4 と MP より

よって $X \to Y, Y \to Z, X \vdash Z$
演繹定理より
$X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$

(2). $X \to (Y \to Z), Y \vdash X \to Z$

1.	$X \to (Y \to Z)$	仮定
2.	X	仮定
3.	$Y \to Z$	1，2 と MP より
4.	Y	仮定
5.	Z	3，4 と MP より

よって $X \to (Y \to Z), X, Y \vdash Z$
演繹定理より
$X \to (Y \to Z), Y \vdash X \to Z$

問 2.1.2

証明せよ

(1). $\vdash \neg X \to (X \to Y)$

(2). $\vdash X \to (\neg X \to Y)$

(3). $\vdash \neg\neg X \to X$

(4). $\vdash X \to \neg\neg X$

(5). $\vdash (\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$

(6). $\vdash (X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$

(7). $\vdash X \to (\neg Y \to \neg(X \to Y))$

(8). $\vdash (X \to Y) \to ((\neg X \to Y) \to Y)$

注意

(目で見ても耳で聞いてもすぐに分ることであるが) $\neg\neg X$ と X とは違う式である．したがって，$\vdash X \to X$ を示したからと言って，$\vdash \neg\neg X \to X$ や $\vdash X \to \neg\neg X$ が言える訳ではない．当然であるが，(5) や (6) の式は $(\neg Y \to X) \to (\neg X \to Y)$ や $(Y \to \neg X) \to (X \to \neg Y)$ と違う式である．

解またはヒント:

(1).

1.	$\neg X$	仮定
2.	X	仮定
3.	$\neg X \to (\neg Y \to \neg X)$	A1
4.	$\neg Y \to \neg X$	1，3 と MP より
5.	$X \to (\neg Y \to X)$	A1
6.	$\neg Y \to X$	2，5 と MP より
7.	$(\neg Y \to \neg X) \to ((\neg Y \to X) \to Y)$	A3
8.	$(\neg Y \to X) \to Y$	4，7 と MP より
9.	Y	6，8 と MP より

$\therefore\quad \neg X, X \vdash Y$ (*1)

演繹定理を 2 回用いて

$\neg X \vdash X \to Y$ (*2)

$\vdash \neg X \to (X \to Y)$

コメント： (*1) の $\neg X$，$X \vdash Y$ は，ある論理式の肯定と否定を仮定すれば，すなわち，矛盾した前提からは，どんな論理式でも証明できることを表している．どの公理と推論規則があったらこうなるのか．

(3).

1.	$(\neg X \to \neg\neg X) \to ((\neg X \to \neg X) \to X)$	A3
2.	$\neg X \to \neg X$	例 2.1.1 より
3.	$(\neg X \to \neg\neg X) \to X$	1，2 と例 2.1.2(2) より
4.	$\neg\neg X \to (\neg X \to \neg\neg X)$	A1
5.	$\neg\neg X \to X$	3，4 と例 2.1.2(1) より

注意：$(\neg X \to \neg X) \to ((\neg X \to \neg\neg X) \to X)$ は A3 の具体例ではない．1 でこれを書き，1，2 と例 2.1.2(1) より 3 を得るとするのは間違い．

(4).

1. $(\neg\neg\neg X \to \neg X) \to ((\neg\neg\neg X \to X) \to \neg\neg X)$
2. $\neg\neg\neg X \to \neg X$
3. $(\neg\neg\neg X \to X) \to \neg\neg X$
4. $X \to (\neg\neg\neg X \to X)$

5. $X \to \neg\neg X$

(5).　1. $\neg Y \to \neg X$　仮定

2. $(\neg Y \to \neg X) \to ((\neg Y \to X) \to Y)$　A3

3. $(\neg Y \to X) \to Y$　1，2 と MP より

4. $X \to (\neg Y \to X)$　A1

5. $X \to Y$　3，4 と例 2.1.2(1) より

$\therefore$　$\neg Y \to \neg X \vdash X \to Y$

演繹定理を用いて

$\vdash (\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$

(6).　1. $X \to Y$　仮定

2. $\neg\neg X \to X$ を用いて $\neg\neg X \to Y$.

3. $Y \to \neg\neg Y$ を用いて $\neg\neg X \to \neg\neg Y$.

上の (5) より $(\neg\neg X \to \neg\neg Y) \to (\neg Y \to \neg X)$.

MP より $\neg Y \to \neg X$.

ゆえに，$X \to Y \vdash \neg Y \to \neg X$.　演繹定理を用いる.

(7).　$X, X \to Y \vdash Y$

ゆえに $\vdash X \to ((X \to Y) \to Y)$

一方上の (6) から $\vdash ((X \to Y) \to Y) \to (\neg Y \to \neg(X \to Y))$

(8).　$X \to Y$　仮定

$\neg X \to Y$　仮定

上の (6) を用いて $\neg Y \to \neg X, \neg Y \to \neg\neg X$

一方 A3 より $(\neg Y \to \neg\neg X) \to ((\neg Y \to \neg X) \to Y)$

問 2.1.3

証明せよ　(必要でない仮定もある．どれがそうか．)

(1).　$A, B \vdash A \to B$

(2).　$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

(3).　$\neg A, B \vdash A \to B$

(4).　$\neg A, \neg B \vdash A \to B$

解またはヒント:

(1).　1 B　仮定

2 $B \to (A \to B)$　公理 A1

3 $A \to B$　　　　1，2 と MP

ゆえに　$B \vdash A \to B$

したがって　$A, B \vdash A \to B$　　　　($\vdash$ の定義より，仮定を増やしてもよい)

(2). ヒント　問 2.1.2(7)

(3). ヒント　公理 A1 を用いて $B \vdash A \to B$ を示す．問 2.1.2(1)(*2) の $\neg A \vdash A \to B$ を利用するのは大げさ．その証明の中に，公理 A1 を用いた $B \vdash A \to B$ の証明が入っている (式 2，5，6).

(4). ヒント　問 2.1.2(1)(*2)

一般に (命題論理に限らずに) 公理系 Q において，$\vdash_Q B$ かつ $\vdash_Q \neg B$ なる論理式 B が存在するとき，公理系 Q は**矛盾** *(inconsistent)* であるという．そうでないなら，その公理系は**無矛盾** *(consistent)* であるという．

問 2.1.4

次を示せ.
命題論理の公理系 S に対し，
任意の論理式 A に対し $\vdash_S A$　　(1.1)
$\Leftrightarrow$ $\vdash_S B$ かつ $\vdash_S \neg B$ なる論理式 B が存在する　　(1.2)
公理系 S のどの公理と推論規則があったらこのこと ((1.1)⇔(1.2)) が言えるのか.

問 2.1.5

次を示せ
命題論理の公理系 S は無矛盾である.
(ヒント　後出の 2.2 参照．公理系 S の健全性を使え)

したがって，公理系 S では問 2.1.4 の (1.1) や (1.2) は起り得ない.

一般に公理系 Q が無矛盾であっても，論理式の集合 Γ に対し，$\Gamma \vdash_Q B$ かつ $\Gamma \vdash_Q \neg B$ なる論理式 B が存在することがある．このとき，公理系 Q において Γ は**矛盾**であるという．用いている公理系が明らかなときは,「公理系 Q において」といちいちことわらずに，単に，Γ は矛盾であるという．$\Gamma \vdash B$ かつ $\Gamma \vdash \neg B$ なる論理式 B が存在しないとき，Γ は**無矛盾**であるという.

例 2.1.3

$\Gamma_1 = \{p, q, p \to \neg q\}$，$\Gamma_2 = \{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}$ はいずれも矛盾である.

問 2.1.6

次を示せ.
Γ を論理式の集合とする．命題論理の公理系 S に対し，
任意の論理式 A に対し $\Gamma \vdash_S A$　　(2.1)
$\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash_S B$ かつ $\Gamma \vdash_S \neg B$ なる論理式 B が存在する　　(2.2)
公理系 S のどの公理と推論規則があれば，このこと ((2.1) ⇔(2.2)) が言えるのか.

問 2.1.7

[帰謬法 (背理法) の正当性] 次を示せ．
Γ を論理式の集合とする．

(1). $\Gamma \cup \{\neg A\}$ が矛盾であれば $\Gamma \vdash A$

(2). $\Gamma \cup \{A\}$ が矛盾であれば $\Gamma \vdash \neg A$

(1) のヒント：$\Gamma \cup \{\neg A\}$ が矛盾なら，$\Gamma, \neg A \vdash B$ かつ $\Gamma, \neg A \vdash \neg B$ なる B が存在．演繹定理により，$\Gamma \vdash \neg A \to B$，$\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$．一方，公理 A3 より，$\vdash (\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$．ここで MP を使え．

同じ定理の集合を生成するような二つの公理系は等価であるという．

問 2.1.8

このテキストの命題論理の公理系 S において，公理 A3 を
A3′ $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$
で置き換えた公理系を S' とする．S と S' は等価であることを示せ．

ヒント:

S での定理は S' での定理でもあること：

これには，A3 が S' で証明できること，すなわち

$\vdash_{S'} (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$ (*1)

を示せばよい (性質 2.1.1 より，S' で証明された式 (定理) の命題変数に任意の論理式を代入した式も S' で証明できるので，S での公理 A3 のインスタンスは S' で証明できることになる)．

(注：S' で演繹定理が使えるか? S' で演繹定理を使おうとするときは，それが成り立っていることを確認せよ．演繹定理はどんな公理，推論規則があれば成り立つのか．)

S' での定理は S での定理でもあること：

$\vdash_S (\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ (*2)

を示せばよい．

問 2.1.9

公理系 S の A3 を A3″：$(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$
で置き換えた公理系 S''(J. Łukasiewicz が与えた) は S と等価である．それを示すために，次の (*1)，(*2) を示せ．

$\vdash_S (\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$ (*1)

(これは問 2.1.2(5) と同じ)

$\vdash_{S''} (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$ (*2)

ヒント:

S'' でも演繹定理，例 2.1.1，例 2.1.2 が成り立つ (なぜか)．S'' においても，問 2.1.2 の各式が証明できる．それらの略証を以下に示す．これらの略証を参考にして上記 (*2) を示せ．上記 (*2) の式は問 2.1.2 の (8) に似ているので，その方法を模倣すればよい．

(1). $\neg X$(仮定)，$\neg X \to (\neg Y \to \neg X)$(A1) から $\neg Y \to \neg X$．A3″ と MP より $X \to Y$．ゆえに，$\neg X \vdash X \to Y$．演繹定理より $\vdash \neg X \to (X \to Y)$．
あるいは，$\neg X \to (\neg Y \to \neg X)$(A1) と A3″ と例 2.1.2(1) より．

(2). 問 2.1.2(2) と同じ．(1) を利用して，A3 あるいは A3$''$ を使わずに示せる．$\neg X$，X を仮定して (1) と MP より Y．演繹定理を使う．

(3). (1) より $\neg\neg X \to (\neg X \to \neg\neg\neg X)$．A3$''$ と例 2.1.2(1) より，$\neg\neg X \to (\neg\neg X \to X)$．A2 より $(\neg\neg X \to (\neg\neg X \to X)) \to ((\neg\neg X \to \neg\neg X) \to (\neg\neg X \to X))$．よって $(\neg\neg X \to \neg\neg X) \to (\neg\neg X \to X)$．例 2.1.1 と MP を使う．

(4). (3) より $\neg\neg\neg X \to \neg X$．A3$''$ と MP より．

(5), (6), (7) は，問 2.1.2 と同じように，それまでに示した結果を利用し，A3 あるいは A3$''$ を使わずに示せる．

(8). $X \to Y$，$\neg X \to Y$ を仮定する．(6) と MP より，$\neg Y \to \neg X$．例 2.1.2(1) より $\neg Y \to Y$ (*1)．ところで，(7) より $\neg Y \to (\neg Y \to \neg(\neg Y \to Y))$．$\neg Y$ を仮定し，MP より $\neg(\neg Y \to Y)$．すなわち $\neg Y \vdash \neg(\neg Y \to Y)$．演繹定理，A3$''$，MP より $(\neg Y \to Y) \to Y$．よって，(*1) より，($X \to Y$，$\neg X \to Y$ を仮定すれば)Y が得られる．すなわち，$X \to Y, \neg X \to Y \vdash Y$．演繹定理を使う．

問 2.1.10

(1). $A \vdash A \vee B$
(2). $B \vdash A \vee B$
(3). $A \vee B \vdash B \vee A$
(4). $A, B \vdash A \wedge B$
(5). $A \wedge B \vdash A$
(6). $A \wedge B \vdash B$
(7). $A \wedge B \vdash B \wedge A$
(8). $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
(9). $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
(10). $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
(11). $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
(12). $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$
(13). $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$
(14). $A \to B, A \to C \vdash A \to B \wedge C$
(15). $A \to B, C \to D \vdash A \wedge C \to B \wedge D$
(16). $A \to B, C \to D \vdash A \vee C \to B \vee D$

注意

$X \vee Y$ は $\neg X \to Y$ の略記．したがって，(3) は $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$ 　を示せということ．公理系によっては，$\wedge$ や $\vee$ をもつ論理式も直接対象にして，$\wedge$ や $\vee$ を含んだ公理を導入しているのもある．しかし，この授業では，概念を簡単にするために，論理式は $\to$ と $\neg$ だけをもつとし，もとの式を略記するために $\wedge$ や $\vee$ を用いるとしている．したがって，このテキストの公理系で略記の入った式を扱うと

きは注意せよ．もとの式で議論するのが基本である．問 2.1.10 に挙げているように，$\wedge$ や $\vee$ も用いた命題論理で普通われわれが推論に使うような性質はこのテキストの公理系 S で全部出てくる．

問 2.1.11

B を論理式 A の部分論理式とする．A 中の B のいくつかを $\vdash B \leftrightarrow C$ であるような C で置き換えて得られる論理式 D に対し，$\vdash A \leftrightarrow D$ である．

注意

$\vdash X \leftrightarrow Y$ は $\vdash (X \to Y) \wedge (Y \to X)$ のこと．問 2.1.10 の (4)~(6) より $\vdash X \to Y$ かつ $\vdash Y \to X$ と同じこと．したがって，上記の内容は次のようにも書ける．

> B を論理式 A の部分論理式とする．A 中の B のいくつかを $\vdash B \to C$ かつ $\vdash C \to B$ であるような C で置き換えて得られる論理式 D に対し，$\vdash A \to D$ かつ $\vdash D \to A$ である．

簡単な例として，$\vdash X \leftrightarrow \neg\neg X$ であるので，$\vdash ((\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)) \leftrightarrow ((\neg Y \to \neg X) \to (\neg\neg X \to Y))$ が言える．

ヒント:

論理式上の帰納法で証明せよ．例えば A が $\alpha \to \beta$ の形のとき，D も $\theta \to \delta$ の形である．帰納法の仮定より $\vdash \alpha \leftrightarrow \theta$ かつ $\vdash \beta \leftrightarrow \delta$ である．これより，$\vdash (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\theta \to \delta)$ であることが示せる．

2.2 妥当性と完全性

公理系 S に対する次の二つの性質は基本的かつ重要である．

soundness theorem
[健全性定理] あるいは [妥当性定理]
$\cdots$ 公理系 S が “**健全** *(sound)*” であること

定理 2.2.1 (健全性定理)
公理系 S の任意の論理式 P に対して
$\vdash P \Rightarrow \models P$

completeness theorem
[完全性定理]
$\cdots$ 公理系 S が “**完全** *(complete)*” であること

定理 2.2.2 (完全性定理)
公理系 S の任意の論理式 P に対して
$\models P \Rightarrow \vdash P$

両方合わせて単に完全性定理と呼ばれることもある．

健全性定理は，公理系 S で (MP や演繹定理，問 2.1.2，問 2.1.3，問 2.1.10 なども推論に使って) 構文上の操作で導き出される式は，意味的に成り立つ (論理的に正しい) ものに限られるということを言っている．意味的に成り立たないことを導出 (推論) してしまう公理系は普通は役に立たない．

完全性定理は，意味的に成り立つ論理式は公理系 S での構文上の操作で必ず出せるということを言っている．

形式的体系はこれらの性質を持っていることが重要である．

略証 (「健全性定理」の略証)
任意の解釈 (命題記号への真偽の割当て (付値))$\mathscr{I}$ について，$\vdash P$ の証明に現れる各論理式 R について $[\![R]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$ であることを言えばよい．

公理 A1，A2，A3 は恒真論理式である (確かめよ)．したがって，それらのインスタンスである論理式 P に対し $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$ である．

また，推論規則 B1 で，P_1 と $P_1 \to P_2$ から P_2 を得たとき，
$[\![P_1]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$ かつ $[\![P_1 \to P_2]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$ ならば $[\![P_2]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$
が成り立つ．ゆえに $\vdash$ の定義によって $\vdash P$ ならば $\models P$ $\square$

注意
厳密には，証明の長さについての帰納法を用いて議論すべき．ここでは省略してたが厳密な証明を考えるのは良い訓練である．

証明 (「完全性定理」の証明)

補題 1
$\Gamma, P \vdash Q$ かつ $\Gamma, \neg P \vdash Q$ ならば　$\Gamma \vdash Q$

ヒント:
演繹定理と問 2.1.2(8) $\vdash (X \to Y) \to ((\neg X \to Y) \to Y)$ を使え.

補題 2
P 中の命題記号を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．P を $P[X_1, \ldots, X_n]$ と書き，各 X_i に $\underline{a_i (\in \{\mathtt{tt}, \mathtt{ff}\})}$ を代入して得られる P の値(その代入で表される解釈のもとでの P の値) を $P[a_1, \ldots, a_n]$ とする.
　$a_i = \mathtt{tt}$ のとき X_i^* は X_i を，$a_i = \mathtt{ff}$ のとき X_i^* は $\neg X_i$ を表すとする．そうすると，
　$P[a_1, \ldots, a_n] = \mathtt{tt}$ のとき $X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash P$　(a)
　$P[a_1, \ldots, a_n] = \mathtt{ff}$ のとき $X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash \neg P$　(b)
が成立する.

例 2.2.1
P が $(X \to Y) \to Z$ のときを考える.
$X = \mathtt{tt}$，$Y = \mathtt{tt}$，$Z = \mathtt{tt}$ のとき $(X \to Y) \to Z$ は tt ゆえ，(a) より
$X, Y, Z \vdash (X \to Y) \to Z$
$X = T$，$Y = T$，$Z = F$ のとき $(X \to Y) \to Z$ は $\boxed{}$ ゆえ，$\boxed{}$ より
$X, Y, \neg Z \vdash \boxed{}$
同様に
$X, \neg Y, Z \vdash \boxed{}$
$X, \neg Y, \neg Z \vdash \boxed{}$
$\neg X, Y, Z \vdash \boxed{}$
$\neg X, Y, \neg Z \vdash \boxed{}$
$\neg X, \neg Y, Z \vdash \boxed{}$
$\neg X, \neg Y, \neg Z \vdash \boxed{}$
　補題 2 はこの 8 つが成り立つことを言っている.

証明 (補題 2 の証明)
任意の論理式 P について (a)，(b) が成り立つことを，論理式の中に含まれる $\to$，$\neg$ の個数 k に関する強帰納法で証明する ($\to$，$\neg$ を次の元 (論理式) を作る演算と見ている).

(1). $k = 0$ のとき，$P = X$(X は命題記号) しかない.
　(a) は $X \vdash X$，(b) は $\neg X \vdash \neg X$
　これらが成立するのは自明 (分るでしょうね).

(2). 個数 $k + 1$ で $P = Q \to R$ の場合
　$X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n$ で Q，R の値が tt，tt のとき
　　帰納法の仮定はいずれも (a) の形で

$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash Q$ (1)

$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash R$ (2)

$Q = \mathsf{tt}$，$R = \mathsf{tt}$ のとき，$Q \to R$ は tt ゆえ，(a) の形の

$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash Q \to R$ (3)

が成り立つことを示せばよい．ところが,

$Q, R \vdash Q \to R$ (3')(問 2.1.3(1) より)

ゆえ，(3) が成り立つ．

Q，R の値が tt，ff のとき，帰納法の仮定は

Q に対しては (a) の形　$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash Q$ (4)

R に対しては (b) の形　$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash \neg R$ (5)

$Q \to R$ は ff ゆえ (b) の形の

$X_1^*, \ldots, X_n^* \vdash \neg(Q \to R)$ (6)

が成り立つことを示せばよい．

$Q, \neg R \vdash \neg(Q \to R)$ (問 2.1.3(2))

ゆえ，(4)，(5) から (6) が得られる．

Q，R の値が ff，tt，あるいは，ff，ff のときも同様にして示せる．

(3). 個数 $k+1$ で，$P = \neg Q$ の場合
同様にして示せる (略).

□

例 2.2.2

$P = (X \to Y) \to Z$，$Q = X \to Y$，$R = Z$ の場合

例えば

$X = \mathsf{tt}$，$Y = \mathsf{tt}$，$Z = \mathsf{ff}$ を代入すると $Q = \mathsf{tt}$，$R = \mathsf{ff}$，$P = \mathsf{ff}$

帰納法の仮定は

$X, Y, \neg Z \vdash Q$ (すなわち　$X, Y, \neg Z \vdash X \to Y$)

$X, Y, \neg Z \vdash \neg R$ (すなわち　$X, Y, \neg Z \vdash \neg Z$)

この仮定を用いて示したのは,

$X, Y, \neg Z \vdash \neg P$，すなわち

$X, Y, \neg Z \vdash \neg(Q \to R)$，すなわち

$X, Y, \neg Z \vdash \neg((X \to Y) \to Z)$

である．これは，(6) において，$X_1^* = X, X_2^* = Y, X_3^* = \neg Z$ である (8 通りのうちの) 一つの場合に相当する．

(注：$X_1, X_2, \ldots X_n$ を固定してその上の任意の命題論理式について成り立つことを証明したが，$X_1, X_2, \ldots X_n$ に依存しない議論であるので，命題記号の名前や個数に関係なく成り立つ．)

(完全性定理の証明)

$\models P$ なので，補題 2 より

$X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*, X_n \vdash P$

$X_1^*, \ldots, X_{n-1}^*, \neg X_n \vdash P$

したがって，補題 1 より $X_1^*, \ldots, X_{n-1}^* \vdash P$

これを繰り返せば $\vdash P$ が得られる． □

(以上のきれいな結果と証明の仕方に感心してね)

問 2.2.1

上述の補題 2 の証明中の場合 (2) の Q, R の値が ff, tt のとき，同じく ff, ff のとき，場合 (3) のときの証明を書け.

$\models P \;\Rightarrow\; \vdash P$ の証明において，意味論である $\models P$ なる仮定を使っているところはどこか.

命題論理の健全性，完全性を拡張した次の二つのことが成り立つ.

問 2.2.2

次を示せ.

$\Gamma \vdash A \;\Rightarrow\; \Gamma \models A$

問 2.2.3

次を示せ.

$\Gamma \models A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A$

ヒント:

命題論理の完全性定理　$\models P \;\Rightarrow\; \vdash P$ を用いる．Γ 中の論理式の個数に関する帰納法.

$\Gamma = \emptyset$(空) のとき，命題論理の完全性定理より，$\models A \;\Rightarrow\; \vdash A$.

$\Gamma = G$ に対して成り立つと仮定する．$G, P \models B$ とすると，$G \models P \to B$(説明できますか).

一方，帰納法の仮定より $G \vdash P \to B$．よって，$G, P \vdash B$ (MP より).

特別な場合として，Γ が有限集合のときは，帰納法を使わずに，$A_1, A_2, \ldots, A_m \models A$ なら $\models A_1 \to (A_2 \to (\cdots (A_m \to A) \cdots))$，よって，$\vdash A_1 \to (A_2 \to (\cdots (A_m \to A) \cdots))$．したがって $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash A$である，のように考えてよい．$n$が有限なら，$A_1 \to (A_2 \to (\cdots (A_m \to A) \cdots))$ は論理式である.

公理系 S に関する次の二つの性質も構文論と意味論の対応を述べている.

性質 2.2.1

Γ のモデルがあるならば Γ は無矛盾である.

注意

Γ のモデルとは，Γ 中のすべての論理式を同時に真にする解釈のこと (2.1 で既出)

証明

Γ のモデルがあり，かつ，Γ が矛盾であるとする．Γ が矛盾なら，ある論理式 A があって $\Gamma \vdash A$ かつ $\Gamma \vdash \neg A$ である．よって，問 2.2.2 より，$\Gamma \models A$ かつ $\Gamma \models \neg A$ である．したがって，M を Γ のモデルとすると，M で A は真，かつ，$\neg A$ も真となる．これは起り得ないので，Γ は矛盾ではない.

性質 2.2.2

Γ が無矛盾ならば Γ のモデルがある.

命題変数への真偽の割り当てをどうやって決めたら，Γ 中の全ての論理式を真にするのか．
命題変数 p について，

(a). $\Gamma \vdash p$ なら $p = \mathbb{tt}$,

(b). $\Gamma \vdash \neg p$ なら $p = \mathbb{ff}$

に定めよう．なぜなら，$\Gamma \vdash p$ の場合，問 2.2.2 より $\Gamma \vdash p$ なら $\Gamma \models p$ ゆえ，Γ のモデルは p を真にするものでなければならない．

$\Gamma \vdash \neg p$ の場合も同様に Γ のモデルは p を偽にするものでなければならない．Γ は無矛盾ゆえ，$\Gamma \vdash p$，$\Gamma \vdash \neg p$ は起るとしてもどちらか一方であるので，$p = \mathbb{tt}$ かつ $p = \mathbb{ff}$ のように設定しようとすることはない．

$\Gamma \vdash p$，$\Gamma \vdash \neg p$ のどちらでもないときは，p の値は勝手に $\mathbb{tt}$ か $\mathbb{ff}$ に (例えば $\mathbb{tt}$ に) 定めよう．

$p = \mathbb{tt}$ としたときは Γ に p を加え，$p = \mathbb{ff}$ としたときは Γ に $\neg p$ を加えて，新しい Γ を考える．

この新しい Γ も無矛盾のままである．なぜなら，問 2.1.7(2) より $\Gamma \vdash \neg p$ でなければ $\Gamma \cup \{p\}$ が矛盾になることはないし，また問 2.1.7(1) より $\Gamma \vdash p$ でなければ $\Gamma \cup \{\neg p\}$ が矛盾になることはない．

そして，次の命題変数 q について，上記のことを繰り返す．

$\Gamma = \{p \to \neg q, \neg q \to p\}$ としよう．$\Gamma \vdash p$，$\Gamma \vdash \neg p$ のどちらでもないから，例えば $p = \mathbb{tt}$ にしよう．$\Gamma, p \vdash \neg q$ ゆえ，$q = \mathbb{ff}$ に定める．

このようにして定めた真偽の割り当てが Γ の (ひとつの) モデルである (Γ 中の全ての論理式を真にする (ひとつの) 解釈である) ことの証明を全ての論理式上の帰納法で行ったのが以下の論法である．

4 章の述語論理の特別な場合に相当するが，そこでの議論を理解するのに役立つであろうからここで紹介しておこう．

証明

Γ から $G \supseteq \Gamma$ でかつ以下の (1)，(2) を満たすような (無限個の論理式からなる無矛盾な)G を構成しよう．そして，各命題記号 p の真偽を $G \vdash p$ のとき $\mathbb{tt}$，$G \vdash \neg p$ のとき $\mathbb{ff}$ と定めれば，それが Γ のモデルになっていることを示そう．

Γ 中の命題記号上の全ての論理式を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ とする (可算個であることに注意)．

$G_0 = \Gamma$ とし，

$$G_{i+1} \triangleq \begin{cases} G_i & G_i \vdash \neg\alpha_{i+1} \text{のとき} \\ G_i \cup \{\alpha_{i+1}\} & G_i \nvdash \neg\alpha_{i+1} (G_i \vdash \neg\alpha_{i+1} \text{でない}) \text{ とき} \end{cases}$$

$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \cdots$ を考える．

注意

あとの証明で分るが，G_i は無矛盾であるので，$G_i \vdash \neg\alpha_{i+1}$，$G_i \vdash \alpha_{i+1}$ の少なくとも一方しか起らないようになっている．$G_i \vdash \neg\alpha_{i+1}$ でもなく，かつ $G_i \vdash \alpha_{i+1}$ でもないとき，α_{i+1} あるいは $\neg\alpha_{i+1}$ の一方を G_i に加えていけばよいのであるが，ここの G_{i+1} の定め方は，α_{i+1} の方を加えようとしている．上の記述では，$G_i \vdash \neg\alpha_{i+1}$ でなく，かつ $G_i \vdash \alpha_{i+1}$ であるときも，α_{i+1} を加えているが，$G_i \vdash \alpha_{i+1}$ であるときは α_{i+1} を加える必要はない．説明の都合でこのようにしておく．

例 2.2.3

$\Gamma = \{p \to \neg q, \neg q \to p\}$, $\alpha_1 = p$, $\alpha_2 = q$, $\alpha_3 = \neg p$, $\alpha_4 = p \to q$, $\alpha_5 = \neg p \to \neg q$, $\cdots$ としよう.

$G_0 \nvdash \neg\alpha_1 (\Gamma \vdash \neg p$ でない) ゆえ

$G_1 = G_0 \cup \{p\} = \{p \to \neg q, \neg q \to p, p\}$

以下同様に

$G_2 = G_1$

$G_3 = G_2$

$G_4 = G_3$

$G_5 = G_4 \cup \{\neg p \to \neg q\} = \{p \to \neg q, \neg q \to p, p, \neg p \to \neg q\}$

$\vdots$

$G = \{p \to \neg q, \neg q \to p, p, \neg p \to \neg q, \ldots\}$

(1). G は無矛盾である.

略証

まず，すべての G_i は無矛盾であることを帰納法で示す.

- G_0 は無矛盾
- G_i を無矛盾と仮定

  $G_{i+1} = G_i$ のとき G_{i+1} は無矛盾

  $G_{i+1} \neq G_i$ のとき $G_i \nvdash \neg\alpha_{i+1}, G_{i+1} = G_i \cup \{\alpha_{i+1}\}$

  $\therefore$　G_{i+1} は無矛盾 (理由は分かる？)

よってすべての G_i は無矛盾.

G が矛盾と仮定すると，$G \vdash \beta$ かつ $G \vdash \neg\beta$ なる β が存在．証明の長さは有限であるので，それらの証明に使われた仮定の式は有限個である．よって，G の有限部分集合 G'，G'' があって $G' \vdash \beta$，$G'' \vdash \neg\beta$.

一方，ある n があって，$G_n \supseteq G' \cup G''$．$G_n \vdash \beta$ かつ $G_n \vdash \neg\beta$ は G_n の無矛盾性に反する.
□

(2). 任意の論理式 β に対し G$\vdash\beta$ または G$\vdash \neg\beta$ である (このことを G は完全であるともいう).

略証

任意の論理式 β は，ある i があって β=α_{i+1}

- $G_i \vdash \neg\alpha_{i+1}$ のとき $G \vdash \neg\alpha_{i+1}$
- そうでないとき，$\alpha_{i+1} \in G_{i+1}$　ゆえ $G_{i+1} \vdash \alpha_{i+1}$,

したがって $G \vdash \alpha_{i+1}$ □

ここで，各命題記号 p の真偽を $G \vdash p$ のとき tt，$G \vdash \neg p$ のとき ff と定める (上記 (1)，(2) より一意にかつ必ず値が定まる)．この解釈を M とすると，

(*)　任意の論理式 α に対し

α が M において真 $\Leftrightarrow$ $G \vdash \alpha$

が成りたつ．これが言えると，Γ 中の任意の論理式 β は，$G \vdash \beta$ ゆえ，M において真となる．すなわち，M は Γ のモデルである．(性質 2.2.2 の証明終り) □

略証

(*) の略証

論理式 α 中の $\to$，$\neg$ の個数についての (強) 帰納法を用いる．

(a). 個数 0 のとき　成立　　　　　　(分かる？)

(b). $\alpha = \neg\beta$ で，β に対して (*) を仮定

- α が M において真なら，β は M において真でなく，したがって帰納法の仮定より $G \nvdash \beta$.
  (2) より $G \vdash \neg\beta$ すなわち $G \vdash \alpha$.
- α が M において真でないなら，β は M において真.
  したがって　$G \vdash \beta$(なぜ?)〔以降でも，書いてはいないが，なぜ?のところはいっぱい用意してあります．ギャップを埋めましょう.〕
  よって (1) より　$G \nvdash \neg\beta$ すなわち $G \nvdash \alpha$.

(c). $\alpha = \beta \to \gamma$ で，β，γ に対して (*) を仮定

- α が M において真でないなら，M における β，γ の真偽はそれぞれ $\boxed{}$，$\boxed{}$ ゆえ
  $G \vdash \beta$ かつ $G \nvdash \gamma$
  一方，$G \nvdash \gamma$ より $G \vdash \neg\gamma$
  これらから，
  $G \vdash \neg(\beta \to \gamma)$
  すなわち　$G \vdash \neg\alpha$
  $(\{\beta, \neg\gamma\} \vdash \neg(\beta \to \gamma)$　(a) を示せる?)
  よって $G \nvdash \alpha$
- $G \nvdash \alpha$ とすると，$G \vdash \neg\alpha$
  すなわち $G \vdash \neg(\beta \to \gamma)$
  よって $G \vdash \beta$ かつ $G \vdash \neg\gamma$
  $(\neg(\beta \to \gamma) \vdash \beta$ (b)，$\neg(\beta \to \gamma) \vdash \neg\gamma$ (c) を示せる?)
  一方，$G \vdash \neg\gamma$ より $G \nvdash \gamma$
  したがって，M における β，γ の真偽はそれぞれ $\boxed{}$，$\boxed{}$ となり，M における $\alpha = \beta \to \gamma$ の真偽は $\boxed{}$ となる．

((*) の証明終り)　$\square$

(Γ のモデルを作る議論の見事さに感心してね)

問 2.2.4

性質 2.2.2 を利用して，$\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ であることを示せ.

ヒント:
$\Gamma \vdash A$ でないとすると，問 2.1.7(1) より $\Gamma \cup \{\neg A\}$ は無矛盾である．よって，$\Gamma \cup \{\neg A\}$ のモデルがある．そのモデルの一つを M としよう．M は Γ 中のすべての式および $\neg A$ を真にする．ここで，$\Gamma \models A$ を使う．

命題論理の公理系 S の健全性，完全性より，命題論理の恒真式 A に対し $\vdash A$ が成り立つし，また，$\vdash A$ なる論理式は恒真である．さらに，略記 $\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$ などが入った論理式に対しても，それらのことは成り立つ．したがって，$\vdash A$ かどうか (yes か no) だけを確認したいときは，A の恒真性を調べればよい．$\vdash A$ であることは証明を与えることにより示せるが，$\vdash A$ でないことは公理系を用いた議論では通常示すことはできない (どんなやり方でも絶対に証明がないということは議論しにくい)．$\vdash A$ でないことを示すには，$\vdash A \Rightarrow \models A$ を利用して $\models A$ でないということを示す．ただし，試験などで $\vdash A$ を示せと言われたら，公理系での証明を与えなくてはいけない (あるいは証明があるということを具体的に示さなくてはいけない)．$\models A$ を説明してもだめ．

3　述語論理の論理式と意味論

3.1　述語論理の論理式

記号

(1). **対象定数** *(individual constant)*
$a, b, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ この集合を一つ定める C

(2). **対象変数** *(individual variable)*
$x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ **可算個**

(3). **関数記号** *(function symbol)*
$f, g, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ この集合を一つ定める F

(4). **述語記号** *(predicate symbol)*
$p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ この集合を一つ定める P

(5). 論理記号
$\neg, \rightarrow, \forall$

(6). 補助記号
カッコ ( ) とコンマ,

C，F 上の項 (term)

(1). C 内の対象定数および対象変数は項

(2). f を F 内の n 引数関数記号，$t_1, \ldots, t_n$ を項とすると $f(t_1, \ldots, t_n)$ は項

(3). この (1)，(2) で得られるものだけが項

C, F, P にもとづく論理式の集合 L(C, F, P)

(1). p を P 内の n 引数述語記号，$t_1, \ldots, t_n$ を C, F 上の項とすると
$p(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式 (**原子論理式** *atomic formula*)

(2). A，B が論理式なら $\neg(A)$ および $(A) \rightarrow (B)$ は論理式

(3). A が論理式，x が対象変数なら，$\forall x(A)$ は論理式

(4). この (1)，(2)，(3) で得られるものだけが (述語論理の) 論理式

注意

3 章以降では，単一ソート (データタイプはただ一つ) であるとしている (したがって，関数記号の各引数のデータタイプとか関数値のデータタイプという概念はない).

述語論理の論理式は命題論理の論理式を含む．命題論理は述語論理において述語記号はすべて 0 引数であるという部分クラスに相当する (したがって，対象定数，対象変数，関数記号，$\forall$ はない).

括弧を省略して $\neg A$，$A \to B$，$\forall x\, A$ と書くことがある．優先順位による括弧の省略を行うことがある[4]．次の論理式を右のように略記することがある．

$\neg A \to B$	$A \vee B$
$\neg(A \to \neg B)$	$A \wedge B \quad A \cdot B \quad AB$
$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B \quad A \equiv B$
$\neg \forall x \neg A$	$\exists x\, A$

( ) のかわりに { }，[ ] なども使う．

p，q，r をそれぞれ 2，1，0 引数述語記号とする．次のような式も定義から論理式である．

$\forall z\, (p(x, y) \to q(y))$

$\forall x \forall x\, (p(x, y) \to q(y))$

$\forall x\, r$

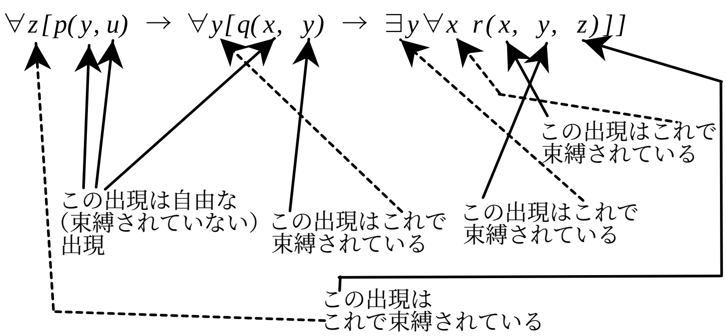
$\forall$ 等は次のように呼ばれる．

$\forall$：**全称記号**　$\forall x$，$\forall y$，$\cdots$：全称作用素　普遍量化子　universal quantifier

$\exists$：**存在記号**　$\exists x$，$\exists y$，$\cdots$：存在作用素　存在量化子　existential quantifier

あわせて限定作用素　quantifier と呼ばれる．

限定作用素に “付随” する変数を**束縛変数** *(bound variable)*，そうでない変数を**自由変数** *(free variable)* という．厳密には “スコープ” を再帰的に定義すべきであるが，例による説明で分かると思う．



この論理式において，u は自由変数，z は束縛変数，x, y はどちらとも言えない．しかし，今後は，自由な出現を 1 つでももつ変数も (したがって，この例の x，y も) 自由変数と呼ぼう．

変数の自由な出現を含まない論理式を特に**閉論理式** *(closed formula)* という．

論理式 T において対象変数 x が自由変数であるとする．$T(x)$ と書いてそのことを表わす．$T(x)$ の変数 x に (変数 x の自由な出現のところ全てに) 項 t を代入して得られる項を $T(t)$ と書く．または $T^{x \leftarrow t}$ とも書く．x 以外に $y, \ldots$ などへも代入するときには $T^{x \leftarrow t_1, y \leftarrow t_2}$ などと書く．また，代入 $\theta : x \leftarrow t_1, y \leftarrow t_2$ を考えて，$T^{\theta}, T\theta$ などと書く．

代入すると，項 t 中の変数が T にもともとある限定作用素によって束縛されてしまうこともあり得るが，そうならないとき，すなわち，t 中の変数が $T(t)$ において自由変数であるとき，　t **は**

[4] このテキストでは $\forall x$ に対して $\neg$ と同様に強い優先度を与えている．すなわち $\forall x\, A \to B$ は $(\forall x\, A) \to B$ であり，$\forall x\, (A \to B)$ ではない．しかしながら，他のテキスト等では $\forall x\, A \to B$ を $\forall x (A \to B)$ とみなすよう定義していることがある．論理式の解釈において演算子の優先度に気をつける必要がある．

$T(x)$ **の** x **に対して自由である**という (自由に 代入してよいというツモリ．x に対して自由でないと x へ代入したらイケナイ．ムリに代入しても得られる式はもとの T と意味的に何の関係もない式になってしまう)．t は $T(x)$ の x へ代入可能である，というような言い方をしてもよい．

$T(x,y) = \forall x\, r(x,y) \to \forall y\, p(x,y)$

に対し，代入 θ： $x \leftarrow g(x,y)$ を施すと，

$T(x,y)\theta = T(g(x,y),y) = \forall x\, r(x,y) \to \forall y\, p(g(x,y),y)$

となる．($\forall x\, r(g(x,y),y) \to \forall y\, p(g(x,y),y)$ ではないですよ．)

得られた式において，代入された $g(x,y)$ の y が束縛されたので，$g(x,y)$ は $\forall x\, r(x,y) \to \forall y\, p(x,y)$ の x に対して自由でない．

$g(x,z)$ や $g(x,x)$ は $\forall x\, r(x,y) \to \forall y\, p(x,y)$ の x に対して自由である．

問 3.1.1

$T(x) = (\forall x\, r(x) \to p(x)) \to \forall y\, \neg(r(y) \to q(x,y))$

とする．

- $t_1 = f(x,y)$ に対し
  $T(t_1) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
  t_1 は $T(x)$ の x に対し自由であるか，またはそうでないか?
- $t_2 = g(x)$ や $t_3 = h(a,v)$ に対してはどうか?

注意

(1). t が自由変数を含まない項なら，t は $T(x)$ の x に対し自由である．

(2). x は $T(x)$ の x に対し自由である．
代入されるのは $T(x)$ 中の変数 x の自由な出現のところである．
(代入後も) 代入された x は自由のままである．

(3). y は $T(x)$ の x に対し自由であるとは限らない．
y は $T(x) = \forall y\, p(x,y)$ の x に対し自由でない．
y は $T(x) = \forall z\, p(x,z)$ の x に対し自由である．

3.2 述語論理の意味論

$L(\mathsf{C},\mathsf{F},\mathsf{P})$ に対する解釈 interpretation とは

対象とする世界を 1 つ決める．例えば，非負実数全体としてみよう．そこには “値” 例えば，0, π，$\sqrt{2}$，21.428 $\cdots$ (10 進表現では有限長で書けない)，$\cdots$ などがある．コンマで区切って，$\cdots$ と書くと，可付番個しかないみたいなので，マズイ．(異なる) 値は，無限に，しかも，可算個でない，だけある．値とは，記号 π ではなく，円周率の あの値(3.14$\cdots$) である．数字列 2.08 でなく 10 進表現 2.08 で 表わされる その値 である．

これらの値 (非負実数値) を引数とし，値域もそれであるような “関数” は無限にある．例えば 2 数の加算をする 2 引数関数，第 1 引数の 3 乗根で第 2，第 3 引数の積を割った余りを表す 3 引数関数なども そのような関数の例である．また，“述語”(関数値が真 tt，偽 ff である関数) も無数にある．例えば，第 1 引数の $\sqrt{2}$ 倍が第 2 引数より大きく，かつ第 2 引数の 2 乗が第 3 引数と等しいという 3 引数述語などもそのような述語の例である．

解釈とは

- 値の (空でない) 集合 (対象領域)D
- C の各記号への D の元の割当て C
- F の各記号への関数の割当て F
- P の各記号への述語の割当て P

を定めることである．それらを一つ定めると一つの解釈になる．

解釈 $\mathscr{I}$ で決まる D，C，F，P，に対し，元 $C(a)$，関数 $F(g)$，述語 $P(q)$ をそれぞれ $a_{\mathscr{I}}$，$g_{\mathscr{I}}$，$q_{\mathscr{I}}$ と書くことがある．n 引数関数記号 g に対して $F(g)(= g_{\mathscr{I}})$ は $\mathsf{D}^n \to \mathsf{D}$ なるある具体的な一つの関数であり，n 引数述語記号 q に対して $P(q)(= q_{\mathscr{I}})$ は $\mathsf{D}^n \to \{\mathsf{tt},\mathsf{ff}\}$ なるある具体的な一つの述語である．

$L(\mathsf{C},\mathsf{F},\mathsf{P})$ に対する解釈といわず，論理式一つあるいは何個かに対して，対象領域とそこに現れている各記号にだけ関数，述語，定数を割り当て，その論理式 (あるいはその集合) に対する解釈ということもある．

> **コメント:**
> 対象領域 D を解釈に含めずに，(D 上での) 割当て C，F，P を解釈というように説明する本もある．そのような場合，対象領域 D と解釈 $\mathscr{I}$ の対を「**構造** *(structure)*」と呼んでいる．

$\forall x\, p(f(x,a),b) \vee q(x)$ に対する解釈の例

$\mathscr{I}_1$：値の集合 D を無理数全体とする．

a を $\sqrt{5}$ とする．b を $\sqrt{11} \times \sqrt{67}$ に等しい無理数とする．

$f(u,v)$ を $u+v \leq \pi$ のときは v，そうでないときは u^2+v を表わす関数とする．

$p(u,v)$ は $u^2 > v$ を表わす述語とする．

$q(u)$ は $10 < u < 13$ を表わす述語とする．

普通，我々が使う数学の記法や自然語を用いて書いてよい (そうでもしないと，書きようがありませんよネ).

$\mathscr{I}_2$： $\mathsf{D} = \{A, B\}$(2 つの記号 A，B からなる集合)

$a = A, b = B$

$f(u,v)$ の値は u, v がともに A のときは A，それ以外のときは B

$p(u,v)$ の値は $u \neq v$ のとき tt，$u = v$ のとき ff

$q(u)$ の値は $u = A$ のとき tt，$u = B$ のとき ff

論理式 A とそれに対する解釈 $\mathscr{I}$ を考える．

自由変数へ D のどの値を代入するかを指定する**代入 (付値関数)**, *(substitution)* を g とする．代入の仕方の数だけ異なる g がある．D が無限集合なら無限個の代入の仕方がある．変数 x へ代入 g で代入される値を x^g で表す.

A の $\mathscr{I}$ と g のもとでの値 $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g}$(真あるは偽) は次の (1)~(4) で定められる：

(1). 自由変数に g で指定された値を代入する．

(2). A 中の関数記号 f や述語記号 p に対しては，$\mathscr{I}$ で指定される具体的な関数 $f_{\mathscr{I}}$ や述語 $p_{\mathscr{I}}$ を評価する．

(3). 記号 $\to$ や $\neg$ は，命題論理のときと同じ，含意，否定の論理演算として評価する．

(4). 閉論理式 $\forall x_i\ B$ が "真 (tt)"
$\Leftrightarrow$ B の自由変数 x_i に D の任意の元を代入して得られるそれぞれの式 B' が全て "真 (tt)".

注意

B に自由変数 x_i がないときも，それにある値を代入して得られる式などという．得られる式 B' はもとの式 B そのものである．

$p(f(x,a),a) \to p(x,y)$ に対し，
解釈 $\mathscr{I}$ を，$\mathsf{D} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 非負整数集合とし，

- a を 1
- $f(u,v)$ を $u + v$(加算)
- $p(u,v)$ を $u \geq v$(大小比較)

に割り当てる解釈とすると，この $\mathscr{I}$ と，例えば g： $x \leftarrow 3, y \leftarrow 5$ なる代入 g に対し，

$$
\begin{aligned}
&[\![p(f(x,a),a) \to p(x,y)]\!]^{\mathscr{I},g} \\
&= p_{\mathscr{I}}(f_{\mathscr{I}}(x^g, a_{\mathscr{I}}), a_{\mathscr{I}}) \to p_{\mathscr{I}}(x^g, y^g) \\
&= (3+1) \geq 1 \to 3 \geq 5 \\
&= \mathsf{tt} \to \mathsf{ff} \\
&= \mathsf{ff}
\end{aligned}
$$

A に自由変数がないときは，値 $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g}$ は g に依存せず，$\mathscr{I}$ だけで決まる．その値を特に $[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ と書き，A の $\mathscr{I}$ のもとでの値ともいう．(注：A に自由変数があるときは解釈 $\mathscr{I}$ のもとでの A の値は定義していない．記法 $[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ は A に自由変数がないときだけ許される．)

A の $\mathscr{I}$，g のもとでの値 $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g}$ が真 (tt) ($[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = T$) であることを $\models_{\mathscr{I},g} A$ と書く．$\mathscr{I}$ は g について A を**充足する** *(satisfy)* という．A は $\mathscr{I}$，g のもとで真であるともいう．

解釈 $\mathscr{I}$ において，全ての g に対し $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathrm{tt}$ である ($\models_{\mathscr{I},g} A$ である) とき (A に自由変数がないときは $[\![A]\!]^{\mathscr{I}} = \mathrm{tt}$ であるとき，と言ってもよい)，$\models_{\mathscr{I}} A$ と書いて $\mathscr{I}$ は A を充足する (A は $\mathscr{I}$ により充足される) と言う．誤解がなければ，A は $\mathscr{I}$ のもとで成り立つ，A は $\mathscr{I}$ のもとで真である，などとも言う．A に自由変数があるときは $\mathscr{I}$ のもとでの A の値は定義していないので，$\mathscr{I}$ のもとでの A の値は真である，とは言わない．

$\models_{\mathscr{I}} A$ でないとき，誤解がなければ，A は $\mathscr{I}$ のもとで成り立たない，A は $\mathscr{I}$ のもとで偽であるともいう．同様に，A に自由変数があるときは，$\mathscr{I}$ のもとでの A の値は偽である，とは言わない．

$\exists$ の定義 ($\exists x\ A$ は $\neg\forall x \neg A$ の略記) より

閉論理式 $\exists y_i\ B$ は $\mathscr{I}$ のもとで真 ($\models_{\mathscr{I}} \exists y_i\ B$)

$\Leftrightarrow$　少なくとも 1 つの値 $\in$ D が存在して，

B の自由変数 y_i にその値を代入して得られる式が $\mathscr{I}$ のもとで真．

例 3.2.1

$\forall x\, p(f(x,a),a)$ (*1)

この論理式は自由変数を持たない．

(1). 解釈 $\mathscr{I}$ として，
D を非負整数集合 $\{0,1,2,\ldots\}$，a を 1，
$p(u,v)$ を述語　$u \geq v$(大小比較)
$f(u,v)$ を関数　$u+v$(加算)
とする．この解釈のもとで (*1) は真．
($\because$ $[\![p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I},x\leftarrow 0} = p_{\mathscr{I}}(f_{\mathscr{I}}(0,a_{\mathscr{I}}),a_{\mathscr{I}}) = 0+1 \geq 1 = \mathrm{tt}$
$[\![p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I},x\leftarrow 1} = p_{\mathscr{I}}(f_{\mathscr{I}}(1,a_{\mathscr{I}}),a_{\mathscr{I}}) = 1+1 \geq 1 = \mathrm{tt}$
$[\![p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I},x\leftarrow 2} = p_{\mathscr{I}}(f_{\mathscr{I}}(2,a_{\mathscr{I}}),a_{\mathscr{I}}) = 2+1 \geq 1 = \mathrm{tt}$
$\vdots$
すなわち，その $\mathscr{I}$ 及び $p(f(x,\,a),\,a)$ の自由変数 x への全ての代入 g について，$[\![p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I},g}$ は真．よって，(4) より $[\![\forall x\, p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I}} = \mathrm{tt}$．)

(2). 別の解釈 $\mathscr{I}'$，例えば f を $\times$(かけ算) とし他は $\mathscr{I}$ と同じとすると，(*1) は $\mathscr{I}'$ のもとで真でない．($\because$代入 g : $x \leftarrow 0$ に対し $[\![p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I}',g}$
$= p_{\mathscr{I}'}(f_{\mathscr{I}'}(x^g,a_{\mathscr{I}'}),a_{\mathscr{I}'}) = 0 \times 1 \geq 1 = \mathrm{ff}$，
よって，(4) より $[\![\forall x\, p(f(x,a),a)]\!]^{\mathscr{I}'} = \mathrm{ff}$．)

例 3.2.2

$\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))$ (*2)

この論理式は自由変数 y を持つ．

解釈 $\mathscr{I}$ として，

- D を正整数集合 $\{1,2,\ldots\}$,
- a を 5,
- $p(u,v)$ を述語 $u \le v$(大小比較)
- $f(u,v), h(u,v)$ をそれぞれ関数 $u+v$(加算)，$u \times v$ (乗算)

とする．この解釈 $\mathscr{I}$ 及び自由変数 y への代入 $g : y \leftarrow 3$ のもとでの真偽，すなわち

$[\![\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))]\!]^{\mathscr{I}, y\leftarrow 3}$ (*3)

の値は?

(*3) が真というのは，

$p_{\mathscr{I}}(f_{\mathscr{I}}(x,3), h_{\mathscr{I}}(x,5)) = x+3 \le x \times 5$

が全ての $x (x=1, x=2, \ldots)$ に対して成り立つこと．

そうであるので，(*3) の値は真.

注：このことより，$\models_{\mathscr{I}} \exists y \forall x\, p(f(x,y), h(x,a))$

論理式 (*2) は解釈 $\mathscr{I}$ のもとで真か，すなわち

$\models_{\mathscr{I}} \forall x\, p(f(x,y), h(x,a))$ (*4)

か?

そうであるためには，$\mathscr{I}$ のもとで，自由変数 y への全ての代入に対して $\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))$ が成り立つこと，すなわち

$[\![\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))]\!]^{\mathscr{I}, y\leftarrow 1}$
$[\![\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))]\!]^{\mathscr{I}, y\leftarrow 2}$
$[\![\forall x\, p(f(x,y), h(x,a))]\!]^{\mathscr{I}, y\leftarrow 3}$
$\vdots$

が全て真でなければならない．それらは全て真か.

論理式 A が**恒真** *(valid)* である ($\models A$ と書く) とは，全ての解釈 $\mathscr{I}$ に対し $\models_{\mathscr{I}} A$ であること (注：A に自由変数があれば，全ての解釈 $\mathscr{I}$ 及び $\mathscr{I}$ での自由変数への全ての代入 g に対し，A が $\mathscr{I}, g$ のもとで真 ($[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathtt{tt}$) すなわち $\models_{\mathscr{I},g} A$ であること)

$\models_{\mathscr{I}} A$ ならば (すなわち，解釈 $\mathscr{I}$ が A を充足するならば)，$\mathscr{I}$ を A の**モデル**という．A がモデルを 1 つでももてば，A は**充足可能** *(satisfiable)* であるという．逆に，モデルを一つももたないとき (どの $\mathscr{I}$ についても $\models_{\mathscr{I}} A$ でないとき)，A は**充足不能** *(unsatisfiable)* であるという.

注意

恒真という言葉は上記のように使う．自由変数を持つ A に対し，解釈 $\mathscr{I}$ のもとでどの代入 g に対しても $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathtt{tt}$ であるとき,「A は $\mathscr{I}$ のもとで恒真である」などと言ってはいけない.

問 3.2.1

次の論理式それぞれに対して「充足可能であるが恒真ではない」ということを説明せよ.

(1). $p(x)$

(2). $p(a) \wedge p(b) \to \forall x\, p(x)$

(3). $p(a) \wedge \exists x\, \neg p(x)$

コメント:

A が充足可能であることをいうには，$\models_{\mathscr{I}} A$ である解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい．すなわち，ある解釈 $\mathscr{I}$ を与えて，どの代入 g に対しても $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathtt{tt}$ であることをいえばよい.

A が恒真ではないことをいうには，$\models_{\mathscr{I}} A$ でないある解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい．すなわち，ある解釈 $\mathscr{I}$，ある代入 g を与えて $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathtt{ff}$ であることをいえばよい.

(2) $\mathsf{D} = \{B, C\}$，$a = B$，$b = C$，$p(B) = \mathsf{ff}$，$p(C) = \mathsf{tt}$ なる解釈を $\mathscr{I}_1$ とする．$\mathscr{I}_1$ のもとで $p(a) \wedge p(b)$ は偽ゆえ，$\mathscr{I}_1$ のもとで与式は真である．よって，与式は充足可能である．$a = C$ に変えた解釈を $\mathscr{I}_2$ とする．$\mathscr{I}_2$ のもとで $p(a) \wedge p(b)$ は真，$\forall x\, p(x)$ は偽ゆえ，$\mathscr{I}_2$ のもとで与式は偽である．よって，与式は恒真ではない．要素数が 1 の集合の上の解釈なら，どんな解釈でも真になる．

問 3.2.2

次の論理式は，恒真か，恒真でないが充足可能か，あるいは充足不能か．それぞれについて説明せよ．

(1). $p(a)$

(2). $\forall x\, p(x) \to p(f(a))$

(3). $p(x) \to p(f(a))$

(4). $\exists x\, p(x) \wedge \forall x\, p(f(x))$

(5). $p(x) \wedge \neg p(a)$

(6). $\forall x\, (p(x) \wedge \neg p(a))$

(7). $\forall x\, p(x) \wedge \neg p(f(a))$

(8). $\forall x\, (\neg p(x) \vee p(a))$

(9). $p(x) \wedge \neg p(x)$

(10). $p(x) \wedge \neg p(y)$

(11). $\forall x\, p(x) \vee \exists x \neg p(x)$

(12). $\forall x\, p(x) \wedge \exists x \neg p(x)$

定義より，

(1). 各解釈 $\mathscr{I}$ について，$\models_{\mathscr{I}} A \;\Leftrightarrow\; \models_{\mathscr{I}} \forall x_1 \forall x_2 \cdots A$

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots A$ は，A の全ての自由変数 $x_1, x_2, \ldots$ に $\forall$ を作用させたもの (A **の閉包** *closure* という)

注：自由変数をもつ A が $\mathscr{I}$ のもとで真 ($\models_{\mathscr{I}} A$) であるというのは，定義より，その自由変数に D のどんな元を代入した式も真であるということ．したがって，

(2). $\models A \;\Leftrightarrow\; \forall x_1 \forall x_2 \cdots A$

また，

(3). 自由変数がなければ，各解釈 $\mathscr{I}$ について，

$\models_{\mathscr{I}} A \;\Leftrightarrow\; \models_{\mathscr{I}} \neg A$ でない

$\models_{\mathscr{I}} A$ でない $\quad\Leftrightarrow\; \models_{\mathscr{I}} \neg A$

したがって，

(4). 自由変数がなければ，

$\models A$(A は恒真) $\quad\Leftrightarrow\quad \neg A$ が充足不能 (どの $\mathscr{I}$ についても $\models_{\mathscr{I}} \neg A$ でない)

Γ を論理式の集合 (一般に無限集合でもよい)，A を論理式とする．Γ の全ての論理式がそのもとで真であるような解釈を Γ の**モデル**という．Γ の任意のモデル M に対して，M のもとで A も真となるとき，$\Gamma \models A$ と書く．A を Γ の**論理的帰結**という．特に，Γ が空 $\emptyset$ のとき，(全ての解釈が

$\Gamma = \emptyset$ のモデルと見做せるので) $\emptyset \models A$ は A が恒真であることを表わす．すなわち，$\models A$ と同じことになる．

$\Gamma \models A$ でない ($\models A$ でない) ことを $\Gamma \not\models A$ ($\not\models A$) とも書く．

注意

Γ によっては，モデルが存在しないこともある．例えば，
$\Gamma = \{\forall x\, (p(x) \wedge q(x)), \exists x\, q(x) \to \exists x\, \neg p(x)\}$.
このような Γ に対しては，任意の A について $\Gamma \models A$ になる (A を真にする解釈はなくてよい).

注意

今までの定義などを理解しているかチェックしてみよう．次のことは成り立つか.

(1). $\forall x\, p(x) \models p(x)$

(2). $p(x) \models \forall x\, p(x)$

(3). $\models \forall x\, p(x) \to p(x)$

(4). $\models p(x) \to \forall x\, p(x)$

(5). $p(x) \models p(y)$

(6). $\models p(x) \to p(y)$

任意の論理式 A，B(閉論理式とは限らない) に対し，$\models A \to B$ なら $A \models B$ である．しかし，A，B が閉論理式でなければ，一般に $A \models B$ であっても $\models A \to B$ であるとは限らない (上記の例えば (2) と (4) 参照)．閉論理式であれば，命題論理と同じように，$A \models B \;\Leftrightarrow\; A \to B$ が成り立つ．

ヒント:

$\not\models B$ をいうには，$\models_{\mathscr{I}} B$ でない解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい．したがって，$[\![B]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{ff}$ であるような解釈 $\mathscr{I}$，代入 g があることをいえばよい (B に自由変数がないときは $[\![B]\!]^{\mathscr{I}} = \mathsf{ff}$ になることをいえばよい)．$A \not\models B$ をいうには，次の (a)，(b) をともに満たす解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい.

(a) $\models_{\mathscr{I}} A$(すなわち，全ての代入 g に対し $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{tt}$)

(b) $\models_{\mathscr{I}} B$ でない (すなわち，ある代入 g があって $[\![B]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{ff}$)

論理式 A，B について，すべての解釈 $\mathscr{I}$，すべての代入 g に対し，$[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = [\![B]\!]^{\mathscr{I},g}$ であるとき ($\models_{\mathscr{I},g} A \;\Leftrightarrow\; \models_{\mathscr{I},g} B$ のとき)，A と B は**論理的に同値 (等価)** であるという．定義から，A と B が論理的に同値であるとき，かつそのときのみ，論理式 $A \leftrightarrow B$(または $A \equiv B$) すなわち $(A \to B) \wedge (B \to A)$ が恒真である ($\models (A \to B) \wedge (B \to A)$ である)．0 章で等価な式変形の例として挙げた式は論理的に同値である．A と B が論理的に同値であることを $A \sim B$ で表そう．

$P \sim Q$ なら $\models P \to Q$ かつ $\models Q \to P$ であり，当然 $P \models Q$ かつ $Q \models P$ である．(注：$P \models Q$ かつ $Q \models P$ であっても $P \sim Q$ とは限らない．$p(x) \models p(y)$ かつ $p(y) \models p(x)$ であるが $p(x) \sim p(y)$ ではない．)

論理的に同値な式の例：

$p(x) \sim \neg\neg p(x)$

$\neg\forall x p(x) \sim \exists x(\neg p(x))$

$\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) \sim \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$

$\exists x\, (p(x) \vee q(x)) \sim \exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)$

$\forall x[q(x) \wedge P] \sim \forall x\, q(x) \wedge P$　ただし，P が x を引数としてもっていないとき

$\forall x[q(x) \vee P] \sim \forall x\, q(x) \vee P$　ただし，P が x を引数としてもっていないとき

$\exists x[q(x) \wedge P] \sim \exists x\, q(x) \wedge P$　ただし，P が x を引数としてもっていないとき

$\exists x[q(x) \vee P] \sim \exists x\, q(x) \vee P$　ただし，P が x を引数としてもっていないとき

問 3.2.3

A が x を自由変数として持たない (A は x の自由な出現をもたない) ならば
$\forall x\,(A \to B) \sim A \to \forall x\, B$
であることを説明せよ．また，A が x を自由変数として持てば，一般にそうではないことを説明せよ．

一般に $A \to B \models \forall x(A \to B)$ であり，また問 3.2.3 より，A が x を自由変数として持たないならば，$\forall x(A \to B) \models A \to \forall x\, B$ である．よって，A が x を自由変数として持たないならば $A \to B \models A \to \forall x\, B$ である．これは 4 章の公理系における推論規則 B2 に対応する．

しかし，A が x を自由変数として持てば，一般に $A \to B \models A \to \forall x\, B$ ではない．

性質 3.2.1

命題論理の恒真式 A の命題記号への (述語) 論理式の代入 θ を施して得られる (述語) 論理式 $A\theta$ は恒真である．

例: 恒真式 $p \wedge q \to p$ より

$\forall y\,(r(x,y) \to s(y)) \wedge \neg s(z) \to \forall y(r(x,y) \to s(y))$ は恒真である．

代入 $\theta : x \leftarrow t$ に対し，t が $A(x)$ の x に対し自由であるとき，**θ を A に適用可能な代入**と言うことにする．次のことは極めて基本的で重要である．

性質 3.2.2

θ を A に適用可能な代入とすると，

$\models \forall x\, A \to A\theta$.

これは 4 章の公理系における公理 A4 に対応する．

θ が A に適用可能でなければ $\models \forall x\, A \to A\theta$ は一般には成り立たない (常に成り立つとは限らない).

(θ によっては，$\not\models \forall x\, A \to A\theta$，すなわち，$\forall x\, A \to A\theta$ は恒真でない．)

例えば，次のことは成り立つか?((1) と (2) は適用可能な代入の場合であり，(3) と (4) は適用可能な代入でない場合である．)

(1). $\models \forall x \exists y\, p(x,y) \to \exists y\, p(f(a),y)$?

(2). $\models \forall x \exists y\, p(x,y) \to \exists y\, p(z,y)$?

(3). $\models \forall x \exists y\, p(x,y) \to \exists y\, p(y,y)$?

(4). $\models \forall x \forall y\, p(x,y) \to \forall y\, p(y,y)$?

問 3.2.4

次のことが成り立つことを説明せよ．

(1). $\exists y \forall x\, A(x,y) \models \forall x \exists y\, A(x,y)$

(2). $\forall x \exists y\, A(x,y) \not\models \exists y \forall x\, A(x,y)$

(3). $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \models \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

(4). $\exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x) \not\models \exists x (A(x) \land B(x))$

(5). $\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \models \forall x (A(x) \lor B(x))$

(6). $\forall x\, (A(x) \lor B(x)) \not\models \forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)$

注意

定義を再確認しよう．次の (1)，(2) はそれぞれ (3)〜(6) のどれと同じことを表すか．

(1). $A \models B$

(2). $\models A \to B$

(3). 任意の $\mathscr{I}$ について，$\models_{\mathscr{I}} A \ \Rightarrow\ \models_{\mathscr{I}} B$

(4). 任意の $\mathscr{I}$ について $\models_{\mathscr{I}} A \ \Rightarrow$ 任意の $\mathscr{I}$ について $\models_{\mathscr{I}} B$

(5). 任意の $\mathscr{I}, g$ について，$\models_{\mathscr{I},g} A \ \Rightarrow\ \models_{\mathscr{I},g} B$

(6). 任意の $\mathscr{I}, g$ について $\models_{\mathscr{I},g} A \ \Rightarrow$ 任意の $\mathscr{I}$，g について $\models_{\mathscr{I},g} B$

(2)⇒(1) は一般に成り立つか．(1)⇒(2) は一般に成り立つか．

述語記号が全て 0 引数であるときは，

対象定数，対象変数，関数記号，論理記号 $\forall$，$\exists$

があっても実質意味がなく，それらがないと見なしたときの述語論理は命題論理になる．これはまた，すでに学んだ論理関数 (論理式)[5]の論理と同じである (恒真，充足可能，充足不能も同じ意味)．

このテキストでは，特に閉論理式 A に対しては，解釈 $\mathscr{I}$ における A の値を定義し，$[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ で表した．これは命題論理で用いた記法と合わすためである．

我々が，ここで学ぶ述語論理の目的の 1 つは，

「述語論理式の集合 Γ が与えられているとき，任意の論理式 A が指定されて，$\Gamma \models A$ であるときにそれを示すこと」

である．

$\Gamma \models A$ かどうかを判定する (yes か no を決める) ことは一般に原理的に不可能である．$\Gamma \models A$ かどうかは**決定不能 (判定不能)** *(undecidable)* **である**という．すなわち，任意の Γ と A を入力として，それに対し，必ず停止して正しい答を出すアルゴリズムは存在しない．

決定不能の定義，決定不能な判定問題の例，決定不能であることの証明などは「計算論 B 」の講義で学ぶ．

[5]論理関数でいう論理変数，命題論理でいう命題記号がここでいう述語記号に相当する．この場合，解釈における述語記号への “述語” の割当ては真か偽を割り当てることになる (引数がないので述語の値は恒等的に真または偽である)．

4　述語論理の公理系

4.1　公理系および定理とその証明

述語論理式集合 $L(\mathsf{C},\mathsf{F},\mathsf{P})$ に対する公理系 Q を次のように定める．

(1). Q の記号

3.1 の $L(\mathsf{C},\mathsf{F},\mathsf{P})$ の記号と同じ．

(2). Q の項及び論理式

3.1 の $L(\mathsf{C},\mathsf{F},\mathsf{P})$ の項及び論理式と同じ

(3). Q の公理

A1　$P \to (Q \to P)$

A2　$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3　$(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$

A4　$\forall x\, T(x) \to T(t)$　(ただし，t は $T(x)$ の x に対して自由である項)

(4). Q の推論規則

B1　P と $P \to Q$ から Q を得る　(MP，modus ponens)

B2　$P \to Q$ から $P \to \forall x\, Q$ を得る．　(ただし P は自由変数 x を含まないこと)

公理の P，Q，R には任意の述語論理式が代入される．述語論理は命題論理を含んでいる．命題論理式も 0 引数述語記号を用いた述語論理式である．

公理 A4 のインスタンスの例

- $\forall y\ (p(y) \to q(y,z)) \to (p(f(a)) \to q(f(a),z))$
- $\forall y\ (p(y) \to q(y,z)) \to (p(f(x)) \to q(f(x),z))$
- $\forall y\ (p(y) \to q(y,z)) \to (p(y) \to q(y,z))$
- $\forall x\ (p(y) \to q(y,z)) \to (p(y) \to q(y,z))$

A4 で $T(x)$ が x を自由変数としてもっていない場合，$T(t)$ は T そのものである．

公理 A4 のインスタンスでない例

- $\forall y\ (p(y) \to \forall z\ q(y,z)) \to (p(f(z)) \to \forall z\ q(f(z),z))$

$f(z)$ は $p(y) \to \forall z\ q(y,z)$ の y に対して自由でない．

推論規則 B2 の適用例

- $\neg p(a) \to (q(x,y) \to \neg r(y))$ から $\neg p(a) \to \forall y\ (q(x,y) \to \neg r(y))$ を得る
- $\neg p(x) \to (q(x,y) \to \neg r(y))$ から $\neg p(x) \to \forall y\ (q(x,y) \to \neg r(y))$ を得る

推論規則 B2 の誤った適用例

- $\neg p(y) \to (q(y,z) \to \neg r(y))$ から $\neg p(y) \to \forall y\,(q(y,z) \to \neg r(y))$ を得る
  ($\neg p(y)$ は自由変数 y を含んでいる)
- $p(y) \to q(y)$ から $p(y) \to \forall z\, q(z)$ を得る (Q は同じものでないといけない)
- $\neg p(x) \to (q(x) \to \neg r(y))$ から $\neg p(x) \to (q(x) \to \forall y\, \neg r(y))$ を得る
  (式中の $P \to Q$ を $P \to \forall x\, Q$ に置き換えるのではない)
- $(P \to Q) \to (P \to \forall x\, Q)$ の形の式を公理のインスタンスとする．

  コメント:
  公理のインスタンスは恒真である．A4 については，性質 3.2.2 を参照せよ．推論規則については，$P, P \to Q \models Q$，$A \to B \models A \to \forall x\, B$(ただし A は自由変数 x を含まないこと) が成り立っている．後者 (B2) については，問題 3.2.3 及びその直後の記述を参照せよ．

Γ を論理式の集合，A を論理式として，命題論理のときのように

$\Gamma \vdash_Q A$　　(Q が自明のときは省く)

を定義する．とくに $\Gamma = \emptyset$ のとき，$\vdash_Q A$ と書き，A を (Q における) 定理という．

命題論理のときのように，公理と推論規則を用いて A を導出する過程の論理式の列を A の証明という．A の証明があるとき，すなわち A が定理であるとき，A を証明可能などともいう．

例 4.1.1

(1). $\forall x\, p(x) \vdash p(t)$　(ただし項 t は $p(x)$ の x に対して自由) の証明

1	$\forall x\, p(x)$	仮定
2	$\forall x\, p(x) \to p(t)$	公理 A4 より (t は $p(x)$ の x に対して自由ゆえ)
3	$p(t)$	1，2 と MP

(2). $\forall x\, p(x), p(a) \to q(b) \vdash q(b)$ の証明

1	$\forall x\, p(x)$	仮定
2	$p(a)$	1 と上の (1) より (a は $p(x)$ の x に対して自由)
3	$p(a) \to q(b)$	仮定
4	$q(b)$	2，3 と MP

定理 4.1.1

命題論理の定理の命題記号に $L(\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{P})$ の論理式を代入して得られる論理式は証明可能

証明

命題論理の公理系における証明で，命題記号を代入された論理式に置き換えると，述語論理の公理系での証明になっている．(なぜか?) □

例 4.1.2

(1). $\forall x\, A(x) \vdash A(x)$

(2). $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$

証明
(2) の証明

1. $A(x)$ 仮定
2. $A(x) \to ((B \to B) \to A(x))$
公理 A1 より (ただし B は自由変数 x を含まない一つの論理式)
3. $(B \to B) \to A(x)$ 1，2 と MP
4. $(B \to B) \to \forall x\, A(x)$ 3 と推論規則 B2($B \to B$ は自由変数 x を含まない．なぜか?)
5. $B \to B$ 例 2.1.1 と定理 4.1.1 より
6. $\forall x\, A(x)$ 4，5 と MP

注意

(1)，(2) とも，A が x を自由変数としてもっていなくてもよい．一般に，$\vdash \forall x\, A(x) \to A(x)$ であるが，$\vdash A(x) \to \forall x\, A(x)$ でない．$\vdash A(x) \to \forall x\, A(x)$ でないということはどうやって示すか? (4.2 の健全性定理「$\vdash P \Rightarrow \models P$」を使う．$\models P$ でないということを説明する．)

問 4.1.1

(1). $\vdash A(x_1, x_2, \ldots, x_m) \Leftrightarrow \vdash \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_m A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

(2). $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_m A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
$\Leftrightarrow \vdash \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \cdots \forall x_{i_m} A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ($i_1, i_2, \ldots, i_m$ は $1, 2, \ldots, m$ の置換)

問 4.1.2

(1). $A \to B \vdash \exists x\, A \to B$ (ただし，B は x を自由変数として含まない)

(2). $\vdash A(t) \to \exists x\, A(x)$ (ただし t は A の x に対して自由)

(3). $\vdash \forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$ (ただし A は x を自由変数として含まない)

答又はヒント:
(1) の証明

1. $A \to B$ 仮定
2. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 問題 2.1.2(6) と定理 4.1.1
3. $\neg B \to \neg A$ 1,2 と MP
4. $\neg B \to \forall x \neg A$ $\neg B$ は x を自由変数として含まない (なぜか?) 3 に B2 を適用
5. $(\neg B \to \forall x \neg A) \to (\neg \forall x \neg A \to \neg\neg B)$ 問題 2.1.2(6) と定理 4.1.1
6. $\neg \forall x \neg A \to \neg\neg B$ 4，5 と MP
7. $\neg\neg B \to B$ 問題 2.1.2(3) と定理 4.1.1
8. $\neg \forall x \neg A \to B$ 6,7 と例 2.1.2 と定理 4.1.1

(3) ヒント
$\forall x(A \to B) \to (A \to B)$
$\forall x(A \to B) \wedge A \to B$
$\forall x(A \to B) \wedge A \to \forall x\, B$
$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$

注意

A は x を自由変数として含まないとしても，一般に $\vdash (A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$ ではない．

以下，簡単のため「定理 4.1.1 より」をいちいち断わらない．

定理 4.1.2
[述語論理の演繹定理]Γ を論理式のある集合，A を閉論理式，B を任意の論理式とする．
　　$\Gamma, A \vdash B$ ならば　$\Gamma \vdash A \to B$
特に $\Gamma = \emptyset$ のとき
　　$A \vdash B$ ならば $\vdash A \to B$

証明
命題論理のときと同じように証明できる．ただし，次の 5) が今回新たに加わる．
5) $C \to D$ から B2 により Q_i として $C \to \forall x\, D$ (但し C は x を自由変数として含まないとする) を得た場合：
帰納法の仮定より，
　$\Gamma \vdash A \to (C \to D)$
B2 を用いて
　$\Gamma \vdash A \to \forall x(C \to D)$ (*1)
　(A は閉論理式ゆえ x を自由変数に持たないので B2 が使える)
C が x を自由変数として持たないので，問題 4.1.2(3) より
　$\Gamma \vdash \forall x(C \to D) \to (C \to \forall x\, D)$ (*2)
(*1)，(*2) と例 2.1.2(1) より
　$\Gamma \vdash A \to (C \to \forall x\, D)$ □

この演繹定理を示すのに，どの公理とどの推論規則を使ったか? A の閉論理式の条件はどこで使ったか?　閉論理式でなくてもよいように緩められるか?
$\Gamma, A \vdash B$ の証明で B2 を使っていなければ $\Gamma \vdash A \to B$ は (A が閉論理式でなくても) 必ず成り立つ．
B2 を使っていても，B2 で $\forall$ を適用する変数を A が自由変数としてもっていなければよい．
A に条件を付けなければ，$\Gamma, A \vdash B$ であっても $\Gamma \vdash A \to B$ は一般には成り立たない．
$A \vdash B$ であるが $\vdash A \to B$ でない例を与えよ．(当然 A は閉論理式でない．さらに，$A \vdash B$ の証明で B2 を使っていて，かつ，B2 で $\forall$ を適用する変数を A が自由変数としてもっている．)
$\vdash A \to B$ でないということはどうやって示すか? (4.2 の健全性定理「$\vdash P \Rightarrow \models P$」を使う．$\models P$ でないということを説明する．)

また，A が閉論理式でないけれども $A \vdash B$ かつ $\vdash A \to B$ である例を与えよ．

問 4.1.3

証明せよ

(1). $\vdash \forall x(A \to A)$

(2). $\vdash \forall x\, A \to \exists x\, A$

(3). $\vdash \forall x(A \to B) \to (\forall x\, A \to \forall x\, B)$

(4). $\vdash \forall x(A \to B) \to (\exists x\, A \to \exists x\, B)$

(5). $\vdash \forall x(A \land B) \leftrightarrow \forall x\, A \land \forall x\, B$

(6). $\vdash \exists x(A \lor B) \leftrightarrow \exists x\, A \lor \exists x\, B$

(7). $\vdash \forall x(A \to B) \leftrightarrow (A \to \forall x\, B)$　A は x を自由変数として含まない

(8). $\vdash \forall x(A \to B) \leftrightarrow (\exists x\, A \to B)$　B は x を自由変数として含まない

(9). $\vdash \exists x(A \to B) \leftrightarrow (A \to \exists x\, B)$　A は x を自由変数として含まない

(10). $\vdash \exists x(A \to B) \leftrightarrow (\forall x\, A \to B)$　B は x を自由変数として含まない

(11). $\vdash \forall x(A \land B) \leftrightarrow A \land \forall x\, B$　A は x を自由変数として含まない

(12). $\vdash \forall x(A \lor B) \leftrightarrow A \lor \forall x\, B$　A は x を自由変数として含まない

(13). $\vdash \exists x(A \land B) \leftrightarrow A \land \exists x\, B$　A は x を自由変数として含まない

(14). $\vdash \exists x(A \lor B) \leftrightarrow A \lor \exists x\, B$　A は x を自由変数として含まない

ヒント:

(3).
$$\forall x(A \to B) \to (A \to B) \tag{*3.1}$$
$$A \to (\forall x(A \to B) \to B) \tag{*3.2}$$
$$\forall x\, A \to A \tag{*3.3}$$
$$\forall x\, A \to (\forall x(A \to B) \to B) \tag{*3.4}$$
$$\forall x\, A \land \forall x(A \to B) \to B \tag{*3.5}$$
$$\forall x\, A \land \forall x(A \to B) \to \forall x\, B \tag{*3.6}$$
$$\forall x(A \to B) \to (\forall x\, A \to \forall x\, B) \tag{*3.7}$$

(4).
$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \tag{*4.1}$$
(3) と同じように
$$(A \to B) \to (\forall x \neg B \to \forall x \neg A) \tag{*4.2}$$
$$\forall x(A \to B) \to (\forall x \neg B \to \forall x \neg A) \tag{*4.3}$$

(5).
$$\forall x(A \land B) \to A \tag{*5.1}$$
$$\forall x(A \land B) \to \forall x\, A \tag{*5.2}$$
$$\forall x(A \land B) \to \forall x\, B \tag{*5.3}$$
$$\forall x(A \land B) \to \forall x\, A \land \forall x\, B \tag{*5.4}$$
$$\forall x\, A \to A \tag{*5.5}$$
$$\forall x\, B \to B \tag{*5.6}$$
$$\forall x\, A \land \forall x\, B \to (A \land B) \tag{*5.7}$$

$\forall x\ A \wedge \forall x\ B \rightarrow \forall x(A \wedge B)$ (*5.8)

(6). $\neg\forall x(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\forall x\neg A \wedge \forall x\neg B)$ (*6.1)

$\exists x\neg(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \exists x\ A \vee \exists x\ B$ (*6.2)

$\exists x(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \leftrightarrow \exists x\ A \vee \exists x\ B$ (*6.3)

$\exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x\ A \vee \exists x\ B$ (*6.4)

(7). $\forall x\ B \rightarrow B$ (*7.1)

$(A \rightarrow \forall x\ B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (*7.2)

$(A \rightarrow \forall x\ B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B)$ (*7.3)

(11). $\forall x(A \wedge B) \rightarrow A \wedge B$ (*11.1)

$A \wedge B \rightarrow B$ (*11.2)

$\forall x(A \wedge B) \rightarrow B$ (*11.3)

$\forall x(A \wedge B) \rightarrow \forall x\ B$ (*11.4)

同様に

$\forall x(A \wedge B) \rightarrow A$ (*11.5)

よって

$\forall x(A \wedge B) \rightarrow A \wedge \forall x\ B$ (*11.6)

$\forall x\ B \rightarrow B$ (*11.7)

$A \wedge \forall x\ B \rightarrow A \wedge B$ (*11.8)

$A \wedge \forall x\ B \rightarrow \forall x(A \wedge B)$ (*11.9)

束縛変数の名前自身は意味がない．例えば，$\forall x(q(x) \rightarrow p(x,z))$ と $\forall y(q(y) \rightarrow p(y,z))$ は z に関する条件としては同じ内容である．公理系でも

$\vdash \forall x(q(x) \rightarrow p(x,z)) \leftrightarrow \forall y(q(y) \rightarrow p(y,z))$

であることが言える．

性質 4.1.1

論理式 A に自由変数 x が含まれているとする．θ を $x \leftarrow y$ なる代入とする．y が A の中で x に対して自由であり，かつ A が y を自由変数として持たないならば，

$\vdash \forall x\ A \leftrightarrow \forall y\ A\theta$

注意

A が y を自由変数として持つとき，例えば $\forall x\ p(x,y)$ のとき，$\forall y\ A\theta$ は $\forall y\ p(y,y)$ である．$\vdash \forall x\ p(x,y) \leftrightarrow \forall y\ p(y,y)$ であるか.

性質 4.1.2

B を論理式 A の部分論理式とする．A 中の B のいくつかを $\vdash B \leftrightarrow C$ であるような C で置き換えて得られる論理式 D に対し，$\vdash A \leftrightarrow D$ である．

$\vdash A \leftrightarrow D$ であれば，$\vdash A \rightarrow D$，したがって，$A \vdash D$ が言える．よって，$\vdash A \leftrightarrow D$ かつ $\vdash A$ であれば，$\vdash D$ も成り立つことになる．例えば，

$\vdash (\neg p(x) \to \neg\neg q(x)) \to (\neg q(x) \to p(x))$　(問題 2.1.2 (5) より)

であり，また，

$\vdash \neg\neg q(x) \leftrightarrow q(x)$　(問題 2.1.2(3)，(4)，問題 2.1.10(4) より)

であるので，

$\vdash (\neg p(x) \to q(x)) \to (\neg q(x) \to p(x))$ も成り立つ．

無矛盾性

論理式の集合 Γ は，$\Gamma \vdash \alpha$ かつ $\Gamma \vdash \neg\alpha$ なる α がないとき，**無矛盾** *(consistent)* であるという．そうでないとき，**矛盾** *(inconsistent)* であるという．

性質 4.1.3

Γ が矛盾であれば，どんな論理式 β も　$\Gamma \vdash \beta$　$(\because \quad \vdash \neg x \to (x \to y) \quad)$

性質 4.1.4

(帰謬法の正当性)Γ を論理式の集合，α を閉論理式とする．

(1)$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ が矛盾であれば，$\Gamma \vdash \alpha$

(2)$\Gamma \cup \{\alpha\}$ が矛盾であれば，$\Gamma \vdash \neg\alpha$

略証

(1)$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ が矛盾ゆえ，$\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$ かつ $\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta$ なる β が存在．

α が閉論理式ゆえ $\neg\alpha$ も閉論理式．ゆえに演繹定理により

$\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta, \Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$

一方，公理 A3 より

$\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$

MP を 2 回使うと $\Gamma \vdash \alpha$.

(2) は略　□

性質 4.1.4 は α が閉論理式でなければ一般には成り立たない．$\Gamma \vdash \alpha$ の証明に演繹定理を使っているので，閉論理式という条件をつけているが，演繹定理のところと同じように，閉論理式という条件は緩めることができる．

$\{B, \neg A\}$ が矛盾であるが $B \vdash A$ でない例 (A は閉論理式でない) を与えよ．$B \vdash A$ でないことをどうやって示すか?(4.2 の健全性定理を利用する．)

また，A が閉論理式でなく，$\{B, \neg A\}$ が矛盾，かつ $B \vdash A$ である例を与えよ．

問 4.1.4

公理 A1～A4 の他に

A5　$\forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x\, Q)$

ただし P は自由変数 x を含まないを追加し，推論規則 B2 を B2' Q から $\forall x\, Q$ を得る (GEN (generalization)，一般化とも呼ばれる) で置き換えた公理系 Q'(A1～A5，B1，B2') は公理系 Q と等価であることを示せ．

推論規則と公理を混同してはならない．推論規則 B2' は「公理：$Q \to \forall x\, Q$」があるというのとは異なる．

「**自然演繹** *NK*」と呼ばれる $\to$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ の入った論理 (推論規則を多く採用して，我々が通常行う推論に近い形をしている) もこのテキストの公理系 Q と等価である．我々は，このテキストでは，いわゆるヒルベルト流の (推論規則の少ない) より簡単な公理系を採用している．

自由変数をもった論理式も対象にしているから，いちいち細かなことまで注意して議論しないといけないんだろ．意味は自由変数は $\forall$ で束縛したのと一緒だし，いっそ，論理式は閉論理式のみにしたら，すっきりして良いのではないか，と思うかもしれないが，はたしてそうか．

問 4.1.5

$\Gamma \vdash \psi(d)$ ならば $\Gamma \vdash \forall x\, \psi(x)$ である．
ただし，d は対象定数で，
(1)d は Γ に含まれない，
(2)x は $\psi(d)$ の d に対して自由であるとする．
(2) では，d を変数とみなして,「$\psi(d)$ の d に対して自由」という言い方をしている．

問題 4.1.5 の内容は，基本的には仮定 Γ に含まれないような一つの定数 d に対して $\psi(d)$ が成り立つことが示せるなら，ψ は d のみならず全ての x に対して成り立つ，ということを言っている．

実際，我々も日常の証明でこの種の議論を使っている．例えば次のように議論することがある．

「d を集合 S の元とする．(任意の元について $\cdots$ が成り立つという) 仮定より，d についても $\cdots$ が成り立つ．$\cdots\cdots\cdots$ よって，d について $\psi(d)$ が成り立つ．d は集合 S の任意の元であったから，集合 S の任意の元 x について $\psi(x)$ が成り立つと結論される.」

問題 4.1.5 の内容は後述の定理 4.2.4 の証明でも使われる．

ヒント:
$\Gamma \vdash \psi(d)$ の証明中の d を新しい (仮定や証明中のどの式にも現れていない) 変数 z で置き換えると，(1) より，それは $\Gamma \vdash \psi(z)$ の証明になる．分りますか?　d は A4 によって証明中の式に新たに入ってきたものです．例 4.1.2 より $\psi(z) \vdash \forall z\, \psi(z)$ ゆえ，$\Gamma \vdash \forall z\, \psi(z)$ が言える．ここで，A4 より $\forall z\, \psi(z) \to \psi(x)$．条件 (2) および z が新しい変数である ($\psi(d)$ に z は含まれていない) ということから，x は $\psi(z)$ の z に対して自由であり，A4 を使えることが分る．MP を使うと $\Gamma \vdash \psi(x)$．例 4.1.2(2) より，$\Gamma \vdash \forall x \psi(x)$．

A4 と MP により $\forall y \exists x\ p(x, y) \vdash \exists x\ p(x, d)$ である．しかし，問題 4.1.5 より $\forall y \exists x\ p(x, y) \vdash \forall x \exists x p(x, x)$ である，というのは間違いである．条件 (2) を満たしていない．右辺からは A4 と MP で $\exists x\, p(x, x)$ が得られるが，$\forall y \exists x\, p(x, y) \vdash \exists x\, p(x, x)$ は成り立たない．条件 (1)，(2) を満たしていても，$\Gamma \vdash \psi(d)$ の証明中の d を (新しくない) 変数 x で置き換えたものは，そのままでは，一般に $\Gamma \vdash \psi(x)$ の証明にはならない．例えば，$\forall y \forall x(p(x) \to q(y)), p(a) \vdash q(d)$ の証明で，公理 A4：$\forall y \forall x(p(x) \to q(y)) \to \forall x(p(x) \to q(d))$ を使っているとき，d を x で置き換えたものは公理 A4 ではない．したがって，上述のヒントのように一旦新しい変数を導入して議論する必要がある．

問 4.1.6

次のことを論理式で表し，公理系 Q で成り立つことを示せ．

(1). 私が真剣にやれば情論にとおる．私は真剣にやる．だから，私は情論にとおる.「私は真剣にやる」を p で,「私は情論にとおる」を q であらわすと，全体は
$(p \to q) \wedge p \to q$
この式が Q の定理であることの証明は
1. $(p \to q) \wedge p$　　仮定

2. $p \to q$ 問題 2.1.10(5) より
3. p 問題 2.1.10(6) より
4. q 2，3 と MP

ゆえに $(p \to q) \wedge p \vdash q$
演繹定理により $\vdash (p \to q) \wedge p \to q$.
仮定と結論に分けて書いて
$p \to q, p \vdash q$
を示せという問題と考えてもよい．この (1) は命題論理で議論できた．
次の (2) 以降は述語論理で議論しなくてはいけない．

(2). だれでも真剣にやれば情論にとおる．私は真剣にやる．だから，私は情論にとおる．
「u は真剣にやる」を $p(u)$ で，「u は情論にとおる」を $q(u)$ で，「私」を I で表すと，題意は $\forall x(p(x) \to q(x)) \wedge p(I) \to q(I)$.

(3). だれでも，情論の勉強をすれば試験にいい点をとるのであったら，情論にとおる．情太は情論の勉強はしない．よって，情太は情論にとおる．
「u は情論の勉強をする」を勉強 (u) で,「u は試験にいい点をとる」をいい点 (u) で,「u は情論にとおる」を合格 (u) で,「情太」を J で表せ．

(4). 情太は実験が好きだ．情太は情論も好きだ．実験が好きな者はみな情論は好きでない．ゆえに情太は情論にとおる．

コメント:
4.2 で説明するように，公理系 Q で証明できる論理式は恒真である，すなわちどんな解釈でも成り立つ絶対に正しい式である．仮定があれば，それらの仮定が成り立つようなどんな解釈でも結論は成り立つ．よって，上述の文章はすべて論理的に正しい (上述の文章における「だから」,「よって」,「ゆえに」などの推論は正しい).

数学でいう半群とか群などはその世界を規定する固有の公理をもつ．それらの固有の公理は**特殊公理** (または**数学的公理**) と呼ばれる．それに対し，前出の公理 A1∼A4 は**論理的公理**と呼ばれる (等号を表す 2 引数の述語記号 $=$ を導入した体系では，A1∼A4 に加えて $=$ に関する公理も論理的公理と呼んでいる).

このテキストでは特殊公理は閉論理式で書くとする．記号集合 $L = (\mathsf{C}, \mathsf{F}, \mathsf{P})$ と特殊公理である閉論理式のある集合 G に対し，その形式的体系 $T = \langle L, G \rangle$ を**第一階理論** *(first-order theory)* という．

$G \vdash A$ である L 上の論理式 A を T の定理であるといい，T で証明可能などという．G のモデル (G の全ての論理式を真にする解釈) を T のモデルという．G が無矛盾であるとき，T が無矛盾であるという．

例 4.1.3
半群 (準群ともいう) 集合上に二項演算 $*$ が定義されていて，$*$ は結合律を満たす．L は 3 引数の述語記号 q をもつとする．$u * v$ が w に等しいことを $q(u, v, w)$ に対応させる．公理は
(1). $\forall x \forall y \exists z\, q(x, y, z)$
(2). $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \to \{q(u, z, w) \leftrightarrow q(x, v, w)\}]$
(2) は次の二つに分けてもよい．
(2') $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \wedge q(u, z, w) \to q(x, v, w)]$
(2")$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, z, w)]$
(1) は $*$ で閉じていること，(2) は $(x * y) * z$ と $x * (y * z)$ が等しいことを表している．

このｐ $T = \langle L, G \rangle$ のモデルとして半群がある．

半群において，$\forall x\ x * e = x$ を満たす元 e を右単位元といい，$\forall x\ e' * x = x$ を満たす元 e' を左単位元という．右単位元があっても左単位元があるとは限らない．逆も同様．右単位元であり，かつ左単位元である元 e，すなわち
$\forall x\ x * e = x \wedge \forall x\ e * x = x$ ($\forall x[x * e = x \wedge e * x = x]$ と同じ)
を満たす元 e を単位元という．

例 4.1.4

モノイド (monoid)(単位元をもつ半群)

(1). $\forall x \forall y \exists z\ q(x, y, z)$

(2). $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w[q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \to \{q(u, z, w) \leftrightarrow q(x, v, w)\}]$

(3). $\exists u \forall x[q(x, u, x) \wedge q(u, x, x)]$
対象定数 (定数記号)e を単位元とするなら，(3) は

(3’). $\forall x[q(x, e, x) \wedge q(e, x, x)]$

例 4.1.5

群 ($*$ の逆元が存在するモノイド)
単位元を e とする．

(1). $\forall x \forall y \exists z\ q(x, y, z)$

(2). $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w[q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \to \{q(u, z, w) \leftrightarrow q(x, v, w)\}]$

(3’). $\forall x[q(x, e, x) \wedge q(e, x, x)]$

(4). $\forall x \exists w[q(x, w, e) \wedge q(w, x, e)]$

4.2　妥当性と完全性

$T = \langle L, G\rangle$ を第一階理論とする．P を T の論理式とする．G 中の全ての公理を真にする任意の解釈 (T(あるいは G) の任意のモデル) で P も真になるとき，$G \models P$ と書く．次の健全性定理と完全性定理は第一階述語論理で最も重要な結果である．

定理 4.2.1 (第一階理論の健全性定理 (又は妥当性定理))
$T = \langle L, G\rangle$ を第一階理論，P を T の論理式とすると，
　$G \vdash P \Rightarrow G \models P$

定理 4.2.5 (第一階理論の完全性定理 Gödel comoletenes theorem)
$T = \langle L, G\rangle$ を第一階理論，P を T の論理式とすると，
　$G \models P \Rightarrow G \vdash P$

特殊公理がない (G が空) のときは，健全性定理と完全性定理はそれぞれ
　P は公理系 Q の定理である ($\vdash P$) $\Rightarrow$ P は恒真である ($\models P$)
　P は恒真である ($\models P$)　 $\Rightarrow$ P は公理系 Q の定理である ($\vdash P$)
であることを言っている．

証明 (定理 4.2.1 健全性定理の略証)
任意の解釈 $\mathscr{I}$ について，推論規則 B1，B2 はともに $\models_{\mathscr{I}}$ を保存する．すなわち，$\models_{\mathscr{I}} Q$ かつ $\models_{\mathscr{I}} Q \to R$ なら $\models_{\mathscr{I}} R$ であり[6]，また，Q が自由変数 x を含まなければ，$\models_{\mathscr{I}} Q \to R$ なら $\models_{\mathscr{I}} Q \to \forall x\, R$ である．また，公理のインスタンスは恒真である．よって，$\mathscr{I}$ を G のモデルとすると，$G \vdash P$ の証明中のどの論理式 P_i についても $\models_{\mathscr{I}} P_i$ である．　□

系 4.2.1
第一階理論 $T = \langle L, G\rangle$ のモデルがあれば，T(あるいは G) は無矛盾

略証
$T = \langle L, G\rangle$ が矛盾であるとすると，ある β があって $G \vdash \beta$ かつ $G \vdash \neg\beta$ である．[健全性定理] より，$G \models \beta$ かつ $G \models \neg\beta$ である．M を T のモデルとすると，$\models_M \beta$ かつ $\models_M \neg\beta$ が成り立つことになるが，それは起りえない．なぜなら，g を自由変数へのある値の代入とすると，$[\![\beta]\!]^{M,g}$ と $[\![\neg\beta]\!]^{M,g} (= \neg[\![\beta]\!]^{M,g})$ が共に真であるということはありえないから．　□

性質 4.2.1
G を L の論理式の集合とする．次の 3 つは同値である：

(1). G は矛盾である (L のある論理式 β があって $G \vdash \beta$ かつ $G \vdash \neg\beta$).

(2). L の任意の論理式 α に対し $G \vdash \alpha$.

(3). L のある論理式 β があって $G \vdash \beta \wedge \neg\beta$.

---

[6]($\mathscr{I}$ のもとでの) すべての代入 g に対し $[\![Q]\!]^{\mathscr{I},g} = T$ であり，かつ，すべての代入 g に対し $[\![Q \to R]\!]^{\mathscr{I},g} = T$ であるなら，すべての代入 g に対し $[\![R]\!]^{\mathscr{I},g} = T$ であるか?

問 4.2.1

性質 4.2.1 が成り立つことを示せ．

さて，これから，[完全性定理] を証明しよう．[完全性定理] の証明のために，無矛盾な理論はモデルをもつということを示そう．そうすると，問題 2.2.4 と全く同じように

$G \models P \Rightarrow G \vdash P$

が言える (後述の定理 4.2.5).

$G' \supseteq G$ なら $\langle L, G' \rangle$ は $\langle L, G \rangle$ の拡張であるという．L の任意の閉論理式 α に対し $G \vdash \alpha$ または $G \vdash \neg\alpha$ のとき $\langle L, G \rangle$ は完全であるという (性質 2.2.2 の証明中の性質 (2) に相当).

性質 2.2.2 の証明と同じテクニックで，無矛盾な理論を無矛盾かつ完全な理論に拡張できる．

定理 4.2.3 (Lindenbaum の補題)

任意の無矛盾な理論に対して，その拡張であって，無矛盾かつ完全な理論が存在する．

証明

$S = \langle L, G_0 \rangle$ を無矛盾な理論とする．L の閉論理式全体は可算である (理由は後述)．そのすべての閉論理式を α_1，α_2，$\cdots$ とする．

$T_0 = S$ とし，$T_i = \langle L, G_i \rangle$，$i = 0, 1, 2, \ldots$ を次のように定義する．

$$G_{i+1} \triangleq \begin{cases} G_i & G_i \vdash \neg\alpha_{i+1} \text{のとき} \\ G_i \cup \{\alpha_{i+1}\} & G_i \nvdash \neg\alpha_{i+1} \text{のとき} \end{cases}$$

$T_i = \langle L, G \rangle$，$G = G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \cdots$ を考える．

(1). T はすべての T_i の拡張である．

(2). T は無矛盾である．

略証 ((2) の略証 (性質 2.2.2 のときと同じ方法))

- T_0 は無矛盾
- T_i を無矛盾と仮定
  $T_{i+1} = T_i$ のとき T_{i+1} は無矛盾
  $T_{i+1} \neq T_i$ のとき $G_i \nvdash \neg\alpha_{i+1}, G_{i+1} = G_i \cup \{\alpha_{i+1}\}$
  $\therefore \quad T_{i+1}$ は無矛盾 (理由は分かる?)

よってすべての T_i は無矛盾．

T が矛盾と仮定すると，$G \vdash \beta$ かつ $G \vdash \neg\beta$ なる β が存在．よって，G の有限部分集合 G'，G'' があって $G' \vdash \beta$，$G'' \vdash \neg\beta$ (証明の論理式列は有限であるので，その証明に使われた仮定の式も有限個である).

ある n があって，$G_n \supseteq G' \cup G''$．$G_n \vdash \beta$ かつ $G_n \vdash \neg\beta$ は T_n の無矛盾性に反する．

(2) の証明終り □

(3). T は完全である．

略証 ((3) の略証 (性質 2.2.2 のときと同じ方法))
そこでは命題論理式であったが，ここでは閉論理式を考える．
L の任意の閉論理式 β は，ある i があって $\beta = \alpha_{i+1}$

- $G_i \vdash \neg\alpha_{i+1}$ のとき $G \vdash \neg\alpha_{i+1}$
- そうでないとき $\alpha_{i+1} \in G_{i+1}$ ゆえ $G_{i+1} \vdash \alpha_{i+1}$ すなわち $G \vdash \alpha_{i+1}$

(3) の証明終り □

(定理 4.2.3 の証明終り)□

命題論理のときは，性質 2.2.2 で述べたように，無矛盾で完全な拡張 G を作って，それに対し，解釈 M を，各命題記号 p に対し，
$G \vdash p \Leftrightarrow p = \mathtt{tt}$
と定めれば，M は (もとの T の) モデルになった．述語論理のときは $\forall$ をもつ論理式に対する対策が必要である．

定理 4.2.4
無矛盾な理論は可算モデル (その D が可算集合であるようなモデル) をもつ．

証明
$T = \langle L, G_0 \rangle$ を無矛盾とする．

(1). L に可算無限個の新しい対象定数記号 b_1，b_2，$\cdots$ を追加し，L' とする．

$T_0 = \langle L', G_0 \rangle$ は無矛盾である．

略証 ((1) の略証)
T_0 が矛盾とすれば $G_0 \vdash \alpha$ かつ $G_0 \vdash \neg\alpha$ なる L' の論理式 α がある．それらの証明中の $\{b_1, b_2, \ldots\}$ に属する記号 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ に対し，それぞれ，新しい変数記号 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を用いて書き直せば，それらは $G_0 \vdash \alpha\theta$，$G_0 \vdash \neg\alpha\theta$ ($c_1, c_2, \ldots, c_m$ をそれぞれ $y_1, y_2, \ldots, y_m$ で置き換える代入を θ で表す) を示す (もとの T における) 証明になっている．$c_1, c_2, \ldots, c_m$ は仮定 G_0 中の式には含まれていないもので，公理 A4 により新たに導入されたものである．定数記号 c_i の代わりに新しい変数 y_i を使うなら公理 A4 は適用できる．$\alpha\theta$ や $\neg\alpha\theta$ は T の論理式である．これは T が矛盾であることを表す．

((1) の証明終り)□

(2). L' の論理式全体中で，先頭が $\forall$ であるような閉論理式全体 (これは可算個) を列挙し，$\forall z_1\, \psi_1(z_1)$，$\forall z_2\, \psi_2(z_2)$，$\ldots$ で表すことにする．ψ_k は高々1 つの自由変数を持つ．ψ_k が自由変数をもつなら，それを z_k で表している．z_k は対象変数そのものではない．仮に $\forall z1\, \psi_1(z_1)$ が $\forall y\, p(y)$ を表すなら z_1 が表す変数は y である．

$L' - L = \{b_1, b_2, \ldots\}$ の中から次のような $d_1, d_2, \ldots$ を順次選ぶ ($b_1, b_2, \ldots$ はいくらでもあるからそれは可能である)：

d_k は，$\psi_1(z_1), \ldots, \psi_k(z_k)$ に含まれないもので，$d_1, \ldots, d_{k-1}$ と異なるもの

ここで

$\beta_k \triangleq \neg\forall z_k \psi_k(z_k) \to \neg\psi_k(d_k)$ と定義し

$G_k = G_{k-1} \cup \{\beta_k\}$

$T_k = \langle L', G_k \rangle$

$T_\infty = \langle L', G_\infty \rangle, G_\infty = G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \cdots$

とすると，T_∞ は無矛盾である．

注 1：T_∞ は T の拡張であることは明らかである．

注 2：$\{b_1, b_2, \ldots\}$ の決め方および各 d_k の選び方と G_k の作り方より，d_k は G_{k-1} 中の式には含まれていない．

注 3：d_k は $\psi_k(z_k)$ には含まれず，かつ $\psi_k(d_k)$ は $\psi_k(d_k) = \psi_k(z_k)^{z_k \leftarrow d_k}$，すなわち $\psi_k(z_k)$ 中の変数 z_k の自由な出現を d_k に置き換えたものであるので，z_k は $\psi_k(d_k)$ の d_k に対して自由である．

コメント:

(a) ψ_k に自由変数がないとき，β_k 中の $\psi_k(d_k)$ は ψ_k そのものである．そのとき β_k は $\neg\forall z_k \psi_k \to \neg\psi_k$ であり，一般に $\vdash \neg\forall z_k \psi_k \to \neg\psi_k$ である (分る?　例 2.1.1，推論規則 B2，問題 2.1.2(6)，MP を利用) ので，β_k を加える必要はないが，議論を統一して行うため上述のようにしておく．

(b) 問題 2.1.2(5) と MP より β_k から $\psi_k(d_k) \to \forall z_k \psi_k(z_k)$ が得られる．今行っていることは，任意の閉論理式 $\forall z_k \psi_k(z_k)$ に対して，(ψ_k が自由変数をもつなら)$\psi_k(d_k) \to \forall z_k \psi_k(z_k)$ を成り立たせる定数 d_k があるような，T の拡張で，かつ無矛盾な理論 T_∞ を作ろうしている．$\forall z_k \psi_k(z_k)$ ごとに異なる新しい定数を用いればそれが可能となる．

略証 (T_∞ が無矛盾であることの略証)

まず，全ての k に対し，T_k は無矛盾であることを帰納法により示す．

(a) T_0 は無矛盾

(b) T_{k-1} が無矛盾，T_k が矛盾と仮定する．$G_k = G_{k-1} \cup \{\beta_k\}$ が矛盾なら，

$G_{k-1} \vdash \neg\beta_k$，すなわち，

$G_{k-1} \vdash \neg(\neg\forall z_k\ \psi_k(z_k) \to \neg\psi_k(d_k))$

よって

$G_{k-1} \vdash \neg\forall z_k \psi_k(z_k)$ (*1)

かつ

$G_{k-1} \vdash \psi_k(d_k)$ (*2) (分かる?)

(*2) から，問題 4.1.5 により

$G_{k-1} \vdash \forall z_k \psi_k(z_k)$ (*3)

が示せる (d_k の選び方から d_k は G_{k-1} に現れてなく (前述の注 2 参照)，また，z_k は

$\psi_k(d_k)$ の d_k に対して自由である (前述の注 3 参照)). 特に，ψ_k に自由変数がないときも，当然，$G_{k-1} \vdash \psi_k$(*2) なら $G_{k-1} \vdash \forall z_k \psi_k$(*3) である.
(*1) と (*3) は T_{k-1} が矛盾していることを表す.

よって全ての k に対し，T_k は無矛盾.

T_∞ の無矛盾性は Lindenbaum の補題と同様に示せる.

(T_∞ が無矛盾であることの証明終り)□

(3). Lindenbaum の補題より，T_∞ の，無矛盾で完全な拡張 $T' = \langle L', G' \rangle$ が存在する.

(4). L' に対する解釈 M を次のように定めると，次の (*) がなりたつ.

D：L' 上の変数を含まない項そのものの全体 (可算集合である)
$f(t_1, \ldots, t_n)$ の値：記号列 $f(t_1, \ldots, t_n)$ そのもの
$p(t_1, \ldots, t_n)$ の真偽:

$$p(t_1, \ldots, t_n) \triangleq \begin{cases} \mathtt{tt} & G' \vdash p(t_1, \ldots, t_n) \\ \mathtt{ff} & G' \nvdash p(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

(この解釈は標準解釈と呼ばれることがある)

(*)L' の任意の閉論理式 α について $\models_M \alpha$ (α が M において真) $\Leftrightarrow$ $G' \vdash \alpha$

(5). この (*) が言えればもちろん，M は T' の (可算) モデルである，すなわち，任意の $g \in G'$ に対し，$\models_M g$ である (g はこの M で真になる). (理由は分かる?)

T' は T_∞ 拡張，したがって，T_0 の拡張，したがって T の拡張であるから，M は T の (可算) モデルである.

これで定理 4.2.4 の証明が終ったことになる. □

ここでは閉論理式を対象にしているので，$\models_M \alpha$ であることを「α が M において真」とか，$\models_M \alpha$ でないことを「α が M において偽」などという言い方をしている.

略証 ((*) の略証)
論理式 α 中の $\to$，$\neg$，$\forall$ の個数についての (強) 帰納法を用いる. (以下の (a)，(b1)，(b2) については，性質 2.2.2 の証明中の議論と同じである.)

(a) 個数 0 のとき成立 (分かる?)

(b1) α=$\neg\beta$ で，β に対して (*) を仮定

(b1-1) α が M において真なら，β は M において真でなく，帰納法の仮定より $G' \nvdash \beta$.
T' は完全であり β は閉論理式ゆえ $G' \vdash \neg\beta$ すなわち $G' \vdash \alpha$.

(b1-2) α が M において真でないなら，β は M において真.
したがって $G' \vdash \beta$ (分かる?)
よって $G' \nvdash \neg\beta$ (分かる?),
すなわち $G' \nvdash \alpha$.

(b2) $\alpha = \beta \to \gamma$ で，β，γ に対して (*) を仮定

(b2-1) α が M において真でないなら，M において β，γ の真偽はそれぞれ $\boxed{\quad\quad}$，$\boxed{\quad\quad}$ である．よって

$G' \vdash \beta$ かつ $G' \nvdash \gamma$ (分かる?).

$G' \nvdash \gamma$ より $G' \vdash \neg\gamma$ (分かる?).

これらから，　$G' \vdash \neg(\beta \to \gamma)$ (分かる?),

すなわち　$G' \vdash \neg\alpha$.

よって $G' \nvdash \alpha$ (分かる?).

(b2-2) $G' \nvdash \alpha$ とすると，$G' \vdash \neg\alpha$ (分かる?),

すなわち　$G' \vdash \neg(\beta \to \gamma)$.

よって

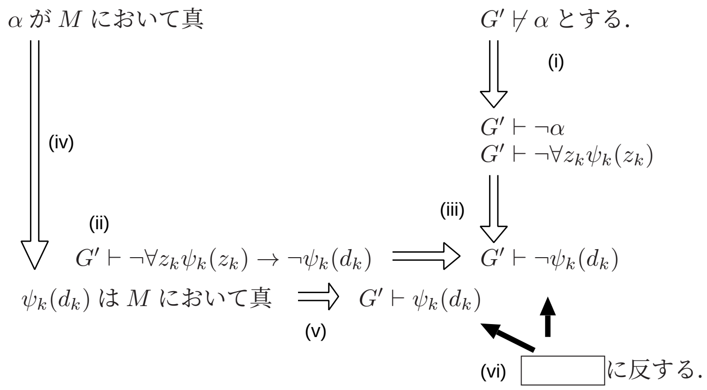
$G' \vdash \beta$ かつ $G' \vdash \neg\gamma$ (分かる?)

を得る．　$G' \vdash \neg\gamma$ より $G' \nvdash \gamma$ (分かる?).

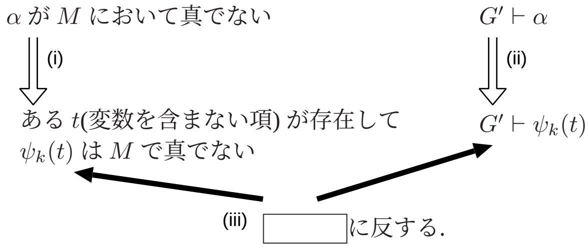
したがって，帰納法の仮定より，M における β，γ の真偽はそれぞれ $\boxed{\quad\quad}$，$\boxed{\quad\quad}$ となり，M における $\alpha = \beta \to \gamma$ の真偽は $\boxed{\quad\quad}$ となる．

(b3) $\alpha = \forall z_k \psi_k(z_k)$ の場合 (L' における $\forall$ が先頭の任意の閉論理式は，ある k があって，これで表されることに注意)

(b3-1) α が M において真であり，かつ，$G' \nvdash \alpha$ とする．



(b3-2) $G' \vdash \alpha$ とし，かつ，α が M において真でないとする．



((*) の証明終り)□

コメント:

(1). 上述の (b3-1)$\alpha = \forall z_k \psi_k(z_k)$ の場合の「α が M において真であり，かつ $G' \nvdash \alpha$ とする」のときの証明では，ψ_k に自由変数がある，ないに拘わらず，統一した議論をした．もし，ψ_k に自由変数がないとき，定理 4.2.4 の証明中のステップ (2) で $\beta_k = \neg\forall z_k \psi_k \to \neg\psi_k$ を加えておかなかっても，一般に $\vdash \neg\forall z_k \psi_k \to \neg\psi_k$ であるので，$G' \vdash \neg\forall z_k \psi_k \to \neg\psi_k$ が言える．

(2). 上述の帰納法による証明で，$\to$ や $\neg$ に対しては，T' が無矛盾かつ完全なら (*) が言える．閉論理式を対象にしているので，命題論理における性質 2.2.2 のときと同じ議論である．

(3). T' に対し，上記の標準解釈 M で，($\to$, $\neg$ 以外に $\forall$ も含めて)(*) が言えるための条件は，(a)，(b1)，(b2)，(b3) の証明から分かるように，

- T' は無矛盾，かつ完全，かつ
- 任意の閉論理式 $\forall x\, \psi(x)$ ($\psi(x)$ は自由変数 x をもつとする) に対して，$G' \vdash \psi(d) \to \forall x\, \psi(x)$(同じことであるが，$G' \vdash \neg\forall x\, \psi(x) \to \neg\psi(d)$) なる定数 $d \in L'$($\forall x\, \psi(x)$ に依存して異なってよい) があること．

最後の条件は，(b3-1) 中の (ii) で使った．もちろん ψ が自由変数 x をもたないような閉論理式 $\forall x\psi$ に対してはそのような d の存在は要求されない．そのときは前述のコメントのように $\vdash \neg\forall x\psi \to \neg\psi$ は成り立ち，したがって，$G' \vdash \neg\forall x\, \psi \to \neg\psi$ であるので，(b3-1) 中の (ii) は自動的に成り立つが，上述の説明では，議論を統一するため $\neg\forall x\, \psi \to \neg\psi \in G'$ と定め，自由変数があるときと同じような形で (b3-1) 中の (ii) の成立を主張した．

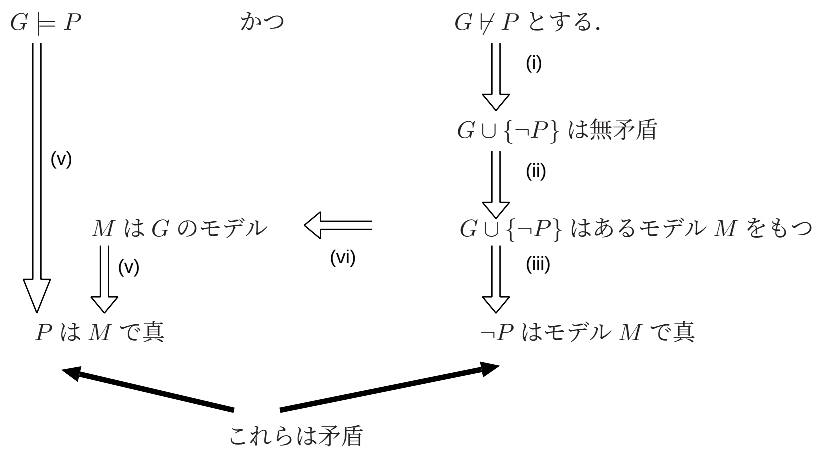
(4). M が T のモデルであるためには，$G' \supseteq G_0$ かつ (*) が成り立っていればよい．

定理 4.2.5

$G \models P \Rightarrow G \vdash P$

略証

もし P が閉論理式でなければ，その閉包 $\forall x \cdots P$ (これは閉論理式) に対し，$G \models P \Rightarrow G \models \forall x \cdots P$, $G \vdash \forall x \cdots P \Rightarrow G \vdash P$ であるので，$G \models \forall x \cdots P \Rightarrow G \vdash \forall x \cdots P$ を示せばよい．したがって，以下では，改めて P を閉論理式として，$G \models P \Rightarrow G \vdash P$ を示す (これ以降は問題 2.2.4 と同じ議論である)．



□

以上，定理 4.2.3，定理 4.2.4，定理 4.2.5 の議論の見事さに感動しません?

コメントで述べたような G' を作ったらよいということに気がつくこと，そのような G' の作り方を与えたことなど，お見事の一語につきましょう．人間の英知はすばらしい．

問 4.2.2

定理 4.2.3，定理 4.2.4，定理 4.2.5 の証明中で，成り立つ理由がそれほど自明でないのに，その理由を書いていないところを見つけ，それが成り立つ理由を説明せよ．

定理 4.2.4 を使っていくつかのことが導かれる．すでに示した重要な定理 4.2.5「完全性定理」もそのひとつであった．以下のような結果も得られる．

系 4.2.2 (Löwenheim-Skolem の定理)
モデルをもつ理論は，可算モデルをもつ．

略証
$T = \langle L, G\rangle$ がモデルをもつとする (一般に D が可算集合でないモデル)．系 4.2.1 より，T は無矛盾である．すると，定理 4.2.4 より，T はある可算モデル (D が可算集合であるようなモデル) をもつ．
□

これは，述語論理では，本質的に，可算集合でない (非加算) 集合上でしか成り立たないような性質は記述できないということを表している．

定理 4.2.6 (コンパクト性定理)
Γ の任意の有限部分集合に対しそれぞれモデルがあるならば，Γ はモデルをもつ．

(コメント：Γ は一般に無限個の論理式の集合．)

略証
Γ がモデルをもたないと仮定しよう．そうすると，定理 4.2.4 より，Γ は矛盾である．

よって，$\Gamma \vdash \alpha$ かつ $\Gamma \vdash \neg\alpha$ であるような α がある．したがって，Γ の有限部分集合 Γ'，Γ'' があって $\Gamma' \vdash \alpha$，$\Gamma'' \vdash \neg\alpha$ である (証明の論理式列は有限であるので，その証明に使われた仮定の式も有限個である)．

$\Gamma' \cup \Gamma'' \vdash \alpha$ かつ $\Gamma' \cup \Gamma'' \vdash \neg\alpha$ であるので，Γ の有限部分集合 $\Gamma' \cup \Gamma''$ が矛盾である．系 4.2.1 より (あるいは，その証明と同じようにして) $\Gamma' \cup \Gamma''$ はモデルをもたない．これは，Γ の任意の有限部分集合がそれぞれモデルをもつということに反する． □

コメント:

(1). この定理の逆「Γ がモデルをもつならば，Γ の任意の有限部分集合もモデルをもつ」は明らかになりたつ．

(2). Γ を無限個の論理式の集合とすると，「コンパクト性定理」は，無限個の論理式を同時に充足する (真にする) ような解釈が存在しない (Γ がモデルをもたない) ならば，ある有限個の論理式をうまく選んで，それらの論理式だけで，それらのすべてを同時に充足する (真にする) 解釈は存在しない (どんな解釈もそれらのすべてを同時に充足する (真にする) ことはない) ようにできる (Γ のある部分集合がモデルをもたない)，ということを言っている．

もちろん特別な場合として命題論理に対してもこのことはなりたつ．Γ の式を表すのにいくらでも多くの命題記号が使われていてもよい．任意の有限部分集合に対しそれぞれある

性質がなりたっても，その性質が全体の無限集合に対してもなりたつというようなことは普通言えない．したがって，上述のことは述語論理 (命題論理を含む) に独特なことである．

性質 4.2.2
論理式全体は可算集合である[7]．

変数記号，定数記号，関数記号，述語記号を
$x_1, x_2, \ldots$
$c_1, c_2, \ldots$
$f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots$
$p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots$
とする ($n_1, n_2, \ldots, m_1, m_2, \ldots$ はそれぞれ引数の個数を表す)．各記号に次のように整数を対応づける (対応を g とする)：

	対応 g	
(	$\to$	3
)		5
,		7
$\neg$		9
$\to$		11
$\forall$		13
x_k		$7+8k$
c_k		$9+8k$
f_k^n		$11+8\cdot 2^n\cdot 3^k$
p_k^n		$13+8\cdot 2^n\cdot 3^k$

論理式 $s_1 s_2 \cdots s_m$ に対し整数
$2^{g(s_1)}3^{g(s_2)}\cdots\rho_m^{g(s_m)}$
ρ_i は i 番目の素数を対応付ける．例えば，
$p_4^2(x_1, c_2) \quad \to 2^{13+8\cdot 2^2\cdot 3^4}3^3 5^{7+8}7^7 11^{9+8\cdot 2}13^5$
(右辺の整数を，その論理式の Gödel number(ゲーデル数) という．)

各論理式に対し，異なる整数が一意に対応する．(証明は略すが，素数の性質から分るであろう．)

論理式からそのゲーデル数を求めるアルゴリズムがあり，また，整数から (それが論理式に対応するゲーデル数かどうかを判定し，そうなら) それに対応する論理式を求めるアルゴリズムもある．

同じ元であることを表す 2 引数の特別な述語記号 $=$ をもつ公理系を考える．$=(u,v)$ を $u=v$ と書く．

公理系 Q に，次の公理 E1∼E3

E1　$\forall x\, x=x$　(反射律)

E2　$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y_1\cdots\forall y_n \quad [x_1=y_1\to(x_2=y_2\to\cdots(x_n=y_n\to f(x_1,\cdots,x_n)=f(y_1,\cdots,y_n))\cdots)]$

E3　$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y_1\cdots\forall y_n[x_1=y_1\to(x_2=y_2\to\cdots(x_n=y_n\to p(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow p(y_1,\ldots,y_n)\cdots)]$

[7]ただし，論理式の解釈の可能性の全体は非可算である．

を加えた公理系を $Q^=$ とする．f, p はそれぞれ F, P に属する任意の (n 引数) 関数記号，述語記号である．まとめてそれぞれ一つの公理として書いてある．

公理系 $Q^=$ の公理を用いて行う計算を**第一階述語計算** *(first-order predicate calculus)* ともいう．$Q^=$ の公理のほかに特殊公理をもつ体系を一般に，相等関係をもつ第一階理論と呼ぶ．

性質 4.2.3

$Q^=$ において次が成立する．

(1). $\vdash \forall x \forall y[x = y \to y = x]$ (対称律)

(2). $\vdash \forall x \forall y \forall z[x = y \to (y = z \to x = z)]$ (推移律)

(3). $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \cdots (x_n = y_n \to t = t\theta) \cdots)]$
　　但し　代入 θ は $[x_1 \leftarrow y_1, x_2 \leftarrow y_2, \cdots, x_n \leftarrow y_n]$

(4). $\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \cdots (x_n = y_n \to (R \leftrightarrow R\theta)) \cdots)]$
　　但し　代入 θ は $[x_1 \leftarrow y_1, x_2 \leftarrow y_2, \cdots, x_n \leftarrow y_n]$

略証

(1). E3 より $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2))]$
これと A4 と MP を用いて
$\forall x_2 \forall y_1 \forall y_2[x = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (x = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2))]$
これを繰り返して
$x = y \to (x = x \to (x = x \leftrightarrow y = x))$
を得る．
$x = y$ を仮定する．MP を用いて
$x = x \to (x = x \leftrightarrow y = x)$
E1，A4，MP より $x = x$
MP を使って $x = x \leftrightarrow y = x$，すなわち $(x = x \to y = x) \wedge (y = x \to x = x)$
問題 2.1.10 (5) より $x = x \to y = x$
$x = x$ と MP より $y = x$
ゆえに，$x = y \vdash y = x$
B2 を使っていないので，演繹定理より
$\vdash x = y \to y = x$
例 4.1.2 (2) を 2 回使って
$\vdash \forall x \forall y[x = y \to y = x]$

(2). 略

(3). t に含まれる関数記号がないときは特別な形であり
$\vdash \forall x_1 \forall y_1[x_1 = y_1 \to x_1 = y_1]$
を示す．
関数記号を含む t については，t に現れる関数記号の個数 m に関する帰納法で証明する．

$m = 1$ のとき $E2$ そのもの．

$m = k$ 個以下の関数記号をもつ項について成り立つと仮定し，$m = k+1$ 個の関数記号をもつ項 t について

$\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \cdots (x_n = y_n \to t = t\theta) \cdots)]$

但し　代入 θ は $[x_1 \leftarrow y_1, x_2 \leftarrow y_2, \ldots, x_n \leftarrow y_n]$

が成り立つことを示す．t は一般に

$f(t_1, \ldots, t_r)$

の形に表せる．$t_1, \ldots, t_r$ についての帰納法の仮定

$\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \cdots (x_n = y_n \to t_1 = t_1\theta) \cdots)]$

$\vdots$

$\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \cdots (x_n = y_n \to t_r = t_r\theta) \cdots)]$

および

$\vdash t_1 = t_1\theta \to (t_2 = t_2\theta \to \cdots (t_r = t_r\theta \to f(t_1, \ldots, t_r) = f(t_1\theta, \ldots, t_r\theta)) \cdots)$

を使えばよい．$f(t_1\theta, \ldots, t_r\theta)$ は $f(t_1, \ldots, t_r)\theta$ に等しい．自由変数だけ取り出して議論してもよい．一般に $t_1\theta$ の代入 θ などは $t\theta$ の代入 θ の一部分となる．

(4). 略 □

例 4.2.1

自然数の算術 N

定数　0
関数記号　$s, +, \cdot$
述語記号　$=$

$+(u, v)$ を $u + v$ のように表す．(以降でもこのような記法を用いる．)

自然数の第一階理論 N の特殊公理として

N1：　$\forall x\, \neg s(x) = 0$
N2：　$\forall x \forall y[s(x) = s(y) \to x = y]$
N3：　$\forall x\, x + 0 = x$
N4：　$\forall x \forall y\, x + s(y) = s(x + y)$
N5：　$\forall x\, x \cdot 0 = 0$
N6：　$\forall x \forall y\, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$

注：数の大小を表す述語記号 $<$ も含ませるときは，さらに，

N7：　$\forall x\, \neg x < 0$
N8：　$\forall x \forall y(x < s(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y)$
N9：　$\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$

例 4.2.2

半群 (準群ともいう)$(A, *)$

集合 A と二項演算 $* : A \times A \to A$ で与えられ，$*$ は結合律を満たすものである．特殊公理は

(1). $\forall x \forall y \exists z\, x * y = z$

(2). $\forall x \forall y \forall z\, (x * y) * z = x * (y * z)$

半群において，$\forall x\, x * e = x$ を満たす元 e を右単位元といい，$\forall x\, e' * x = x$ を満たす元 e' を左単位元という．右単位元であり，かつ左単位元である元 e を単位元という．

問 4.2.3

e, e' をそれぞれ半群 A の右単位元，左単位元とすると，$e = e'$ であることを示せ．すなわち，(半群において) 次が成り立つことを示せ．
$\forall x\, x * e = x, \forall x\, e' * x = x \vdash e = e'$

例 4.2.3

モノイド $(A, *, e)$ 単位元 e をもつ半群

(1). $\forall x \forall y \exists z\; x * y = z$

(2). $\forall x \forall y \forall z\; (x * y) * z = x * (y * z)$

(3'). $\forall x [x * e = x \wedge e * x = x]$

問 4.2.4

単位元 e をもつ半群において，任意の元 a について，その右逆元と左逆元があればそれらは一致する (同一の元である) ということを示せ．すなわち
$\vdash \forall x \forall y \forall z [x * y = e \wedge z * x = e \rightarrow y = z]$
を示せ．

例 4.2.4

群 $(A, *, e)$ $*$ の逆元が存在するモノイドである．単位元を e とする．

(1). $\forall x \forall y \exists z\; x * y = z$

(2). $\forall x \forall y \forall z\; (x * y) * z = x * (y * z)$

(3'). $\forall x [x * e = x \wedge e * x = x]$

(4). $\forall x \exists w [x * w = e \wedge w * x = e]$

例 4.2.5

環 $(A, *, +, 0)$

結合律を満たす二つの二項演算 $* : A \times A \rightarrow A$, $+ : A \times A \rightarrow A$ をもつ．$+$ は可換である．$+$ の単位元 (0 と書く) と逆元がある．$*$ は $+$ について分配律を満たす．

(1). $\forall x \forall y \exists z\; x * y = z$

(2). $\forall x \forall y \exists z\; x + y = z$

(3). $\forall x \forall y \forall z\; (x * y) * z = x * (y * z)$

(4). $\forall x \forall y \forall z\; (x + y) + z = x + (y + z)$

(5). $\forall x \forall y\; x + y = y + x$

(6). $\forall x\; x + 0 = x$

(7). $\forall x \exists y\; x + y = 0$

(8). $\forall x \forall y \forall z\; (x + y) * z = (x * z) + (y * z)$

(9). $\forall x \forall y \forall z\; x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

相等関係をもつ第一階理論 T のモデルとは，$Q^{=}$ のすべての論理的公理と T のすべての特殊公理を充足する (真にする) ような解釈をいう．

自然数の集合を $\mathbb{N}$ とし，$\mathbb{N}$ 上の後続関数 (サクセサ関数)，加算演算，乗算演算をもつ代数系 A を考える．自然数の第一階理論 N に対し，定義域 (値の集合) を $\mathbb{N}$ とし，s を後続関数に，$+$ を加算演算に，$\bullet$ を乗算演算に，定数記号 0 を $\mathbb{N}$ 内の数 0(ゼロ) に対応させる解釈は N のモデルであり，これは代数系 A に対応する．代数系 A は第一階理論 N のモデルであるというような言い方もする．

関係 $=$ は同値関係 (反射律，対称律，推移律を満たす関係) である (公理 E1，性質 4.2.3 (1)，(2) 参照)．相等関係をもつ第一階理論 T のモデル M において，$=$ による同値類の集合を値の集合とし，定数記号，関数記号の解釈を M におけるそれを含む同値類を表すものとすると，この解釈も M のモデルとなる．このモデルでは $=$ は同一のものに対してだけ成り立つ．

いままでこのテキストでは，対象変数は対象領域上を動き，$\forall$ や $\exists$ はその対象変数に付けていた．しかし，述語記号や関数記号を表す変数 (対象領域のすべての部分集合の集合上を動く変数に相当) を導入して，それに $\forall$ や $\exists$ を付けた論理式も考えられる．例えば，自然数の算術の数学的帰納法の原理を表す

$\forall P[P(0) \land \forall x\{P(x) \to P(s(x))\} \to \forall x\, P(x)]$

はそのような論理式の例である．このような公理や論理式を許す体系を第二階述語論理という．これに対し，このテキストで今まで述べてきた述語論理は第一階述語論理と呼ばれる．

休憩コラム 4.1

教養のコラム

公理系は無矛盾でないと意味がない．第一階述語論理の論理的公理の無矛盾性はアッカーマンによって示された (1928 年)．アッカーマンはこのとき第一階述語論理に関する完全性を未解決問題として提示した．ゲーデル (1906-1978) はそれに応えて「完全性定理」を示した．1929 年弱冠 23 歳のときである (1930 年発表)．

さて，自然数の算術の公理系 (例 4.2.1 の公理に数学的帰納法の原理を表す上述の公理を加えた第二階述語論理) は無矛盾だろうか．だれもが当然と考え，疑う余地もないと思われていた．しかし，ヒルベルト (1862-1943) は 1900 年に未解決の難問題を 23 個挙げたとき，第 2 番目の問題として，自然数の算術は無矛盾か?を挙げたのである．自然数の算術にもし矛盾を含んでいたら，整数論もそれをもとにした実数論も土台が崩れてしまうことになる．幾何学の公理化を行ったあと，数学の体系化・公理化をめざしていたヒルベルトがまずその基本を問うたのは当然であろう．

ヒルベルトは，数学を体系化し，それが complete(真であるものは証明できる)，consistent(偽であるものは証明されてはならない)，decidable(いかなる言明も真か偽か機械的手続きで決定できる) であるということを示そうともくろんでいた．ヒルベルト自身は 23 個の問題の解決に楽観をもっていたようである．

そのすぐあとでラッセルのパラドックス：

「自分自身を要素として含まない集合の全体を S とする．S は S 自身を含むか，含まないか.」

が発見され,「数学の危機」を引き起こした．しかし，集合の公理化や型の理論でそのようなパラドックスは解決された．

ゲーデルは第一階述語論理に関する「完全性定理」を示したその翌年，自然数の算術についての有名な「不完全性定理」も与えた．

「**ゲーデルの不完全性定理**」とは

「自然数の算術を含む形式的体系では，(もしその形式的体系が無矛盾なら) その式もその否定の式も証明できないような論理式が存在する.」

この「不完全性定理」は，

「計算可能でない自然数の上の関数がある (テューリング Turing 1936)」，　「プログラムの停止性を判定するプログラムはない」といった計算の不可能性についての事実と対応しているものである (計算可能性 については,「計算論 B」で学ぶ)．

またゲーデルは現在「ゲーデルの第二不完全性定理」と呼ばれている次の結果も与えた (これに対し前述のはゲーデルの第一不完全性定理とも呼ばれる)．

「自然数の算術を含む形式的体系 T では，(もしその形式的体系が無矛盾なら)T の無矛盾性は T では証明可能でない.」

自然数の算術の無矛盾性の証明を形式的体系による「有限の立場」から行う証明は，この「第二不完全性定理」により，原理的に不可能であることが結論づけられた．しかし，ゲンツェンは「超限帰納法」と呼ばれる拡張された方法を用いて無矛盾性の「証明」に成功した (1936 年).

「ゲーデルの第一不完全性定理」でいうその論理式 Q は　Q :「Q はその体系の定理でない」といういわゆる自己言及文である．論理式や証明を表す論理式の列をゲーデル数で表すと，自然数の算術を用いて,「ゲーデル数 g の式は定理でない」ということを表すようなゲーデル数が g 自身の式をつくることができるのである．(ゲーデル数 g が「ゲーデル数 g の式はその体系の定理でない」ことを表すということは，g の作り方から分る．) もしこの式 Q が定理なら，(公理の健全性より定理は正しいので)「Q は定理でない」は正しく，Q は定理でない．矛盾になるので，Q が定理であることはない．一方，この式の否定 $\neg Q$ は「Q は定理である」を表し，もし $\neg Q$ が定理なら，(健全性より)「Q は定理である」は正しいので，Q は定理である．体系が無矛盾なら，$\neg Q$ と Q がともに定理であることはありえない．よって，この式の否定 $\neg Q$ も定理ではない．そのような Q をつくるところはいわゆる対角線論法を使っている.

ゲーデルは 1940 年米国に亡命し，プリンストン高等研究所で働いた．そこにはあの高名なアインシュタイン，フォンノイマンらがいた．論理学者にとって神様のような存在であった天才ゲーデルが晩年は一種の神経症が昂じて物を食べなくなり，栄養失調で餓死した (1979/1/14) とは痛ましいかぎりである.

休憩コラム 4.2

「ラッセルのパラドックス」:　　自分自身を要素として含まない集合の全体を S とする．S は S 自身を含むか，　　含まないか.

集合 S が S 自身を含むとしたら，(S の定義より，自分自身を要素として含む集合は S に属さないので) 集合 S は S に属さない．矛盾.

集合 S が S 自身を含まないとしたら，$\cdots$．矛盾．(A としたら $\neg A$ が結論され，$\neg A$ としたら A が結論される．) パラドックス！

ラッセルがパラドックスをより分りやすく説明するために用いた「**床屋のパラドックス**」とは，床屋は自分で髭 (ひげ) を剃 (そ) らない人の髭を剃り，自分で髭を剃る人の髭は剃らない．床屋は自分の髭を剃るのか，剃らないのか.

床屋が自分の髭を剃るとしても矛盾，剃らないとしても矛盾．パラドックス！(床屋が自分の髭を剃るとすると矛盾ゆえ,「与えられた条件のもとでは，床屋は自分の髭を剃らない」は論理的には正しい．同様に,「与えられた条件のもとでは，床屋は自分の髭を剃る」も論理的には正しい．結論部は互いに肯定，否定であるから，与えられた条件は成り立たないということが言える．)

この文章では，床屋を特定のひとりの人 (定数) と考えるか，床屋であるような人と考えるか，ふた通りありうる.

まず，床屋を特定のひとりの人と考え，b とおこう.「u は v の髭を剃る」を $S(u,v)$ で表すことにすると，与えられた条件は

$$\forall x[\{\neg S(x,x) \to S(b,x)\} \wedge \{S(x,x) \to \neg S(b,x)\}] \tag{1}$$

と表せる．これから，次の (2) が得られる.

$$\{\neg S(b,b) \to S(b,b)\} \wedge \{S(b,b) \to \neg S(b,b)\}] \tag{2}$$

しかし，これは偽である．したがって，(1) は成り立たない (充足不能)．よって,

$$\neg\exists w[\forall x[\{\neg S(x,x) \to S(w,x)\} \wedge \{S(x,x) \to \neg S(w,x)\}]] \tag{3}$$

が結論される．(分る?　(1)，(2) の議論は，(3) を示すのに,

$$\forall x[\{\neg S(x,x) \to S(w,x)\} \wedge \{S(x,x) \to \neg S(w,x)\}]$$

なる人 $w = b$ がいると仮定し，矛盾を導いたことに相当．)

「床屋は」というのを「床屋であるような人は」と見做しても同じような議論ができる.「x は床屋である」を $B(x)$ で表そう．与えられた条件は

$$\forall y[B(y) \to \forall x[\{\neg S(x,x) \to S(y,x)\} \wedge \{S(x,x) \to \neg S(y,x)\}]] \tag{4}$$

パラドックスの議論から得られる結論は

$$\forall y[B(y) \to \forall x[\{\neg S(x,x) \to S(y,x)\} \wedge \{S(x,x) \to \neg S(y,x)\}]] \to \neg\exists w\, B(w) \tag{5}$$

パラドックスのクイズ

ある法律の先生が彼の弟子に「ただで教えてあげよう．ただし，あなたが裁判で初めて勝ちを取ったあとでお礼の金を頂くことにする」という約束をした．ひととおり教え終えたにもかかわらず，弟子はいっこうに裁判を受け持たなかった．先生はとうとう金を払えと弟子を裁判所に訴えた．原告曰く「この裁判で彼が負ければ判決にしたがって当然払うべき．彼が勝っても (初めて勝ちを得たのだから) 約束により払うべき．いずれにしても，彼は払わなくてはいけない.」被告曰く「この裁判に私が勝てば訴えは無効で払う必要はありません．負けたら (まだ最初の勝ちは得ていないので) 約束により払う必要はありません．いずれにしても，私には払う義務はありません.」さて，裁判所はどうすればいいか.

パラドックスではないが，次のような論理クイズもある．

「ワニのジレンマ」：　ワニが人の子をさらっていった．そのワニはその子の父親に「私がこの子をあなたに返すか返さないかをあなたが正しく言い当てたら，(かつそのときに限り) 私はこの子をあなたに返そう」と約束した．父親は「返さない」と答えた．ワニはどうすればいいのか.

母親が子に「正しいことを言ったら，(かつそのときに限り) 100 円か 1000 円のどちらかをあげよう」と約束した．なんと言ったら，1000 円を貰えるか．また，なんと言ったら，母親を約束を守らない親にしてしまえるか.

5　述語論理の定理の証明法

第一階理論 $T = \langle L, G \rangle$ が与えられているとする．

与えられた論理式 P に対し，

$G \vdash P$ (イ)

かどうかを決定する問題を考える．G は有限集合としよう．(たとえ特殊公理集合が無限であっても P の証明には有限個の公理しか使わない．有限個の特殊公理が指定されて，それらを用いて P が得られるかという問題とする．)

特殊公理の集合を $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ とする．各 g_i は閉論理式としているので，(イ) は次の (ロ) と同じことである (特殊公理が閉論理式でなければそれぞれの閉包をとったものを採用すればよい).

$\vdash g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to P$ (ロ)

これらの判定は一般には決定不能である．すなわち，問題の任意の具体例 (いまの例では G と P) が与えられて，そうであるか否かを判定する (答「はい」か「いいえ」を正答し停止する) アルゴリズムは存在しないことが示されている (決定不能の概念やそうであることの証明法などについては「計算論 B」で学ぶ).

しかし $G \vdash P$ が成り立つとき，それを確かめることは可能である．すなわち，**半判定手続き**, **部分判定手続き**, **半決定手続き**, **部分決定手続き** *(semi-decision procedure, partial decision procedure)* はある．半判定手続きというのは，答が「はい」であるような具体例に対しては，いつかその答を出力して停止し，答が「いいえ」であるような具体例に対しては,「はい」を出力しない (ループに陥ってもよい) というような手続きをいう．詳細は「計算論 B」で学ぶ.

組織的に，順次，論理式の列を生成し，その列で証明になっているかを調べるという方法は半判定手続きである．

$G \vdash P$ でないことは確かめることさえ原理的に不可能である．すなわち，半判定手続きすらない．一般に，問題の具体例 (いまの例では G と P) が与えられて，ある性質 (いまの例では $G \vdash P$) が成り立つかが決定不能であるとき，その性質が成り立つかを判定する半判定手続きがあれば，その性質が成り立たないかを判定する半判定手続きは存在しない.

なぜだか分りますか? もしそれも存在すると仮定し，その二つの半判定手続きをともに動かすとどうなりますか.

手続きのなかに「予測」を持ち込んだ手続きもある．予測が成功したときは，短い時間 (計算ステップ) で答が得られる．

$G \vdash P$ を確認する「非決定性判定手続き」

(1). 証明を予測して書き下す．例えば

- 証明の長さ n を予測して，1 つ決める．
- 各 $j (j \leq n)$ について証明中の j 番目の論理式を予測して書き下す.
  P_1
  P_2
  $\vdots$

P_n
このとき，P_j について，各論理的公理の具体例か，あるいは G に属するか，あるいは，どの式から B1 あるいは B2 で得られるかも予測して書いておく．

(2). 書き下した $P_1, P_2, \ldots, P_n$ で P の証明になっているかをチェックする．すなわち，

- 各 j について，P_j が論理的公理の具体例か，あるいは G に属するか，あるいは B1 あるいは B2 で得られるかをチェックする．
- $P_n = P$ かもしそうなら (証明になっているなら)「はい」を出力して停止する．そうでなければ，何も出力せずに停止する．

$G \vdash P$ なる G，P が与えられたとき，成功する予測が存在する．予測が成功したときは正答「はい」を出力して停止する．

$G \vdash P$ でない G，P が与えられたとき，どんな予測も成功することはない．したがって，決して「はい」を出力しない．非決定性の手続きは予測によっていろんな動作の可能性がある．非決定性判定手続きとは，答が「はい」の入力に対しては，予測が巧く当れば正答「はい」を出力し (「はい」を出力するような予測と動作列が存在し)，そうでない入力に対してはどんな動作をしても決して「はい」を出力しない (無限ループに陥ってもよい) というような手続きをいう．非決定性の手続きについては「計算論 B」で学ぶ．

上記の非決定性判定手続きは，答が「はい」の入力に対しては，証明の長さの最短を m とすると (G が有限とか，各 P_j のサイズが一定値以下とかであれば)$O(m)$ のステップで答を出すような計算過程がある．

決定性の手続きでは，組織的に，すべての論理式のすべての系列を逐次発生し，それが証明になっているかをチェックする．$G \vdash P$ なら，いつか成功して，$G \vdash P$ であることが分かる．しかし，$G \vdash P$ でないときは，永久に成功しないので，停止しない (上述の (決定性) 半判定手続き)．答が「はい」の入力に対してのみ正答「はい」を出力するので，こういうのは厳密には「手続き」といわないこともある．普通，決定性の判定手続きといえば,「はい」の場合も「いいえ」の場合も正答を出力して停止するようなアルゴリズムをさす．

このような (決定性) 手続きでは計算時間が膨大であり，現実には役立たない．この章では現実的な方法を紹介する．

$g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to P$ はひとつの論理式であるので，以下では，論理式 A が与えられたとして，$\vdash A$ のとき，それを調べる (確認する) 方法について述べる．公理系の健全性・完全性より，$\vdash A \Leftrightarrow \models A$ (A は恒真) であるので，$\models A$ を調べる方法と言ってもよい．

論理式の「証明」そのものを非決定性手続きの計算過程とみなすことができる．すなわち，一般に，G を判定問題に対応づけ，P をその問題の具体例に対応づけると,「証明」である論理式の列が (P が成り立つかを調べる) 非決定性手続きの計算過程に相当する．判定問題自身の計算複雑度をそれを解く非決定性手続きの計算時間 (成功に至る最短の計算ステップ数) で測る考えがあるが，それは最短の「証明」の長さに対応する．このように「証明」の長さの最小値はその問題自身の複雑さを表しているといえる．

5.1 標準形

$Q_1x_1Q_2x_2\cdots M$

ただし，Q_i は $\forall$ または $\exists$,M は限定作用素を含まない，の形の論理式を**冠頭標準形** *(prenex normal form)* の論理式という．M をその母式という．M には自由変数があってもよい．

定理 5.1.1

任意の A に対し，$\vdash A \leftrightarrow B$ であるような冠頭標準形の B が作れる．

証明

冠頭標準形への変換法を述べる．A 中の $\rightarrow$ ，$\leftrightarrow$ 等を，$\vee$，$\wedge$，$\neg$ で表す．そして，

$\vdash \neg(C \vee D) \leftrightarrow \neg C \wedge \neg D$

$\vdash \neg(C \wedge D) \leftrightarrow \neg C \vee \neg D$

$\vdash \neg\forall xC \leftrightarrow \exists x\neg C$

$\vdash \neg\exists xC \leftrightarrow \forall x\neg C$

を用いて，$\leftrightarrow$ の左辺の形の部分式を右辺の形の部分式で置き換え，$\neg$ を述語記号の直前へ来るようにする ($\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$ も使って $\neg\neg$ を除いて式を簡単にする)．ついで，

$\vdash C \vee \forall xD \leftrightarrow \forall x(C \vee D)$

$\vdash C \wedge \forall xD \leftrightarrow \forall x(C \wedge D)$

$\vdash C \vee \exists xD \leftrightarrow \exists x(C \vee D)$

$\vdash C \wedge \exists xD \leftrightarrow \exists x(C \wedge D)$

ただし C が自由変数 x を含んでいないこと．

を用いて (問題 4.1.3(11)~(14) 参照)，$\leftrightarrow$ の左辺の形の部分式を右辺の形の部分式で置き換え，変形する ($\vee$ や $\wedge$ はそれぞれ可換であることも使う)．C に相当する部分式が自由変数 x を含んでいたら，変数の名前の付け変えを行って $\forall xD$ を $\forall yD^{x\leftarrow y}$ などに変えてから ($\forall y$ を $C \vee D$ の外へ出すかたちで) 適用すればよい (y は D の中で x に対して自由で，かつ，D は y を自由変数にもたないこと．性質 4.1.1 参照．また，当然，C が自由変数 y を含んでいないこと)．性質 4.1.2 より，A にそのような変形を繰り返して得られる B は $\vdash A \leftrightarrow B$ を満たす． □

なお，

$\vdash \forall x\, C \wedge \forall xD \leftrightarrow \forall x\,(C \wedge D)$

$\vdash \exists x\, C \vee \exists x\, D \leftrightarrow \exists x\,(C \vee D)$

(問題 4.1.3(5),(6)) を利用して変形してもよい．このように共通にまとめると，上記の定理 5.1.1 で述べてる変換よりも $\forall$，$\exists$ の個数が少なくて済む．$\forall x\, C \wedge \forall y\, D$ のように変数名が違っていても $\forall x\,(C \wedge D^{y\leftarrow x})$ や $\forall z\,(C^{x\leftarrow z} \wedge D^{y\leftarrow z})$ のようにしてよい．ただし，代入される変数 x や z はそれぞれ式 D や C と D の自由変数でなく，また，適用可能な代入であること (x は D のなかで y に対して自由，z は C，D のなかでそれぞれ x，y に対して自由)．

注意

3 章以降は単一ソートの述語論理を扱っている．これが議論の簡明化 (これでも) に効いている．

上記の定理 5.1.1 で述べている変換なら，例えば，

$\forall x\, C \wedge \forall x\, D$

$= \forall x\, (C \wedge \forall x\, D)$

$= \forall x\, (C \wedge \forall y\, D^{x \leftarrow y})$

$= \forall x\, \forall y\, (C \wedge D^{x \leftarrow y})$

となる．ただし，C には自由変数 y はなく，y は D の中で x に対して自由であり，D は自由変数 y をもたないとする．

注意

(1). $\vdash \forall x\, C \vee \forall x\, D \leftrightarrow \forall x\, (C \vee D)$
$\vdash \exists x\, C \wedge \exists x\, D \leftrightarrow \exists x\, (C \wedge D)$
は成り立たない (問題 3.2.4(3)~(6) 参照) ので，$\forall x\, C \vee \forall x\, D$ を $\forall x\, (C \vee D)$ で，あるいは，$\exists x\, C \wedge \exists x\, D$ を $\exists x\, (C \wedge D)$ で置き換えたりしてはいけない．

(2). 冠頭標準形は一意ではない．変数の名前は別としても，$\forall x\, C(x) \wedge \exists x\, D(x)$ は $\forall x \exists y\, (C(x) \wedge D(y))$ にも $\exists x \forall y\, (C(y) \wedge D(x))$ にも変形できる．どちらが好都合かはそのうち分るであろう．

(3). 一般には，冠頭標準形の母式には $\wedge$，$\vee$，$\neg$ だけでなく $\rightarrow$ を含んでよい．このテキストでは，上述の変換法にしたがって冠頭標準形に直すので，普通，母式には $\rightarrow$ を含まない．$\rightarrow$ の入った式のまま変形すると間違いやすいので注意すること．例えば，$\exists x C \rightarrow D$ は $\exists x\, (C \rightarrow D)$ にはならない．

例 5.1.1

冠頭標準形に変形する．

等価な式を $=$ で結ぶことにする．

$\neg \exists y\, (\forall y\, p(y) \vee \neg q(y)) \vee \exists y\, (\forall z\, p(z) \rightarrow q(y))$

$= \forall y\, (\neg \forall y\, p(y) \wedge q(y)) \vee \exists y\, (\neg \forall z\, p(z) \vee q(y))$

$= \forall y\, (\underline{\exists y\, \neg p(y) \wedge q(y)}) \vee \exists y\, (\exists z\, \neg p(z) \vee q(y))$

$= \forall y\, \exists x\, (\neg p(x) \wedge q(y)) \vee \exists y\, \exists z\, (\neg p(z) \vee q(y))$

$= \forall y\, (\underline{\exists x}\, (\neg p(x) \wedge q(y)) \vee \underline{\exists y}\, \exists z\, (\neg p(z) \vee q(y)))$

$= \forall y\, \exists x\, ((\neg p(x) \wedge q(y)) \vee \overline{\exists z}\, (\neg p(z) \vee q(x)))$

$= \forall y\, \exists x\, \exists z\, ((\neg p(x) \wedge q(y)) \vee (\neg p(z) \vee q(x)))$

注意

部分式を置き換えていくこと．例えば，3 行目の部分式 $\exists y\, \neg p(y) \wedge q(y)$ を式 $\exists x\, (\neg p(x) \wedge q(y)$ で置き換えているので，$\forall y\, (\exists y\, \neg p(y) \wedge q(y))$ は $\forall y\, \exists x\, (\neg p(x) \wedge q(y))$ に変わっている．$\exists x\, \forall y\, (\neg p(x) \wedge q(y))$ に変わるのではない．

$\vdash B \Leftrightarrow \models B$

$\vdash B \Leftrightarrow \vdash B$ の閉包

$\models B \Leftrightarrow \models B$ の閉包

ゆえ，$\vdash A$ かどうか ($\models A$(A が恒真) かどうか) を調べる方法としては，一般に A は閉論理式とした場合の方法を述べておけばよい．また，A が閉論理式なら

A：恒真 $\Leftrightarrow \neg A$：充足不能

ゆえ，閉論理式 (A が閉論理式なら $\neg A$ も閉論理式である) の充足不能性を調べることができればよい．

定理 5.1.1 の変換法で得られる B は，$\vdash A \leftrightarrow B$ であるので，$\vdash A \to B$ かつ $\vdash B \to A$，また，$\models A \to B$ かつ $\models B \to A$ になっている．当然，$A \models B$ かつ $B \models A$ であるので，
A：恒真 $\Leftrightarrow$ B：恒真
A：充足不能 $\Leftrightarrow$ B：充足不能
などのようになっている．

5.2　スコーレム関数

定理 5.2.1

$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nM[x_1,\ldots,x_n]$ を自由変数を持たない冠頭標準形の論理式とする．Q_i が $\exists$ であれば，$j<i$ かつ Q_j が $\forall$ であるような j を $i_{k_1},\ldots,i_{k_i}$ とするとき，新しい k_i 引数の関数記号，例えば h_i を導入し，M 中の x_i の出現を全て $h_i(x_{i_{k_1}},\ldots,x_{i_{k_i}})$ で置き換え，Q_ix_i を除外する．ただし，$j<i$ かつ Q_j が $\forall$ であるような j が存在しないときは，新しい 対象定数 (0 引数関数) 例えば a_i を新たに導入し，x_i をそれで置き換え，Q_ix_i を除外する．このようにして得られた論理式の充足不能性ともとの論理式の充足不能性は同じである．

導入される関数を**スコーレム関数** *(Skolem function)* という (定数記号も含めてこう呼ぶ)．得られた標準形を**スコーレムの標準形**という．

注意

(1). $\exists x_1\cdots$ のとき，M 中に定数記号があっても，それらと異なる新しい定数記号を導入すること．

(2). $\cdots\exists x_3\exists x_4$ となっていても，異なる定数記号 a_3，a_4 または関数記号 h_3，h_4 を導入すること (先頭から順に $\exists$ を消していくなら，毎回，その時点で新しい記号を導入すること)．

例 5.2.1

$\exists s\,\exists x\,\forall y\,\forall z\,\exists u\,\forall v\,\exists w\,(p(x,d,z,u,v)\wedge\neg q(x,y,u,v,w,s))$ のスコーレムの標準形は，s，x，u，w に対するスコーレム関数をそれぞれ a，b，$h(y,z)$，$g(y,z,v)$ として，$\forall y\,\forall z\,\forall v\,(p(b,d,z,h(y,z),v)\wedge\neg q(b,y,h(y,z),v,g(y,z,v),a))$ である．

略証 (定理 5.2.1 の略証)

$B=\forall x_1\cdots\forall x_{k-1}\exists x_kQ_{k+1}x_{k+1}\cdots Q_nx_nM[x_1,\ldots,x_n]$ に対しスコーレム関数 $h(x_1,\ldots,x_{k-1})$ を導入した B ’$=\forall x_1\cdots\forall x_{k-1}Q_{k+1}x_{k+1}\cdots Q_nx_nM[x_1,\ldots,x_{k-1},h(x_1,\ldots,x_{k-1}),x_{k+1},\ldots,x_n]$ を考える．

B：充足不能 $\Leftrightarrow$ B'：充足不能 を示そう．

$\Leftarrow$ の証明：

解釈 $\mathscr{I}$ が B を真にするなら，$x_1,\ldots,x_{k-1}$ に代入する値を任意に $a_1,\ldots,a_{k-1}$ に決めたとき，それらに依存して決まる x_k の値 d_k が存在し，$Q_{k+1}x_{k+1}\cdots Q_nx_nM[a_1,\ldots,a_{k-1},d_k,x_{k+1},\ldots,x_n]$ が真になる．それゆえ，$h(x_1,\ldots,x_{k-1})$ の解釈を $h(a_1,\ldots,a_{k-1})=d_k$ になるように決め，それ以外は $\mathscr{I}$ と同じに定めた解釈 $\mathscr{I}'$ は B' を真にする．

$\Rightarrow$ の証明：

解釈 $\mathscr{I}$ が B' を真にするなら，$\mathscr{I}$ のもとでの $h(a_1,\ldots,a_{k-1})$ の値を d_k とすれば，任意の $a_1,\ldots,a_{k-1}$ に対し，$Q_{k+1}x_{k+1}\cdots Q_nx_nM[a_1,\ldots,a_{k-1},d_k,x_{k+1},\ldots,x_n]$ は真になる．

すなわち，B は $\mathscr{I}$ で真になる．　□

注意

スコーレム関数を導入した式ともとの式とは，充足不能性は一致する (したがって充足可能性も一致する) が，一般に，等価ではない．したがって，一般に，恒真性は一致しない．

例えば，$\exists x\, p(x)$ とそのスコーレム標準形 $p(a)$ について，前者を真にするが後者は偽にする解釈がある (与えよ) ので，恒真性は一致しない．また，$\forall x\, \exists y\, (p(x,a) \to p(x,y))$ と $\forall x\, (p(x,a) \to p(x,h(x)))$ も恒真性は一致しない．説明せよ．

スコーレムの標準形において母式が原始論理式の和積形であるものを**スコーレムの連言標準形** (**スコーレム連言標準形**) という (スコーレム和積標準形，スコーレム積標準形ともいう)．

例 5.2.2

次の論理式の否定をスコーレム連言標準形に直せ．

$\{\forall z\, \exists x\, [p(z,x) \wedge q(z)]$
$\quad \wedge \forall x\, \forall y\, [p(x,y) \to r(y)]$
$\qquad \wedge \forall x\, [(q(x) \wedge r(x)) \to t(x)]\}$
$\qquad \to \exists u\, t(u)$

$\neg$ (与式)$= \forall z\, \exists x\, [p(z,\, x) \wedge q(z)]$
$\quad \wedge \forall x\, \forall y\, [\neg p(x,\, y) \vee r(y)]$
$\quad \wedge \forall x\, [\neg(q(x) \wedge r(x)) \vee t(x)]$
$\quad \wedge \forall u \neg t(u)$ $\qquad (\neg \exists u\, t(u) = \forall u \neg\, t(u))$

$= \forall x \{\exists y [p(x,\, y) \wedge q(x)]$ $\qquad$ 4 つの $\forall$ をまとめて括り出した ($\wedge$ ゆえ)
$\quad \wedge \forall y\, [\neg p(x,y) \vee r(y)]$
$\quad \wedge [\neg q(x) \vee \neg r(x) \vee t(x)]$
$\quad \wedge \neg t(x)\}$

$= \forall x \exists y \{[p(x,y) \wedge q(x)]$ $\qquad$ $\forall$ より先に $\exists$ を移した
$\qquad \wedge \forall y [\neg p(x,y) \vee r(y)]$
$\quad \wedge [\neg q(x) \vee \neg r(x) \vee t(x)]$
$\quad \wedge \neg t(x)\}$

$= \forall x \exists y \forall z\, \{p(x,\, y) \wedge q(x)$
$\quad \wedge (\neg p(x,z) \vee r(z))$
$\quad \wedge (\neg q(x) \vee \neg r(x) \vee t(x))$
$\quad \wedge \neg t(x)\}$

y にスコーレム関数 $h(x)$ を代入すると
$\quad \forall x \forall z \{p(x,h(x)) \wedge q(x)$
$\quad \wedge (\neg p(x,z) \vee r(z))$
$\quad \wedge (\neg q(x) \vee \neg r(x) \vee t(x))$
$\quad \wedge \neg t(x)\}$

注意

等価な式を $=$ で結んでいる．スコーレム関数を導入して $\exists$ を消した式ともとの式とは等価でないので，$=$ でつないだらいけない．

オオキクゲンテンスルゾ

こう書けば頭に入りますよね．

$\forall x \{\exists y [p(x,y) \wedge q(x)] \wedge \forall y\, [\neg p(x,y) \vee r(y)] \wedge \cdots\}$ の部分式
$\exists y\, [p(x,y) \wedge q(x)] \wedge \forall y\, [\neg p(x,y) \vee r(y)] \wedge \cdots$ を等価な
$\exists y\, ([p(x,y) \wedge q(x)] \wedge \forall y\, [\neg p(x,y) \vee r(y)] \wedge \cdots)$ に置き換えている．

その部分式の外の $\forall x\, \{\}$ は不変である．($\exists y\, \forall x\, \{[p(x,y) \wedge q(x)] \wedge \forall y\, [\neg p(x,y) \vee r(y)] \wedge \cdots\}$ とするのは間違い．)

問 5.2.1

$$(\{\exists x\, p(x) \to \forall x\, q(x)\} \wedge \{\exists x\, p(x) \to \exists x \neg q(x)\}) \to \forall x\, \neg(p(x) \wedge r(x))$$ を R とおく．

(1). $\neg R$ を冠頭標準形に直せ．ただし，可能ならば $\exists x \forall y \exists z \forall u\, M$ の形に書くこと (x, y, z, u をこの順に用いよ)．この形に書けない場合は，どのような形でもよい．また母式 M は (原子論理式の) 和積形にすること．

(2). 上記 (1) で得られた式をスコーレム連言標準形に直せ．

5.3 エルブランの定理

定理 5.2.1 で得られた形の閉論理式

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$

の充足不能性について調べる．

あらゆる対象領域上のあらゆる解釈を考えなくても，論理式に対して定まる**エルブラン領域** *(Herbrand universe)* と呼ばれる対象領域上で，定数記号や関数記号の解釈は固定し，述語記号の解釈だけを変えたようなあらゆる解釈だけを考えればよいことが示される．

一般の論理式 B に対するエルブラン領域 HD_B とは，

$H_0 \triangleq B$ 中の対象定数の集合，

ただし，B に対象定数が含まれていなければ例えば $\{a\}$

ここで，a は新たに導入した対象定数

各 i について

$H_{i+1} \triangleq \quad H_i \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \mid f$ は B 中の (n 引数) 関数記号，各 t_jは H_i中の項 $\}$

$HD_B \triangleq H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \cdots$

論理式 B に対する**エルブラン解釈** *(Herbrand interpretation)* とは，値の集合を HD_B とする (すなわち，$f(t_1, \cdots, t_n)$ の値を 項の表現そのもの とする) ような解釈をいう．述語の決め方で一つのエルブラン解釈が決まる．HD_B の元を B の**基礎項** *(ground term)* という．

述語記号の引数に基礎項を代入した (変数をもたない) 原子論理式を**基礎原子論理式** *(ground atom)*，略して**基礎式**という．基礎式の全体を HB_B と書き，論理式 B の**エルブラン基底** *(Herbrand base)* という．(論理式 B を原子論理式の和積形とし，各和項 (節) の集合と見なすときも同じ言い方をする．) 論理式 B に対するエルブラン解釈は，真である基礎式全体 (各述語記号に対し，それを真にする引数値 (基礎項) の組み合わせの全部) を指定することで決まる．

例 5.3.1

(1). $B : \forall x \ \forall y \ (p(x, y, c, d) \rightarrow q(y))$ に対するエルブラン領域 HD_B は $HD_B = \{c, d\}$．基礎式は $p(c, c, c, c), p(c, c, c, d), \cdots, p(d, d, d, d), q(c), q(d)$ の 18 個であり，エルブラン解釈はこの 18 個の基礎式の真偽を定めて決まる．2^{18} 通りのエルブラン解釈がある．この中には，B を真にするエルブラン解釈もあり，B を偽とするエルブラン解釈もある．

(2). $B : \forall x \, \forall y \, p(f(x), g(x, y))$ に対するエルブラン領域 HD_B は
$H_0 : \{a\}$
$H_1 : \{a, f(a), g(a, a)\}$
$H_2 : \{a, f(a), g(a, a), f(f(a)), f(g(a, a)), g(a, f(a)), g(a, g(a, a)), g(f(a), a), g(f(a), f(a)), g(f(a), g(a, a)), g(g(a, a), a), g(g(a, a), f(a)), g(g(a, a), g(a, a))\}$
$\cdots$ の和集合．
エルブラン解釈の一例は

$$p(u, v) = \begin{cases} \mathsf{tt} & u = f(a) \\ \mathsf{ff} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3). $A : \forall x \, (q(x, b, f(a)) \wedge r(x))$ に対するエルブラン領域 HD_A は
$HD_A = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \cdots\}$
エルブラン解釈の一例は q : $q(a, b, f(a)), q(f(a), b, f(a)), q(f(f(a)), b, f(a)), q(f(f(f(a))), b, f(a)), \cdots$ は真，それ以外は偽，
$r(u)$: u が $f(f(\cdots f(b) \cdots)))$ の形の元でかつ f が偶数個のときは $r(u)$ は真，
それ以外の元 u に対しては $r(u)$ は偽．

論理式 B がそれに対するどのエルブラン解釈 $\mathscr{I}$ でも偽になるとき，**エルブラン解釈のもとで充足不能**という．

次の二つの定理「定理 5.3.1」,「定理 5.3.2」は重要である．

定理 5.3.1

$\forall x_1\ \forall x_2\ \cdots \forall x_n\ A[x_1, \ldots, x_n]$ が充足不能 $\Leftrightarrow$ $\forall x_1\ \forall x_2 \cdots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ がエルブラン解釈のもとで充足不能

証明

$\Rightarrow$ の証明:

定義より明らか．

$\Leftarrow$ の証明:

$\forall x_1\ \forall x_2 \cdots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ が充足可能とする．すなわち，ある解釈 $\mathscr{I}$ で，$A[x_1, \ldots, x_n]$ の変数に D のどの元を代入しても A が真とする．A に対して HD_A を考える．A 中の各原子論理式 $p(t(x_1, \ldots), \ldots)$ の各変数に HD_A の元を代入したものの集合全体を考える．定数 a が HD_A のなかに新たに導入されているときは a を D の中の任意の一つと対応付け，$\mathscr{I}$ をそのように拡張する．$p(t(\tau_1, \ldots), \ldots)$ が拡張された $\mathscr{I}$ で真であるような $p(t(\tau_1, \cdots), \cdots)$ 全体を T とする．T の元に対しては真，それ以外に対しては偽と定めたエルブラン解釈を $\mathscr{I}'$ とすると，$\mathscr{I}'$ のもとで $A[x_1, \cdots, x_n]$ の変数に HD_A のどの元を代入しても A は真である．　□

$\Leftarrow$ の証明の具体例による説明

A を $q(x) \to p(f(x))$ とする．$\mathscr{I}$ として

D : 非負実数全体

$f(x) = x + \sqrt{\pi}$

$q(x) = x \geq 2\sqrt{2}$

$p(x) = x \geq 2.5\sqrt{3}$

A の x に D の中のどの元を代入しても A は成り立つ ($\mathscr{I}$ のもとで A は真)．

例えば

$x = 0$	$0 \geq 2\sqrt{2}$	ff	$\to 0 + \sqrt{\pi} \geq 2.5\sqrt{3}$	ff
$x = 0.9$	$0.9 \geq 2\sqrt{2}$	ff	$\to 0.9 + \sqrt{\pi} \geq 2.5\sqrt{3}$	ff
$x = \sqrt{3}$	$\sqrt{3} \geq 2\sqrt{2}$	ff	$\to \sqrt{3} + \sqrt{\pi} \geq 2.5\sqrt{3}$	ff
$x = 2\sqrt{2} - 0.1$	$2\sqrt{2} - 0.1 \geq 2\sqrt{2}$	ff	$\to 2\sqrt{2} - 0.1 + \sqrt{\pi} \geq 2.5\sqrt{3}$	tt
$\vdots$				
$x = \sqrt{3} + \sqrt{\pi}$	$\sqrt{3} + \sqrt{\pi} \geq 2\sqrt{2}$	tt	$\to (\sqrt{3} + \sqrt{\pi}) + \sqrt{\pi} \geq 2.5\sqrt{3}$	tt
$\vdots$				
$x = \sqrt{3} + \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}$	$\cdots$	tt	$\to \cdots$	tt
$x = 7.1289\cdots$	$\cdots$	tt	$\to \cdots$	tt
$\vdots$				

HD の元は $a, f(a), f(f(a)), \cdots$ である．a を例えば $\sqrt{3}$ に対応させる (拡張された $\mathscr{I}$ は，上記の D, f, q, p の指定の他に，さらに $a = \sqrt{3}$ も含める)．拡張された $\mathscr{I}$ のもとで，HD の各元の値

は $\sqrt{3}, \sqrt{3}+\sqrt{\pi}, \sqrt{3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}, \cdots$ である．エルブラン解釈 $\mathscr{I}'$ を次のように定める:
$\mathscr{I}'$ における $q(a)$ の値は,

$\mathscr{I}$ における	$q(a)$ すなわち	$q(\sqrt{3})$ の値，すなわち	ff
	$q(f(a))$	$q(\sqrt{3}+\sqrt{\pi})$	tt
	$q(f(f(a)))$	$q(\sqrt{3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi})$	tt
	$\vdots$		
	$p(a)$	$p(\sqrt{3})$	ff
	$p(f(a))$	$p(\sqrt{3}+\sqrt{\pi})$	ff
	$p(f(f(a)))$	$p(\sqrt{3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi})$	tt
	$\vdots$		

このエルブラン解釈 $\mathscr{I}'$ のもとで A の変数に HD_A の元を代入した式
$q(a) \to p(f(a))$
$q(f(a)) \to p(f(f(a)))$
$\vdots$
はどれも真である．なぜなら，それらの真偽は，それぞれ，$\mathscr{I}$ における
$q(\sqrt{3}) \to p(\sqrt{3}+\sqrt{\pi})$
$q(\sqrt{3}+\sqrt{\pi}) \to p(\sqrt{3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi})$
$\vdots$
の値に等しく，仮定より，それらは全て真である．

定理 5.3.1 の工学上の意義:
エルブラン解釈は対象領域の値が「記号列」であるので，計算機で扱える．$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ (公理系での証明) も計算機で扱えるが，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足不能かの方が調べやすい.

特別な場合として，A に関数記号が含まれていないときは，HD_A は有限であり，かつ，エルブラン解釈も有限個であるので，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足不能かどうかは原理的には簡単に分かる.

例えば，$A(x,y) = p(x,y) \wedge \neg p(a,b)$ のとき，$HD_A = \{a,b\}$ であり，エルブラン解釈は，基礎式 $p(a,a), p(b,a), p(a,b), p(b,b)$ の真偽の定め方の 16 通りある．$\forall x \forall y\, A(x,y)$ がエルブラン解釈 $\mathscr{I}$ のもとで真であるというのと，$A(x,y)$ の x, y に $HD_A = \{a,b\}$ の元をすべての組み合せで代入した式がそれぞれエルブラン解釈 $\mathscr{I}$ のもとで真，すなわち，$A(a,a) \wedge A(b,a) \wedge A(a,b) \wedge A(b,b)$ がエルブラン解釈 $\mathscr{I}$ のもとで真であるというのとは同じである．したがって，$\forall x \forall y\, A(x,y)$ がエルブラン解釈のもとで充足不能というのは，$A(a,a) \wedge A(b,a) \wedge A(a,b) \wedge A(b,b)$ がエルブラン解釈のもとで充足不能というのと同じである．後者は，基礎式 $p(a,a), p(b,a), p(a,b), p(b,b)$ の真偽のどの定め方に対しても $A(a,a) \wedge A(b,a) \wedge A(a,b) \wedge A(b,b)$ が偽になるということである (基礎式をそれぞれ命題記号とみなせば，4 つの命題記号からなる命題論理式の充足不能性判定の問題である).

注意

定理 5.3.1 で，論理式が $\forall x_1\ \forall x_2 \cdots \forall x_n\ A[x_1, \ldots, x_n]$ の形であることが効いている．　$B = p(d) \wedge \exists x\ \neg p(x)$ において
$\mathscr{I}:\ D = \{0, 1\}, d = 0, p(0) = \mathsf{tt}, p(1) = \mathsf{ff}$ とすると B は $\mathscr{I}$ のもとで真.
したがって，B は充足可能．しかし，エルブラン解釈のもとでは充足不能である．$HD_B = \{d\}$ であり，エルブラン解釈は次の 2 通りしかない.
$\mathscr{I}_1 : HD_B = \{d\}, p(d) = \mathsf{tt}$
$\mathscr{I}_2 : HD_B = \{d\}, p(d) = \mathsf{ff}$
いずれのエルブラン解釈でも B は真ではない.

例 5.3.2

$\forall x\ p(a, x) \wedge \exists y\ \neg p(y, f(y))$ を真にするエルブラン解釈の一つ $\mathscr{I}_1$，偽にするエルブラン解釈の一つ $\mathscr{I}_2$ をあげて，そうであることを説明せよ.

エルブラン領域 HD は $HD = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
エルブラン解釈 $\mathscr{I}_1$ を次のように定める.
$p(a, a) = p(a, f(a)) = p(a, f(f(a))) = \cdots = \mathsf{tt}$
それ以外は (すなわち，p の第一引数の値が a 以外なら)ff
そうすると，$\forall x\ p(a, x)$ は真．また，$\neg p(f(a), f(f(a))$ は真ゆえ $\exists y\ \neg p(y, f(y))$ も真．したがって，$\mathscr{I}_1$ のもとで与式は真となる.

エルブラン解釈 $\mathscr{I}_2$ を次のように定める.
p は恒等的に ff(p の第一引数，第二引数の値が HD のどの元であっても，p の値は ff)．そうすると，$\forall x\ p(a, x)$ は偽. したがって，$\mathscr{I}_2$ のもとで与式は偽となる.

問 5.3.1

$\exists x\ \neg p(x) \wedge \forall x\ p(f(x))$ について，次のような解釈の例をそれぞれあげて，そうであることを説明せよ.

(1). D : 0 以上の実数全体　$f(x)$: $x^2 + \sqrt{5}$ とし，この論 理式を真にする解釈 $\mathscr{I}_1$
(2). D，f は (1) と同じで，かつ，この論理式を偽にする解釈 $\mathscr{I}_2$
(3). この論理式を真にするエルブラン解釈 $\mathscr{I}_3$
(4). この論理式を偽にするエルブラン解釈 $\mathscr{I}_3$

$A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の**エルブラン列**とは　A の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に，HD_A の元を全ての組み合せで代入して得られる式を並べたもの (注:一意ではない)

$A_1, A_2, \cdots$

例 5.3.3

$A[x,y] = (p(x) \vee \neg q(y)) \wedge \neg p(f(y)) \wedge q(f(y))$ とすると，$HD = \{a, f(a), f(f(a)), \cdots\}$
エルブラン列は，例えば，
$x \leftarrow a, y \leftarrow a$ として
$A_1 = (p(a) \vee \neg q(a)) \wedge \neg p(f(a)) \wedge q(f(a))$
$x \leftarrow f(a), y \leftarrow a$ として
$A_2 = (p(f(a)) \vee \neg q(a)) \wedge \neg p(f(a)) \wedge q(f(a))$
$x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)$ として
$A_3 = (p(a) \vee \neg q(f(a))) \wedge \neg p(f(f(a))) \wedge q(f(f(a)))$
$x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow a$ として
$A_4 = (p(f(f(a))) \vee \neg q(a)) \wedge \neg p(f(a)) \wedge q(f(a))$
$x \leftarrow f(a), y \leftarrow f(a)$ として
$A_5 = (p(f(a)) \vee \neg q(f(a))) \wedge \neg p(f(f(a))) \wedge q(f(f(a)))$
$\vdots$

この例では，$A_1 \wedge A_5$ はその中の $p(a), q(a), p(f(a)), q(f(a)), p(f(f(a))), q(f(f(a)))$ に真偽をどのように割り当てても偽．よって，$A_1 \wedge A_5$ はどんなエルブラン解釈のもとでも偽になる．すなわち，$A_1 \wedge A_5$ はエルブラン解釈のもとで充足不能である．$A_2 \wedge A_5$ や $A_4 \wedge A_5$ もそうであり，$A_1, A_2, \ldots$ 中のいくつかの A_j の論理積がエルブラン解釈で充足不能になるものは他にもある．

次の定理はエルブラン解釈に限ったときのコンパクト性定理に相当する．

定理 5.3.2

$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A[x_1, \ldots, x_n]$ がエルブラン解釈のもとで充足不能
$\Leftrightarrow$ $A[x_1, \ldots, x_n]$ のエルブラン列 $A_1, A_2, \ldots$ 中に，ある有限個の $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ が存在して，$A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}$ がエルブラン解釈のもとで充足不能．

定理 5.3.1 と定理 5.3.2 をあわせて**エルブランの定理**と呼ばれる．

定理 5.3.1，定理 5.3.2 の工学上の意義:
$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A$ の充足不能を調べるには，エルブラン解釈のもとで (その論理積が) 充足不能になるような有限個の $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ を見つければよいことになった．$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ を定めれば $A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}$ がエルブラン解釈のもとで充足不能かどうかは，現れている基礎式を命題記号と見て命題論理で調べられる．しかし，5.4 節では，この定理 5.3.2 は利用しているが，$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ の候補を直接列挙することなく，$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A$ がエルブラン解釈のもとで充足不能であることを調べる方法を述べる．

注意

エルブラン解釈，エルブラン列の定義から，$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足可能
$\Leftrightarrow$ A のエルブラン列 $A_1, A_2, \ldots$ に対し，無限個の $A_1, A_2, \ldots$ を同時に真にするエルブラン解釈が存在する

証明 (定理 5.3.2 の証明)

$\Leftarrow$ の証明:
$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A$ がエルブラン解釈のもとで充足不能でないとすると，あるエルブラン解釈で，

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ が真，すなわち，エルブラン列のどの A_i も真となるので，そのような $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ は存在しない．

$\Rightarrow$ の証明:

どの有限個の $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ に対しても，$A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}$ がエルブラン解釈のもとで充足可能とする．そうすると，無限個の論理式 $A_1, A_2, \ldots$ 中のどの有限個の論理式 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ に対しても (エルブラン解釈に限らない一般の解釈の) モデル (それらの論理式を同時に真にする解釈) があることになる.「コンパクト性定理」から，無限個の論理式 $A_1, A_2, \ldots$ はモデル $\mathscr{I}$ をもつ．定理 5.3.1 の $\Leftarrow$ の証明と同じようにしてそのモデル $\mathscr{I}$ からエルブラン解釈 $\mathscr{I}'$ を作ると，$A_1, A_2, \ldots$ はすべて $\mathscr{I}'$ で真になる．よって，上述の注より，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足可能となる． □

> **コメント:**
> 各基礎式を命題記号とみなせば，$\Rightarrow$ の証明を次のようにしてもよい．どの有限個の $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ に対しても，$A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}$ がエルブラン解釈のもとで充足可能とする．
>
> 各基礎式を命題記号とみなせば (異なる基礎式は異なる命題記号とする)，(無限個の命題記号を使った) 無限個の命題論理式 $A_1, A_2, \ldots$ 中のどの有限個の論理式 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ に対してもモデル (それらの論理式を同時に真にする解釈 (命題記号への真偽割り当て)) があることになる.「コンパクト性定理」から，無限個の命題論理式 $A_1, A_2, \ldots$ はモデル $\mathscr{I}$ をもつ．命題記号の真偽を基礎式の真偽に戻せば，解釈 $\mathscr{I}$ はエルブラン解釈になる．よって，上述の注より，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足可能となる．

なお，$\Rightarrow$ の証明は,「コンパクト性定理」を用いずに，次のようにしてもできる．この議論は，各基礎式を命題記号と見なし，したがって，無限個の命題記号があるとして，命題論理式に対する「コンパクト性定理」の証明を直接行っていることに相当している．

$A_1, A_2, \ldots$ に現れる各基礎式にそれぞれ真偽を割り当てて，次のような木 (意味木と呼ばれる) を考える．例で説明する．例 5.3.3 の A に対しては例えば次の図 (図 5.3.1) を考える．

端点の A_i，例えば，左から 4 つ目の A_5 は　$p(a) = \mathrm{tt}$，$q(a) = \mathrm{ff}$，$p(f(a)) = \mathrm{ff}$，$q(f(a)) = \mathrm{tt}$ であるような無限個のどのようなエルブラン解釈でも，$A_5 (= A^{x \leftarrow f(a), y \leftarrow f(a)})$ が偽になる．したがって，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ が偽になるということを表している．また，次のような意味木もある (図 5.3.2，5.3.3).

また，$A = (p(x) \vee \neg q(y)) \wedge \neg p(f(y))$ に対しては意味木は図 5.3.4 のように無限になる．

図 5.3.1 や図 5.3.2，5.3.3 のように意味木が (葉のラベルが全て □ の) 有限の木であるということは，その葉に現れる全ての A_i の論理積は <u>どんなエルブラン解釈でも偽になる</u>(エルブラン解釈のもとで充足不能) ということを表している．すなわち，図 5.3.1 は $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_5$ がエルブラン解釈のもとで充足不能，また，図 5.3.2 は $A_4 \wedge A_5$ がエルブラン解釈のもとで充足不能，図 5.3.3 は $A_1 \wedge A_5$ がエルブラン解釈のもとで充足不能であることを示している．

証明

$\Rightarrow$ の証明:

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ がエルブラン解釈のもとで充足不能とすると，どんなエルブラン解釈 $\mathscr{I}_H$ を一つ決めても，それに依存して決まるある基礎項 $t_1, \cdots, t_n \in HD$ があって，$A[t_1, \cdots, t_n]$(ある A_i) が偽になる．

上述の意味木で言えば，根からのどんなパス (根からの無限長のパスは一つのエルブラン解釈に対応) に対しても，そのパスで決まるある基礎項 $t_1, \cdots, t_n$ があって，根からのそのパス上で

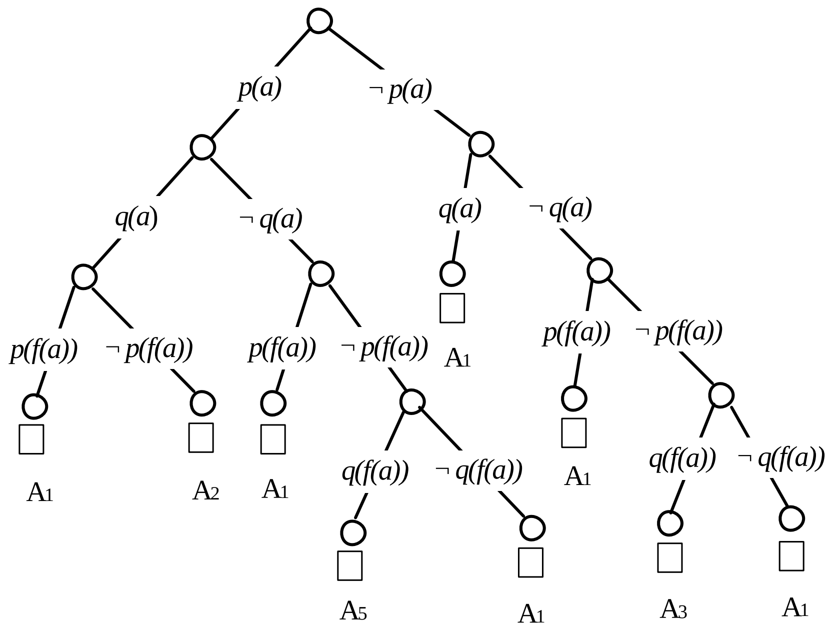


図 5.3.1: 例 5.3.3 の A に対する意味木の例

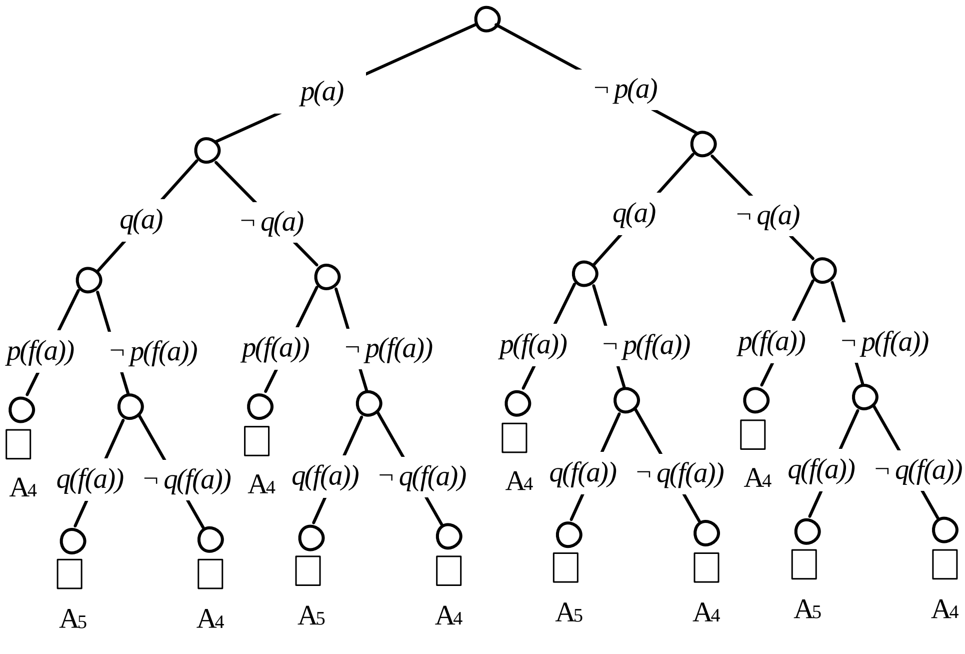


図 5.3.2: 例 5.3.3 の A に対する意味木の例

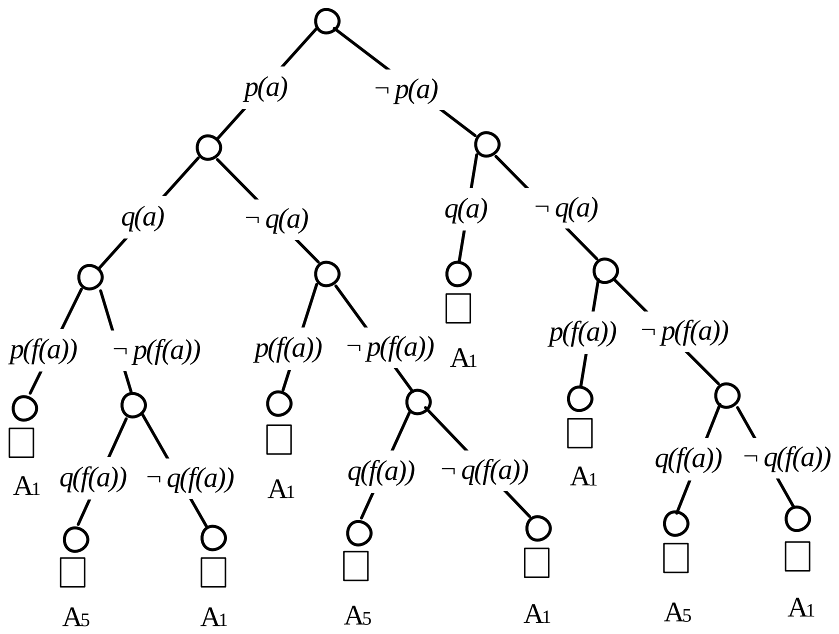


図 5.3.3: 例 5.3.3 の A に対する意味木の例

$A[t_1, \ldots, t_n]$ 中の基礎式への真偽を割り当てたところまでで A_i が偽になるので，ラベルが □ の端点 (葉) が現れる．

すなわち，意味木の根からのどんなパスも長さが有限であるということになる．

> **補題 3 (ケーニッヒの補題 (König の infinity lemma))**
> 出次数有限の根つき木が無限木ならば，無限長パスが存在する．

により，**木は有限**となる．パスの長さが有限でもパスが無限個あって，木全体が無限ということもあるのでは?という心配もありうるが，意味木 (出次数は 2) においては，ケーニッヒの補題より，そういうことはない．

有限個の全ての葉のそのような A_i をすべて $\wedge$ でつないだもの (例 5.3.3 の A に対しては，$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_5$ や $A_4 \wedge A_5$ や $A_1 \wedge A_5$ 等) はどんなエルブラン解釈でも偽になる (エルブラン解釈のもとで充足不能). □

具体的に $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ を一組選べば，$A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}$ がエルブラン解釈のもとで充足不能かどうかは，そこに現れている基礎式の個数は有限ゆえ，各基礎式への真偽の割り当て方全てに対して調べてみれば分かる (各基礎式を命題記号と見なせば，命題論理式の充足不能性の判定と同じこと)．しかし，m の値とかどの A_i を選べばよいかがあらかじめ分からないので，定理 5.3.1, 定理 5.3.2 の方法では，$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A[x_1, x2, \ldots, x_n]$ が充足不能か否かは決定できない (充足不能かそうでないかを一般に有限ステップで決定することはできない)．しかし，充足不能なときには，それを確かめることはできる．すなわち，それを確かめる半判定手続きはある．

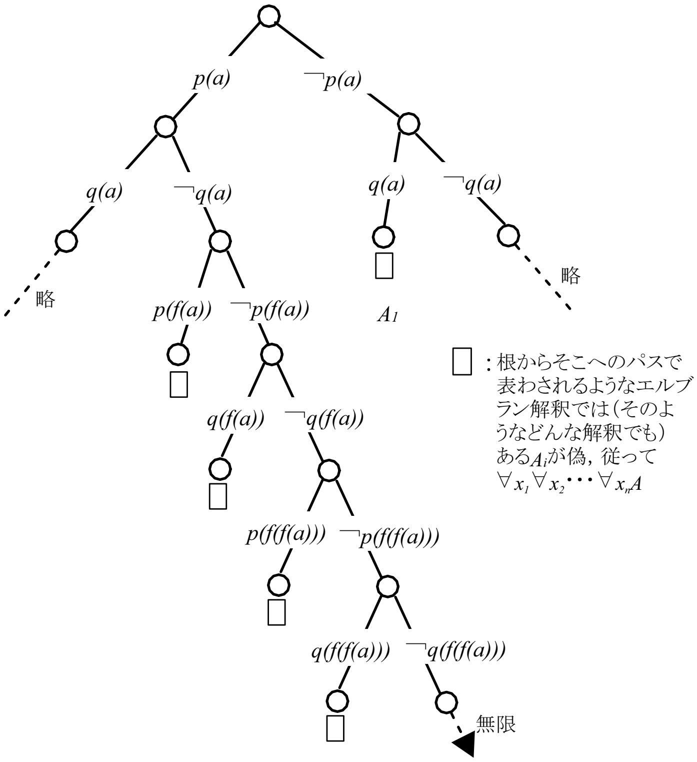

p(a)
¬p(a)
q(a)
¬q(a)
q(a)
¬q(a)
略
略
p(f(a))
¬p(f(a))
A1
q(f(a))
¬q(f(a))
p(f(f(a)))
¬p(f(f(a)))
q(f(f(a)))
¬q(f(f(a)))
無限
：根からそこへのパスで表わされるようなエルブラン解釈では（そのようなどんな解釈でも）あるAiが偽，従って∀x1∀x2・・・∀xnA

図 5.3.4: 無限の意味木

問 5.3.2

$\forall x_1 \, \forall x_2 \cdots \forall x_n \; A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が充足不能であるとき，それを確かめる方法を述べよ．

5.4 導出原理

定理 5.3.2 の方法で充足不能性を調べるときに，多少効率のよい方法を考えてみる．

$A[x_1, \cdots, x_n]$ を和積形論理式 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ に直す (各 C_i(節 clause) は，原子論理式またはその否定 (原子論理式またはその否定を**リテラル**と呼ぶ) の $\vee$ による結合).

エルブラン列中の A_{i_j} を $C_1^{i_j} \wedge C_2^{i_j} \wedge \cdots \wedge C_k^{i_j}$ とおき，これを k 個の節の集合と考える．さらに，A_1，A_2，$\cdots$ に対して，節の集合 $\{C_1^1, C_2^1, \ldots, C_k^1, C_1^2, C_2^2, \ldots, C_k^2, \ldots\}$ を考える．これらの各節を**基礎節** *(ground clause)* と呼ぶ.

エルブランの定理 (定理 5.3.1，定理 5.3.2) 及び $\wedge$ の定義より，ある有限個の基礎節の論理積が (エルブラン解釈のもとで) 充足不能のとき[8]，かつその時に限り，もとの $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ が充足不能である.

前出の例 5.3.3 のエルブラン列では，例えば基礎節の集合 $\{C_2^1, C_3^1, C_1^5\}$ すなわち，
$\{\neg p(f(a)), q(f(a)), p(f(a)) \vee \neg q(f(a))\}$ 基礎式 $p(f(a))$，$q(f(a))$ をそれぞれ命題記号 s，t で書き直せば，$\{\neg s, t, s \vee \neg t\}$) が充足不能である.

基礎節の集合 C' が与えられたとき，C' の充足不能性は，**導出節** *(resolvent)* を求めていき，空節 0 を導出できるかどうかによって判定できる (各基礎式を命題記号に対応させればよい)．空節 0 を導出する過程を**論駁 *(*反駁*)* 過程** *(refutation process)* という.

2つの節 $p(\cdots) \vee D$ と $\neg\, p(\cdots) \vee D'$ の導出節は $D \vee D'$

・互いに肯定と否定
・そうであるのは，この一組のみ

$p(\cdots) \vee D$ は同じリテラルを重複して含まないとする．$\neg p(\cdots) \vee D'$ も同じリテラルを重複して含まないとする．D，D' の両方に共通のリテラルがあれば，導出節 $D \vee D'$ の中には重複させずに一つだけ入れる．1 章で述べたように，$p(\cdots)$ と $\neg p(\cdots)$ の他にも肯定否定のリテラルがあってもよい.

例 5.4.1

$\neg p(f(a))$	(1)
$q(f(a))$	(2)
$p(f(a)) \vee \neg q(f(a))$	(3)
(2) と (3) の導出節は $p(f(a))$	(4)
(1) と (4) の導出節は 0	(5)

ゆえに (1)，(2)，(3) は充足不能.

導出節を求める操作を導出原理という．あるいは,「節集合が充足不能 $\Leftrightarrow$ 導出節を求めていくことにより空節が導出できる」という性質を**導出原理**という.

[8]節の論理積が充足不能であるということをそれらの節の集合が充足不能であるともいう．
節の集合に対する基礎項，基礎式，エルブラン基底，エルブラン解釈というような言い方もする.

実際には，変数を含んだ節の集合

C_1

$\vdots$

C_k

から出発して，変数への代入をうまく行って，充足不能な基礎節の集合を求めていく．その際，多少見通しを考えて，二つの節 $p(\cdots) \vee D$ と $\neg p(\cdots) \vee D'$，および変数への代入 θ_1，θ_2 をうまく選んで，導出節がつくれるようにする．

変数を含んだもとの $p(t_1,\ldots)$ と $\neg p(\tau_1,\ldots)$ において，変数へのある項 (一般には変数を含む項) の代入 θ_1，θ_2 を行って，$p(t_1,\ldots)^{\theta_1}$ と $\neg p(\tau_1,\ldots)^{\theta_2}$ を一致させることができるとき，そのような代入を一つ選んで，$p(t_1,\ldots)^{\theta_1} \vee D^{\theta_1}, \neg p(\tau_1,\ldots)^{\theta_2} \vee D'^{\theta_2}$ を作り，導出節 $D^{\theta_1} \vee D'^{\theta_2}$ を求める．ただし，代入によって $p(t_1,\ldots)^{\theta_1} \vee D^{\theta_1}$ や $\neg p(\tau_1,\ldots)^{\theta_2} \vee D'^{\theta_2}$ の中に同じリテラルが現れたら，ひとつにまとめてから，導出節を求める．もちろん，得られた導出節 $D^{\theta_1} \vee D'^{\theta_2}$ では同じリテラルは重複させない．

一致させることを**単一化** *(unification)* という (その代入を**単一化代入** *(unifier)* という).

例 5.4.2

$p(x) \vee \neg q(y)$	(1)
$\neg p(f(y))$	(2)
$q(f(y))$	(3)
(1) で $x = f(a)$，$y = f(a)$ とおいて $p(f(a)) \vee \neg q(f(a))$	(4)
(2) で $y = a$ とおいて $\neg p(f(a))$	(5)
(4) と (5) の導出節は $\neg q(f(a))$	(6)
(3) で $y = a$ とおいて $q(f(a))$	(7)
(6) と (7) の導出節は 0	(8)

例 5.4.2 において，例えば

(1) で，$x = f(f(a))$，$y = f(f(f(a)))$ とおいて $p(f(f(a))) \vee \neg q(f(f(f(a))))$	(4)
(2) で $y = f(a)$ とおいて $\neg p(f(f(a)))$	(5)
(4) と (5) の導出節は $\neg q(f(f(f(a))))$	(6)
(3) で $y = f(f(a))$ とおいて $q(f(f(f(a))))$	(7)
(6) と (7) の導出節は 0	(8)

としても目的は達せられるが，前述の反駁の方が代入が簡単なため見やすい．

注意

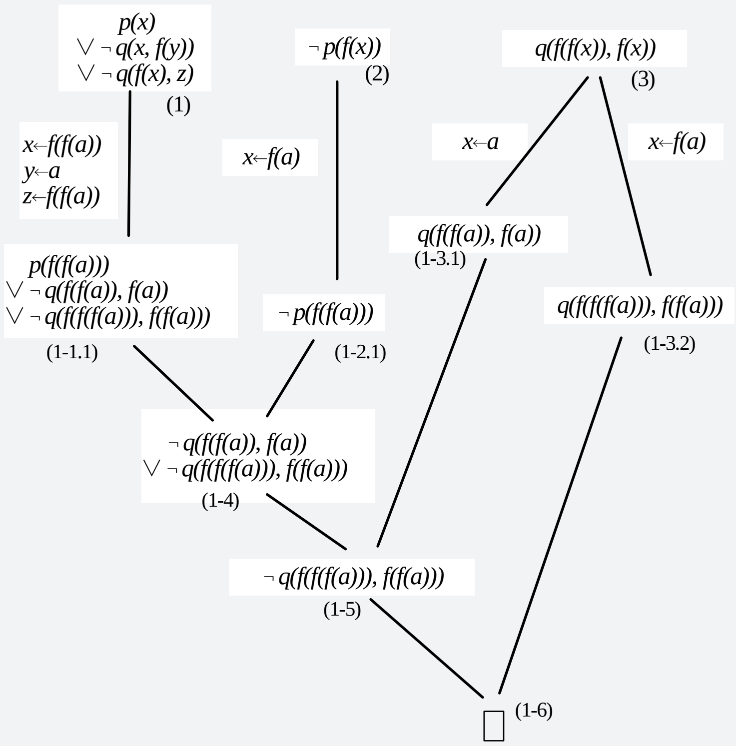
式 (1) の変数 y と式 (2) の変数 y には同じものを代入する必要はない．式 (2) で $f(y)$ を x に置き換えることはできない．これは代入ではない．

式 (1) の p(x) と式 (2) の $\neg p(f(y))$ を同一にするために (1) の x に $f(a)$ を，(2) の y に a を代入している．しかし，(1) の y に何を代入しておいたらよいかはその時点では分からない．対処の仕方についてはあとで学ぶ.

例 5.4.3

基礎節による反駁

$p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z)$	(1)
$\neg p(f(x))$	(2)
$q(f(f(x)), f(x))$	(3)
(1) で $x = f(f(a)), y = a, z = f(f(a))$ とおいて	
$p(f(f(a))) \vee \neg q(f(f(a)), f(a)) \vee \neg q(f(f(f(a))), f(f(a)))$	(1-1.1)
(2) で $x = f(a)$ とおいて $\neg p(f(f(a)))$	(1-2.1)
(1-1.1) と (1-2.1) の導出節は $\neg q(f(f(a)), f(a)) \vee \neg q(f(f(f(a))), f(f(a)))$	(1-4)
(3) で $x = a$ とおいて $q(f(f(a)), f(a))$	(1-3.1)
(1-4) と (1-3.1) の導出節は $\neg q(f(f(f(a))), f(f(a)))$	(1-5)
(3) で $x = f(a)$ とおいて $q(f(f(f(a))), f(f(a)))$	(1-3.2)
(1-5) と (1-3.2) の導出節は 0	(1-6)



例 5.4.3

この例では，(1) の $p(x)$ と (2) の $\neg p(f(x))$ を同一にするために (1) の x に $f(f(a))$ を，(2) の x に $f(a)$ を代入している．ここだけ見れば，(1) の x に $f(a)$ を，(2) の x に a を代入しても導出節が得られるが，その導出節は最終的な反駁には役立たない．また，(1) の y や z に何を代入しておいたらよいかはこの時点では分からない．これらに対する対処の仕方についてはあとで学ぶ．

今まで述べてきたように，エルブランの定理 (定理 5.3.1，定理 5.3.2) 及び命題論理における導出原理の正しさ (和積形の命題論理式が充足不能 $\Leftrightarrow$ 導出節を求めていくことにより空節が導出できる) より，次のことが言える (推論の仕方などに対しても，それが健全である，完全であるなどという言い方をする)．

定理 5.4.1 (基礎節による反駁の健全性)

A の節集合 S に対する空節を導出する基礎節を用いた反駁があれば $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$ は充足不能で

ある．

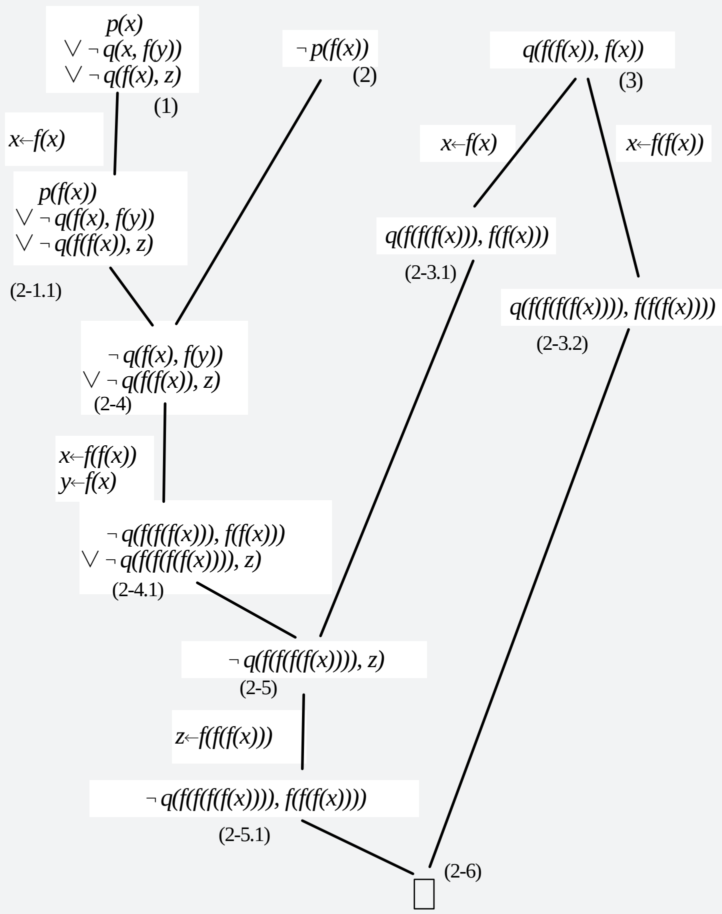
定理 5.4.2 (基礎節による反駁の完全性)
$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$ が充足不能であれば，A の節集合 S に対する基礎節を用いた反駁が存在する．

例 5.4.2 および例 5.4.3 のあとで述べたように，変数へどんな基礎項を代入しておいたらよいかは前もって分からない．そこで，導出で消されるリテラル $p(\cdots)$ と $\neg p(\cdots)$ 中に現れているような変数に対して，変数が入った項を代入し，変数が入ったままで導出節を求めていく．代入された項中の変数にはあとでまた変数が入った項を代入してよい．

例 5.4.4

変数付きの項を代入する反駁

$p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z)$ (1)
$\neg p(f(x))$ (2)
$q(f(f(x)), f(x))$ (3)
(1) に代入 $x \leftarrow f(x)$ を施すと
$p(f(x)) \vee \neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z)$ (2-1.1)
(2-1.1) と (2) の導出節は
$\neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z)$ (2-4)
(2-4) に代入 $x \leftarrow f(f(x))$, $y \leftarrow f(x)$ を施すと
$\neg q(f(f(f(x))), f(f(x))) \vee \neg q(f(f(f(f(x)))), z)$ (2-4.1)
(3) に代入 $x \leftarrow f(x)$ を施すと
$\neg q(f(f(f(x))), f(f(x)))$ (2-3.1)
(2-4.1) と (2-3.1) の導出節は $\neg q(f(f(f(f(x)))), z)$ (2-5)
(3) に代入 $x \leftarrow f(f(x))$ を施すと
$q(f(f(f(f(x)))), f(f(f(x))))$ (2-3.2)
(2-5) に代入 $z \leftarrow f(f(f(x)))$ を施すと
$\neg q(f(f(f(f(x)))), f(f(f(x))))$ (2-5.1)
(2-3.2) と (2-5.1) の導出節は 0. (2 - 6)



例 5.4.4

最も簡単な代入ではないが，説明のためにこうしておく．この反駁において各式の変数に最終的に何を代入したかを追跡してみよう．

例えば，(1) の x には $x \leftarrow f(x)$，その後 $x \leftarrow f(f(x))$ が代入されているので，最終的には $x \leftarrow f(f(f(x)))$ が代入されたことになる．それぞれまとめると，

(1) の x，y，z には $x \leftarrow f(f(f(x)))$，$y \leftarrow f(x)$，$z \leftarrow f(f(f(x)))$

(2) の x には $x \leftarrow f(f(x))$

(3) の x には $x \leftarrow f(x)$，および $x \leftarrow f(f(x))$

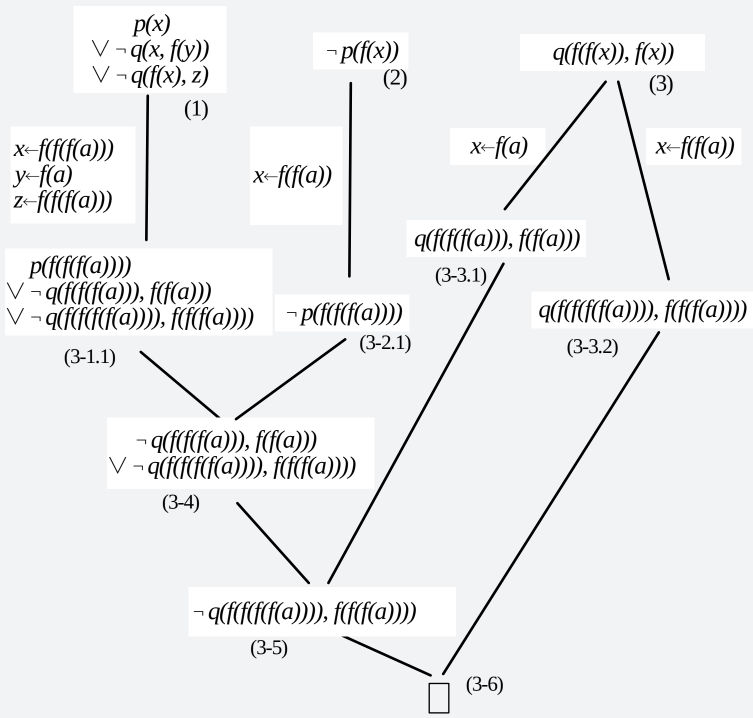
が代入されたことになる．

これらの代入における最終的な引数 (今の場合は x) に定数 a を代入すると，基礎節を用いた反駁が得られる．次の例がそのようにして得られたものである．

例 5.4.5

変数付きの項を代入する反駁から得られた基礎節による反駁

$p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z)$	(1)
$\neg p(f(x))$	(2)
$q(f(f(x)), f(x))$	(3)
(1) に代入 $x \leftarrow f(f(f(a)))$，$y \leftarrow f(a)$，$z \leftarrow f(f(f(a)))$ を施すと	
$p(f(f(f(a)))) \vee \neg q(f(f(f(a))), f(f(a))) \vee \neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	(3-1.1)
(2) に代入 $x \leftarrow f(f(a))$ を施すと $\neg p(f(f(f(a))))$	(3-2.1)
(3-1.1) と (3-2.1) の導出節は $\neg q(f(f(f(a))), f(f(a))) \vee \neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	(3 - 4)
(3) に代入 $x \leftarrow f(a)$ を施すと $\neg q(f(f(f(a))), f(f(a)))$	(3-3.1)
(3-4) と (3-3.1) の導出節は $\neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	(3-5)
(3) に代入 $x \leftarrow f(f(a))$ を施すと $q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$	(3-3.2)
(3-5) と (3-3.2) の導出節は 0.	(3-6)



例 5.4.5

上述の例から分るように，変数の入った項を代入して反駁を行って，空節を導出できたときは，

基礎節を用いた反駁もあることになる．したがって，(基礎節による反駁の健全性) より，次の一般の (変数の入った項も代入する) 反駁の健全性定理が得られる．

定理 5.4.3 ((変数の入った項も代入する) 反駁の健全性)
A の節集合 S に対する空節を導出する (変数の入った項も代入する) 反駁があれば $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$ は充足不能である．

注意

次のように議論しても (反駁の健全性) を直接示すことができる．D を (一般に変数を含む) 節 D_1，D_2 の導出節とすると $D_1, D_2 \models D$ が成り立つことが確かめられる．(命題論理のときの記法では $A \wedge B \leq res(A, B)$ に対応する．) $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$ が充足可能なら A は充足可能であり，したがって，A の節集合 S のモデルがあり (A は節の論理積で表されていることに注意)，導出で得られるすべての節はそのモデルで真である．空節は真にはなりえないので，空節を導出するような反駁はない．

また，$\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A$ が充足不能であれば，変数の入った項を代入するとき，最汎単一化代入 (**最一般単一化代入，*most general unifier*，*mgu***) と呼ばれる特定の代入のみを行うことによって，反駁が得られる．以下，このことを見てみよう．

項や原子論理式の有限集合 $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ に対し (各 E_i には共通の変数はないとする)，$E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$ なる代入 θ を，S の単一化代入 (unifier) という．特に，S の単一化代入 θ が次の条件を満たすとき S の**最汎単一化代入 *(*最一般単一化代入，*most general unifier*，*mgu)*** であるという．(求め方は後述)

条件：「S の任意の単一化代入 ρ に対し，$\rho = \theta\gamma$ なる代入 γ が存在する．」

一般に mgu は複数個存在する．

$p(u)$，$p(f(v))$ の mgu は例えば $\theta = \langle u \leftarrow f(w), v \leftarrow w\rangle$ である．

$q(x, f(y))$，$q(f(f(u)), f(u))$ の mgu は例えば $\theta = \langle x \leftarrow f(f(v)), y \leftarrow v, u \leftarrow v\rangle$ である．

$q(x, f(y))$，$q(f(f(u)), f(u))$ の単一化代入例えば $\rho = \langle x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow a, u \leftarrow a\rangle$ に対しては $\rho = \theta\langle v \leftarrow a\rangle$ であり，$\rho' = \langle x \leftarrow f(f(f(w))), y \leftarrow f(w), u \leftarrow f(w)\rangle$ に対しては $\rho' = \theta\langle v \leftarrow f(w)\rangle$ である．

各 E_i には共通の変数はないとし，$E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$ なる一つの共通の代入 θ を考えているが，こうしておいた方が説明などが簡潔になり扱やすいためである (そうでなければ，各 E_i ごとに，それに含まれる変数への代入を指定しなくてはいけない)．もし，共通の変数があれば名前を変えて共通の変数はないようにしておいて議論し，もし必要ならあとで元の変数に対してはどうであったかなど調べればよい．

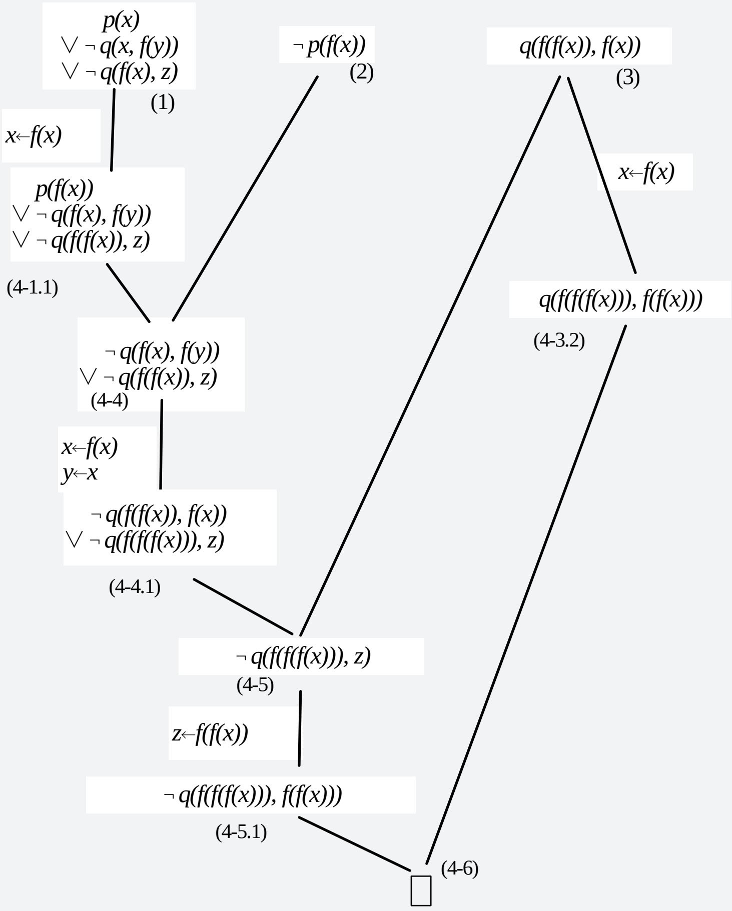
さて，(基礎節による反駁の完全性) より，基礎節による反駁があれば，代入を mgu に限ったときの反駁もあるということを確かめればよい．

次の例は mgu を用いた反駁である．

例 5.4.6

mgu を用いた反駁

$p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z)$	(1)
$\neg p(f(x))$	(2)
$q(f(f(x)), f(x))$	(3)
(1) に代入 $x \leftarrow f(x)$ を施すと	
$p(f(x)) \vee \neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z)$	(4-1.1)
(4-1.1) と (2) の導出節は $\neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z)$	(4-4)
(4-4) に代入 $x \leftarrow f(x), y \leftarrow x$ を施すと	
$\neg q(f(f(x)), f(x)) \vee \neg q(f(f(f(x))), z)$	(4-4.1)
(4-4.1) と (3) の導出節は $\neg q(f(f(f(x))), z)$ (4-5)	
(3) に代入 $x \leftarrow f(x)$ を施すと $q(f(f(f(x))), f(f(x)))$	(4-3.2)
(4-5) に代入 $z \leftarrow f(f(x))$ を施すと $\neg q(f(f(f(x))), f(f(x)))$ (4-5.1)	
(4-3.2) と (4-5.1) の導出節は 0.	(4-6)



例 5.4.6

共通の変数を持ったままで行っているが，(1) と (2) の mgu は $\langle(1)$ で $x \leftarrow f(x), y \leftarrow y, z \leftarrow z, (2)$ で $x \leftarrow x\rangle$ である．(4-4) と (3) の mgu は $\langle(4-4)$ で $x \leftarrow f(x), y \leftarrow x, z \leftarrow z, (3)$ で $x \leftarrow x\rangle$ である．(3) と (4-5) の mgu は $\langle(3)$ で $x \leftarrow f(x), (4-5)$ で $x \leftarrow x, z \leftarrow f(f(x))\rangle$ である．

基礎節による反駁があれば，mgu を用いた反駁があるということを今の例で見てみよう．基礎節による反駁として，例 5.4.5 を考えよう．そして，それをもとにして，mgu を用いた反駁例 (例

5.4.6) が存在するということを確認してみよう．例 5.4.5 における (3-1.1) と (3-2.1) はそれぞれ (1) と (2) の変数に基礎項を代入する単一化代入

$$\langle (1) \text{ で } x \leftarrow f(f(f(a))), y \leftarrow f(a), z \leftarrow f(f(f(a))), (2) \text{ で } x \leftarrow f(f(a)) \rangle$$

を施して得られる．

このとき，(3-1.1) と (3-2.1) の導出節は

$$\neg q(f(f(f(a))), f(f(a))) \vee \neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a)))) \tag{3-4}$$

である．この導出節 (3-4) に対し，(1) と (2) の mgu

$$\langle (1) \text{ で } x \leftarrow f(x), y \leftarrow y, z \leftarrow z, (2) \text{ で } x \leftarrow x \rangle$$

を (1) と (2) に施して得られた

$$p(f(x)) \vee \neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z) \tag{4-1.1}$$

$$\neg p(f(x)) \tag{2}$$

の導出節

$$\neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z) \tag{4-4}$$

があって，この変数にある基礎項の代入を施して導出節 (3-4) を必ず得ることができる．今の場合は (4-4) で

$$x \leftarrow f(f(a)),\ y \leftarrow f(a),\ z \leftarrow f(f(f(a)))$$

を施して得ることができる．

さらに，また，

$$\neg q(f(f(f(a))), f(f(a))) \tag{3-3.1}$$

は

$$q(f(f(x)), f(x)) \tag{3}$$

の変数への基礎項の代入 (3) で $x \leftarrow f(a)$ を施して得られる．

このとき，(3-4) と (3-3.1) の導出節は

$$\neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a)))) \tag{3-5}$$

であるが，この導出節 (3-5) は，(4-4) と (3) の mgu

$$\theta = \langle (4-4) \text{ で } x \leftarrow f(x), y \leftarrow x, z \leftarrow z, (3) \text{ で } x \leftarrow x \rangle$$

を (4-4) と (3) に施して得られた

$$\neg q(f(f(x)), f(x)) \vee \neg q(f(f(f(x))), z) \tag{4-4.1}$$

$$q(f(f(x)), f(x)) \tag{3}$$

の導出節

$$\neg q(f(f(f(x))), z) \tag{4-5}$$

の変数にある基礎項の代入を施して必ず得ることができる．今の場合は

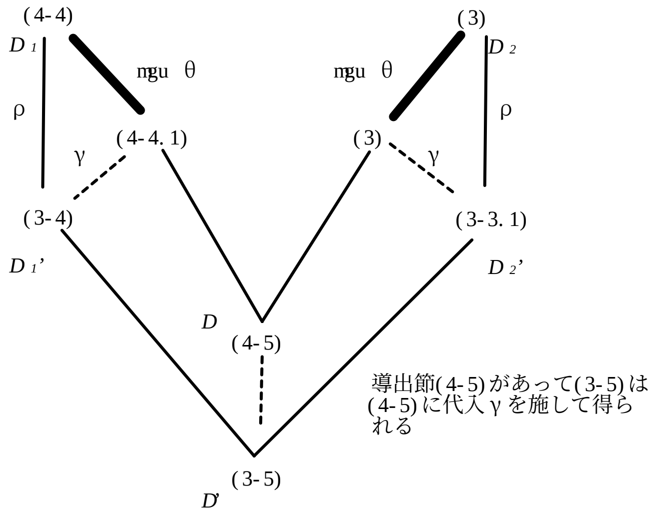
$$x \leftarrow f(a),\ z \leftarrow f(f(f(a)))$$

を施して得ることができる．

このように，例 5.4.5 における反駁の各節に対し，例 5.4.6 の mgu を用いた反駁を作っていくことができる．

ここで，(4-4) から代入で (3-4) が得られる，(4-5) から代入で (3-5) が得られるという理由は次のとおりである．後者について言えば，mgu の性質より，(3-4) と (3-3.1) は，(4-4) と (3) の mgu θ の引数 x，z にさらにある代入 γ を行って得られる．今の場合は，代入

$\gamma = \langle x \leftarrow f(a), z \leftarrow f(f(f(a))) \rangle$
を行えば得られる．導出節の求め方から，mgu で得られた (4-4.1) と (3) の導出節
$\neg q(f(f(f(x))), z)$　(4-5)
の変数 x，z にその同じ代入
$\gamma = \langle x \leftarrow f(a), z \leftarrow f(f(f(a))) \rangle$ をさらに施せば，
$\neg q(f(f(f(f(a)))), f(f(f(a))))$　$(3-5)$
に一致する．



一般に次のことが成り立つ．

補題 4 (持ち上げ補題，lifting lemma)
節 D_1'，D_2' をそれぞれ節 D_1，D_2 に基礎項を代入して得られる基礎節とし，基礎節 D' を D_1' と D_2' の導出節とする．このとき，D_1 と D_2 の mgu を用いた導出節で，その変数にある基礎項を代入すれば D' に一致するような導出節 D が存在する．

注意

D_1 と D_2 にある代入 θ を施して得た $D_1\theta$ と $D_2\theta$ の導出節を単に D_1 と D_2 の導出節というような言い方もする．例えば，式 (4-5) は式 (4-4) と (3) の導出節ともいう．

この (持ち上げ補題) を繰返し適用することによって，基礎節だけを用いた反駁があれば，代入として mgu だけを用いた反駁もあることが分る．

さきの例では，引き続いて，(3-5) と (3-3.2) から基礎節での導出節 0(3-6) を得ているが，これは，(4-5) と (3) から mgu で得られた導出節にさらにある代入すれば得られる．代入で 0 を得るには mgu で得られた導出節も 0 でなくてはいけない．事実，0(4-6) である．

以上のことより，一般に，mgu を用いた反駁の完全性が言える．

定理 5.4.4 (mgu を用いた反駁の完全性)
$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ A$ が充足不能であれば，A の節集合 S に対する空節を導出する mgu を用いた反駁がある．

反駁の健全性と完全性は，この授業で学ぶ極めて重要な基本的性質である (述語論理の公理系の健全性，完全性と同じように).

注意

基礎節あるいは変数を含む節にかかわらず，D_1 と D_2 の導出節を求めるとき，代入によって D_1 あるいは D_2 中に同じリテラルが現れたら一つにまとめる (異なるものだけを $\vee$ で結ぶべきである).

$C_1 = S(x) \vee S(y)$，$C_2 = \neg S(u) \vee \neg S(v)$ などに対しては，例えば C_1 で $x \leftarrow y$ とおいて C_1 を $S(y) \vee S(y) = S(y)$ にする．C_2 で $u \leftarrow v$ とおいて C_2 を $\neg S(u)$ にする．そうすると $S(y)$ と $\neg S(u)$ から簡単に空節が導ける．

もちろん，例えば C_1 で $x \leftarrow y$，C_2 で $u \leftarrow y$，$v \leftarrow y$ とおいて $S(y)$ と $\neg S(y)$ を作り，空節を直接導いてもよい．また，同じように，基礎節で反駁を行ってもよい．

代入で同じ節を作ることなく先に導出節を求めてもよいが，その後，どっかでまとめる必要がある．例えば，C_1 で $x = u$ とおいて，C_2 と導出節をとると，$S(y) \vee \neg S(v)$．これと C_2 で $u = y$ とおいて導出節をとると $\neg S(v) \vee \neg S(v) = \neg S(v)$(結果の導出節で同じリテラルをまとめた．) (もし，C_2 で $v = y$ とおいて導出節をとると $\neg S(u) \vee \neg S(v)$ となって骨折り損 $\cdots$)　$\neg S(v)$ と C_1 で $x = v$ とおいて導出節をとると $S(y)$，ここで $y = v$ とおいて $\neg S(v)$ と導出節をとると 0 が得られる．

例 5.4.7

$p(f(u)) \vee p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z)$ (1)
$\neg p(f(f(v))) \vee \neg p(f(x))$ (2)
$q(f(f(x)), f(x))$ (3)
(1) に例えば代入 $x \leftarrow f(u)$ を施して $p(f(u))$ を一つにまとめると
$p(f(u)) \vee \neg q(f(u), f(y)) \vee \neg q(f(f(u)), z)$ (4)
(2) に $x \leftarrow f(v)$ を施して $\neg p(f(f(v)))$ をひとつにまとめると
$\neg p(f(f(v)))$ (5)
このあと，$p(f(u))$ と $p(f(f(v)))$ を単一化して，例えば $u \leftarrow f(v)$ を施して導出節
$\neg q(f(f(v)), f(y)) \vee \neg q(f(f(f(v))), z)$ (6)
を作っていけばよい．

もちろん，代入で同じ節を作ることなくまず導出節を求めてもよいが，
そのあと，どこかでまとめる必要がある．
例えば，(1) で $u \leftarrow f(v)$，$x \leftarrow w$ とおいて (2) との導出節を求めると
$p(w) \vee \neg q(w, f(y)) \vee \neg q(f(w), z) \vee \neg p(f(x))$ (7)
(1) で $u \leftarrow x$ とおいて (7) との導出節を求めると
$p(x) \vee \neg q(x, f(y)) \vee \neg q(f(x), z) \vee p(w) \vee \neg q(w, f(y)) \vee \neg q(f(w), z)$ (8)
((7) の x はなくなるので (1) の x は変える必要はない．)
導出節 (8) で $x \leftarrow w$ とおいてまとめると
$p(w) \vee \neg q(w, f(y)) \vee \neg q(f(w), z)$ (9)
(9) で $w \leftarrow f(x)$ とおいて (2) との導出節を求めると
$\neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z) \vee \neg p(f(f(v)))$ (10)
(9) で $w \leftarrow f(f(v))$ とおいて (10) との導出節を求めると
$\neg q(f(f(v)), f(y)) \vee \neg q(f(f(f(v))), z) \vee \neg q(f(x), f(y)) \vee \neg q(f(f(x)), z)$ (11)
(11) で $x \leftarrow f(v)$ とおいてまとめると
$\neg q(f(f(v)), f(y)) \vee \neg q(f(f(f(v))), z)$ が得られる．これは (6) と同じである．あと，(6) と (3) とから 2 回導出を行えば，空節が得られる．

例 5.4.8

$A \triangleq \forall x\,(q(x) \to \exists u\, r(x,\, u))$

$B \triangleq \forall x\,(p(x) \to q(x))$

$D \triangleq \forall x\,(p(x) \to \exists u\, r(x,\, u))$

とおく．$A \wedge B \to D$ が恒真であることを示せ．

$A \wedge B \to D$ は閉論理式である．$A \wedge B \to D$ の恒真をいうには，$\neg(A \wedge B \to D)$ すなわち $A \wedge B \wedge \neg D$ の充足不能性を示せばよい．

$A \wedge B \wedge \neg D$ を冠頭標準形に直す (等価な式を $=$ で繋ぐ)．

$A = \forall x(\neg q(x) \vee \exists u\, r(x,u))$
$\quad = \forall x\, \exists u(\neg q(x) \vee r(x,u))$
$B = \forall x(\neg p(x) \vee q(x))$
$\neg D = \exists x \neg(\neg p(x) \vee \exists u\, r(x,u))$
$\quad = \exists x\, (p(x) \wedge \forall u \neg r(x,u))$
$\quad = \exists x \forall u (p(x) \wedge \neg r(x,u))$

ゆえ，($A \wedge B \wedge \neg D$ から出発しても，上のように先にそれぞれの節を冠頭標準形に直しておいても同じこと)

$A \wedge B \wedge \neg D$
$= \exists x[\forall y\, \exists u\, (\neg q(y) \vee r(y,u))$
$\quad \wedge \forall y\, (\neg p(y) \vee q(y))$
$\quad \wedge \forall u\, (p(x) \wedge \neg r(x,u)]$
$= \exists x \forall y[\exists u(\neg q(y) \vee r(y,u))$ (*)
$\quad \wedge (\neg p(y) \vee q(y))$
$\quad \wedge p(x)$
$\quad \wedge \neg r(x,y)]$
$= \exists x \forall y \exists u[(\neg q(y) \vee r(y,u))$
$\quad \wedge (\neg p(y) \vee q(y))$
$\quad \wedge p(x) \qquad \wedge \neg r(x,y)]$

変数 x，u にそれぞれスコーレム 関数 a，$h(y)$ を導入して $\exists$ をなくすと

$\forall y[(\neg q(y) \vee r(y,h(y))$
$\quad \wedge (\neg p(y) \vee q(y))$
$\quad \wedge p(a)$
$\quad \wedge \neg r(a,y)]$

導出節を作っていく．

$\neg q(y) \vee r(y,h(y))$	(1)
$\neg p(y) \vee q(y)$	(2)
$p(a)$	(3)
$\neg r(a,y)$	(4)
(2) で $y=a$ とおくと $\neg p(a) \vee q(a)$	(5)
(3) と (5) の導出節は $q(a)$	(6)
(1) で $y=a$ とおくと $\neg q(a) \vee r(a,h(a))$	(7)
(6) と (7) の導出節は $r(a,h(a))$	(8)
(4) で，$y=h(a)$ とおくと $\neg r(a,h(a))$	(9)
(8) と (9) の導出節は 0	(10)

(*) のところで，もし定理 5.1.1 の証明中の変換法を用いていたら，例えば

$\exists x \forall y[\exists u(\neg q(y) \vee r(y,u)$
$\quad \wedge \forall z(\neg p(z) \vee q(z))$
$\quad \wedge \forall u(p(x) \wedge \neg r(x,u))]$

のようになる．そのような変換法を用いて，後の手続きを実行し，充足不能性を確かめよ．

また，この例では $\forall x \cdots \wedge \forall x \cdots \wedge \exists x \cdots$ のようなとき，まず $\exists x$ を取り出した．先に $\forall x$ を (共通に) 取り出した場合のあとの手続きを実行せよ．なぜ，$\exists x$ を先に取り出したのか．

単一化の方法

例えば

$$p(x,\ h(g(u,u)), g(x,v)) \tag{1}$$

$$p(h(y), h(x), \quad x) \tag{2}$$

を単一化する．

(1) と (2) を左からみて最初に違う x と $h(y)$ を一致させるために (1) で $x \leftarrow h(y)$.

(1) で $x \leftarrow h(y)$:

$p(h(y), h(g(u,u), g(h(y), v))$ (1-1)

(1-1) と (2) を左からみて最初に違う $g(u,u)$ と x を一致させるために (2) で $x \leftarrow g(u,u)$.

(2) で $x \leftarrow g(u,u)$:

$p(h(y), h(g(u,u)), g(u,u)))$ (2-1)

(1-1) と (2-1) を左からみて最初に違う $h(y)$ と u を一致させるために (2-1) で $u \leftarrow h(y)$.

(2) で $x \leftarrow g(u,u) \bullet u \leftarrow h(y)$ すなわち $x \leftarrow g(h(y), h(y))$:

$p(h(y), h(g(h(y), h(y))), g(h(y), h(y))))$ (2-2)

(1-1) と (2-2) を左からみて最初に違う u と $h(y)$ を一致させるために (1-1) で $u \leftarrow h(y)$.

(1) で $x \leftarrow h(y)$, $u \leftarrow h(y)$:

$p(h(y), h(g(h(y), h(y)), g(h(y), v))$ (1-2)

(1-2) と (2-2) を左からみて最初に違う v と $h(y)$ を一致させるために (1-2) で $v \leftarrow h(y)$.

(1) で $x \leftarrow h(y)$, $u \leftarrow h(y)$, $v \leftarrow h(y)$:

$p(h(y), h(g(h(y), h(y))), g(h(y), h(y))))$ (1-3)

(1-3) と (2-2) は一致する.

上記の方法において，もとの (1), (2) で変数の集合を互いに素 (共通集合を持たない) にしておいたほうが扱いやすい．変数名を付け替えて互いに素になるようにし，単一化し終ってから元の変数に戻す．互いに素であれば，代入は両方の式に行うとしてよい．違う所が，一方が変数例えば u, 他方が項 t(ただし u を含まない) とき，$u \leftarrow t$ を行っていく．単一化できるなら，それで成功する．単一化できないときは，そのような組み合せにならない.

(2) で $x \leftarrow z$ を施すと

$p(h(y), h(z), z)$ (2')

(1) と (2') を左からみて最初に違う x と $h(y)$ を一致させるために $x \leftarrow h(y)$.

(1) は

$p(h(y), h(g(u,u), g(h(y), v))$ (1-1)

となる.

(1-1) と (2') を左からみて最初に違う $g(u,u)$ と z を一致させるために $z \leftarrow g(u,u)$.

(2') は

$p(h(y), h(g(u,u)), g(u,u)))$ (2'-1)

となる.

(1-1) と (2'-1) を左からみて最初に違う $h(y)$ と u を一致させるために $u \leftarrow h(y)$.

(1-1) と (2'-1) はそれぞれ

$p(h(y), h(g(h(y), h(y))),\ g(h(y), v))$ (1-2)

$p(h(y), h(g(h(y), h(y))),\ g(h(y), h(y))))$ (2'-2)

となる.

(1-2) と (2'-2) を左からみて最初に違う v と $h(y)$ を一致させるために $v \leftarrow h(y)$.

(1-2) は

$p(h(y), h(g(h(y), h(y))), g(h(y), h(y))))$ (1-3)

となり，(2’-2) と一致する．

代入の列 $x \leftarrow h(y)$，$z \leftarrow g(u,u)$，$u \leftarrow h(y)$，$v \leftarrow h(y)$ より，(1) への代入は $x \leftarrow h(y)$，$u \leftarrow h(y)$，$v \leftarrow h(y)$，(2’) への代入は $z \leftarrow g(u,u)$，$u \leftarrow h(y)$ より $z \leftarrow g(h(y),h(y))$，したがって，(2) への代入は $x \leftarrow g(h(y),h(y))$．

上述の方法で mgu が求まる．

単一化の効率の良い (式長に対して線形時間の) 手続きが知られている (ただし，答は $x_0 \leftarrow f(x_1,x_1,x_2)$，$x_1 \leftarrow g(x_2,x_3),\cdots$ のように書いてよいとする)．

問 5.4.1

単一化できれば単一化せよ．

(1). $p(x_1,f(x_1,x_1),x_3,f(x_3,x_3),x_5)$
$p(f(y_0,y_0),y_2,f(y_2,y_2),y_4,f(y_4,y_4))$

(2). $p(x,h(x),h(g(a,h(v))))$
$p(g(y,z),u,u)$

(3). $q(x,x,h(g(x)))$
$q(f(y),z,z)$

問 5.4.2

$A \triangleq \forall x\exists y\forall z(q(x,y)\vee p(z))$
$B \triangleq \exists x\forall y\neg q(x,y)$
$C \triangleq \exists x\, p(x) \to \forall x r(x)$
$D \triangleq \exists x\, r(x)$
とおく．$A\wedge B\wedge C \to D$ が恒真であること，すなわち，
$\neg(A\wedge B\wedge C \to D)$　(*)
が充足不能であることを導出原理を用いて証明せよ．

(1). 式 (*) を冠頭標準形に直せ．母式は原子論理式の和積形にせよ．

(2). スコーレム関数を用いて，∃ を消去せよ．

(3). 空節を導出せよ．

例 5.4.9

演算 ● で閉じている系を考える．結合律 $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ を満たし，かつ方程式 $x \bullet a = b$ および $a \bullet y = b$ は左解 x，右解 y を持つものとする．このとき，右単位元 (どの元 s に対しても $s \bullet e = s$ なる元 e) が存在することを示せ．

(解)

$u \bullet v$ が w に等しいことを $q(u, v, w)$ に対応させる．

$A_1 \triangleq \forall x \forall y \exists z\, q(x, y, z)$ ● で閉じていること

$A_2 \triangleq \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \wedge q(u, z, w) \to q(x, v, w)]$

$A_3 \triangleq \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u) \wedge q(y, z, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, z, w)]$ 以上　結合律

$A_4 \triangleq \forall x \forall y \exists z\, q(z, x, y)$ 左解の存在

$A_5 \triangleq \forall x \forall y \exists z\, q(x, z, y)$ 右解の存在

$A_6 \triangleq \exists y \forall x\, q(x, y, x)$ 右単位元の存在

とおく．

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \to A_6$ (イ)

が恒真であることを示せば，題意の証明になっている (なぜなら，恒真は q に どんな解釈を与えても 式 (イ) が真のこと．したがって，$q(x, y, z)$ を $x \bullet y = z$ と解釈したときも(イ) は成り立ち，題意の条件のもとで右単位元の存在が示されたことになる)．

(イ) の恒真性を

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge \neg A_6$ (ロ)

が充足不能であることを示して証明する．

$\neg A6 = \forall y(\neg \forall x q(x, y, x)) \qquad = \forall y \exists x \neg q(x, y, x)$

ゆえ

式 (ロ)$= \forall x[\forall y \exists z\, q(x, y, z)$
$\wedge \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(u, z, w) \to q(x, v, w)]$
$\wedge \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, z, w)]$
$\wedge \forall y \exists z\, q(z, x, y)$
$\wedge \forall y \exists z\, q(x, z, y)$
$\wedge \exists t \neg q(t, x, t)]$
$= \forall x \exists t [\forall y \exists z\, q(x, y, z)$
$\wedge \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(u, z, w) \to q(x, v, w)]$
$\wedge \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, z, w)]$
$\wedge \forall y \exists z\, q(z, x, y)$
$\wedge \forall y \exists z\, q(x, z, y)$
$\wedge \neg q(t, x, t)]$
$= \forall x \exists t \forall y [\exists z\, q(x, y, z)$
$\wedge \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(u, z, w) \to q(x, v, w)]$
$\wedge \forall z \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, z, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, z, w)]$
$\wedge \exists z\, q(z, x, y)$
$\wedge \exists z\, q(x, z, y)$
$\wedge \neg q(t, x, t)]$
$= \forall x \exists t \forall y \exists z [q(x, y, z)$
$\wedge \forall s \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, s, v) \wedge q(u, s, w) \to q(x, v, w)]$
$\wedge \forall s \forall u \forall v \forall w [q(x, y, u)$
$\wedge\, q(y, s, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, s, w)]$
$\wedge \exists z\, q(z, x, y)$
$\wedge \exists z\, q(x, z, y)$
$\wedge \neg q(t, x, t)]$

例 5.4.10

例 5.4.9 の承前

$= \forall x \exists t \forall y \exists z \exists n[q(x,y,z)$

$\quad \wedge \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,u)$

$\quad\quad \wedge\, q(y,z,v) \wedge q(u,s,w) \to q(x,v,w)]$

$\quad \wedge \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,u)$

$\quad\quad \wedge\, q(y,s,v) \wedge q(x,v,w) \to q(u,s,w)]$

$\quad \wedge\, q(n,x,y)$

$\quad \wedge\, \exists z\, q(x,z,y)$

$\quad \wedge\, \neg q(t,x,t)]$

$= \forall x \exists t \forall y \exists z \exists n \exists m[q(x,y,z)$

$\quad \wedge \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,u)$

$\quad\quad \wedge\, q(y,s,v) \wedge q(u,s,w) \to q(x,v,w)]$

$\quad \wedge \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,u)$

$\quad\quad \wedge\, q(y,s,v) \wedge q(x,v,w) \to q(u,s,w)]$

$\quad \wedge\, q(n,x,y)$

$\quad \wedge\, q(x,m,y)$

$\quad \wedge\, \neg q(t,x,t)]$

$= \forall x \exists t \forall y \exists z \exists n \exists m \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,z)$

$\quad \wedge [\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(u,s,w) \vee q(x,v,w)]$

$\quad \wedge [\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(x,v,w) \vee q(u,s,w)]$

$\quad \wedge\, q(n,x,y)$

$\quad \wedge\, q(x,m,y)$

$\quad \wedge\, \neg q(t,x,t)]$

スコーレム 関数を導入して

$\forall x \forall y \forall s \forall u \forall v \forall w[q(x,y,f(x,y)) \quad \wedge [\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(u,s,w) \vee q(x,v,w)]$

$\quad \wedge [\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(x,v,w) \vee q(u,s,w)]$

$\quad \wedge\, q(g(x,y),x,y)$

$\quad \wedge\, q(x,h(x,y),y)$

$\quad \wedge\, \neg q(k(x),x,k(x))]$

導出節をつくっていく.

$q(x,y,f(x,y))$ (1)

$\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(u,s,w) \vee q(x,v,w)$ (2)

$\neg q(x,y,u) \vee \neg q(y,s,v) \vee \neg q(x,v,w) \vee q(u,s,w)$ (3)

$q(g(x,y),x,y)$ (4)

$q(x,h(x,y),y)$ (5)

$\neg q(k(x),x,k(x))$ (6)

(3) で $x \leftarrow g(x,y), y \leftarrow x, u \leftarrow y$ とおいて

$\neg q(g(x,y),x,y) \vee \neg q(x,s,v) \vee \neg q(g(x,y),v,w) \vee q(y,s,w)$ (7)

(4) と (7) の導出節は $\neg q(x,s,v) \vee \neg q(g(x,y),v,w) \vee q(y,s,w)$ (8)

(8) で $v \leftarrow x, w \leftarrow y$ とおいて

$\neg q(x,s,x) \vee \neg q(g(x,y),x,y) \vee q(y,s,y)$ (9)

(4) と (9) の導出節は $\neg q(x,s,x) \vee q(y,s,y)$ (10)

(10) で $s \leftarrow h(x,x)$ とおいて

$\neg q(x,h(x,x),x) \vee q(y,h(x,x),y)$ (11)

(5) で $y \leftarrow x$ とおいて

$q(x,h(x,x),x)$ (12)

(11) と (12) の導出節は $q(y,h(x,x),y)$ (13)

(13) で $y \leftarrow k(h(x,x))$ とおいて

$q(k(h(x,x)),h(x,x),k(h(x,x)))$ (14)

(6) で $x \leftarrow h(x,x)$ とおいて

$\neg q(k(h(x,x)),h(x,x),k(h(x,x)))$ (15)

(14) と (15) の導出節は 0 (16)

□

もちろん以上の他にもいろんな反駁のしかたがある．例えば (10) と (6) から (10) の $q(y,s,y)$ を消すとか．はじめから (6)(結論の否定に相当) を使っていくとか.

導出節を作っていくとき，変数を含む項の代入を考えず，基礎節のみで考えていくと，極めて見通しが悪い.

問 5.4.3

例 5.4.9 における (1)~(6) に対する反駁を基礎節だけで行ってみよ．

ヒント:

(7)~(16) における反駁は

(3) で $x \leftarrow g(a, k(h(a, a)))$，$y \leftarrow a$，$u \leftarrow k(h(a, a))$，$s \leftarrow h(a, a)$，$v \leftarrow a$，$w \leftarrow k(h(a, a))$ とおいた式を $C_3^{イ}$，

(4) で $x \leftarrow a$，$y \leftarrow k(h(a, a))$ とおいた式を $C_4^{ロ}$，

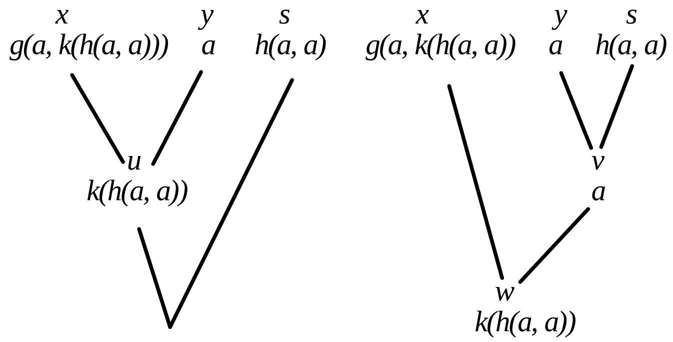
(5) で $x \leftarrow a$，$y \leftarrow a$ とおいた式を $C_5^{ハ}$，

(6) で $x \leftarrow h(a, a)$ とおいた式を $C_6^{ニ}$，

とすると，

$C_3^{イ} \wedge C_4^{ロ} \wedge C_5^{ハ} \wedge C_6^{ニ}$ が充足不能であると言うことを示している．これらの代入は例 5.4.4 の後の説明のようにして求められる．

(3) の変数への代入:



例 5.4.9 における反駁では，一部の節しか使わなかったが，もちろん一般には，全ての節を使うことがある．また，各節について一つの代入を行って得た一つの節だけを用いたが，もちろん一般には，例えば (3) で他の代入をした $C_3^{イ'}$，$C_3^{イ''}$ なども使う．

導出原理を用いた反駁は背理法を用いた証明に対応する．上述の反駁との対応が分りやすいように，等号 $=$ を用いないで，述語 q のままで証明してみる．また，対応が分りやすいように，式番号は上述の反駁での式番号と対応させる．

右単位元が存在しないと仮定しよう．すなわち，どの元 x についてもある元 $k(x)$ が存在して

$$\neg q(k(x), x, k(x)) \tag{6}$$

であると仮定しよう．(分る?)

$z \bullet x = y$ の左解 z を $g(x, y)$ で，$x \bullet z = y$ の右解 z を $h(x, y)$ で表すと，

$$q(g(x, y), x, y) \tag{4}$$

$$q(x, h(x, y), y). \tag{5}$$

結合律より，

$$q(x, y, u) \wedge q(y, s, v) \wedge q(x, v, w) \to q(u, s, w). \tag{3}$$

(3) は任意の元 x，y，u，s，v，w で成り立つので，x に $g(X, Y)$，y に X，u に Y を代入した

$$q(g(X, Y), X, Y) \wedge q(X, s, v) \wedge q(g(X, Y), v, w) \to q(Y, s, w) \tag{7}$$

も成り立つ．(4) は任意の元 x，y で成り立つので，x に X，y に Y を代入した

$$q(g(X, Y), X, Y) \tag{4'}$$

も成り立つ．(7) と (4') より，

$$q(X,s,v)\wedge q(g(X,Y),v,w)\to q(Y,s,w) \tag{8}$$

も任意の元 X，Y，s，v，w で成り立たねばならない．よって，(8) で v に X，w に Y を代入した

$$q(X,s,X)\wedge q(g(X,Y),X,Y)\to q(Y,s,Y) \tag{9}$$

も成り立つ．(9) と (4') より，

$$q(X,s,X)\to q(Y,s,Y) \tag{10}$$

も任意の元 X，Y，s で成り立たねばならない．よって，(10) で s に $h(X,X)$ を代入した

$$q(X,h(X,X),X)\to q(Y,h(X,X),Y) \tag{11}$$

も成り立つ．また，(5) は任意の元 x，y で成り立つので，x に X，y に Y を代入した

$$q(X,h(X,Y),Y) \tag{5'}$$

も成り立つ．(11) と (5') より，

$$q(Y,h(X,X),Y) \tag{13}$$

も任意の元 X，Y で成り立たねばならない．よって，(13) で Y に $k(h(X,X))$ を代入した

$$q(k(h(X,X)),h(X,X),k(h(X,X))) \tag{14}$$

も成り立つ．一方，(6) で x を元 $h(X,X)$ とすると

$$\neg q(k(h(X,X)),h(X,X),k(h(X,X))) \tag{15}$$

である．(14) と (15) は矛盾する．よって，右単位元は存在する．

問題 5.4.3 のように，(3) で $x\leftarrow g(a,k(h(a,a)))$，$y\leftarrow a$，$u\leftarrow k(h(a,a))$，$s\leftarrow h(a,a)$，$v\leftarrow a$，$w\leftarrow k(h(a,a))$ とおいた式

$$\neg q(g(a,k(h(a,a))),a,k(h(a,a)))\vee\neg q(a,h(a,a),a)$$
$$\quad\vee\neg q(x,a,k(h(a,a)))\vee q(k(h(a,a)),h(a,a),k(h(a,a)))$$

を最初から作っておくと，上述の議論のように代入をネストさせずにすむ．普通の証明 (例えば数学の本) ではそのようにするでしょう．しかし，この代入を (すなわち，結合律 (3) の x，y，s にどんな元 (要素) を代入しておいたら矛盾になる (結合律が成り立たなくなる) かを) 最初から一目で見つけられますか．とてもそうはいかないでしょう．上述のように変数 (任意の元を表す) で議論して順次代入して行けば，ほぼ自動的に，矛盾を導く元を求めることができます．

上述の議論では，背理法を用いました．この問題は，次のように考えれば，背理法でなく，直接，右単位元が存在するということが示せます．上述の証明において，結論の否定 (6) を仮定せずに (すなわち，はじめの 3 行を除き)，式 (13) を導き出した時点で (式 (13) を出すのに仮定 (6) は使ってないことに注意．当然，結合律 (3) は使っている)，

「Y は任意の元であるので，式 (13) は，勝手に一つ選んだ元 a に対し，$h(a,a)$ は右単位元であることを表している．すなわち，右単位元は存在する.」

と結論してもよい．これは，任意の Y に対し $q(Y,d,Y)$ が成り立つような一つの元 (すなわち右単位元) d を具体的に与えて，右単位元が存在することを主張している．その元 d は，実は，勝手に一つ選んだ元 a に対する $a\bullet z=a$ の右解 $h(a,a)$ でよいということである．

問 5.4.4

例 5.4.9 の問題に対する証明を日本語で書け．背理法を用いないもの及び背理法を用いたものを書け．等号 $=$ を用いよ．等号のどの性質 (公理 $E1\sim E3$，性質 4.2.3(1)~(4)) を使ったかも書け．背理法を用いた証明では，まず，例 5.4.9 での反駁に対応するもの (例 5.4.9 での反駁では結論の否定を最後に使っている) を書き，$=$ と q との対応を確認せよ．さらに，結論の否定をはじめから使い，また，出てきた式を常に使うような議論を用いて証明してみよ．

冠頭標準形を得るときに，前に出す限定作用素 $\forall$，$\exists$ の順によっていろいろな標準形が得られる(変数の名前のつけかえは同じものと見ても).

この例でもそうであったが，

- $\exists$ が取り出せるときはそうする.
- $\forall$ を取り出すときは共通に取り出す.

そのようにすると，スコーレム関数が簡単になる．また，そのように変形すると，標準形における $\exists$ の左側の $\forall$ はもとの各節におけるものに一致するようにできる．したがってスコーレム関数をもとの節ごと導入してもよい．例えば，
$\forall x \exists y\ B_1[x,y]$ を $\forall x\ B_1[x,k(x)]$ に，
$\forall u \forall x \exists w\ B_2[u,x,w]$ を $\forall u \forall x\ B2[u,x,f(u,x)]$ に，
$\forall y \exists z\ B_3[z,y]$ を $B_3[h(y),y]$ に置き換える．そして，導出節をつくる出発点として，節
$B_1[x,k(x)]$, $B_2[u,v,f(u,v)]$, $B_3[h(y),y]$
を考えてもよい (ただし全体として異なる関数 • 定数記号にすること)．もし，
$\forall x \exists y B_1[x,y] \wedge \forall u \forall x \exists w\ B_2[u,x,w] \wedge \forall y \exists z\ B_3[z,y]$
$\equiv \forall x[\exists y\ B_1[x,y] \wedge \forall s \exists w\ B_2[x,s,w] \wedge \exists z\ B_3[z,x]]$
$\equiv \forall x \exists y[B_1[x,y] \wedge \forall s \exists w\ B_2[x,s,w] \wedge \exists z\ B_3[z,y]]$
$\equiv \forall x \exists y \exists z[B_1[x,y] \wedge \forall s \exists w\ B_2[x,s,w] \wedge B_3[z,x]]$
$\equiv \forall x \exists y \exists z \forall s \exists w[B_1[x,y] \wedge B_2[x,s,w] \wedge B_3[z,x]]$
のように標準形を得たならば，スコーレム関数を導入して得られる節は，
$B_1[x,k(x)]$, $B_2[x,s,f(x,s)]$, $B_3[h(x),x]$
ということになるが，変数が違うだけで，反駁は同じようにできる．

問 5.4.5

次の論理式は恒真であることを，その否定の充足不能性を導出原理を用いて証明することにより示せ (簡単に，恒真であることを導出原理を用いて示せということがある).

$(\{\exists x\ p(x) \to \forall x\ q(x)\}$
$\wedge \{\exists x\ p(x) \to \exists x \neg q(x)\})$
$\to \forall x \neg p(h(x))$

ただし，冠頭標準形はあえて $\forall x \forall y \exists u \exists v\ M$ の形にせよ (x，y，u，v をこの順に用いよ).

導出原理における導出の戦略

(a) 幅優先戦略 (breadth-first strategy)
深さ i の導出節を全て求めてから，深さ $i+1$ の導出節を求める．
(b) 線形導出
得られた導出節を常に一方の “親” として導出をとる
(c) 支持集合戦略 (set-of-support strategy)
入力節集合 $C = H \cup S (H \cap S = \emptyset)$ において，C が充足不能，H が充足可能の時，S を支持集合という．導出するときの一方の親を，S，あるいは過去に S を用いて得られた導出節とする．

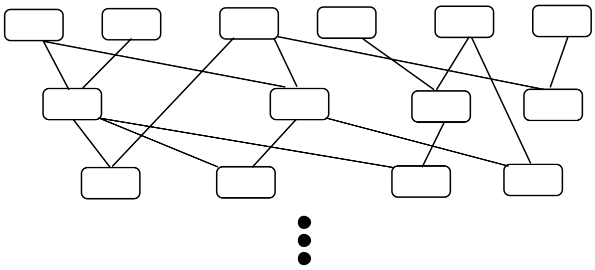


図 5.4.5: 幅優先戦略

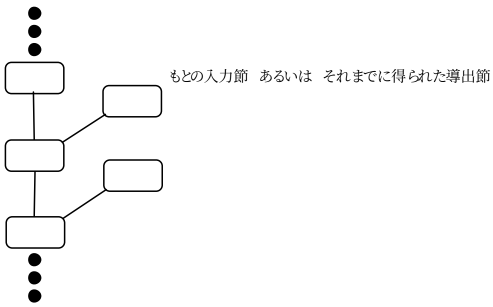


図 5.4.6: 線形導出

$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_m \to Q$ の時，スコーレム連言標準形における $\neg Q$ の部分の節集合が S に相当.

(d) 意味導出 (semantic resolution)

節集合 C に対して，ある解釈 $\mathscr{I}$ を固定する．導出の一方の親を $\mathscr{I}$ で真の節 (もとの節あるいは導出で得られた節) とし，他方の親を $\mathscr{I}$ で偽の節 (もとの節あるいは導出で得られた節) とする．

例 5.4.11

意味導出の例

$C = \{\neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q, \neg r, p \vee s, \neg s\}$

解釈 $\mathscr{I}$ として

$\mathscr{I}$: p 真, q 真, r 偽, s 真

とする．真の節は $C_T = \{\neg p \vee q \vee r, \neg r,\ p \vee s\}$

偽の節は $C_F = \{\neg p \vee \neg q, \neg s\}$

以上の 4 つはいずれも「完全」である．

導出の戦略については，その他にもいろいろ工夫されている．

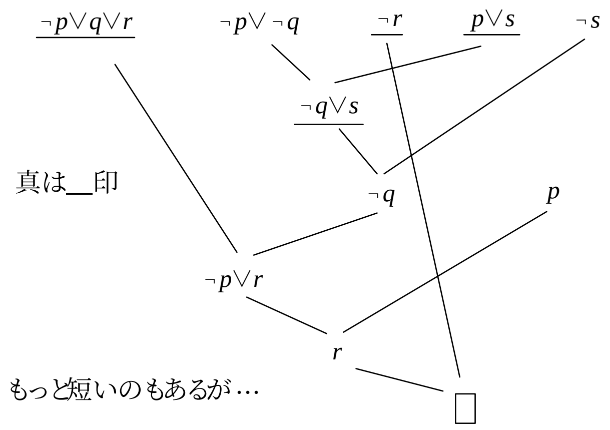


図 5.4.7: 意味導出の例

例 5.4.12

例 0.2.3 の 4 リットルを量る (7 リットルの容器に 4 リットルの水を残す) 問題

「許される操作を用いて初期状況から 7 リットルの容器に 4 リットルの水が入っている状況になりうるか」ということを表す論理式の否定のスコーレム連言標準形における母式の各節を上から順に $C_1, \ldots, C_{10}$ と名付ける．

C_1 =state$(0, 0)$
$C_2 = \neg$ state(x, y)∨state$(7, y)$
$C_3 = \neg$ state(x, y)∨state$(x, 5)$
$C_4 = \neg$ state(x, y)∨state$(0, y)$
$C_5 = \neg$ state(x, y)∨state$(x, 0)$
$C_6 = \neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = x \vee \neg x \leq 7$∨state$(x, 0)$
$C_7 = \neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = y \vee \neg y \leq 5$∨state$(0, y)$
$C_8 = \neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = w \vee \neg 7 + y = w$∨state$(7, y)$
$C_9 = \neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = w \vee \neg 5 + x = w$∨state$(x, 5)$
$C_{10} = \neg$ state$(4, y)$

例 0.2.3 の式と違って，例えば C_6 で変数 x を使って state の引数は変数になるようにしているが，本質的な差はない．

C_{10} から始まる線形導出による反駁を図 5.4.8 に示す．逆に辿れば，操作手順が分かる．

図 5.4.8 で，

「C_9 で $x = 4$」のように書いているが，正確には，

「C_9 で $x = 4$，$w = 9$」

である．C_9 で $x = 4$，$w = 9$ とおくと　$\neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = 9 \vee \neg 5 + 4 = 9$∨state$(4, 5)$
になり，$5 + 4 = 9$ は真なので $\neg 5 + 4 = 9$ を省く．一方，C_{10} で $y = 5$ とおくと　$\neg$ state$(4, 5)$
になる．これら二つの節の導出節は

$\neg$ state$(u, v) \vee \neg u + v = 9$ である．

問 5.4.6

次の各推論を述語論理式で表現せよ．正しいならば，導出原理を利用して示せ．

(a). computer は間違えない．人間は間違える．情太は間違えない．したがって，情太は computer であり，人間ではない．

(b). 虫歯にならなければ歯医者に行かない．歯を磨けば虫歯にならない．情太は歯を磨く．よって，情太は歯医者に行かない．

(c). 虫歯にならなければ歯医者に行かない．歯を磨けば虫歯にならない．情太は歯を磨く．情太は歯医者に行く．よって，情太は 8020 を達成する (8020 とは厚生省が行っているキャンペーンの一つで，80 歳で自分の歯を 20 本残そうという運動).

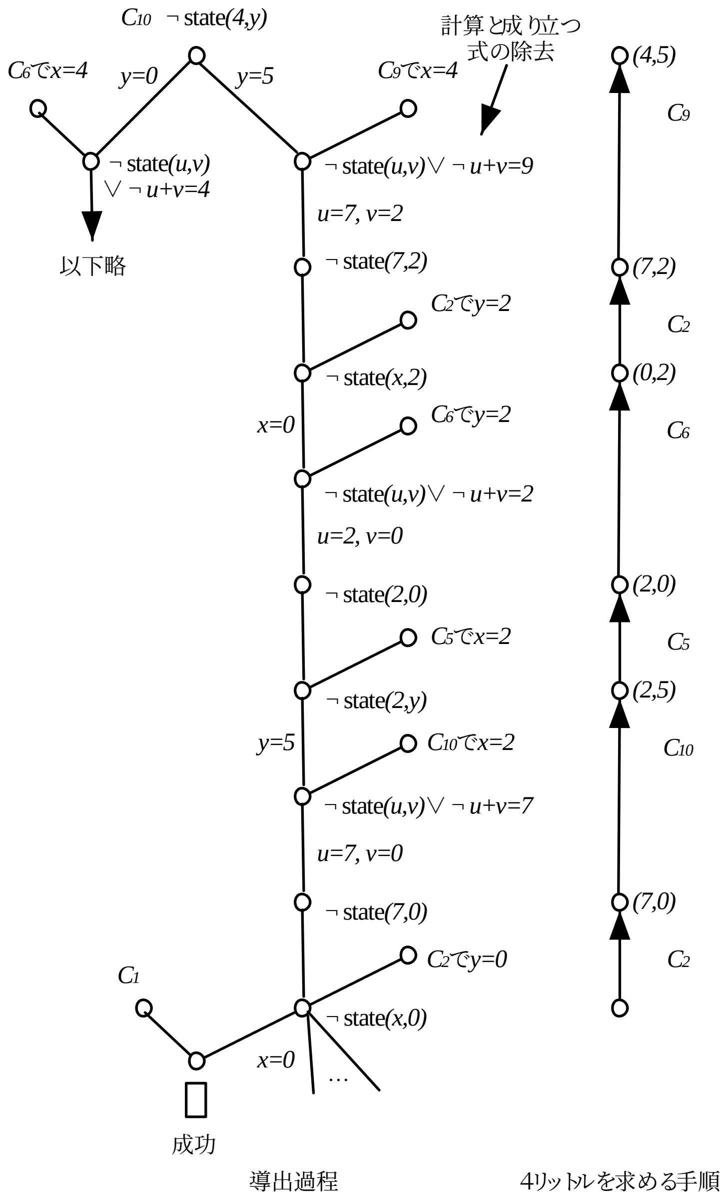

C10 ¬state(4,y)
計算と成り立つ
式の除去
C6でx=4
y=0
y=5
C9でx=4
¬state(u,v)
∨¬u+v=4
以下略
¬state(u,v)∨¬u+v=9
u=7, v=2
¬state(7,2)
C2でy=2
¬state(x,2)
x=0
C6でy=2
¬state(u,v)∨¬u+v=2
u=2, v=0
¬state(2,0)
C5でx=2
¬state(2,y)
y=5
C10でx=2
¬state(u,v)∨¬u+v=7
u=7, v=0
¬state(7,0)
C2でy=0
C1
¬state(x,0)
x=0
…
成功
導出過程
(4,5)
C9
(7,2)
C2
(0,2)
C6
(2,0)
C5
(2,5)
C10
(7,0)
C2
4リットルを求める手順

図 5.4.8: 反駁の例

(d). だれでも，情論の勉強をすれば試験にいい点をとるのであったら，情論にとおる．私は情論の勉強はしない．よって，私は情論にとおる．

問 5.4.7

「床屋のパラドックス:
床屋は自分で髭を剃らない全ての人の髭を剃り，自分で髭を剃る人の髭は剃らない (これを (床屋に関する) 条件 A とする)．床屋は自分の髭を剃るのか，剃らないのか.」

この文章では，床屋を特定のひとりの人 (定数) と考えるか，床屋であるような人と考えるか，二通りありうる．まず，床屋を特定のひとりの人と考える．その定数を b としよう．

(a). 「床屋 b が条件 A を満たすなら床屋 b は自分の髭を剃る」ということを (自然語で) 証明せよ．
また,「床屋 b が条件 A を満たすなら床屋 b は自分の髭を剃らない」ということを (自然語で) 証明せよ．
さらに,「床屋 b は条件 A を満たさない」ということを (自然語で) 説明せよ．また,「条件 A を満たすような床屋はいない」ということを (自然語で) 説明せよ．

(b). 「u は v の髭を剃る」を $S(u,v)$ で表すことにする．床屋 b が条件 A を満たすということを表す論理式を書け．それを $R(b)$ で表すことにする．上述の「床屋 b が条件 A を満たすなら床屋 b は自分の髭を剃る」に対応する論理式 $R(b) \to S(b,b)$,「床屋 b は条件 A を満たさない」に対応する論理式 $\neg R(b)$，および「条件 A を満たすような床屋はいない」に対応する論理式 $\neg\exists w\, R(w)$ は，それぞれ，恒真であることを導出原理を用いて示せ.

(c). この床屋のパラドックスはラッセルの集合に関するパラドックス (4 章休憩室 4.1 参照) の真似である．
ラッセルのパラドックスに対し，上の (a)，(b) と同じことをせよ．

さて，以下では「床屋は」というのを「床屋であるような人は」と見做そう．論理式で書くとき,「x は床屋である」を $B(x)$ で表そう．

(d). 「条件 A のもとでは床屋は自分の髭を剃る」ということを (自然語で) 証明せよ．また,「条件 A のもとでは床屋は自分の髭を剃らない」ということを (自然語で) 証明せよ．さらに,「条件 A のもとでは床屋はいない」ということを (自然語で) 証明せよ．

(e). 「条件 A のもとでは床屋は自分の髭を剃る」ということを一つの論理式 ((*1) とする) で表せ．その論理式 (*1) が恒真であることを導出原理を用いて示せ.

(f). 同様にして,「条件 A のもとでは床屋は自分の髭を剃らない」ということも示せる．
このことを表した論理式を (*2) とする (同様にこの式も恒真である)．論理式 $(*1) \wedge (*2)$ から，
等価な式変形で
条件 A → 床屋は自分の髭を剃りかつ自分の髭を剃らない
条件 A → 床屋はいない
ということを表す論理式 (それぞれ (*3)，(*4) とする) を導け．(注:(*1)∧(*2) は恒真であり，等価な式変形ゆえ，(*3) も (*4) も恒真である．)

(g). 論理式 (*4) が恒真であることを導出原理を用いて確認せよ．

ヒント:
(a)「床屋 b は条件 A を満たさない」ということは,「床屋 b が条件 A を満たす」と仮定して，矛盾を導くことによって示せる．なお,「床屋 b が条件 A を満たすなら床屋 b は自分の髭を剃る」と「床屋 b が条件 A を満たすなら床屋 b は自分の髭を剃らない」がともに成り立つので (したがって,「床屋 b が条件 A を満たす」を仮定すれば，肯定「床屋 b は自分の髭を剃る」と否定「床屋 b は自分の髭を剃らない」がともに成り立って矛盾するので)，仮定の「床屋 b が条件 A を満たす」は成り立たないということにもなる．
(c)「u は v の髭を剃る」$S(u,v)$ に対応させて考えるなら，例えば,「u は v を含む」を $C(u,v)$ で表せ．集合 S は床屋 b に対応する．
(f) 等価な式変形で，まず，(*3) を得よ．(*3) から (*4) を得よ．

コメント:
「条件 A を満たすような床屋はいない」($\neg\exists w\, R(w)$) が成り立つことは，例えば床屋 b がい

ると仮定して，矛盾を導くことによって，直接証明できる．しかし，上の (a) のヒントのように考えれば，まず $\neg R(b)$ が恒真であることが分る．これを利用して $\neg\exists w\, R(w)$ が恒真であることを示すこともできる．(何の仮定もなく (したがって，b を含んだ仮定もなく)$\neg R(b)$ が成り立つのであるから，何の仮定もなく $\forall w \neg R(w)$ が成り立つことになる．問題 4.1.5 参照．)

問 5.4.8

人はうそつきか正直かのどちらかである．A，B，C の 3 人がいて，A が「B は正直である」と言った．B が「C はうそつきである」と言った．C が「A は $\cdots$ である」と言った．$\cdots$ は “うそつき” か “正直” のどちらかであったが，よく聞き取れなかった．つじつまを合わせるには，$\cdots$ は “うそつき” しかありえない．

(1). そのことを示そうとしたら，議論の進め方にもよるが，陽には書かれていないが (文章から当然成り立つと思われる) いくつかの前提を使う必要がある．陽には書かれていないどんな前提がありうるか．

(2). 上のことを，背理法を用いて自然語 (日本語) で証明せよ．

(3). 上のことを述語論理式で表現し，それが恒真であることを導出原理を用いて示せ．
ただし，(2) と (3) の議論の進め方は互いに対応するようにし，その対応も説明せよ．

ヒント:
どんな述語記号を用いてどんな式を書くかについてはいろいろある．ここでは，x が正直であることを $H(x)$ で，うそつきであることを $L(x)$ で，x が「y は正直である」と言ったことを $T_H(x, y)$ で，x が「y はうそつきである」と言ったことを $T_L(x, y)$ で表せ．0.3 参照．

コメント:
「u がうそつき カツ u が p と言った ナラバ $\neg p$」などを表す式は述語「言った」の引数に p という述語 (一般に論理式) を含むので一階述語論理ではない．この問題では,「$\cdots$ と言った」ということを直接問題にしているので,「言った」という述語を導入した．普通,「うそつき」の論理パズルでは,「u が p と言った」ことは「u が正直なら p，かつ，u がうそつきなら $\neg p$」のような論理式で表せばよい．

少し式が大きくなるが，ここでは，練習のため，$H(x)$ と $L(x)$ を用いることにする．結果的には，一方例えば $H(x)$ のみを用い，うそつきであることを $\neg H(x)$ で表すのと同じことになる．

「計算論 B」で学ぶ「プログラムの停止問題の判定不能性」について論理学の立場から少し触れておこう．

プログラムの停止問題とは
「プログラム p とデータ d が与えられて，プログラム p がデータ d を読んで動いたとき，いつか止まるか，あるいは永久に動き続けるかどうかを判定する問題」である．

この問題は**判定不能**である，すなわち，p と d が入力として与えられて，必ず停止して正しい判定結果を出力するようなアルゴリズムは存在しない．アルゴリズムはプログラムとしてかけるので，そのような判定をするプログラムは存在しないといってもよい．

考えているプログラムの集合を P とおこう．まず，話を少し簡単にするために，プログラムへの入力は一つで，それは自分あるいは他のプログラムのソースリストであるとしよう．まず，我々は，次のような少し特殊な形のプログラム停止問題

プログラム q が自分のソースリストをその入力として読んで動いたとき，止まるかどうか
の判定不能性を示そう．すなわち，

　任意のプログラム $q \in P$ のソースリストが入力として与えられて，
「プログラム q が自分のソースリストをその入力として読んで動いたとき，止まるかどうか」
を判定するようなプログラム $m \in P$ は存在しない．　(イ)

ということを示そう．

「プログラム p が集合 P に属する」ということを $p \in P$ で表わす (infix 表記の述語記号).

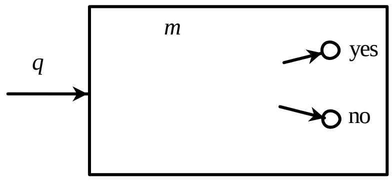
「プログラム p がプログラム q のソースリストをその入力として与えられたとき，p の動作がいつか停止する」ということを停 (p, q) で表わす.

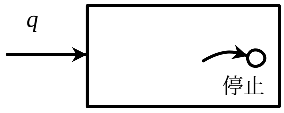
「プログラム r がプログラム q のソースリストをその入力として与えられたとき，r は yes を出力して停止する」ということを YES(r, q) で,「no を出力して停止する」ということを NO(r, q) で表わす.

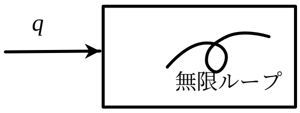
そうすると,「プログラム m が，プログラム q のソースリストをその入力として与えられて，プログラム q が自分のソースリストをその入力として読んで動いていつか止まるかどうかを yes か no で判定する」ということは

{ 停 $(q, q) \rightarrow$ YES$(m, q)\} \wedge \{\neg$ 停 $(q, q) \rightarrow$ NO$(m, q)\}$

で表される.







よって，停止問題の判定不能性 (イ) を表す論理式は次のようになる.

$\neg\exists m[m \in P \wedge \forall q[q \in P \rightarrow \{$ 停 $(q, q) \rightarrow$ YES$(m, q)\} \wedge \{\neg$ 停 $(q, q) \rightarrow$ NO$(m, q)\}]]$　(ロ)

これが真であるためには P はどんな性質を持てばよいのだろうか．P に関するどんな前提 R をおけば (ロ) が成り立つのだろうか．そのような R，すなわち，

$R \rightarrow$(ロ)

が成り立つような R を見つけよう.

式 (ロ) を眺めてみると，問題 5.4.7 のパラドックスの問題をやった諸君は気がつくことがないだろうか．そう，パラドックスのところで扱った式とよく似ているのだ．そこでは，次の形の式は常

に成り立つことを知った．

$\neg\exists w[\forall x[\{S(x,x)\to\neg S(w,x)\}\wedge\{\neg S(x,x)\to S(w,x)\}]]$

集合 H を陽に用いて書けば，この式は次の式と同じことをあらわす．

$$\neg\exists w[w\in H\wedge\forall x[x\in H\to\{S(x,x)\to\neg S(w,x)\}\wedge\{\neg S(x,x)\to S(w,x)\}]] \qquad \text{(ニ)}$$

すなわち，(ニ) と同じ

$$\neg\exists m[m\in P\wedge\forall q[q\in P\to\{\text{停}(q,q)\to\neg\text{停}(m,q)\}\wedge\{\neg\text{停}(q,q)\to\text{停}(m,q)\}]] \qquad \text{(ホ)}$$

は必ず成り立っているのである．

このことをヒントにして，どんな R で

$$R \quad \to \text{(ロ)} \qquad \text{(ヘ)}$$

が成り立つかを考えよう．(ヘ) を示すには，(ロ) の否定，すなわち，判定する m があると仮定して，R を用いて矛盾を導くのが普通の方法であろう．判定する m から，m' を作って，その m' が矛盾を引き起こす，すなわち，m' は

$\forall q[q\in P\to\{\text{停}(q,q)\to\neg\text{停}(m',q)\}\wedge\{\neg\text{停}(q,q)\to\text{停}(m',q)\}]$

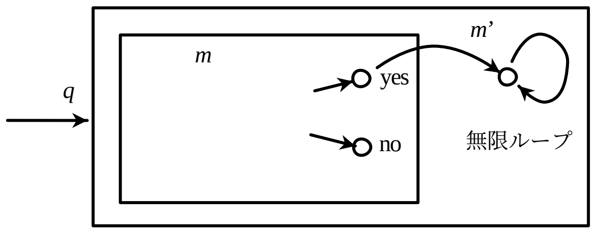
を満たすというように議論できればよい．

そのために，P に関する条件として，「任意の $r\in P$ に対し，その r とこんな関係にある $r'\in P$ が存在する (あるいは，r から作った $f(r)\in P$ がこんな条件を満たす) こと」というように，一般のプログラムに対する条件として書いてみよう．

問 5.4.9

上記の R を一つ与え，$R\to$ (ロ) が恒真であることを (導出原理を用いて) 示せ．

ヒント:
r が yes を出力して停止するところは r' は無限ループに陥り，r が no を出力して停止するところを r' はそのまま止まるようになっていればよい．



mからm'を作る

qとしてm'を与えられたらどうなるか

以上では，クラス P を陽に出して P に対する条件などと述べてきたが，$\forall$ や $\exists$ のすべてに $\bullet\in P\to$ や $\bullet\in P\wedge$ が付いているので，$\bullet\in P\to$ や $\bullet\in P\wedge$ をすべて除いて議論しても結果的には同じで

ある．

P を例えば Pascal プログラムの集合としよう．プログラム $p \in P$ のソースリストとデータ d が与えられる一般の停止問題を解くプログラム $T \in P$ がもしあれば，上述のようなプログラム q だけが与えられる停止問題を解くプログラム $T' \in P$ が作れる．

T' はまず，与えられた q をコピーし，ついで，もとの q をプログラム，コピーで得られた q をデータと見て，一般の停止問題を解くプログラム T をサブルーチンとして動かして，T の出力 (yes か no) を得る．T' はその yes か no を q だけが与えられるもとの停止問題の解として出力する．

サブルーチン T からの出力 (yes か no) は q だけが与えられるもとの停止問題の解に一致しているので，このように作った T' は上述のプログラム q だけが与えられる停止問題を解くプログラムになる．ところが，上で述べたように，このような T' は存在し得ない．したがって，一般の停止問題を解くプログラム $T \in P$ も存在しないことが結論される．すなわち，一般の停止問題も判定不能である．P について，もちろん，ここで構成したプログラム T' が P に属すことが保証されるような条件が必要である．例えば，クラス P のプログラムでは，テキストをコピーできるとか，作ったデータに対してサブルーチンを動かせるとか．詳しい議論は省略する．

「計算論 B」では P として，**テューリング機械** *(Turing machine)* のクラスで議論する．ここで述べたのと同じような議論をするなら，そのクラスで条件 R が満たされていること，プログラム T' がそのクラスに属することなどをどのように言及するか注意しよう．

6　論理型プログラミング言語

6.1　論理プログラム

論理型プログラミング言語 Prolog では，次の形の論理式の**恒真性**を (システムに) 問うのが基本である．

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1)\\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2)\\
&\qquad \vdots\\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m)\\
&\quad \to \exists x_1 \exists x_2 \cdots (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

ただし

$n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 0$

すべての $B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{in_i}, A_i (1 \leq i \leq m), C_j (1 \leq j \leq k)$ は原子論理式

注意

$n_i = 0$ のときもある

$B_{i1} \wedge B_{i2} \wedge \cdots \wedge B_{in_i} \to A_i$ に変数がないこともある．

$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ に変数がないこともある．

論理式 (6.1.1) の恒真性を調べるには，(6.1.1) の否定である次の論理式の充足不能性を調べればよい．

(6.1.1) の否定

$$
\begin{aligned}
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \cdots (\neg B_{11} \vee \neg B_{12} \vee \cdots \vee \neg B_{1n_1} \vee A_1)\\
&\quad \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (\neg B_{21} \vee \neg B_{22} \vee \cdots \vee \neg B_{2n_2} \vee A_2)\\
&\qquad \vdots\\
&\quad \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (\neg B_{m1} \vee \neg B_{m2} \vee \cdots \vee \neg B_{mn_m} \vee A_m)\\
&\quad \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_k)
\end{aligned}
\tag{6.1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \cdots [(\neg B_{11} \vee \neg B_{12} \vee \cdots \vee \neg B_{1n_1} \vee A_1)\\
&\quad \wedge (\neg B_{21} \vee \neg B_{22} \vee \cdots \vee \neg B_{2n_2} \vee A_2)\\
&\qquad \vdots\\
&\quad \wedge (\neg B_{m1} \vee \neg B_{m2} \vee \cdots \vee \neg B_{mn_m} \vee A_m)\\
&\quad \wedge (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_k)]
\end{aligned}
\tag{6.1.3}
$$

Prolog では，(6.1.1) の式を書く代わりに，(6.1.3) の $\forall x_1 \forall x_2 \cdots$ を省いて各節を例えば次のように書かせている．

$A_1 \leftarrow B_{11},\ B_{12}, \ldots,\ B_{1n_1}.$ (6.1.4)

$A_2 \leftarrow B_{21},\ B_{22}, \ldots,\ B_{2n2}.$ プログラム部

$\vdots$

$A_m \leftarrow B_{m1},\ B_{m2}, \ldots,\ B_{mn_m}.$

$\leftarrow C_1, C_2, \ldots, C_k.$ ゴール

(処理系によって，$\leftarrow$ は :-，$n_i = 0$ のときは $\leftarrow$ も省いて A_i．のみ書く．ゴールの $\leftarrow$ はプロンプト :- に対応する．この授業では，(6.1.4) のように書く．$n_1 = 0$ のときは $A_i \leftarrow$．と書く．

なお，通常は改行して書くので，各節の最後の．は無しでもよい．変数や定数もこのテキストの慣例に従う．)

論理式 (6.1.3) の各節を $PC_1, PC_2, \ldots, PC_m$，GC と表そう．各 PC_i を**プログラム節 (確定節)** と呼び，GC を**ゴール節又は目標節**と呼ぶ．プログラム節全体をプログラム部と呼ぶ．

各プログラム節 PC_i やゴール節 GC の形の節 (原子論理式の肯定は高々1 つ) はホーン節 (Horn clause) と呼ばれる．(6.1.4) の形を以後，**ホーン節を用いた論理プログラム**と呼ぶことにする．

(6.1.1) の恒真性 (したがって (6.1.3) の充足不能性) は，導出原理を用いて，導出節を作っていき，空節を導出することにより示せる．変数に HD の元を代入して単一化 (ユニフィケーション) を行うとき，空節が導き出せるものなら，今の節の形より，

「ゴール節 $GC(= \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_k)$ に対しては，ある一組の代入 $\theta = \langle x_1 = \tau_1, x_2 = \tau_2, \ldots \rangle$ を行った基礎節 $GC\theta$ のみを用いて，空節を導き出せる」

ことがわかる．ゴール節は原子論理式の否定のみの節であり，原子論理式の否定のみの節を一方の節に使って得られる導出節もまた (空節でなければ) 原子論理式の否定のみの節である．否定のみの節どおしの導出節はないので，空節を導くのに二通りの代入で得られる $GC\theta$，$GC\theta'$ が共に使われるということはない．

よって，(6.1.1) が恒真 ((6.1.3) が充足不能) なら，ある代入 θ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1 \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2 \\
&\quad\vdots \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m \\
&\qquad \rightarrow (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta
\end{aligned}
\tag{6.1.5}
$$

は恒真 (したがって，$(C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$ は $\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1, \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2, \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m$ の論理的帰結) であり，また，

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1 \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2 \\
&\quad\vdots \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m \\
&\wedge GC\theta
\end{aligned}
\tag{6.1.6}
$$

は充足不能であるので，$GC\theta$ とプログラム部に対する (空節を導く) 反駁がある．

逆に，ある代入 θ に対し，$GC\theta$ とプログラム部に対する反駁があるすると，

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1 \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2 \\
&\quad\vdots \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m \\
&\wedge GC\theta
\end{aligned}
\tag{6.1.7}
$$

は充足不能であり，また，

$\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1$

$\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2$

$\vdots$

$\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m$

$$\to (C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta \tag{6.1.8}$$

は恒真 (したがって，$(C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$ は $\forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_1, \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_2, \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \cdots PC_m$ の論理的帰結) である．

したがって，(6.1.1) も恒真である．

反駁に成功したゴールの変数への代入 θ を (反駁で得られた) **解代入**という．

コメント:

一般に，

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots P_1 \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots P_2 \wedge \cdots \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots P_m \to \exists x_1 \exists x_2 \cdots (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k) \tag{6.1.9}$$

の形の式が恒真であっても，

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots P_1 \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots P_2 \wedge \cdots \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots P_m \to (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta \tag{6.1.10}$$

が恒真となるような θ はない．

例えば，

$$(p(a) \vee p(b)) \wedge (p(a) \to q(f(a))) \wedge (p(b) \to q(g(b))) \to \exists x\, q(x) \tag{6.1.11}$$

を考えると，これは恒真であるが，そのような θ はない．各 P_i の形が効いている．

変数への代入を HD の元に限らずに一般には変数を許した項を代入して空節を導き出すことも可能である．このような代入 θ についても，$GC\theta$ を用いて空節が導き出せたとき，θ を (反駁で得られた) 解代入という．

例 6.1.1

$Q(f(y)) \leftarrow R(y)$ (1)

$R(g(z)) \leftarrow$ (2)

$\leftarrow Q(x)$ (3)

(各節をこのような表記で書くこともある)

ゴール (3) の変数 x に $f(y)$ を代入して $\leftarrow Q(f(y))$ (4)

(1) と (4) より $\leftarrow R(y)$ (5)

(5) の y に $g(z)$ を代入して $\leftarrow R(g(z))$ (6)

(2) と (6) より空節 $\Box$ が得られる．

ゴール (3) の変数 x に $f(y)$ を代入し，さらにその y((5) の y) に $g(z)$ を代入したので，ゴールの変数 x への代入 θ は

$\theta = \langle x \leftarrow f(y) \rangle \bullet \langle y \leftarrow g(z) \rangle = \langle x \leftarrow f(g(z)) \rangle$

である．

この解代入 $\theta : x \leftarrow f(g(z))$ に対して

$\forall y (R(y) \to Q(f(y))) \wedge \forall z\, R(g(z)) \to \forall z\, Q(x)\theta$ (7)

すなわち

$\forall y (R(y) \to Q(f(y))) \wedge \forall z\, R(g(z)) \to \forall z\, Q(f(g(z)))$ (8)

は恒真である．

したがって，$\forall z Q(f(g(z)))$ は $\forall y (R(y) \to Q(f(y))), \forall z\, R(g(z))$ の論理的帰結である．

このような意味で，論理プログラム (6.1.4) は，「前提 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1), \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m)$ のもとで $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ を真にする $x_1, x_2, \cdots$ の値 (すなわちゴールの解) を求めよ」というプログラムとみなせる (特別な場合として $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ に変数がなければ「そのような前提のもとで $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ はなりたつか」を問うプログラムである)．

ゴールの解として HD の元の一組を求めたらよいのか，全ての組を求めるか，変数付きで求めるのかなどは，処理系に対して，本来，別に指定すべきである．

この章では，各節を $A \leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ や $\leftarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ のような表記で書くことがある．それぞれ，節 $A \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \cdots \vee \neg B_n$ や $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \cdots \vee \neg B_n$ を表す．

問 6.1.1

ゴールの解を求めよ．

$q(f(y), x) \leftarrow p(x, y)$
$q(h(y), f(a)) \leftarrow p(a, y), q(f(y), a)$
$p(a, b) \leftarrow$
$\leftarrow q(h(b), x)$

問 6.1.2

ゴールの解を求めよ．

$p(f(x), g(x)) \leftarrow$
$p(c, g(b)) \leftarrow$
$p(z, x) \leftarrow p(x, y), p(z, y)$
$\leftarrow p(x, c)$

例 6.1.2

CFG 例えば $G = (\{S, A, B\}, P, \{a, b, c\}, S)$

$$
\begin{array}{lll}
P: & S \to AB & \\
 & A \to Aa & A \to a \\
 & B \to bBb & B \to c
\end{array}
$$

において，例えば記号列 $aabcb$ が G で生成される文かどうかのチェックは次の論理プログラムで記述される．

(1). $a(0, 1) \leftarrow$
(2). $a(1, 2) \leftarrow$
(3). $b(2, 3) \leftarrow$
(4). $c(3, 4) \leftarrow$
(5). $b(4, 5) \leftarrow$
(6). $S(x, y) \leftarrow A(x, z), B(z, y)$
(7). $A(x, y) \leftarrow A(x, z), a(z, y)$
(8). $A(x, y) \leftarrow a(x, y)$
(9). $B(x, y) \leftarrow b(x, u), B(u, v), b(v, y)$
(10). $B(x, y) \leftarrow c(x, y)$
(11). $\leftarrow S(0, 5)$

反駁過程を実行し，空節 を導け．空節 $\square$ が導けたら，もとの (6.1.1) の論理式でいえば，恒真．すなわち，$aabcb$ は G で生成される文である．

ボトムアップ推論，トップダウン推論と呼ばれる反駁過程を二つ図に示す．また，$aabcbb$ に対するプログラムとゴールに対して，反駁が成功しえないことが，途中で分かるか．

問 6.1.3

x は y と兄弟 (男，女を区別せず，こう呼ぶことにする) であることを $b(x, y)$，x は y の親であることを $p(x, y)$ で表わす．

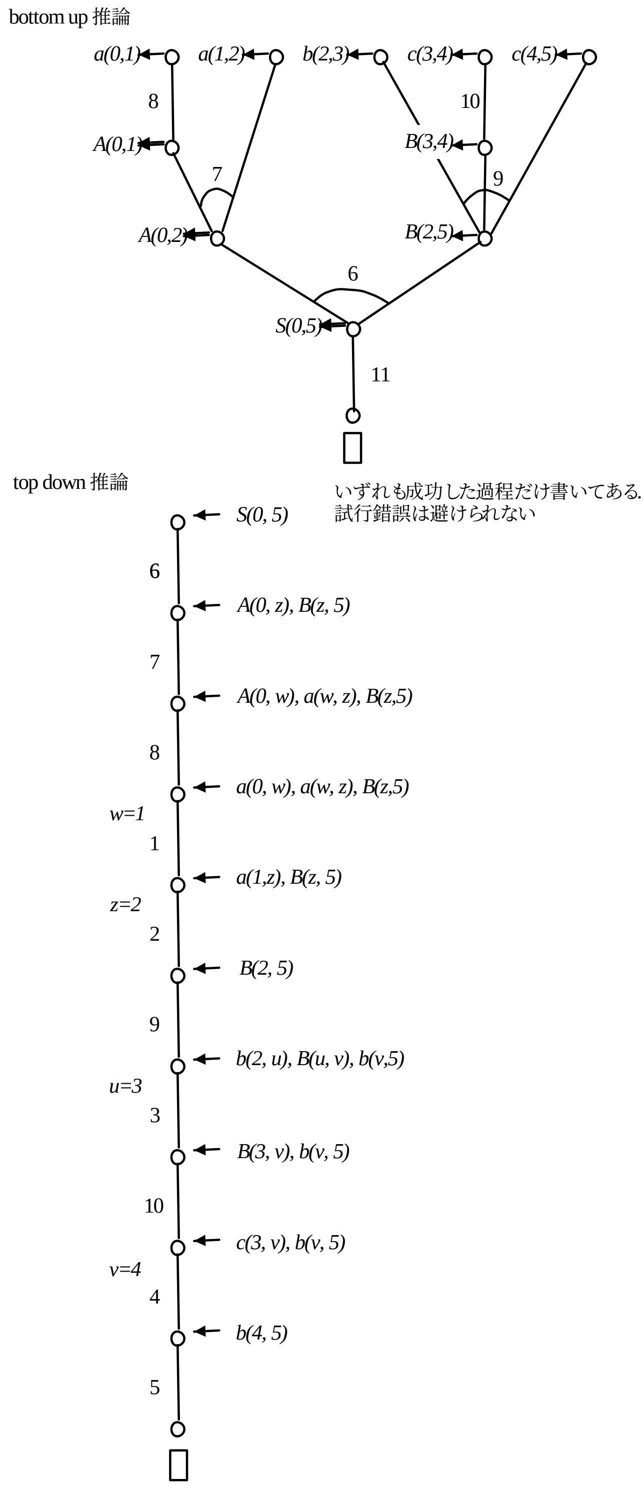


図 6.1.1: 文の認識問題における反駁

(1). b は可換であることを表わす論理式を書け.

(2). b は推移律をみたすことを表わす論理式を書け.

(3). x は y の親であり，かつ，y は z と兄弟であれば，x は z の親でもある，ということを表わす論理式を書け.

(4). 「上の 3 つの論理式がなりたつとし，かつ，$p(A, B)$，$b(B, C)$，$b(D, C)$ がそれぞれなりたつとする．これらのもとで，D の親が存在するか (D の親は誰か)」ということを表わすホーン節を用いた論理プログラムを書け.

(5). 上の (4) の論理プログラムのゴールの解 (D の親) は何か求めよ.

(6). 上の可換，推移を表す (1)，(2) の論理式を用いると，たぶん，例えば，$b(B, C)$ が成り立つとき，$b(B, B)$ も得られてしまうだろう．ゴールを「誰が B の兄弟か」とするような場合，B 自身も解であるというのは不都合であるということも言えよう．他人としか兄弟にならないように (1)，(2)，(3) の論理式を書き直した論理プログラムを書け.

ヒント:
12 個のプログラム節 diff$(A, B) \leftarrow$，diff$(B, A) \leftarrow$，$\cdots$，diff$(D, C) \leftarrow$ を導入せよ．推移律であらたに x は y と兄弟になるときは diff(x, y) を満たすべきという条件をつければよい.

論理プログラムのプログラム部は，通常，問 6.1.3 のように，問題の論理構造を記述する部分 (問 6.1.3 の (1)，(2)，(3) の内容) とデータを記述する部分 (問 6.1.3 の $p(A, B) \leftarrow, b(B, C) \leftarrow, b(D, C) \leftarrow$) に分かれる．問題の論理構造を記述する部分は,「データ」や「ゴールの質問内容」に依存せず，それらが何であっても使えるようにしておくのが望ましい.

「A は B の親であり，B は C と兄弟，D は C と兄弟であるとする．D の親は誰か」というように問題が書かれてあっても，問題の論理構造を書く必要がある.

$p(A, B) \leftarrow$
$b(B, C) \leftarrow$
$b(D, C) \leftarrow$
$p(w, D) \leftarrow p(w, B),\ b(B, C),\ b(D, C)$
$\leftarrow p(w, D)$

のようなのはもってのほか.

もとの問題文の構造のまま論理式に書き下したのではホーン節を用いた論理プログラムの形にならない場合がある．ホーン節を用いた論理プログラムで表すためのいくつかの工夫を例題を通して見てみよう.

問 6.1.4

新幹線には上りと下りがある．新幹線の上りは東京駅が終着駅である．新幹線の始発駅はその列車の終着駅ではない．東京駅発の新幹線は下りか.

(1). 新幹線 (x) : x は新幹線，上り (x) : x は上り列車，下り (x) : x は下り列車，駅 (x) : x は駅，終着 (x, y) : x の終着駅は y，始発 (x, y) : x の始発駅は y，を用いて，上記のことを表わす論理式を書け．その恒真性を，導出原理を用いて示せ.

(2). ホーン節を用いた論理プログラムを書け．反駁を行え.

注意

新幹線 と駅というふたつのソート (データ型) が現れている．今まで，単一ソートでの議論を行っているので，新幹線 (あるいはより一般に列車) と駅の二つを合わせたソートを考え，新幹線である，駅

であるという述語を導入して記述する (現実には，通常の質問であれば必ずしもそうする必要はない．6章最後 参照).

次のように変数や定数にはそのデータ型を指定する．

$\forall x \forall y$(新幹線 $(x) \wedge$ 駅 $(y) \to$ (始発 $(x,y) \to \neg$終着 (x,y)))

($\forall x \forall y$(新幹線 $(x) \wedge$ 駅 $(y) \wedge$ 始発 $(x,y) \to \neg$終着 (x,y)) と同じ)

駅 (東京駅)

ヒント:

(1). 一般に，何を述語記号で表すかは自由度がある．例えば,「x は下りでない」ことを表す一つの述語 下りでない (x) ((1) の 下り (x) の否定 ¬ 下り (x) に対応) を用いると，

新幹線 $(x) \to$ (上り $(x) \vee$ 下り (x)) は　上り $(x) \leftarrow$ 新幹線 $(x) \wedge$ 下りでない (x)

のようにホーン節になる．全体がホーン節を用いた論理プログラムの形になるように論理記号を導入せよ．

ただし，述語は肯定と否定のどちらか一方だけを採用しなくてはいけない．もし 下り (x) と 下りでない (x) を両方用いようとしたら，述語記号 下り (x) と 下りでない (x) の間の関係を否定を用いて書かざるを得なくなる．

一般に，$X \to Y \vee Z$ は，$X \wedge \neg Y \to Z$，$X \wedge \neg Z \to Y$，$\neg Y \wedge \neg Z \to \neg X$ のいずれとも等価である．どれかひとつだけ使うこと．

(2). $\cdots \to \forall x\{$ 新幹線 $(x) \wedge$ 始発 $(x,$ 東京駅 $) \to$ 下り $(x)\}$ (*1)

の形のところは，新しい定数記号，例えば a を導入して $\cdots \wedge$ 新幹線 $(a) \wedge$ 始発 $(a,$ 東京駅 $) \to$ 下り (a) (*2)

のように変えて問えばよい.「式 (*1) は恒真か」に対する答は式 (*2) の恒真性を問うても得られる (問 6.1.5 参照).

問 6.1.5

a を R や C に含まれていない定数記号とする．次の二つの論理式 (閉論理式とする) の恒真性は一致するか．

$R \to \forall x\, C(x)$ (1)

$R \to C(a)$ (2)

注意

(1). $C(x)$ が特に $P(x) \to Q(x)$ の形のときは，式 (2) は $R \to (P(a) \to Q(a))$ となるが，これは $R \wedge P(a) \to Q(a)$ と論理的に同値 (等価) である．前述の例では，$P(a)$ は 新幹線 $(a) \wedge$ 始発 (a ，東京駅) に相当する．

(2). 式 (1) の否定 $R \wedge \neg \forall x C(x)$ の充足不能性を調べるため $R \wedge \neg \forall x C(x)$ を冠頭標準形 ($\exists x$ を先頭にする) に直し，スコーレム関数 a(R や C に含まれない新しい定数記号) を導入すると，$R \wedge \neg C(a)$ に相当する式となる (先頭の $\exists x$ だけを消したものを考えている)．これは式 (2) の否定に等しい．つまり，a を R や C に含まれない新しい定数記号とすると，式 (1) の否定と式 (2) の否定の充足不能性は一致する (したがって，式 (1) と式 (2) の恒真性は一致する).

(3). また，次のように考えても，式 (1) と (2) の恒真性が一致することが分る．すべて閉論理式として

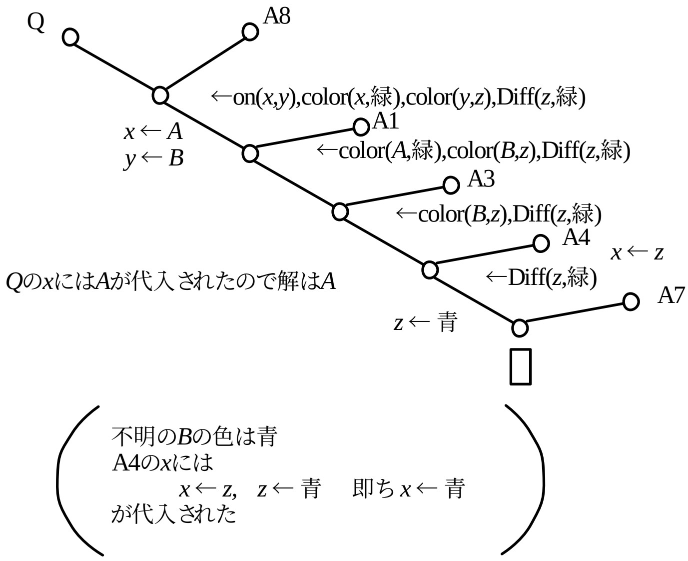


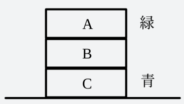
図 6.1.2: 反駁の例 1

いるので，次のようなことが言える．式 (1) が恒真なら，式 (2) も恒真になる．逆に，$R \to C(a)$ が恒真なら $R \models C(a)$，したがって $R \vdash C(a)$ である．$C(a)$ は $C(x)$ 中の変数 x の自由な出現を a に置き換えたものであるので x は $C(a)$ の a に対して自由であり，a が R や C に含まれていないなら，問 4.1.5 より，$R \vdash \forall x C(x)$ が成り立つ．よって，$R \models \forall x C(x)$，したがって $R \to \forall x C(x)$ は恒真となる．

条件を満たす変数の値の組のうち，一つあるいはいくつかの変数の値だけ求めたいということがある．

例 6.1.3

3 個の積木 A，B，C がある．
A は B の上にあり，B は C の上にある．
A は緑，C は青で，B の色は何でもよいとする．
緑でない積木の上にある緑の積木を見つけ出せ．



A1　on(A, B) ←
A2　on(B, C) ←
A3　color$(A,$ 緑$)$ ←
A4　color(B, x) ←　　　B の色は何でもよい
A5　color$(C,$ 青$)$ ←
A6　Diff (緑, 青) ←
A7　Diff (青, 緑) ←
A8　Ans(x) ← on(x, y), color$(x,$ 緑), color(y, z), Diff$(z,$ 緑)
Q　　←Ans(x)　　x だけをほしいとするための細工

A8，Q のようにしておくと，x への代入だけが求まる．ゴールを単に
← on(x, y), color$(x,$ 緑),color(y, z),Diff$(z,$ 緑)　とすると，x，y，z の組を問うていることになる (問 6.1.6 参照).

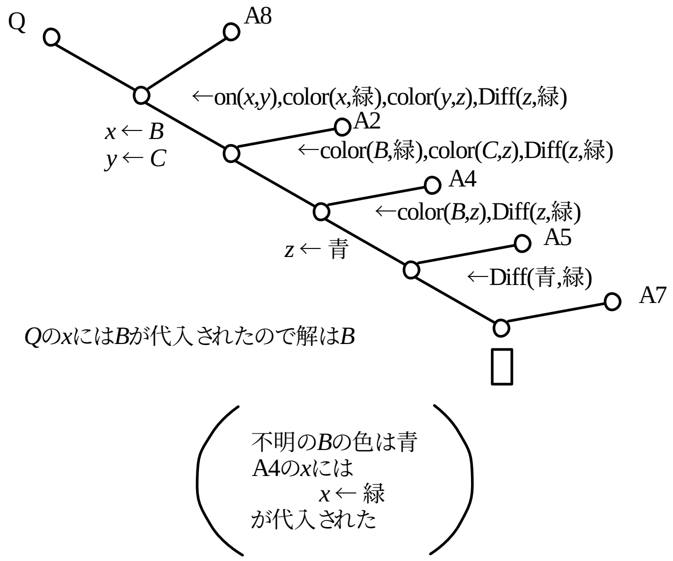


図 6.1.3: 反駁の例 2

注意

二つのソートが使われているが，それを区別する述語記号は用いていない．異なるソートに共通の変数を使うなどしていなければよい．上記の記述のままでは例えば ゴール ← color(x, x) は解 $x = B$ をもつ．

問 6.1.6

(1). $x = \alpha$，$y = \beta$ が次の論理式 (1) に対応する論理プログラムの解なら，$x = \alpha$ は論理式 (2) に対応する論理プログラムの解であるか．

(2). Ans$(\cdot)$ を R に含まれていない述語記号とする．論理式 (2) に対応する論理プログラムの解 $x = \alpha$ があるとき，ある項 β に対し $x = \alpha$，$y = \beta$ は論理式 (1) に対応する論理プログラムの解であるか．

$$R \to \exists x \exists y C(x, y) \tag{1}$$
$$R \land \forall x \forall y (C(x, y) \to \mathrm{Ans}(x)) \to \exists x\ \mathrm{Ans}(x) \tag{2}$$

ヒント:
式 (1) が反駁に成功して解 $x = \alpha$，$y = \beta$ があるとすると，式 (2) の $R \land \forall x \forall y (C(x, y) \to \mathrm{Ans}(x))$ の部分の反駁過程で Ans(α) が得られ，ゴール Ans(x) と反駁が成功する．

一方，Ans$(\cdot)$ が R に含まれていなければ，$R \to \exists x$ Ans(x) の部分では反駁は決して成功しない．よって，式 (2) の反駁が成功して解 $x = \alpha$ があるとすると，それは節 $C(x, y) \to$ Ans(x) にある代入をした $C(\alpha, \beta) \to$ Ans(α) 使って得られたものである．したがって，R とゴール $C(\alpha, \beta)$ で反駁に成功するはずである．

注意

式 (1) は
$\neg R \lor \exists x \exists y\ C(x, y)$
と等価である．式 (2) は
$$\neg R \lor \exists x \exists y\ C(x, y) \lor \exists \mathrm{Ans}(x) \tag{3}$$

と等価である．よって式 (1) が真であるような解釈では式 (2) も真であり，式 (1) が恒真であれば式 (2) も恒真である．逆は成り立たない．

例 6.1.4

部品の供給者番号とその会社名，電話番号，所在地，部品の部品番号とその部品名，色，重さ，及び，どの 供給者がどの部品をどれだけ供給しているかに関するデータが次の項目名をもつ供給者表，部品表，部品供給表によって与えられている．

供給者表

供給者番号	会社名	電話番号	所在地

部品表

部品番号	部品名	色	重さ

部品供給表

供給者番号	部品番号	数量

次の問い合わせの部分を，ホーン節を用いた論理プログラムの形に書け．

(a). ナットの供給者番号は?
Answer(x) ← 部品供給表 (x, y, u), 部品表 $(y,$ ナット$, v, w)$
←Answer(x)

(b). ナット及びボルト両方の供給者の所在地は?
Answer(w) ← 部品供給表 (x, y, u), 部品表 $(y,$ ナット$, y', y'')$, 部品供給表 (x, z, v), 部品表 $(z,$ ボルト$, z', z'')$, 供給者表 (x, x', x'', w)
← Answer(x)

データ部分は表の内容を書けばよい．
供給者表 (205，ABC 社，06-000-1111，大阪市北区北町 1-1) ←
$\vdots$

複数のソートが現れているが，それを区別する述語記号は用いていない．

計画立案 *planning* **の問題** (初期状況 (状態) と目標状況，及びオペレータの集合が与えられたとき，オペレータをどのような順で適用したら目標状況が達成されるのか) も論理式で表現できる．例 0.2.3(例 5.4.9) もその一例．

基本的には，初期状況を

$s(\cdots) \leftarrow$ のように記述し，各オペレータの適用によって状況がどのように変わるかを

$s(\cdots) \leftarrow s(\cdots) \wedge \cdots$
$\vdots$

のように記述し，目標状況を

$\leftarrow s(\cdots) \wedge \cdots$

のように記述する．

その際，問題の記述になるべく沿って (常識として省かれているところはもちろん補って) 変数を用いて書くのがよい．(具体的な引数の値を代入した式を全て列挙するのは，オペレータの意味を直接表していない，記述が長くなる等の点でまずい．)

各プログラム節は $\wedge$ で繋がれているので，例えば，初期状況を二つの論理積で表し，

$$s(\cdots) \leftarrow$$
$$s(\cdots) \leftarrow$$

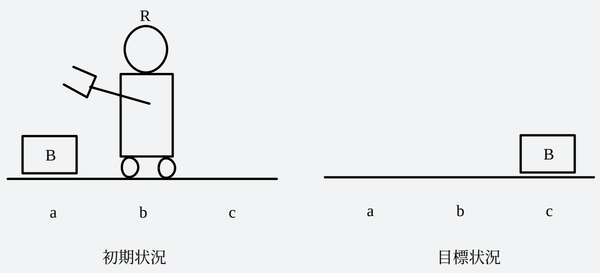
のように 2 行に書くこともある．

注意

$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \rightarrow (Y \wedge Z)$ は $(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \rightarrow Y) \wedge (X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \rightarrow Z)$ に等しい．これもホーン節を用いた論理プログラムを書くための工夫の一つである．

例 6.1.5

場所 b にあるロボット R が場所 a にある箱 B を場所 c へ移動するにはどうすればよいか．ロボットは a，b，c の間を自由に動けるし，その際，箱を持っていくこともできる．



ゴールの解から，動作 (操作) の列がわかるようにしよう．

「状態 s において，箱が x にあり，ロボットが y にいる」ということを述語 state(x, y, s) で表わす．動作は，

goto(x, y)：ロボットが x から y へ行く

move(x, y)：ロボットが箱を x から y へ移動する

の二つとし，状態 s で動作 goto(x, y)，move(x, y) を行ったあとの状態を，それぞれ，after(goto$(x, y), s)$，after(move$(x, y), s)$ で表わす．初期状態を S_0 とする．したがって，状態 s で動作の履歴を覚えている．目標状況に達したときの状態を見れば，それに至るまでの動作列が分かる．この例でも，複数のソートが現れているが，それを区別する述語記号は用いていない．

初期状況は　state(a, b, S_0) ゆえ，

state$(a, b, S_0) \leftarrow$ (1)

オペレータの記述は

state$(x, z,$ after(goto$(y, z), s)) \leftarrow$ state(x, y, s) (2)

state$(y, y,$ after(move$(x, y), s)) \leftarrow$ state(x, x, s) (3)

目標状況は

$\leftarrow$ state(c, x, s) (4)

(1) は，初期状態で，箱が a にあり，ロボットが b にいること表す．

(2) は，箱の位置 x に関わらず，ロボットが y から z へ移動するオペレータの記述である．

(3) は，箱とロボットが共に位置 x にあるとき，ロボットが箱を持ち y へ移動するオペレータの記述である．

(4) は，箱が c にある状況のときのロボットの位置 x とそれまでの動作列 s を求めるためのゴールである．そのときのロボットの位置は問題では問われていないが，どこでもよいので変数にしておく．位置 x も同時に求まる．

なお

diff$(a, b) \leftarrow$

diff$(b, a) \leftarrow$

$\vdots$

を追加しておいて，例えば (2) の右辺に diff(y, z) をつけることにより，もとと同じ位置へのロボットの「移動」という操作を強制的に避けるようにすることができる．(今は賢明な我々人間が反駁を実行するのであるから，$y = z = b$ とおいたような (2) は使うはずがないが $\cdots$)

ゴール節から始まる反駁の例：

変数への代入が分りやすいように，単一化する 2 つの式の変数はすべて違わす．また，毎回新しい変数を使っていく．この反駁の例では，(2) は変数 x_1，y_1，z_1，s_1 を，(3) は x_2，y_2，s_2 を用い，また，代入で使われる変数は s_3，s_4，$\cdots$，w_1，w_2，$\cdots$ を用いることにする．

state$(x_1, z_1,$ after(goto$(y_1, z_1), s_1)) \leftarrow$ state(x_1, y_1, s_1) (2)

state$(y_2, y_2,$ after(move$(x_2, y_2), s_2)) \leftarrow$ state(x_2, x_2, s_2) (3)

(4) と (3) について，代入 θ_1 ： $y_2 \leftarrow c$，$x \leftarrow c$，$x_2 \leftarrow w_1$，$s_2 \leftarrow s_3$，$s \leftarrow$ after(move$(w_1, c), s_3)$

を行い単一化すると，

$\leftarrow$ state(w_1, w_1, s_3) (5)

が得られる．これと (2) について，

代入 θ_2： $w_1 \leftarrow w_2$，$x_1 \leftarrow w_2$，$z_1 \leftarrow w_2$，$y_1 \leftarrow w_3$，$s_1 \leftarrow s_4$，$s_3 \leftarrow$ after(goto$(w_3, w_2), s_4)$

を行い単一化すると，　$\leftarrow$ state(w_2, w_3, s_4) (6)

が得られる．これと (1) について，代入 θ_3： $w_2 \leftarrow a$，$w_3 \leftarrow b$，$s_4 \leftarrow S_0$

を行い単一化すると，空節が導かれる．

ゴールの変数 s と x への代入 (解代入) を求めるために，s と x に関する代入のみを取り出す．単一化代入を順に追跡すると，

θ_1 で $s \leftarrow$ after(move$(w_1, c), s3)$，$x \leftarrow c$

θ_2 で $w_1 \leftarrow w_2$，$s_3 \leftarrow$ after(goto$(w_3, w_2), s_4)$

θ_3 で $w_2 \leftarrow a$，$w_3 \leftarrow b$，$s_4 \leftarrow S_0$

よって

$s \leftarrow$ after(move(a, c), after(goto$(b, a), S_0))$，$x \leftarrow c$

が解代入である．

これから操作列 goto(b, a)，move(a, c) が分る．

コメント:

(1). 問題におけるオペレータ等の意味から，ロボットが箱を c へ移動させた時点ではロボットも c にいるので，ゴールの式 (4) を
$\leftarrow \mathrm{state}(c, c, s)$
としても解はある．しかし，問題では，目標状況においてのロボットの位置はどこでもよいとされているので，一般に変数を使って表現しておかなければならない．

(2). goto に関するオペレータの式で (2) の他に
$$\mathrm{state}(x, z, \mathrm{after}(\mathrm{goto}(x, z), s)) \leftarrow \mathrm{state}(x, x, s) \qquad (2')$$
を書く必要はない．これは (2) に含まれる (仮に (2') を使うとき，(2) でもそのことは行える)．(2) の x，y は x と y が同じときでも使えることに注意しよう．

(3). オペレータの意味は
$\mathrm{state}(a, b, \mathrm{after}(\mathrm{goto}(a, b), s)) \leftarrow \mathrm{state}(a, a, s)$
...
のように，定数の入った式をすべて列挙するのではなく，(2) や (3) のように変数を用いて書くのがよい．そうしておけば，場所が a，b，c の 3 点以外のときでも使える．

(4). 単一化のときの変数への代入は，可能なら変数を代入すべきであり，例えば最初の単一化において $x_2 \leftarrow a$ のようにいきなり定数を代入すべきではない．$x_2 \leftarrow a$ でなく $x_2 \leftarrow b$ を使っても単一化できる．どれにすれば最終的に反駁が成功し，かつ簡単な解が求まるかは予測がつかない．

問 6.1.7

ある河の北岸に農夫，狼，羊がいて，キャベツがある．これらを南岸に移すには，どうすればよいか．ただし，農夫は小舟を持っているが，一時には，狼，羊，キャベツの一つしか運べない．農夫がいないとき，羊と狼を一緒に残すことはできない．又，農夫がいないとき，羊とキャベツを一緒に残すことはできない．

ヒント:
状況を表す述語はいろいろ考えられる．たとえば，
$\mathrm{state}(x_1, x_2, x_3, x_4)$：農夫，狼，羊，キャベツがそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4(変数の値は北，南) にいる (ある) ことを表す述語
$\mathrm{legal}(x_1, x_2, x_3, x_4)$：その状況が許されることを表す述語
を用いて書いてみよ．

解代入として操作列を直接得たいなら，操作列を記憶しておくための引数を導入すればよい (例 6.1.5 の s のように)．なお，許される状況の指定は
legal(北，北，北，北) $\leftarrow$
legal(北，北，北，南) $\leftarrow$
...
のように定数を用いた式を列挙しないで，変数を用いて，例えば，
$\mathrm{legal}(x, y, x, z) \leftarrow$
のように表現せよ．また，オペレータの意味も変数を用いて表現せよ．

3 章以降では，関数や述語の引数のデータタイプ (ソート) はただ一つであるとしてきた．解釈や恒真性の定義やエルブランの定理に基づいた導出原理による反駁も，そのように仮定した議論である．

多ソートのときは，各集合の和集合を一つの集合と考え，各集合の要素であるということを表す述語を導入して問題を表す．こうすれば，単一ソートとして議論できる．

述語記号 $p(x, y)$，$q(x, y)$ の第 1，第 2 引数のデータタイプ (集合) を A，B とする．関数記号 $f(x, y)$ の第 1，第 2 引数のデータタイプを A，B，値域のデータタイプを B とする．データタイプ (集合)A，B の要素であることを $t_A(x)$，$t_B(x)$ で表すとする．

多ソートで書いた論理式，例えば

$$p(a,b) \land \forall x \forall y\, (p(x,y) \to q(x, f(x,y))) \\ \to \exists x \exists y\, q(x,y) \tag{1}$$

は，集合を全体集合一つとして書くと，

$$t_A(a) \land t_B(b) \land \forall x \forall y (t_A(x) \land t_B(y) \to t_B(f(x,y))) \\ \land\, p(a,b) \land \forall x \forall y\, (t_A(x) \land t_B(y) \to (p(x,y) \to q(x, f(x,y)))) \\ \to \exists x \exists y\, (t_A(x) \land t_B(y) \land q(x,y)) \tag{2}$$

となる．

ホーン節を用いた論理プログラムはそれぞれ次のようになる．

$$p(a,b) \leftarrow \\ q(x, f(x,y)) \leftarrow p(x,y) \\ \leftarrow q(x,y) \tag{3}$$

$$t_A(a) \leftarrow \\ t_B(b) \leftarrow \\ t_B(f(x,y)) \leftarrow t_A(x), t_B(y) \\ p(a,b) \leftarrow \\ q(x, f(x,y)) \leftarrow t_A(x), t_B(y), p(x,y) \\ \leftarrow t_A(x), t_B(y), q(x,y) \tag{4}$$

この例のように，ソートが別々で変数も異なるならば，論理プログラム (3) に対して反駁ができるなら，(4) でもできる．解は $x = a$，$y = f(a,b)$ である．((4) では $t_A(a) \leftarrow$，$t_B(b) \leftarrow$，$t_B(f(x,y)) \leftarrow t_A(x), t_B(y)$ があるので，a，b，$f(x,y)$ を使うときはその式の右辺の条件の $t_A(\cdot)$，$t_B(\cdot)$ は常に成り立っている．)

建て前としては，全体を単一ソートとし，各データタイプごと，それに属するという述語を用いて記述すべきである．

多ソートを陽に導入し，ソート (型) の情報 (包含関係など) を用いることにより，記述エラーの発見に役立てるとか (無意味な代入を防いで) 反駁の効率を上げることができる．

6.2　SLD 導出

SLD 導出とは，ゴール (目標節) と確定節の間で単一化を行う．得られた導出節 (これも目標節と呼ぶ) と確定節の間で単一化を行うことをくりかえす．ただし，目標節中のどのリテラルと単一化を行うかなどは一定のルールにしたがって決める．というような導出をいう．

得られた導出節をresolutionに常に用いる

SLD : Linear resolution with Selection function for Define clause

目標節（最初および途中段階も
含め）中のリテラルを選択

確定節
プログラム節

自由度は

(a). 途中段階も含め目標節 $\leftarrow G_1, G_2, \ldots, G_m$ のどの G_i を次の導出 (反駁) に用いるか.

(b). その G_i とどの確定節の間で導出をとるか.

(c). 確定節 $B \leftarrow C_1, \ldots, C_n$ と G_i の間で導出を行うとき，どの単一化代入 (unifier) を用いるか.

単一化代入 θ を採用すると，次の目標節は
$\leftarrow G_1\theta, \ldots, G_{i-1}\theta, C_1\theta, \ldots, C_n\theta, G_{i+1}\theta, \ldots, G_m\theta$
となる．(順番が意味あり)　　自由度の (a)，(b)，(c) を一定の方法で決めて，いかに空節を失敗なく効率よく導き出すかが問題である．(解 θ が存在するなら，やはりそれを求めたい．つまり，解があるのに求められないのはなるべく避けたい．もちろん，なるべく効率よく求めたい).

自由度の (a)，(b)，(c) を一つ定めた SLD 導出の手続きを，SLD 反駁手続きということがある．

(6.1.3) の形の論理式の充足不能性を調べるための SLD 導出についても，その健全性と完全性が言える．しかも，完全性は以下のように「最も一般的な解が求まる」という強い形で言える．

定理 6.2.1 (SLD 導出の健全性)
論理プログラム (6.1.4) に対し，SLD 導出 (反駁) があるとし，その反駁で得られる解代入を θ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \rightarrow A_1) \\
\wedge &\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \rightarrow A_2) \\
&\qquad \vdots \\
\wedge &\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \rightarrow A_m) \\
&\quad \rightarrow \forall (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

は恒真である ($\forall(C_1 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$ は θ 中の変数についてすべて $\forall$ で束縛たものを表す).

注意

(1). $\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1)$,
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2), \cdots,$
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m)$ は閉論理式であるから，(6.2.1) が恒真というのは，$\forall (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$ は $\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1)$,
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2), \cdots,$
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m)$ の論理的帰結であるというのと同じことになる．

(2). (6.2.1) が恒真なら，(6.1.1) は当然恒真である．よって,［SLD 導出の健全性］より，(6.1.4) に対しSLD 導出があれば，(6.1.1) は恒真である．

(3). 6．1 節で述べた論理プログラムの一般の反駁の健全性より，SLD 導出 (反駁) の健全性は明らかであるが，別途，証明を書いておく．

証明

SLD 導出の長さの帰納法で証明できる．プログラム節の集合を P とする．長さ 1 のとき，ゴールは $\leftarrow C$ で，プログラム節に $A \leftarrow$ があり，$C\theta = A\theta$．$P \models A$ ゆえ $P \models A\theta$，すなわち $P \models C\theta$，したがって $P \models \forall C\theta$.

長さ 2 以上のとき，反駁を

$\leftarrow C_1, C_2, \cdots, C_k$

$\leftarrow B_1\rho, B_2\rho, \cdots, B_n\rho, C_2\rho, \cdots, C_k\rho$

$(B \leftarrow B_1, B_2, \cdots, B_n \in P$ を用いた)

$\vdots$

とする．$C_1\rho = B\rho$ である．

$\leftarrow B_1\rho, B_2\rho, \cdots, B_n\rho, C_2\rho, \cdots, C_k\rho$ の反駁の解代入を τ とすると，帰納法の仮定より，
$P \models \forall (B_1\rho \wedge B_2\rho \wedge \cdots \wedge B_n\rho \wedge C_2\rho \wedge \cdots \wedge C_k\rho)\tau$.

一方，$P, B_1\rho \wedge B_2\rho \wedge \cdots \wedge B_n\rho \models B\rho = C_1\rho$ ゆえ，

$P \models \forall (C_1\rho \wedge C_2\rho \wedge \cdots \wedge C_k\rho)\tau$.

ゴール $\leftarrow C_1, C_2, \cdots, C_k$ に対する解代入は $\rho\tau$ ゆえ，$\rho\tau = \theta$ とおくと
$P \models \forall (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$. □

定理 6.2.2 (SLD 導出の完全性)

論理プログラム (6.1.4) に対し，SLD 導出 (反駁) があるとし，その反駁で得られる解代入を θ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1) \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2) \\
&\qquad \vdots \\
&\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m) \\
&\qquad \to \forall (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta \qquad (6.2.2)
\end{aligned}
$$

が恒真ならば，論理プログラム (6.1.4) に対するある SLD 導出が存在し，次のことが成り立つ．

その反駁で得られる解代入 ρ に対し，$\theta = \rho\gamma$ なる代入 γ が存在する (θ は ρ の変数にある代入 γ を施して得られる).

注意

(1). (6.2.2) が恒真というのと，$\forall(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\theta$ が $\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1)$,
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2), \cdots,$
$\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m)$
の論理的帰結であるというのとは同じことである (閉論理式ゆえ).

(2). (6.1.1) が恒真であれば，変数を含まない項のある代入 ξ があって

$$
\begin{array}{l}
\forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{11} \wedge B_{12} \wedge \cdots \wedge B_{1n_1} \to A_1) \\
\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{21} \wedge B_{22} \wedge \cdots \wedge B_{2n_2} \to A_2) \\
\qquad\qquad \vdots \\
\wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots (B_{m1} \wedge B_{m2} \wedge \cdots \wedge B_{mn_m} \to A_m) \\
\qquad \to (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)\xi
\end{array}
$$

が恒真である．これは (6.2.2) の特別な場合に当る．

(3). ［SLD 導出の完全性］は，(6.1.1) が恒真であれば，SLD 導出が存在すること以外に，(6.2.2) が恒真であるようなどんな θ でも，その ρ から得られるということを言っている．

SLD 導出の健全性と完全性は，(a) での選択法に依存せずに (したがって，例えば常に最も左の G1 を用いると決めてもよい)，また，(c) の単一化代入は常に最汎単一化代入 (最一般単一化代入, most general unifier，mgu) の任意の一つを用いるとしても成り立つ.「SLD 導出の完全性」における解代入 ρ は mgu を用いることによって得られる．よって，反駁に成功するかどうか (解代入を求められるかどうか) は (b) のどの確定節と単一化を行うべきかにかかっている．なお，mgu の求め方は 5.4 節で述べた．

SLD 導出の完全性の証明は，5.4 節の mgu を用いた反駁の完全性と本質は同じであるので，省略する．

6.3　Prolog

Prolog の実行法

プログラミング言語 Prolog では,
SLD 導出で，かつ,

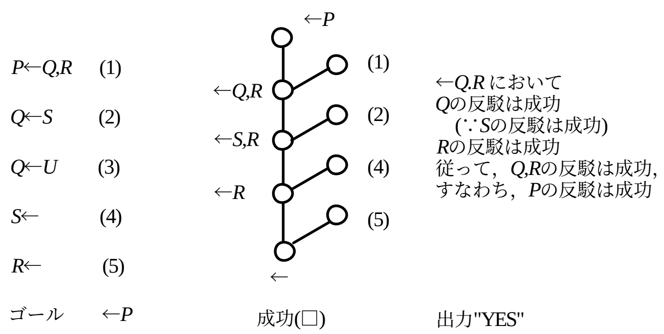
(a). 目標節中の最左リテラルを選択

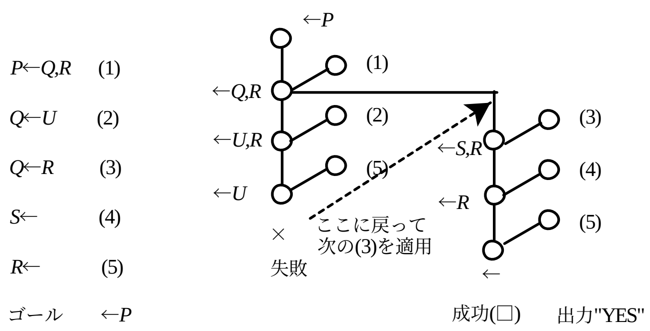
(b). 確定節はプログラム内の順に適用する

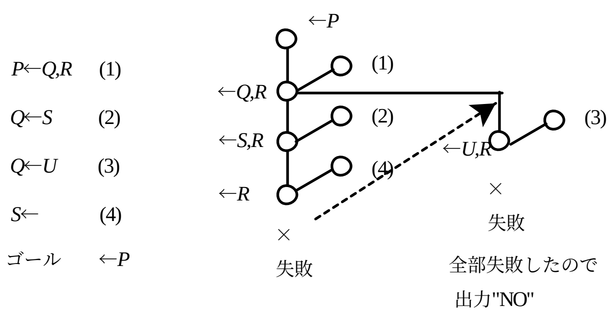
(c). 任意の mgu の一つを用いる

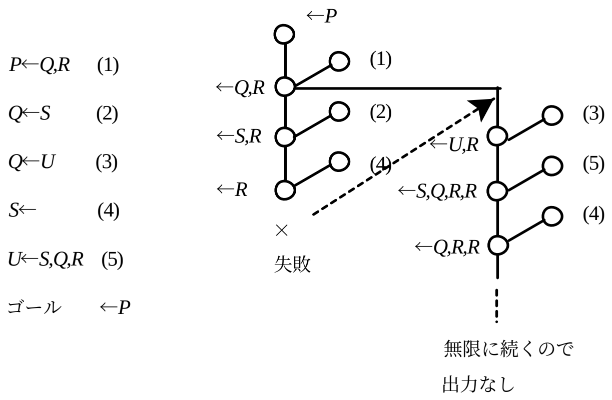
のような導出を行う．(このような導出を Prolog の実行法と呼ぶことにする．) 失敗がわかったときは，バックトラックして，(b) で次の候補を選ぶ.

Prolog の実行の例 (変数のない簡単な例)









ゴールに変数がないときは，反駁に成功すれば，“YES”(式 (6.1.1) が恒真かの答) を出力する．ゴールに変数があるときは，反駁に成功すれば，(“YES” の代わりに) 解代入を出力する．

前述の Prolog の実行法の順で導出 (反駁) を続けていって，最初の解を見つけたら，システムはそれを出力し，一端止まる．そこで次の解を要求したら，バックトラックして次の解を探しに行く．次の解があれば，それを出力し，一端止まる．(最初の，あるいは解を出力したときの次の) 解の探索要求に対し，(それ以降) すべて失敗に終り，全部調べ尽くしたら，停止して，“NO”(最初からすべて失敗に終ったときは式 (6.1.1) は恒真ではない / 解なし，途中からの場合はそれ以降反駁に失敗 / 解なし) を出力する．無限に導出を続けたら実行が終らないので，それ以降何も出力されない．(注：1 回の反駁に失敗してもそこで停止して出力 NO を出すのではない．失敗したらただちに次の候補を探しに行く．)

Prolog のシステムでは，プログラム部の記述を指定して起動すると，ゴールを聞いてくるのでゴールはその時に与えるようになっている．また，実行しているとき，新しいゴールを随時与えることができるようになっている (ゴールを除いたプログラム部を，普通，*Prolog* **プログラム**と呼んでいる).

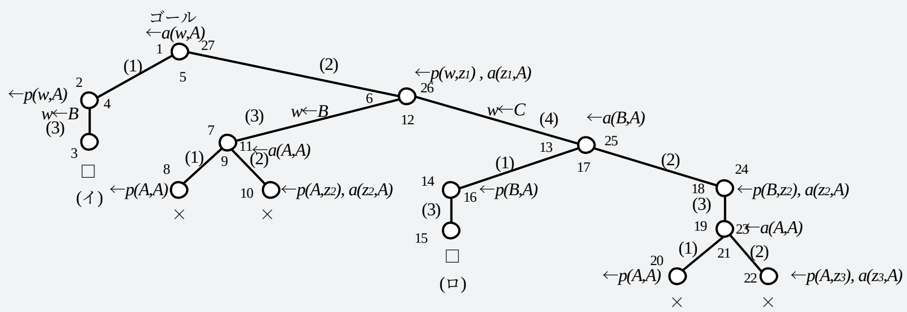
例 6.3.1

ある人の「親」はその人の「先祖」である.「先祖」の「親」も「先祖」である．B は A の親であり，C は B の親である．A の先祖を求める論理プログラムを書け.

x が y の親であることを $p(x,y)$，x が y の先祖であることを $a(x,y)$ で表わす.

$a(x,y) \leftarrow p(x,y)$ (1)
$a(x,y) \leftarrow p(x,z), a(z,y)$ (2)
$p(B,A) \leftarrow$ (3)
$p(C,B) \leftarrow$ (4)
$\leftarrow a(w,A)$ (5)

このプログラムに対して，導出過程は，次の図を左優先，深さ優先順 (1，2，...，27 の順) で構成していくことで表わされる．簡単のため，例 6.1.5 のような毎回の全ての変数への代入をいちいち書いていない．毎回新しい変数を導入して毎回全ての変数に代入を施す例は，後述の問 6.3.3 のヒントにある.



まず，(イ) で，最初の解 $w = B$ を出力する．次の解を要求すると (ロ) で $w = C$ を出力する．次の解を要求すると 16 → ··· → 27 とすべてを調べ尽くして，停止し，NO(次の解なしの意) を出力する.

この例では，新しい変数として，根からの各パスにそって z_1，z_2，$\cdots$ を用いているが，この木を深さ優先で辿った順に z_1，z_2，$\cdots$ を使っていってもよい (18 では z_2 でなく新たに z_3 を用いて，$\leftarrow p(B,z_3)a(z_3,A)$ を得る).

問 6.3.1

例 6.3.1 において，プログラムを次のように変えたとき，実行はどうなるか.
1 行目，2 行目を次のようにする.　$a(x,y) \leftarrow p(x,z), a(z,y)$ (1’)
$a(x,y) \leftarrow p(x,y)$ (2’)

問 6.3.2

「ある人の「親」はその人の「先祖」である」があれば,「「先祖」の「親」も「先祖」である」の代わりに,「「親」の「先祖」も「先祖」である」，あるいは「「先祖」の「先祖」も「先祖」である」としても内容は同じである.

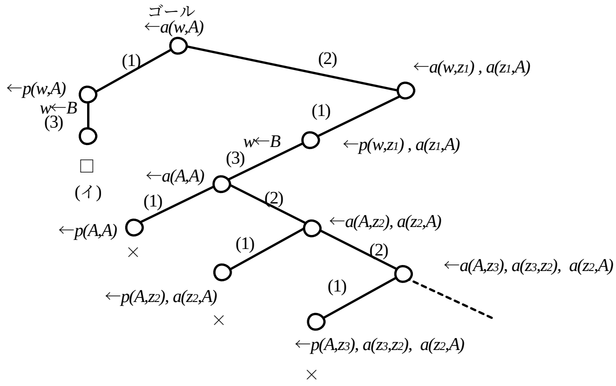
例 6.3.1 において，プログラムをそれらに対応するように変えたとき，実行はどうなるか.

(a). (2) を次のようにする.
$a(x,y) \leftarrow a(x,z), p(z,y)$ (2’)

(b). (2) を次のようにする.
$a(x,y) \leftarrow a(x,z), a(z,y)$ (2”)

ヒント:

(b) に対する導出過程の途中まで



(イ) で解 $w = B$ を出力する．次の解を要求すると $\cdots$ ($\leftarrow a(A, z_2)a(z_2, A)$ が失敗を挟み先頭が同じ形の $\leftarrow a(A, z_3)a(z_3, z_2)a(z_2, A)$ に変わっているので，図の点線のところ以降は無限に失敗を繰り返す．)

このように，論理プログラムとしては内容的に等価であっても，Prolog の実行法では，式の順や式の中味を少し変えるだけで出力結果および停止性などが異なる．

Prolog のオペレータ

実際の Prolog 処理系では，プログラミング言語という立場から，制御の効率化や記述能力の向上を計って，第一階述語の枠を越えた 拡張が行われている．しかし，それにより意味論のキレイさが失われてしまう．その代表が**カットオペレータ**である．

ここでは，カットと否定のみ取り上げよう．

(i) カット

$P \leftarrow Q, !, R$

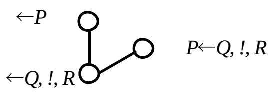
$P \leftarrow S$

$Q \leftarrow$

$S \leftarrow$

$\leftarrow P$

において，目標節中の最左リテラルがカットオペレータ!を含んだ文の左辺と単一化されたとする．



カットオペレータ!を含んだ目標節中の!の左が全て「成功」して!の右側の単一化に入り，どこかで「失敗」してバックトラックするとき!を越えて左のリテラルに対する別の単一化は試みない．かつ，!を含んだ文と単一化されたもとの目標節中のリテラル (この例では P) の実行は強制的に失敗させられる．

例では P がゴールであるため，ゴールの P が強制的に失敗させられ，“NO” が出力される

例 6.3.2

(1). 無料 $(x) \leftarrow$ 男 (x), !, 子供 (x)

(2). 無料 $(x) \leftarrow$ 女 (x)

(3). 男 (情太)←

(4). 男 (一郎)←

(5). 女 (計子)←

(6). 子供 (一郎)←

← 無料 (情太) に対しては，(1) の適用後，(3) の男 (情太) の反駁に成功し，!を越えて，右へいくが，子供 (情太) で失敗し，(男 (情太) の (3) より後の次の候補や，無料 (情太) の (1) より後の次の候補は探さずに，ただちに) 無料 (情太) を失敗にして停止する．出力は “NO” である (男でありかつ子供でなければただちに NO を出力している).

← 無料 (一郎) に対しては，成功して，出力は “YES”.

この例の (1) の!の効果は,「男 (x) であるならば，(2) 以降の無料 $(\cdot)$ で成功することはない」ようにプログラムを書いておいて，男 (x) に成功し，かつ!の右で失敗したとき，(2) 以降の無料 $(\cdot)$ を調べずに,「無料 $(\cdot)$ に失敗」とただちに結論していることである．無駄な探索を省いている.

例 6.3.3

(1). 元号 (year，平成，nen)← year≥ 1989, nen=year−1988

(2). 元号 (year，昭和，nen)← 1989 >year, year≥ 1926, nen=year−1925

(3). 元号 (year，大正，nen)← 1926>year, year≥ 1912, nen=year−1911

(4). 元号 (year，明治，nen)← 1912>year, year≥ 1868, nen=year−1867

例えばゴールを ← 元号 $(2000, x, y)$,odd(y) とすると，(1) と単一化し，

$\leftarrow 2000 \geq 1989, y = 2000 - 1988$,odd$(y)$

が得られる．第一項の $2000 \geq 1989$ は成功，第 2 項で $y = 12$ が求まり (第 2 項成功)，odd(12) を調べるが，値は偽ゆえ odd(12) は “失敗”．バックトラックして次の候補は今の場合，(2) と単一化すること．しかし，(2)~(4) のどれも成功しないように書かれている (year の条件が互いに排他的)．したがって，各式の year の条件の右側 (nen $= \cdots$ の前 (左)) に!をいれてよい．さらに，プログラム節は (1)，(2)，$\cdots$ の順で評価されるので，次のように書いてもよい

元号 (year，平成，nen) ← year≥ 1989, !, nen=year−1988
元号 (year，昭和，nen) ← year≥ 1926, !, nen=year−1925
元号 (year，大正，nen) ← year≥ 1912, !, nen=year−1911
元号 (year，明治，nen) ← year≥ 1868, !, nen=year−1867

こうなったら，意味は，完全に手続き的に定義されている！

(ii) 否定 not

Prolog には，本当の意味の「否定」はない．しかし，その代用となりうる not がある．プログラムを調べたところ「$\cdots$ である」と確認できなかったので,「$\cdots$ でない」が成り立つとしようという考えである．not(P) の述語 P に変数があるとき，注意を要する.

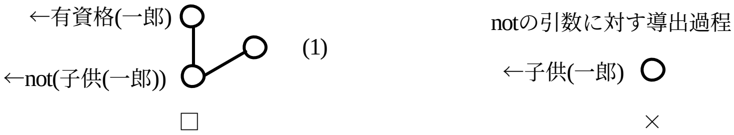
not(P) は P が (一度でも) 成功したときに失敗し，P が (すべてについて) 失敗したときに成功する (P の反駁がループに陥れば not(P) も結果はない).

(1). 有資格 $(x) \leftarrow$ not(子供 (x))

(2). 子供 (太郎) ←

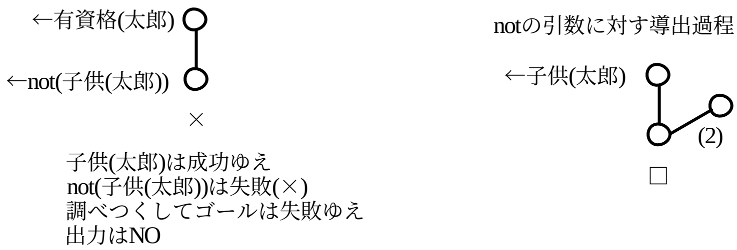
(3). 子供 (次郎) ←

← 有資格 (一郎) に対しては YES



子供(一郎)は調べつくして失敗ゆえ
not(子供(一郎))は成功(□)
ゴールは成功ゆえ出力はYES

← 有資格 (太郎) に対しては NO



(1) は

有資格 (x) ← 子供 (x), !, FAIL

有資格 (x) ←

と同じことを表わす．FAIL は無条件に必ず失敗する述語である．

例 6.3.4

合格 (一郎, 情報論) ←
合格 (一郎, 論理設計) ←
合格 (花子, 情報論) ←
合格 (花子, システムプログラム) ←
合格 (花子, データベース) ←
科目 (情報論) ←
科目 (論理設計) ←
科目 (システムプログラム)←
科目 (データベース)←

ゴール ← not ((合格 (一郎,x)) に対しては，合格 (一郎，x) が $x =$ 情報論とおいて成功するので，not (合格 (一郎,x)) は失敗する．ゴールが失敗するので，出力は NO である．このゴールによる質問は「$\exists x$ 合格 (一郎,x) でないか」を問うており，$\exists x$ 合格 (一郎,x) のとき NO を，$\exists x$ 合格 (一郎,x) でないとき (それが確かめられたときに限り)YES を出力する．

一郎が合格しなかった科目を知りたければ，ゴールを

← 科目 (x), not(合格 (一郎, x)

にすればよい．科目を先に固定しておいてそれに 合格していない かと聞く．このゴールに対しては，最初の出力は $x =$ システムプログラムである．

← not(合格 (一郎,x)), 科目 (x)

に対しては実行はどうなるか．

注意

- not を用いた質問は，そうであるもの (子供，合格，eq などの述語が成り立つもの) はすべての引数値が列挙して書かれており，書いてない引数値に対しては，そうでないという考えに立っている．
- ← not $P(x)$ は $\exists x \neg P(x)$ を問うているのではない．

前述の例「子供でなければ有資格である」と同じ考えで，

diff(x, y) ← not(eq(x, y))
eq(A, A) ←
eq(B, B) ←
$\vdots$
eq(F, F) ←

としておけば，A∼F 間の diff をすべて列挙して書くより短くてすむ．

Prolog はループに陥りやすい

Prolog の実行は，例えば，可換則を含むとそれを繰り返し実行して，ループに陥りやすい．可換則を使わずに，もとのデータ以外に，もとの引数順と反対向きのデータの式も入れるとその心配はないが，記述が長くなる．可換則を 1 回しか適用しないような工夫が出来る．

(イ) 友人 $(A, B) \leftarrow$
友人 $(D, A) \leftarrow$
友人 $(x, y) \leftarrow$ 友人 (y, x) 可換則

$\leftarrow$ 友人 $(w, B),$ 友人 (w, D) に対し，$\leftarrow$ 友人 $(A, D), \leftarrow$ 友人 (D, A)，$\square$ となり，$w = A$ が求まる．

(ロ) (1) 友人 $(A, B) \leftarrow$
(2) 友人 $(C, B) \leftarrow$
(3) 友人 $(D, C) \leftarrow$
友人 $(x, y) \leftarrow$ 友人 (y, x) 可換則

$\leftarrow$ 友人 $(w, B),$ 友人 (w, D) に対し，$\leftarrow$ 友人 $(A, D), \leftarrow$ 友人 (D, A)，$\leftarrow$ 友人 $(A, D), \cdots$ となり，$w = C$ が求まらない．

(ハ)(ロ) において友人 $(x, y) \leftarrow$ 友人 (y, x) の代りに
(4) 友人'$(x, y) \leftarrow$ 友人 (x, y)
(5) 友人'$(x, y) \leftarrow$ 友人 (y, x) 可換則

とし，質問を $\leftarrow$ 友人'(w, B)，友人'(w, D) とすると，可換則は 1 回しか適用せず，$w = C$ が求まる．

前述の計画立案の問題でも，ある操作ともとに戻す操作を繰り返し実行して，ループに陥ることが多い．Prolog には，ループに陥る可能性を少なくするのに役立つオペレータもある．過去に生じた引数値の組合せのすべてをある特定の述語で記憶しておいて，現在の状況が過去のそれらと一致していないかを (その述語に not を付けて) チェックすることができる．過去のそれらと一致していないという条件を各操作を表す式の右辺に付けておくことによって，以前と同じ引数の組合せが生成されるのを禁止することができる．そのほか，幅優先で探索するなどプログラミング上の工夫もありうる．しかし，それらは本授業科目の範囲ではないので，立ち入らない．

論理プログラムの簡単な例

(1). 与えられた a，b について $ax + b = 0$ の解 x を求める
linear-equation$(0, 0, x) \leftarrow$
linear-equation$(u, v, x) \leftarrow u \neq 0,\ x = -v/u$
例えば $\leftarrow$ linear-equation$(15, 60, x)$

(2). $n!$ を求める
factorial$(0, 1) \leftarrow$
factorial$(n, v) \leftarrow m = n - 1,$ factorial$(m, i), v = n * i$
例えば $\leftarrow$ factorial$(8, v)$

(3). リスト

リストの表現には，CONS(要素を一つ前に追加する演算) を用いて書く方法と要素を列挙する方法とがある．

CONs(または |) をつかう　　$[\,]$，$[a \mid [b \mid [c \mid [\,]]]]$ など

要素を列挙する　　$[\,]$，$[a, b, c]$　など

リストの連接のプログラム

append$([\,], y, y) \leftarrow$

append$([u \mid x], y, [u \mid z]) \leftarrow$ append(x, y, z)

例えば　$\leftarrow$ append$([a \mid [b \mid [c \mid [\,]]]], [d \mid [e \mid [\,]]], z)$ や

$\leftarrow$ append$(x, y, [a \mid [b \mid [c \mid [d \mid [\,]]]]])$

(4). ハノイの塔

n 枚の円盤を棒 C を作業用につかって棒 A から B へ移動させる手順は?

hanoi$(1, A, B, C, [AtoB]) \leftarrow$

hanoi$(n, A, B, C, s) \leftarrow$

$m = n - 1$,hanoi(m, A, C, B, s_1),

hanoi(m, C, B, A, s_2),

append$(s_1, [AtoB \mid s_2], s)$

ここで，| はリストの CONS(先頭へ要素を追加)，append はリストの連接 (第 1 引数のリストの後に第 2 引数のリストを連接したリストが第 3 引数のリスト)

例えば　$\leftarrow$ hanoi(3, 左, 中, 右, s)

問 6.3.3

上記の各プログラムの実行はどのように進むか，小さいデータのゴールに対して調べてみよ．

ヒント:

リストの連接の例

append$([\,], y_1, y_1) \leftarrow$ (1)

append$([u_2 \mid x_2], y_2, [u_2 \mid z_2]) \leftarrow$ append(x_2, y_2, z_2) (2)

$\leftarrow$ append$([b \mid [c \mid [\,]]], [a \mid [\,]], z)$ (3)

に対しては，

(2)，(3) で $u_2 \leftarrow b, x_2 \leftarrow [c \mid [\,]], y_2 \leftarrow [a \mid [\,]], z_2 \leftarrow z_3, z \leftarrow [b \mid z_3]$ とおいて

$\leftarrow$ append$([c \mid [\,]], [a \mid [\,]], z_3)$ (4)

(2)，(4) で $u_2 \leftarrow c, x_2 \leftarrow [\,], y_2 \leftarrow [a \mid [\,]], z_2 \leftarrow z_4, z_3 \leftarrow [c \mid z_4]$ とおいて

$\leftarrow$ append$([\,], [a \mid [\,]], z_4)$ (5)

(1)，(5) で $y_1 \leftarrow [a \mid [\,]], z_4 \leftarrow [a \mid [\,]]$ とおいて

空節

が得られる．ゴール (3) の変数 z への代入は

$z \leftarrow [b \mid z_3], z_3 \leftarrow [c \mid z_4], z_4 \leftarrow [a \mid [\,]]$

ゆえ，最初の解は $z \leftarrow [b \mid [c \mid [a \mid [\,]]]]$ である．次の解はない．

この例では，毎回新しい変数を導入して毎回全ての変数に代入を施しています．

索引

7 問題のヒント

7.1 問 0.2.1 のヒント

(2)

$\neg\exists w P(w)$

$P(w)$: 顧客 w は預金痍高が 100,000 以上である預金口座を大阪市内と神戸市内の全ての支店に持っている.

$\forall x$[支店 x は大阪市内か神戸市内にある $\to R(w,x)$]

$R(w,x)$: w は x に預金残高が 100,000 以上である預金口座を持っている.

(3)

$\exists x$[支店 x は大阪市内 $\wedge\, Q(x)$]

$Q(x)$: 田中は, 京都市の支店にある彼のどの預金口座の預金残高よりも多い額の融資残高をもつ融資口座を支店 x に持っている.

$\exists y \exists t$[融資 $(x, y,$ 田中$, t) \wedge S(t)$]

$S(t)$:　t は, 京都のどの支店の田中のどの預金口座の残高よりも大きい. この $S(t)$ はいろいろな形で書けます.

(a)

京都市のどの支店, そこの田中のどの預金口座の残高についても, t はその残高より大きい.

京都市のどの支店 z についても, z における田中の預金のどの預金口座番号 s と残高 w についても, t は w より大きい.

$\forall z \forall s \forall w[\{z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s,$ 田中$, w)\} \to t > w]$ (1)

これはもとの文「t は, 京都のどの支店の田中のどの預金口座の残高よりも大きい」にそのまま対応した形です.

(b)

$\forall w[T(w) \to t > w]$

$T(w)$:w は京都市のある支店の田中のある預金口座の残高である.

$\exists z \exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 田中は z に残高 w, 預金口座番号 s の預金口座をもつ$]$

$\exists z \exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s,$ 田中$, w)]$

よって, $S(t)$ 全体は

$\forall w[\exists z \exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s,$ 田中$, w)] \to t > w]$ (2)

(c)

$\forall z \forall w[(z$ は京都市内にある $\wedge \exists s$ 預金 $(z, s,$ 田中$, w)) \to t > w]$ (3)

もちろん, 式 (1), (2), (3) は等価です. 基本的には, Q が y を引数としてもっていないとき, つぎの二つは等価であるという性質に基づいています.

$\forall y[p(y) \to Q]$

各 y に対して, 「もし $p(y)$ が成り立つなら Q は真でなければならない」ということが成り立つ

$\exists y\, p(y) \to Q$

$p(y)$ が成り立つような y が存在するなら, Q は真でなければならない

論理式に慣れるために, 等価性についてもう少し見てみましょう. 0 章で挙げた等価な変形以外にも, 例えばつぎのようなものも等価です.

$\wedge$ は可換, $\vee$ は可換であることはもちろんです.

$\forall x[q(x) \wedge P]$ $\quad \forall x\, q(x) \wedge P$ ただし, P が x を引数としてもっていないとき

$\forall x[q(x) \vee P]$ $\quad \forall x\, q(x) \vee P$ ただし, P が x を引数としてもっていないとき

$\exists x[q(x) \wedge P]$ $\quad \exists x\, q(x) \wedge P$ ただし, P が x を引数としてもっていないとき

$\exists x[q(x) \vee P]$ $\quad \exists x\, q(x) \vee P$ ただし, P が x を引数としてもっていないとき

$\forall x \forall y\, R(x, y)$ $\quad \forall y \forall x\, R(x, y)$

$\exists x \exists y\, R(x, y)$ $\quad \exists y \exists x\, R(x, y)$

0 章で挙げた変形や上の変形を用いれば, 前述の $\forall y[p(y) \to Q]$ と $\exists y\, p(y) \to Q$ の等価性は出てきます.

$\forall y[p(y) \to Q]$
$= \neg \exists y \neg [p(y) \to Q]$
$= \neg \exists y \neg [\neg p(y) \vee Q]$
$= \neg \exists y [p(y) \wedge \neg Q]$
$= \neg (\exists y\, p(y) \wedge \neg Q)$ $\;$ ($\neg Q$ は y を引数としてもっていない)
$= \neg \exists y\, p(y) \vee Q$
$= \exists y\, p(y) \to Q$

これらの等価変形を用いると, 前述の式 (2) において

$\exists z \exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w$
$= \forall z(\exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w$ (a)

(a) において

$\exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w$
$= \forall s([z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w)$

従って, 式 (2) は次式と等価.

$\forall w \forall z([z$ は京都市内にある $\wedge \exists s$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w)$

これは式 (3) と等価です.

また, (a) にがおいて

$\exists s[z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, W)] \to t > w$
$= \forall s([z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, W)] \to t > w)$

従って, 式 (2) は次式と等価.

$\forall w \forall z \forall s([z$ は京都市内にある $\wedge$ 預金 $(z, s, 田中, w)] \to t > w)$ これは式 (1) と等価です.

注: $\forall x \forall y\, R(X, y)$ や $\exists x \exists y\, R(X, y)$ のもとの形は, それぞれ $\forall x(\forall y\, R(x, y))$, $\exists x(\exists y\, R(X, y))$ です. 括弧 (,) を省略しています.

7.2 問 1.2.5 の解答例

(以下では論理式 P, Q が論理的に同値であることを $P = Q$ と略記する.)

$\neg\{\neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (p_1 \neg p_2 p_4 \to p_3 \neg p_5)$
$\wedge \{\neg p_1 p_3 \to (p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5)\}$
$\wedge \{(p_2 \vee \neg p_5) \to \neg p_1 p_4\}$
$\wedge \{(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_5) \to (p_3 \vee \neg p_4)\}$
$\to (p_2 \neg p_5 \vee \neg p_1 p_2 p_4)\}$
$= \neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (p_1 \neg p_2 p_4 \to p_3 \neg p_5)$
$\wedge \{\neg p_1 p_3 \to (p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5)\}$
$\wedge \{(p_2 \vee \neg p_5) \to \neg p_1 p_4\}$
$\wedge \{(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_5) \to (p_3 \vee \neg p_4)\}$
$\wedge \{\neg (p_2 \neg p_5 \vee \neg p_1 p_2 p_4)\}$
($\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$ を用いて変形)
$= \neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge \{\neg(p_1 \neg p_2 p_4) \vee p_3 \neg p_5\}$
$\wedge \{\neg(\neg p_1 p_3) \vee (p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5)\}$
$\wedge \{\neg(p_2 \vee \neg p_5) \vee \neg p_1 p_4\}$
$\wedge \{\neg(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_5) \vee (p_3 \vee \neg p4)\}$
$\wedge \neg(p_2 \neg p_5 \vee \neg p_1 p_2 p_4)$
(各行を $P \to Q = \neg P \vee Q$ を用いて変形)
$= \neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_4 \vee p_3 \neg p_5)$
$\wedge (p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5)$
$\wedge (\neg p_2 p_5 \vee \neg p_1 p_4)$
$\wedge (p_1 \neg p_2 \neg p_5 \vee p_3 \vee \neg p_4)$
$\wedge \{(\neg p_2 \vee p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)\}$
(各行をド・モルガンの法則を用いて変形)
$= \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5)$
$\wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5)$
$\wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee p_4) \wedge (p_4 \vee p_5)$
$\wedge (p_1 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5)$

$\land (\neg p_2 \lor p_5) \land (p_1 \lor \neg p_2 \lor \neg p_4)$
(各行を分配律 $x \lor (y \cdot z) = (x \lor y) \land (x \lor z)$ を用いて変形)

7.3 問題 2.1.10(4)

$A, B \vdash A \land B$
$A \land B$ は $\neg(A \to \neg B)$ の略記ゆえ,
$A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$ (*1)
を示す．この問題までに出ている (証明が済んでいると考えている）結果で，使えそうなものを選ばう．

問 2.1.3(2）の $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$ の B を $\neg B$ とすると結論部は目的のものといっしょになるので，使えそうである．すなわち，問 2.1.3(2）より，
$A, \neg\neg B \vdash \neg(A \to \neg B)$ (*2)

ここで,
$B \vdash \neg\neg B$ (*3)
が言えれば，(*2)，(*3) より，(*1) である．

(*3) は，問 2.1.2(4)
$\vdash B \to \neg\neg B$ と MP を使って言える．丁寧に書けば

(1).	B	仮定
(2).	$B \to \neg\neg B$	問 2.1.2(4) より
(3).	$\neg\neg B$	l，2，と MP より

問 2.1.3(2) のところに，ヒント として問 2.1.2(7) が挙げられている．問 2.1.3(2) の結果を使わずに，問 2.1.2(7) を用いて，(問 2.1.3(2) の証明に相当するのも含む形で) 直接 (1) を証明してみよう．(問 2.1.2 の終りまでで (1) の結論部と仮定を含む形の論理式でもっとも関係ありそうなものはどれかと探しても問題 2.1.2(7) は見つかるであろう．$\neg(X \to Y)$ と $\neg(A \to \neg B)$ を合わせるために Y を $\neg B$ とおくと，$\neg Y$ のところが $\neg\neg B$ になるが，問題 2.1.2 の (3) か (4) のどちらかを用いて仮定の B から処理できるであろう．)

(1).	$A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$	2.1.2(7) より
(2).	A	仮定
(3).	$\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B)$	1，2 と MP より
(4).	$B \to \neg\neg B$	2.1.2(4) より
(5).	$B \to \neg(A \to \neg B)$	3，4 と例 2.1.2(1) より
(6).	B	仮定

(7). $\neg(A \to \neg B)$ 5，6 と MP より

ゆえに，$A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$

7.4 問 2.1.10(5)

$\neg(A \to \neg B) \vdash A$ (*1)
もし $\neg(A \to \neg B) \to A$ が (定理として) 示せたら，$\neg(A \to \neg B)$ を仮定し，MP により A が得られるので (*1) が言える．

$\neg(A \to \neg B) \to A$ は，もし $\neg A \to \neg\neg(A \to \neg B)$ が示せたら，問 2.1.2(5) と MP より得られる．

$\neg A \to (A \to \neg B)$ は問 2.1.2(1) と同じであり，問 2.1.2(4) より $(A \to \neg B) \to \neg\neg(A \to \neg B)$ であるので，例 2.1.2(1) を使って $\neg A \to \neg\neg(A \to \neg B)$ が示せる．

7.5 一復習一 述語論理式に対する解釈

定義にもどってやってみよう

論理式 A に村する解釈 $\mathscr{I}$，($\mathscr{I}$ のもとでの) 自由変数への値の代入 g に対し，$[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{tt}$(真) であるでことを $\models_{\mathscr{I},g} A$ と書く (解釈とは何かは 3.1 参照)．$\mathscr{I}$ のもとでのすべての代入 g に対し $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{tt}$($\models_{\mathscr{I},g} A$) であるとき，$\models_{\mathscr{I}} A$ と書く．ある代入 g があって $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{ff}$(偽) ($\models_{\mathscr{I},g} A$ でない) のときは，$\models_{\mathscr{I}} A$ でない．$\models_{\mathscr{I}} A$ であるような解釈 $\mathscr{I}$ があるとき，A は充足可能であるという．$\models_{\mathscr{I}} A$ であるような解釈 $\mathscr{I}$ が存在しないとき，A は充足不能であるという．すべての解釈 $\mathscr{I}$ に対し $\models_{\mathscr{I}} A$ であるとき，$\models A$ と書き，A は恒真であるという．$\models A$ でない (A は恒真でない) とき，すなわち，$\models_{\mathscr{I}} A$ でないようなある解釈 $\mathscr{I}$ があるとき，$\not\models A$ とも書く．$\not\models A$ をいうには，$\models_{\mathscr{I}} A$ でない解釈 $\mathscr{I}$ があること，従って，$[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{ff}$ であるような解釈 $\mathscr{I}$，代入 g があることをいえばよい．

論理式 A，B に対し，すべての解釈 $\mathscr{I}$ に対し $\models_{\mathscr{I}} A$ なら $\models_{\mathscr{I}} B$ であるとき ($\models_{\mathscr{I}} A$ であるようなどんな解釈 $\mathscr{I}$ に対しても $\models_{\mathscr{I}} B$ であるとき)，$A \models B$ と書く．$A \models B$ でないとき，すなわち，ある解釈 $\mathscr{I}$ があって $\models_{\mathscr{I}} A$ であるのに $\models_{\mathscr{I}} B$ でないとき，$A \not\models B$ とも書く．$A \not\models B$ をいうには，つぎの (a)，(b) をともに満たす解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい．

(a)$\models_{\mathscr{I}} A$(すなわち，すべての代入 g に対し $[\![A]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{tt}$)

(b)$\models_{\mathscr{I}} B$ でない (すなわち，ある代入 g があって $[\![B]\!]^{\mathscr{I},g} = \mathsf{ff}$)

一般に，論理式の集合 Γ に対し，Γ 中の全ての論理式 A に村し $\models_{\mathscr{I}} A$ であるような解釈 (Γ のモデル)$\mathscr{I}$ に対しては $\models_{\mathscr{I}} B$ が成り立つとき，$\Gamma \models B$ と書く．そうでないとき，$\Gamma \not\models B$ とも書く．$\Gamma \not\models B$ をいうには，Γ のモデルであるが，$\models_{\mathscr{I}} B$ でないような解釈 $\mathscr{I}$ があることをいえばよい．

$\models_{\mathscr{I}_1} p(x) \to \forall x\, p(x)$ でない解釈 $\mathscr{I}_1$ の例：

$\mathsf{D} = \{B, C\}$，$p(B) = \mathsf{ff}$，$p(C) = \mathsf{tt}$ なる解釈を $\mathscr{I}_1$ とする．

自由変数 x への $x \leftarrow C$ なる代入を g とすると，$[\![p(x) \to \forall x\, p(x)]\!]^{\mathscr{I}_1,g} = [\![p(C) \to \forall x\, p]\!]^{\mathscr{I}_1} = \mathsf{tt} \to \mathsf{ff} = \mathsf{ff}$ ゆえ，$\models_{\mathscr{I}_1} p(x) \to \forall x\, p(x)$ でない．

$\models_{\mathscr{I}} p(x) \to \forall x\, p(x)$ でない解釈 $\mathscr{I}$ があるので，$p(x) \to \forall x\, p(x)$ は恒真でない，すなわち，$\not\models p(x) \to \forall x\, p(x)$．

$\models_{\mathscr{I}_2} p(x) \to \forall x\, p(x)$ である解釈 $\mathscr{I}_2$ の例：
D $= \{B, C\}$，$p(B) = \mathtt{tt}$，$p(C) = \mathtt{tt}$ なる解釈を $\mathscr{I}_2$ とする．自由変数への代入は $x \leftarrow B$ と $x \leftarrow C$ の二通りしかなく，

代入 $x \leftarrow B$ に対し $[\![p(x) \to \forall x\, p(x)]\!]^{\mathscr{I}_2, x\leftarrow B} = [\![p(B) \to \forall x\, p(x)]\!]^{\mathscr{I}_2} = \mathtt{tt} \to \mathtt{tt} = \mathtt{tt}$，また，代入 $x \leftarrow C$ に対しても $[\![p(x) \to \forall x\, p(x)]\!]^{\mathscr{I}_2, x\leftarrow C} = [\![p(C) \to \forall x\, p(x)]\!]^{\mathscr{I}_2} = \mathtt{tt} \to \mathtt{tt} = \mathtt{tt}$ ゆえ $\models_{\mathscr{I}_2} p(x) \to \forall x\, p(x)$ である．(D $= \{B, C\}$，$p(B) = \mathtt{ff}$，$p(C) = \mathtt{ff}$ なる解釈を $\mathscr{I}_3$ としても，$\models_{\mathscr{I}_3} p(x) \to \forall x\, p(x)$ である．ここでは敢えて二つの値 B，C をもつ対象領域の例を挙げたが，一つの値 B のみをもつ対象領域でもよい．) $\models_{\mathscr{I}} p(x) \to \forall x\, p(x)$ である解釈 $\mathscr{I}$ があるので，$p(x) \to \forall x\, p(x)$ は充足可能である．

$p(x, x) \not\models p(x, y)$ の説明:
D $= \{B, C\}$，$p(B, B) = \mathtt{tt}$，$p(C, C) = \mathtt{tt}$，$p(B, C) = \mathtt{ff}$，$p(C, B) = \mathtt{ff}$ なる解釈を $\mathscr{I}$ とする．この $\mathscr{I}$ に対し，(a) $\models_{\mathscr{I}} p(x, x)$ であり，かつ，(b)$\models_{\mathscr{I}} p(x, y)$ でないので，$p(x, x) \models p(x, y)$ である．

(a)$\models_{\mathscr{I}} p(x, x)$ であること:
自由変数 x への代入は $x \leftarrow B$ と $x \leftarrow C$ の二通りしかなく，代入 $x \leftarrow B$ に対し $[\![p(x, x)]\!]^{\mathscr{I}, x\leftarrow B} = [\![p(B, B)]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$，また，代入 $x \leftarrow C$ に対しても $[\![p(x, x)]\!]^{\mathscr{I}, x\leftarrow C} = [\![p(C, C)]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{tt}$ ゆえ，$\models_{\mathscr{I}} p(x, x)$ である．

(b)$\models_{\mathscr{I}} p(x, y)$ でないこと:
$x \leftarrow B, y \leftarrow C$ なる代入を g で表すと，$[\![p(x, y)]\!]^{\mathscr{I}, g} = [\![p(B, C)]\!]^{\mathscr{I}} = \mathtt{ff}$ ゆえ，$\models_{\mathscr{I}} p(x, y)$ でない．

恒真であることの説明例 $\models \exists x\, \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ の説明:
(説明 1)
解釈 $\mathscr{I}$ を任意にひとつ考える．$\mathscr{I}$ の対象領域 (値の集合) を D とする．
(場合 1)$\models_{\mathscr{I}} \exists x\, \neg p(x)$ であるとき:
あきらかに $\models_{\mathscr{I}} \exists x\, \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ である．(一般に，$\models_{\mathscr{I}} A$ であるとき $\models_{\mathscr{I}} A \vee B$ が成り立つ．どの代入 g についても，$[\![A \vee B]\!]^{\mathscr{I}, g} = [\![A]\!]^{\mathscr{I}, g} \vee [\![B]\!]^{\mathscr{I}, g}$ であり，$\models_{\mathscr{I}} A$ なら $[\![A]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{tt}$ であるので $[\![A \vee B]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{tt}$ となる．)
(場合 2)$\models_{\mathscr{I}} \exists x\, \neg p(x)$ でないとき:
$\exists x\, \neg p(x)$ は自由変数をもたないので，$\models_{\mathscr{I}} \exists x\, \neg p(x)$ でないとき，$\models_{\mathscr{I}} \neg\exists\neg p(x)$ である．$\models_{\mathscr{I}}$ および $\exists$ の定義から，$\models_{\mathscr{I}} \neg\exists x \neg p(x)$ は，$\mathscr{I}$ のもとで D のどの元 d に対しても $p(d)$ は真であることを表す．このとき，あきらかに，$\models_{\mathscr{I}} p(f(y, a))$ が成り立つ．従って，$\models_{\mathscr{I}} \exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ である．(y への D の元の代入 g を任意に決め，$\mathscr{I}$ のもとで $f(y, a)$ を評価すると，これは D のある元に決まる．D のどの元 d に村しても $p(d)$ は真であるので，$[\![p(f(y, a))]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{tt}$，従って，$[\![\exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{tt}$．すなわち，$\models_{\mathscr{I}} \exists x \neg p(x) \vee (f(y, a))$ である．)

上記いずれの場合も $\models_{\mathscr{I}} \exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ である．解釈 $\mathscr{I}$ は任意であったので．任意の解釈 $\mathscr{I}$ に対し $\models_{\mathscr{I}} \exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ である．
よって，$\models \exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))$．(注: $\mathscr{I}$ をひとつの解釈として固定いるので場合分けして議論できる．任意の解釈を表す変数のように扱えば場合分けの議論はできない．)
(説明 2)
$\models \exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))$ でないとする．すなわち，ある解釈 $\mathscr{I}$ と代入 g があって $[\![\exists x \neg p(x) \vee p(f(y, a))]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{ff}$ とする．$[\![\exists x \neg p(x)]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{ff}$ かつ $[\![p(f(y, a))]\!]^{\mathscr{I}, g} = \mathtt{ff}$ となるが，後者は $\mathscr{I}$

のもとで $\neg p(d) = \mathsf{tt}$ となる $d \in \mathsf{D}$ の存在を意味するので，これは前者と矛盾する．よって，$\models \exists x \neg p(x) \vee p(f(y,a))$ である．

$A \vdash B$ であるが $\vdash A \to B$ でない例 (当然 A は閉論理式でない) を与えよ．$\vdash A \to B$ でないということはどうやって示すか？

述語論理の演繹定理の証明から分かるように，$A \vdash B$ の証明で推論規則 B2 を使っていなければ (例えば命題論理の公理系で証明できるなら) $\vdash A \to B$ は (A が閉論理式でなくても) 必ず成り立つ．また，B2 を使っていても，B2 の $\forall x$ を施す変数 x が A に自由変数として含まれていなければ $\vdash A \to B$ は (A が閉論理式でなくても) 必ず成り立つ．

従って，質問のような例は，A が閉論理式でなく，かつ，$A \vdash B$ の証明に B2 を使っていて B2 の $\forall x$ を施す変数 x が A に自由変数として含まれるときに限られる．

$A \vdash B$ の証明で推論規則 B2 を使う簡単な例は，例えば，$p(a) \to q(x) \vdash p(a) \to \forall x\, q(x)$
$p(a) \to q(x)$ から $p(a) \to \forall x\, q(x)$ が B2 を 1 回使うだけでただちに得られる．

$$\nvdash (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x\, q(x)) \tag{2}$$

は，4.2 の健全性定理「$\vdash P \Rightarrow \models P$」と

$$\not\models (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x\, q(x)) \tag{3}$$

から言える．

上記の (3) の説明:

$$\models_{\mathscr{I}} (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x q(x)) \tag{4}$$

でない解釈 $\mathscr{I}$ を与える．

$\mathsf{D} = \{B, C\}$，$a = B$，$p(B) = \mathsf{tt}$，$p(C) = \mathsf{tt}$，$q(B) = \mathsf{ff}$，$q(C) = \mathsf{tt}$ なる解釈を $\mathscr{I}$ とする．自由変数 x への代入 $x \leftarrow C$ に対し，

$\llbracket (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x q(x)) \rrbracket^{\mathscr{I}, x \leftarrow C}$
$= \llbracket (p(B) \to q(C)) \to (p(B) \to \forall x q(x)) \rrbracket^{\mathscr{I}}$
$= (\mathsf{tt} \to \mathsf{tt}) \to (\mathsf{tt} \to \mathsf{ff})$
$= \mathsf{ff}$

であるので，$\models_{\mathscr{I}} (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x q(x))$ でない．よって，
$\not\models (p(a) \to q(x)) \to (p(a) \to \forall x q(x))$．

B2 を 1 回使うだけで $A \vdash B$ が言え，かつ $\vdash A \to B$ でない例としては，$A = q(a) \to q(x)$，$B = q(a) \to \forall x q(x)$ もそうであり，$A = r \to q(x)$，$B = r \to \forall x q(x)$ もそうである (r は 0 引数の述語記号)．

$A = q(x)$，$B = \forall x q(x)$ も $A \vdash B$ であるが $\vdash A \to B$ でない例である．($A \vdash B$ は例 4.1.2(2) 参照．B2 を使って $\forall x$ を施している．) $A = q(x)$，$B = q(a)$ も $A \vdash B$ であるが $\vdash A \to B$ でない例である．($A \vdash B$ は例 4.1.2(2) および A4 と MP を使う．)

7.6 問 4.2.3 の解答例

- 証明には，公理系 $Q^=$ の公理 Al～A4，El～E3，推論規則 Bl，B2，および $Q^=$ で成立する定理 (性質 4.2.3 など) しか用いてはならない．

- 定数の入った式を得るために，$\forall, \exists$ などの限定作用素 (quantifier) が含まれた定理（性質 4.2.3 など) を用いるときは，公理 A4 及び MP を何回か用いなければならない．

(1). $\forall x\ x * e = x$ 仮定

(2). $\forall x\ (x * e = x) \to e' * e = e'$ 公理 A4($x \leftarrow e'$)

(3). $e' * e = e'$ 1,2 と MP より

(4). $\forall x\ e' * x = x$ 仮定

(5). $\forall x\ (e' * x = x) \to e' * e = e$ 公理 A4($x \leftarrow e$)

(6). $e' * e = e$ 4,5 と MP より

(7). $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$ 性質 4.2.3(1)

(8). $\forall x \forall y (x = y \to y = x) \to \forall y\ (e' * e = y \to y = e' * e)$ 公理 A4($x \leftarrow e' * e$)

(9). $\forall y\ (e' * e = y \to y = e' * e)$ 7, 8 と MP より

(10). $\forall y\ (e' * e = y \to y = e' * e) \to (e' * e = e \to e = e' * e)$ 公理 A4($y \leftarrow e$)

(11). $e' * e = e \to e = e' * e$ 9, 10 と MP より

(12). $e = e' * e$ 6,11 と MP より

(13). $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to (y = z \to x = z))$ 性質 4.2.3(2)

(14). $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \to (y = z \to x = z)) \to \forall y \forall z\ (e = y \to (y = z \to e = z))$
公理 A4($x \leftarrow e$)

(15). $\forall y \forall z\ (e = y \to (y = z \to e = z))$ 13,14 と MP より

(16). $\forall y \forall z\ (e = y \to (y = z \to e = z)) \to \forall z\ (e = e' * e \to (e' * e = z \to e = z))$ 公理 A4($y \leftarrow e' * e$)

(17). $\forall z\ (e = e' * e \to (e' * e = z \to e = z))$ 15,16 と MP より

(18). $\forall z\ (e = e' * e \to (e' * e = z \to e = z)) \to (e = e' * e \to (e' * e = e' \to e = e'))$
公理 A4($z \leftarrow e'$)

(19). $(e = e' * e \to (e' * e = e' \to e = e'))$ 17,18 と MP より

(20). $e' * e = e' \to e = e'$ 12,19 と MP より

(21). $e = e'$ 3,20 と MP より

以上より，$\forall x\, x * e = x, \forall x e' * x = e \vdash e = e'$ 公理 A4（$\forall x A(x) \to A(t)$ を適用する場合に，t が定数の時は，$A(x)$ の変数 x に対して自由であることは自明なため，A4 が適用可能であることを特に断る必要はない.

補足 数学において 自然語で問 4.2.3 を証明する場合は普通次のように書く.

(証明 1)

仮定は $\forall x\, x * e = x$ (1)

および $\forall x\, e' * x = x$ (2)

(1) より　$e' * e = e'$ (3) 上式の (3) に対応

(2) より　$e' * e = e$ (4) 上式の (6)

(4) に (等号の) 対称律を適用して　$e = e' * e$ (5) 上式の (12)

(5)，(3) に (等号の) 推移律を適用して $e = e'$(証明終) 上式の (21)

(証明 2) 仮定より，$e' * e = e'$，$e' * e = e$．ゆえに，$e = e' * e = e'$(証明終)

7.7 問 5.4.8 の解答例

この問題については 0.3 でふれた.

x が正直であることを $H(x)$ で，うそつきであることを $L(x)$ で表し，x が「y は正直である」と言ったことを $T_H(x, y)$ で，x が「y はうそつきである」と言ったことを $T_L(x, y)$ で表すことにする.

(1)

「正直は本当のことを言う」,「うそつきはうそをつく」ということは当然前提にすべきである．それらのことを，問題に出てくる述語間の関係として陽に記述しよう.「正直は本当のことを言う」に対応することを上述の述語を用いて表そう．議論の仕方によってどれを使うか分らないが，言った人が正直で相手がうそつきの場合について，

- 正直者がうそつきだと言った相手はうそつきである．式で書けば
  $\forall x \forall y (H(x) \wedge T_L(x, y) \to L(y))$ (1)
  同じことであるが $\forall x (H(x) \to \forall y (T_L(x, y) \to L(y)))$ (1’)
- 正直者はうそつきに対してはうそつきと言う.
  $\forall x \forall y (H(x) \wedge L(y) \to T_L(x, y))$ (2)
- うそつきに対しうそつきと言ったなら言った人は正直者である.
  $\forall x \forall y (L(y) \wedge T_L(x, y) \to H(x))$ (3)

他の 3 つの場合は省略.

(2)

省略．0.3 を参照．そこでは，C がうそつきである場合と正直である場合について場合分けして議論しているが，A あるいは B について場合分けしても議論できる．(3)

人はうそつきか正直かのどちらか (正確に一方) なので

$\forall x((L(x) \vee H(x))$

$\forall x((\neg L(x) \vee \neg H(x))$

うそつきはうそをつき，正直は真実をいうので (ここでは (1) で述べた式 (1’) を採用している)
$\forall x(L(x) \to \forall y(T_H(x,y) \to L(y)))$
$\forall x(L(x) \to \forall y(T_L(x,y) \to H(y)))$
$\forall x(H(x) \to \forall y(T_H(x,y) \to H(y)))$
$\forall x(H(x) \to \forall y(T_L(x,y) \to L(y)))$
A，B の発言を論理式で表すと，
$T_H(A,B)$
$T_L(B,C)$
$\cdots$ の部分はうそつきか正直なので，
$T_L(C,A) \vee T_H(C,A)$
以上を前提にして，示したい結論は
$T_L(C,A)$ 即ち，題意の論理式は.「上記の 9 個の前捉の論理式の論理積 $\to T_L(C,A)$」である．

この論理式が恒真であることを，その否定の充足不能性を示すことによって証明する．冠頭標準形に直した式の各節は

$$L(x) \vee H(x) \tag{1}$$
$$\neg L(x) \vee \neg H(x) \tag{2}$$
$$\neg L(x) \vee \neg T_H(x,y) \vee L(y) \tag{3}$$
$$\neg L(x) \vee \neg T_L(x,y) \vee H(y) \tag{4}$$
$$\neg H(x) \vee \neg T_H(x,y) \vee H(y) \tag{5}$$
$$\neg H(x) \vee \neg T_L(x,y) \vee L(y) \tag{6}$$
$$T_H(A,B) \tag{7}$$
$$T_L(B,C) \tag{8}$$
$$T_L(C,A) \vee T_H(C,A) \tag{9}$$
$$\neg T_L(C,A) \tag{10}$$

(C が「A はうそつきである」と言わなかったと仮定する．これは背理法の仮定)

(9) と (10) の導出節は

$$T_H(C,A) \tag{11}$$

C は「A はうそつきである」か「A は正直である」かのどちらかは言ったので，(C が「A は正直である」と言ったことが導かれる)

(3) で $x \leftarrow C$，$y \leftarrow A$ とおくと，

$$\neg L(C) \vee \neg T_H(C,A) \vee L(A) \tag{12}$$

C がうそつきの場合 ($\neg L(C)\vee$)，C が「A は正直である」と言ったなら A はうそつきであるので

(11) と (12) の導出節は

$$\neg L(C) \vee L(A) \tag{13}$$

(C がうそつきの場合，A はうそつきである)

(3) で $x \leftarrow C, y \leftarrow B$ とおくと

$$\neg L(A) \vee \neg T_H(A,B) \vee L(B) \tag{14}$$

A がうそつきで，A が「B は正直である」と言ったなら，B はうそつきであるので，

(7) と (14) の導出節は

$\neg L(A) \vee L(B)$ (15)

(A の発言から，A がうそつきなら，B もうそつきとなる)

(13) と (15) の導出節は

$\neg L(C) \vee L(B)$ (16)

(よって，C がうそつきの場合，B もうそつきである)

(4) で $x \leftarrow B$，$y \leftarrow C$ とおくと

$\neg L(B) \vee \neg T_L(B, C) \vee H(C)$ (17)

B がうそつきで，B が「C はうそつきである」と言ったなら，C は正直であるので，

(8) と (17) の導出節は

$\neg L(B) \vee H(C)$ (18)

(B の発言から，B がうそつきなら，C は正直となる)

(16) と (18) の導出節は

$\neg L(C) \vee H(C)$ (19)

(よって，C がうそつきなら，C は正直となる)

(2) で $x \leftarrow C$ とおくと

$\neg L(C) \vee \neg H(C)$ (20)

C がうそつきなら，C は正直でないので，

(19) と (20) の導出節は

$\neg L(C)$ (21)

(C がうそつきの場合，矛盾が導けた．よって，C はうそつきでないが結論される)

(5) で $x \leftarrow C$，$y \leftarrow A$ とおくと，

$\neg H(C) \vee \neg T_H(C, A) \vee H(A)$ (12')

これは，C が正直の場合，C が「A は正直である」と言ったなら，A は正直である，ということ

詳しくは省略するが，上と同じように 議論すると $\neg H(C)$ (21')

が得られる．(上記の議論と同様に，C が正直の場合，矛盾が導け，C は正直でないが結論される)

(1) で $x \leftarrow C$ とおくと

$L(C) \vee H(C)$ (33)

C はうそつきかあるいは正直であるので

(21) と (33) の導出節は

$H(C)$ (34)

(32) と (34) の導出節は

0 (35)

(矛盾が導けた．よって，背理法により，C が「A はうそつきである」と言ったと結論される．)

2008.05.30

情報論理学（東野担当分）試験問題

配点：[1],[2]各 10 点,[3],[4]各 15 点（50 点満点）

[1] 学生 x が A クラスに所属していることを $A(x)$ で表し，学生 x が科目 P の試験で z 点取ったことを述語 $P(x,z)$ で表すことにする．このとき，「科目 P の試験の A クラスの学生の最高点が 80 点で最低点が 30 点であった.」ことを表す論理式を記述せよ．ただし，A クラスの学生が全員科目 P の試験を受けているとは限らないものとする．なお，論理式を記述する際に，整数（点数）間の大小関係を表す述語≦,＜を用いてよい.

[2] 整数上の変数と述語＝，関数＋，定数１を用いると，「整数ｘは奇数である」ことは,

$$\exists z\ (x = z + z + 1)$$

のように表すことができる．では,「任意の整数ｘを３（１＋１＋１）で割ると，余りはゼロか１か２（１＋１）のいずれかになる」ことを表現せよ．ただし，２や３はそれぞれ１＋１，１＋１＋１のように定数１と＋を用いて表すものとする．また，述語＝，関数＋は用いてよいが，乗算を表す関数＊は用いてはならない.

[3] 次の命題論理式

$$W = \{(Q\to R)\land(\neg R\to Q)\land(\neg Q\to\neg R)\land(Q\to P)\}\to\{\neg(\neg P\lor\neg Q\lor\neg R)\}$$

が恒真であるなら，そのことを，リゾルベントを作ってＷの否定が充足不能（恒偽）であることを示すことにより証明せよ．また，Ｗが恒真でないなら，充足可能な解を一つ示せ.

[4] 命題論理の公理系Ｓを次のように定める.

P,Q,R を任意の論理式を表す変数とする．Ｓの公理は次の３つである.

A1 : $P \to (Q \to P)$

A2 : $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3 : $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$

また，Ｓの推論規則を次のように定める.

B1 : Ｐと $P \to Q$ からＱを得る．P, Q は任意の論理式

この公理系Ｓを用いて，次の性質Ａ

（性質Ａ）　$\vdash X \to (\neg X \to Y)$

が成り立つことを証明せよ. ただし, 次の演繹定理は証明せずに用いてよい.

（演繹定理）　$\Gamma, P \vdash Q$　ならば　$\Gamma \vdash P \to Q$

2009.06.10

情報論理学（東野担当分）試験問題

配点：[1]10 点，[2]10 点，[3]15 点，[4]15 点（50 点満点）

[1] Ｒ君が「もし数学が好きなら，物理も好きである」と言ったとする．この陳述が偽（嘘）であるとすると，Ｒ君は数学，物理のうちどの科目が好きでどの科目が好きでないかを答えよ．また，そう判断した理由も述べよ．

[2] 学生 x が科目 P の試験で z 点取ったことを述語 P(x, z)で表すことにする．このとき,「科目 P の試験の最高点が 80 点であった.」ことを表す論理式を記述せよ．ただし，整数（点数）間の大小関係を表す述語（≦, ＝など）を用いてもよい（N 君が科目 P の試験で 70 点取った場合，P(N, 70)の値は真になり，P(N, 65)や P(N, 73)の値は偽になることに注意せよ）.

[3] 次の命題論理式

$$W=(r\wedge\neg s\wedge\neg p\wedge(\neg p\wedge r\wedge\neg s\rightarrow(q\vee t))\wedge(\neg p\rightarrow\neg t))\rightarrow q$$

が恒真であることを導出原理を用いて証明せよ（Wが恒真であることを直接証明せず，リゾルベント法を用いてWの否定が恒偽（充足不能）であることを示すことにより証明せよ）.

[4] 命題論理の公理系Ｓを次のように定める．

P, Q, R を任意の論理式を表す変数とする．Ｓの公理は次の３つである．

A1 ： $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

A2 ： $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

A3 ： $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$

また，Ｓの推論規則は次の B1 である．

B1 ： P と $P \rightarrow Q$ から Q を得る．P，Q は任意の論理式

この公理系Ｓのもとでは，ある論理式の否定と肯定（¬X, X）を共に仮定すれば（すなわち，矛盾した前提からは），どんな論理式Ｙでも証明できること，すなわち，次の性質Ａが成り立つことを証明せよ.

（性質Ａ） $\neg X, X \vdash Y$

ただし，次の演繹定理は証明せずに用いてもよい.

（演繹定理） $\Gamma, P \vdash Q$ ならば $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$

2010.06.02

情報論理学（東野担当分）試験問題

（[1]12 点，[2]12 点，[3]13 点，[4]13 点）

[1] 整数上の変数と述語＝，関数＋，定数１を用いると，「整数ｘは奇数である」ことは，次のように表せる．

$$\exists z\ (x = z + z + 1)$$

同様に，「二つの奇数の和は偶数である」ことを論理式で表せ．

[2] ことわざ「風が吹けば桶屋が儲かる」は，『風が吹くと土ぼこりがたち，それが目に入ることで盲人が増える．盲人は三味線で生計を立てようとするので三味線の需要が増える．三味線には猫の皮が張られることで猫が減る．猫が減るとねずみが増えて，ねずみにかじられる桶が増えることから，桶を売る桶屋が儲かって喜ぶ．』という江戸時代の浮世草子『世間学者気質（かたぎ)』（無跡散人著）の話に由来しているという節がある．
この話の論理構造を，「風が吹く」や「土ぼこりがたつ」などの陳述（命題）を用いた命題論理の論理式で表現せよ．答案は，まずどのような陳述を用いるかを定義し，その後，それらの陳述を用いて，上記の話の論理構造を命題論理の論理式で表現せよ．

[3] 命題論理の論理式

$$W = \{((A \wedge B) \rightarrow D) \wedge (\neg A \rightarrow C) \wedge (\neg B \rightarrow (C \vee E)) \wedge (D \rightarrow E)\} \rightarrow (C \vee E)$$

が恒真であることを，リゾルベント法を用いてWの否定が恒偽（充足不能）であることを示すことにより証明せよ（Wが恒真であることを直接証明しないこと）．

[4] 命題論理の公理系Ｓを次のように定める．
P,Q,R を任意の論理式を表す変数とする．Ｓの公理は次の３つである．

A1 ： $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

A2 ： $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

A3 ： $(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$

また，Ｓの推論規則を次のように定める．

B1 ： ＰとＰ → ＱからＱを得る．P, Q は任意の論理式

この公理系 S と論理式の集合Γに対し， $\Gamma \vdash B$ 且つ $\Gamma \vdash \neg B$ なる論理式Ｂが存在するなら，任意の論理式Ａに対して， $\Gamma \vdash A$ が成り立つことを証明せよ．ただし，下記の性質は証明せずに用いて良い．

（性質１） $\Gamma \vdash P$, $\Gamma \vdash Q$, $\{P,Q\} \vdash R$ なら $\Gamma \vdash R$

平成20年度 情報論理学 期末試験

[1] (配点 20%)
以下のそれぞれに対して，具体的な解釈 (D, C, F, P) を用いて説明せよ．解釈がわからなければ，その他の方法で説明しても良い．

(1) $\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x) \not\models \exists x\ (p(x) \wedge q(x))$

(2) $\forall y \exists x\ p(x, y) \not\models \exists x \forall y\ p(x, y)$

[2] (配点 30%)
論理式 E が**恒真**であることを示したい．以下の各小問に答えよ．
$A = \neg \exists z\ r(z, a)$
$B = \forall y \forall x\ (\neg\ r(x, y) \rightarrow q(x, y))$
$C = \forall w\ (q(w, a) \rightarrow p(w))$
$D = \forall x\ p(x)$
$E = (A \wedge B \wedge C) \rightarrow D$,　但し a は定数記号

(1) $\neg E$ のスコーレム連言標準形 ($\exists$ のない冠頭標準形, 母式は和積形) を求めよ．導出の過程を明記すること．

(2) (1) で求めた論理式が**充足不能**であることを導出原理を用いて示せ．空節導出の過程を明記すること．

[3] (配点 10%)
各小問ごと 2 つの項を MGU を用いて単一化せよ．導出の過程を明記すること．　但し a は定数記号，　x, y, z は変数記号．

(1) $p(x, x, g(a))$,　$p(y, f(z), z)$

(2) $q(x, g(a), x)$,　$q(y, g(z), f(z))$

[4] (配点 40%)
ロンドンの地下鉄には環状線があることを証明したい．以下の各小問に答えよ．

一般に路線には上りと下りが存在するが，ここではこれらは別路線とみなす．一般性を失うことなく，ある路線の上りを l で表わしたとき，同じ路線の下りを $r(l)$ で表わすことにする．ここで関数 $r()$ は上りを下りに，下りを上りに読み替える関数である．したがって $r(r(l)) = l$ という関係が一般に成り立つ．l に対する $r(l)$，および，$r(l)$ に対する l を前者に対する逆路線と呼ぶことにする．このとき一般に次のことが成り立つ．
A:「駅 x から駅 y まで路線 l で行けて，駅 y から駅 z まで路線 l で行けるならば，駅 x から駅 z まで路線 l で行ける (推移律).」
B:「駅 x から駅 y まで路線 l で行けるならば，駅 y から駅 x まで l の逆路線で行ける.」
C:「駅 x から駅 y まで路線 $r(r(l))$ で行けるならば，駅 x から駅 y まで路線 l で行ける (関数 $r()$ の性質).」
D:「駅 x から駅 y まで路線 l で行けて，駅 x から駅 y まで l の逆路線で行けるならば，駅 x を含む路線 l は環状線である (環状線の性質).」
　ここで x, y, z, l は変数である．

以下のように述語 R, P を定義する.

- 「駅 x から駅 y まで路線 l で行ける」$R(x,y,l)$
- 「駅 x を含む路線 l は環状線である」$P(x,l)$

今, 次の事実が成り立っているとする.
E:「駅 Baker Street から駅 Oxford Circus まで Bakerloo 上り線で行ける.」
F:「駅 Oxford Circus から駅 Embarkment まで Bakerloo 上り線で行ける.」
G:「駅 Baker Street から駅 Embarkment まで Circle 上り線で行ける.」
H:「駅 Baker Street から駅 Liverpool Street まで Circle 下り線で行ける.」
I:「駅 Embarkment から駅 Liverpool Street まで Circle 上り線で行ける.」
J:「駅 Liverpool Street から駅 Oxford Circus まで Central 上り線で行ける.」
ここで次の質問を問いたい.
K:「駅 x を含む路線 l としての環状線は存在するか?」
以下は上記の内容を表すホーン節群である. H_i における i は叙述 A$\cdots$K に相当する. また駅 Baker Street, 駅 Oxford Circus, 駅 Embarkment, 駅 Liverpool Street, Bakerloo 上り線, Circle 上り線, Central 上り線を, それぞれ定数記号 B, O, E, L, BL, CC, CR で表わす.

- $H_A \ = \ R(x,z,l) \leftarrow \boxed{}, R(y,z,l)$
- $H_B \ = \ \boxed{} \leftarrow R(x,y,l)$
- $H_C \ = \ R(x,y,l) \leftarrow R(x,y,r(r(l)))$
- $H_D \ = \ P(x,l) \leftarrow \boxed{}, R(x,y,r(l))$
- $H_E \ = \ R(B,O,BL) \leftarrow$
- $H_F \ = \ R(O,E,BL) \leftarrow$
- $H_G \ = \ R(B,E,CC) \leftarrow$
- $H_H \ = \ R(B,L,r(CC)) \leftarrow$
- $H_I \ = \ R(E,L,CC) \leftarrow$
- $H_J \ = \ R(L,O,CR) \leftarrow$
- $H_K \ = \ \leftarrow P(x,l)$

(1) H_A, H_B, H_D の空欄をそれぞれ埋めよ.

(2) 上記のホーン節群に対してホーン節の導出原理を用いて成り立つことを示せ. またゴールの解代入を示せ. 空節導出の過程を明記すること. ホーン節の導出原理がわからないものは通常の導出原理を用いても良い.

(3) この問題のプログラム節は A,B,C,D のいくつか, あるいはすべてにおいて, 駅が同一の場合を考慮にいれていない意味で, 一般の問題を解くにあたったって不適切である. 問題点を具体的に指摘し, 必要なら新たな述語を定義した上で, 問題となるプログラム節を改善せよ.

情報論理学 21 年度試験

[1][10%]

以下の各論理式について, 自由変数をすべて列挙せよ (x, y, z は変数である). また自由変数がある場合にすべての自由変数に定数 a を代入した結果を示せ.

1. $\exists x\ p(x, y)$
2. $\forall y\ p(x, y) \land \exists x\ (q(x, y) \lor r(x))$
3. $\forall x\ p(x, y) \land \exists z \exists x\ q(x, y, z) \lor r(z)$

[2][20%]

以下の各論理式が (a) 恒真, (b) 充足可能であるが恒真でない, (c) 充足不能のいずれであるか判断し記号で答えよ. (b) である場合は, さらに偽になる解釈を一つ挙げよ.

1. $\exists x\ p(x) \to p(f(a))$　a は定数, f は関数
2. $\forall y\ q(y) \to \forall x\ q(x)$
3. $\exists y\ q(y) \to \forall x\ q(x)$
4. $\exists y\ q(y) \land \forall x\ \neg q(x)$

[3][15%]

$\forall x(\forall x\ q(x) \to (p(x) \land \forall x\ q(x)))$

のスコーレム連言標準形 ($\exists$ のない冠頭標準形, 母式は和積形) を求めよ.

[4][25%]

論理式 D の恒真性を導出原理で示せ. 空節導出の過程を明記すること (a は定数 f は関数).

$A = \exists y \forall x (p(x, f(f(y))) \to q(x))$

$B = \forall x \forall y (p(x, y) \to p(x, f(y)))$

$C = \forall y\ p(a, y)$

$D = A \land B \land C \to \exists x\ q(x)$

[5][30%]

次のホーン節群の恒真性を導出原理で示したい．以下の各小問に答えよ．

- $H_1 \;=\; r(x,z,s(w,u)) \leftarrow r(x,y,w), r(y,z,u)$
- $H_2 \;=\; r(x,y,a) \leftarrow l(x,y)$
- $H_3 \;=\; l(x,y) \leftarrow l(y,x)$
- $H_4 \;=\; l(b,c) \leftarrow$
- $H_5 \;=\; l(c,d) \leftarrow$
- $H_6 \;=\; l(e,d) \leftarrow$
- $H_7 \;=\; \leftarrow r(e,b,z)$

1. 上記のホーン節群に対してホーン節の導出原理を用いて成り立つことを示せ．空節導出の過程を明記すること．ホーン節の導出原理がわからないものは通常の導出原理を用いても良い．定数は a, b, c, d, e である．また s は関数である．

2. ゴールの解代入を示せ．

3. アドホックネットワークを考える．述語 $l(x,y)$ を「ノード x からノード y に通信リンクがある.」述語 $r(x,y,z)$ を「ノード x からノード y にコスト z で到達可能である.」関数 $s(x,y)$ をコスト x と y の和（加算），定数 a を数値 1 としたとき，H_1, H_2 の表す内容をそれぞれ日本語で表せ．

4. 同様に H_7 の意味と解代入の意味を日本語で表せ．

22年度 情報論理学 期末試験

[1]　20%

以下の各論理式について, 次の問題に答えよ.

(1) 自由変数をすべて列挙せよ (x, y, z は変数である).

(2) 自由変数がある場合にすべての自由変数に定数 a を代入した結果を示せ.

(3) 自由変数がある場合に各自由変数について式 $f(x)$ が代入可能な場合は代入した結果を示せ．そうでなければ×を示せ.

1. $\forall x\ p(x,y)$
2. $\exists y\ p(x,y) \land \forall x\ (q(x,y) \lor r(x,z))$
3. $\forall x\ p(x,y) \land \exists z \exists x\ (q(x,y,z) \lor \forall z\ r(z))$

[2]　20%

以下の各論理式が (a) 恒真, (b) 充足可能であるが恒真でない，(c) 充足不能のいずれであるか判断し記号で答えよ．(b) である場合は，さらに偽になる解釈と真になる解釈を一つずつ挙げよ.

1. $\exists x\ p(x) \to p(a) \quad a$ は定数
2. $\forall y\ q(y) \to \forall x\ q(x)$
3. $\exists y\ q(y) \to \forall x\ q(x)$
4. $\forall y\ q(y) \to \exists x\ q(x)$

[3]　30%

論理式 D の充足不能性を導出原理で示せ．途中結果の Skolem 連言標準形および導出過程を明示すること．また，空節導出の過程を明記すること.

$A = \forall x\ (q(x) \to \exists y\ r(x,y))$

$B = \forall x\ (p(x) \to q(x))$

$C = \forall y\ (p(y) \to \exists x\ r(y,x))$

$D = \neg(A \land B \to C)$

Skolem 連言標準形が求められなかったものは以下の節集合に対して空節導出を行え．なお，この節集合はこの問題で得られる節集合に一致するとは限らない.

$C_1 = \neg q(x) \lor r(x, f(x))$

$C_2 = \neg p(x) \lor q(x)$

$C_3 = p(b)$

$C_4 = \neg r(b,x)$

[4] 30%

Javaのクラスに関する以下の各小問に答えよ.

メソッド m の本体がクラス c で定義されていることを述語 $d(m,c)$ で表す.
クラス c_1 が c_2 の継承であることを述語 $in(c_1,c_2)$ で表す.
クラス c のメソッド m が使えることを述語 $u(c,m)$ で表す.
一般に次の関係がなりたつ.
A:「クラス c_1 が c_2 の継承であり，かつクラス c_2 が c_3 の継承であれば，クラス c_1 は c_3 の継承である」
B:「メソッド m の本体がクラス c で定義されていればクラス c のメソッド m が使える」
C:「クラス c_1 が c_2 の継承であり，メソッド m の本体がクラス c_2 で定義されていればクラス c_1 のメソッド m が使える」
ここで m,c,c_1,c_2,c_3 は変数である.

以下の事実が成り立っているとする.

D:「クラス A はクラス B の継承である.」

E:「クラス C はクラス B の継承である.」

F:「クラス D はクラス C の継承である.」

G:「メソッド M はクラス B で定義されている.」

H:「メソッド N はクラス D で定義されている.」

ここで次の質問を問いたい.

I:「メソッド M,N をともに使えるクラス c は存在するか?」

A,B,C,D,M,N は定数記号，m,c,c_1,c_2,c_3 は変数である.

以下は上記の内容を表すホーン節群である. H_i における i は叙述 A$\cdots$I に相当する.

- $H_A = in(c_1,c_3) \leftarrow \boxed{}$
- $H_B = u(c,m) \leftarrow \boxed{}$
- $H_C = u(c_1,m) \leftarrow \boxed{}$
- $H_D = in(A,B) \leftarrow$
- $H_E = in(C,B) \leftarrow$
- $H_F = in(D,C) \leftarrow$
- $H_G = d(M,B) \leftarrow$
- $H_H = d(N,D) \leftarrow$
- $H_I = \leftarrow u(c,N), u(c,M)$

1. H_A, H_B, H_C の空欄をそれぞれ埋めよ.
2. 上記のホーン節群に対してホーン節の導出原理を用いて成り立つことを示せ. またゴールの解代入を示せ. 空節導出の過程を明記すること. (ホーン節の導出ができなかったものは，通常の空節導出にしたがって解いても良い.)

本文執筆	大阪大学名誉教授	谷口健一
LaTeX 製版	大阪大学教授	東野輝夫
LaTeX 製版	大阪大学准教授	岡野浩三
製図	平成 20 年度 TA	枝川拓人
校正	東野研究室	楠田純子
校正	東野研究室	南本真一
校正	東野研究室	中田圭佑
校正	東野研究室	中西一宏
校正	東野研究室	西圭祐
校正	東野研究室	野村崇志