計算論A　第3回ミニレポート解答例

園孝直人，難波瑛次郎

問 1

テキストの問3.2.1,問3.2.2,問3.2.3 (p.116,p.117)の3つのDFAそれぞれに対し，
正則表現の方程式を用いて，DFAが受理する言語を正則表現で表しなさい.
導出過程も書くこと.

問 3.2.1

次の連立方程式を解く

$$\begin{cases} q_1 = 0q_2 + 1q_1 & (1) \\ q_2 = 0q_3 + 1q_1 & (2) \\ q_3 = 0q_3 + 1q_2 + \varepsilon & (3) \end{cases}$$

(3)より，

$$q_3 = 0^*1q_2 + 0^*$$

(2)に代入して，

$$\begin{aligned} q_2 &= 0(0^*1q_2 + 0^*) + 1q_1 \\ &= 00^*1q_2 + 1q_1 + 00^* \\ &= (00^*1)^*1q_1 + (00^*1)^*00^* \end{aligned}$$

(1)に代入して，

$$\begin{aligned} q_1 &= 0((00^*1)^*1q_1 + (00^*1)^*00^*) + 1q_1 \\ &= (0(00^*1)^*1 + 1)q_1 + 0(00^*1)^*00^* \\ &= (0(00^*1)^*1)^*0(00^*1)^*00^* \end{aligned}$$

よって，

$$q_1 = (0(00^*1)^*1)^*0(00^*1)^*00^*$$

以上より求める正則表現は，

$$(0(00^*1)^*1)^*0(00^*1)^*00^*$$

問 3.2.2
次の連立方程式を解く

$$\begin{cases} q_1 = 0q_2 + 1q_3 & (1) \\ q_2 = 0q_1 + 1q_3 & (2) \\ q_3 = 0q_2 + 1q_1 + \varepsilon & (3) \end{cases}$$

(1)に(3)を代入して，

$$\begin{aligned} q_1 &= 0q_2 + 1(0q_2 + 1q_1 + \varepsilon) \\ &= (0+10)q_2 + 11q_1 + 1 \qquad (1)' \end{aligned}$$

(2)に(3)を代入して，

$$\begin{aligned} q_2 &= 0q_1 + 1(0q_2 + 1q_1 + \varepsilon) \\ &= (0+11)q_1 + 10q_2 + 1 \\ &= (10)^*\big((0+11)q_1 + 1\big) \qquad (2)' \end{aligned}$$

(1)'に(2)'を代入して，

$$\begin{aligned} q_1 &= (0+10)(10)^*\big((0+11)q_1 + 1\big) + 11q_1 + 1 \\ &= \big((0+10)(10)^*(0+11) + 11\big)q_1 + \big((0+10)(10)^*1 + 1\big) \\ &= \big((0+10)(10)^*(0+11) + 11\big)^*\big((0+10)(10)^*1 + 1\big) \end{aligned}$$

よって，

$$q_1 = \big((0+10)(10)^*(0+11) + 11\big)^*\big((0+10)(10)^*1 + 1\big)$$

以上より，求める正則表現は，

$$\big((0+10)(10)^*(0+11) + 11\big)^*\big((0+10)(10)^*1 + 1\big)$$

問 3.2.3
次の連立方程式を解く

$$\begin{cases} p = 0s + 1p + \varepsilon & (1) \\ q = 0p + 1s & (2) \\ r = 0r + 1q & (3) \\ s = 0q + 1r & (4) \end{cases}$$

(3)より，

$$r = 0^*1q$$

(4)に代入して，

$$s = 0q + 10^*1q$$

$$= (0 + 10^*1)q$$

(2)に代入して,

$$\begin{aligned} q &= 0p + 1s \\ &= 0p + 1(0 + 10^*1)q \end{aligned}$$

よって,

$$q = \left(1(0 + 10^*1)\right)^* 0p$$

(1)より,

$$\begin{aligned} p &= 0\left((0 + 10^*1)q\right) + 1p + \varepsilon \\ &= 0(0 + 10^*1)\left(1(0 + 10^*1)\right)^* 0p + 1p + \varepsilon \\ &= \left(0(0 + 10^*1)\left(1(0 + 10^*1)\right)^* 0 + 1\right)p + \varepsilon \end{aligned}$$

よって,

$$p = \left(0(0 + 10^*1)\left(1(0 + 10^*1)\right)^* 0 + 1\right)^*$$

以上より，求める正規表現は

$$\left(0(0 + 10^*1)\left(1(0 + 10^*1)\right)^* 0 + 1\right)^*$$

問 2
テキストの問2.3.1(p.73)のNFAに対し，正則表現の方程式を用いて，NFAが受理する言語を正則表現で表しなさい.
導出過程も書くこと.

次の連立方程式を解けば良い.

$$\begin{cases} p = (0 + 1)p + 0q & (1) \\ q = (0 + 1)r & (2) \\ r = 0s & (3) \\ s = (0 + 1)s + \varepsilon & (4) \end{cases}$$

(4)より,

$$s = (0 + 1)^*$$

(3)に代入して,

$$r = 0(0 + 1)^*$$

(2)に代入して,

$$q = (0 + 1)0(0 + 1)^*$$

(1)に代入して,

$$p = (0+1)p + 0(0+1)0(0+1)^*$$
$$= (0+1)^* 0(0+1)0(0+1)^*$$

よって求める正則表現は,

$$(0+1)^* 0(0+1)0(0+1)^*$$

問 3

テキストの問2.5.1(p.89)のε-NFAに対し，正則表現の方程式を用いて，ε-NFAが受理する言語を正則表現で表しなさい.

ε-NFA からε-動作を削除すると
以下のような NFA となる.

	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\rightarrow \boldsymbol{p}$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
$\boldsymbol{q}$	$\{p,q\}$	$\{q,r\}$	$\{r\}$
$*\boldsymbol{r}$	$\{p,q,r\}$	$\{q,r\}$	$\{p,r\}$

次の連立方程式を解けば良い.

$$\begin{cases} p = ap + bq + cr & (1) \\ q = ap + (a+b)q + (b+c)r & (2) \\ r = (a+c)p + (a+b)q + (a+b+c)r + \varepsilon & (3) \end{cases}$$

(3)より,

$$r = (a+b+c)^*\Big((a+c)p + (a+b)q + \varepsilon\Big)$$

これを(1)と(2)に代入して,

$$\begin{cases} p = ap + bq + c\Big((a+b+c)^*\Big((a+c)p + (a+b)q + \varepsilon\Big)\Big) & (1)' \\ q = ap + (a+b)q + (b+c)(a+b+c)^*\Big((a+c)p + (a+b)q + \varepsilon\Big) & (2)' \end{cases}$$

(1)'より,

$$\begin{aligned} p = &\big(a + c(a+b+c)^*(a+c)\big)p \\ &+\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big)q \\ &+c(a+b+c)^* \qquad (1)'' \end{aligned}$$

(2)'より,

$$q = \big(a + (b+c)(a+b+c)^*(a+c)\big)p$$
$$+\big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)q$$
$$+(b+c)(a+b+c)^*$$

$$= \big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^*$$
$$\Big(\big(a + (b+c)(a+b+c)^*(a+c)\big)p + (b+c)(a+b+c)^*\Big)$$

(1)"に代入して,

$$p = \big(a + c(a+b+c)^*(a+c)\big)p$$
$$+\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big)$$
$$\big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^*$$
$$\Big(\big(a + (b+c)(a+b+c)^*(a+c)\big)p + (b+c)(a+b+c)^*\Big)$$
$$+c(a+b+c)^*$$

$$= \left(\begin{array}{l}\big(a + c(a+b+c)^*(a+c)\big) \\ \quad +\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big)\big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^* \\ \qquad \big(a + (b+c)(a+b+c)^*(a+c)\big)\end{array}\right)p$$
$$+\left(\begin{array}{l}\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big) \\ \quad \big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^* \\ \quad (b+c)(a+b+c)^* \\ +c(a+b+c)^*\end{array}\right)$$

よって求める正則表現は,

$$\left(\begin{array}{l}\big(a + c(a+b+c)^*(a+c)\big) \\ \quad +\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big)\big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^* \\ \qquad \big(a + (b+c)(a+b+c)^*(a+c)\big)\end{array}\right)^*$$
$$\left(\begin{array}{l}\big(b + (a+b+c)^*(a+b)\big) \\ \quad \big((a+b) + (b+c)(a+b+c)^*(a+b)\big)^* \\ \quad (b+c)(a+b+c)^* \\ +c(a+b+c)^*\end{array}\right)$$