1/27 離散構造

(1)

(1-1)

(1-1-1) (b) ◦ 真にする解釈

a, b にそれぞれ 0, 1 を割り当て

$$P(x)=\begin{cases}\text{true} & (x=0)\\ \text{false} & (x\text{は}0\text{以外})\end{cases}$$

◦ 偽にする解釈

a, b にそれぞれ 0, 1 を割り当て

$$P(x)=\begin{cases}\text{true} & (x=0,1)\\ \text{false} & (x=0,1\text{以外})\end{cases}$$

(1-1-2) (b) ◦ 真にする解釈

$$P(x)=\begin{cases}\text{true} & (\text{すべての非負整数})\\ \text{false} & (\text{なし})\end{cases}$$

$$Q(x)=\begin{cases}\text{true} & (\text{すべての非負整数})\\ \text{false} & (\text{なし})\end{cases}$$

◦ 偽にする解釈

$$P(x)=\begin{cases}\text{true} & (x\text{は奇数})\\ \text{false} & (x\text{は偶数})\end{cases}$$

$$Q(x)=\begin{cases}\text{true} & (x\text{は偶数})\\ \text{false} & (x\text{は奇数})\end{cases}$$

(1-1-3) (a)

∵ $\neg\forall x\neg P(x) = \exists x\neg\neg P(x) = \exists x P(x)$ より，左と右で同じ形，$\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists x P(x)$ より 恒真.

(1-2)

(1-2-1)

$$\begin{aligned}
\neg E &= \neg(\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)\\
&= A\wedge B\wedge C\wedge\neg D\\
&= \forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z((P(x,y)\wedge P(y,z))\to P(x,z))\wedge\forall x\exists y P(x,y)\wedge\neg\forall z P(z,z)\\
&= \forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee P(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z(\neg(P(x,y)\wedge P(y,z))\vee P(x,z))\wedge\forall x\exists y P(x,y)\wedge\exists z\neg P(z,z)\\
&= \forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee P(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z(\neg P(x,y)\vee\neg P(y,z)\vee P(x,z))\wedge\forall x\exists y P(x,y)\wedge\exists z\neg P(z,z)\\
&= \exists z_1\{\forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee P(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z(\neg P(x,y)\vee\neg P(y,z)\vee P(x,z))\wedge\forall x\exists y P(x,y)\wedge\neg P(z_1,z_1)\}\\
&= \exists z_1\forall x_2\exists y_2\{\forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee P(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z(\neg P(x,y)\vee\neg P(y,z)\vee P(x,z))\wedge P(x_2,y_2)\wedge\neg P(z_1,z_1)\}\\
&= \exists z_1\forall x_2\exists y_2\forall x_3\forall y_3\forall x_4\forall y_4\forall z_4((\neg P(x_3,y_3)\vee P(y_3,x_3))\wedge(\neg P(x_4,y_4)\vee\neg P(y_4,z_4)\vee P(x_4,z_4))\\
&\qquad\wedge P(x_2,y_2)\wedge\neg P(z_1,z_1))
\end{aligned}$$

//

(1-2-2) ¬E の スコーレム連言標準形を求めるにあたり，z_1, y_2に対して，a, $f(x_2)$ を導入し，∃をなくすと，以下が得られる.

$$\forall x_2\forall x_3\forall y_3\forall x_4\forall y_4\forall z_4((\neg P(x_3,y_3)\vee P(y_3,x_3))\wedge(\neg P(x_4,y_4)\vee\neg P(y_4,z_4)\vee P(x_4,z_4))\wedge P(x_2,f(x_2))\wedge\neg P(a,a)) \quad \text{—※}$$

※は スコーレム連言標準形 となる //