計算理論　第６回

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 正則言語に関する決定問題
   - DFAの最小化
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
4.3～4.4節

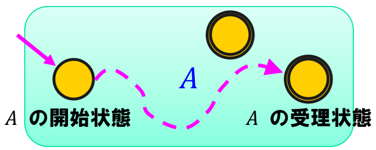
本日の学習目標

- 空言語問題，所属性判定問題の定義と解法を説明できる
- 有限オートマトンの状態の同値性の定義と，その判定法を説明できる
- 正則言語の等価性の判定法を，例を用いて説明できる
- 与えられた有限オートマトンを状態数最小の等価な有限オートマトンに変換できる

4.3　正則言語に関する決定問題
4.3.2　正則言語の空言語判定(1)

4.3.1 は読んでおくこと

- **空言語問題：有限オートマトン**
  - 入力：有限オートマトン A
  - 出力：$L(A)=\emptyset$ かどうか？
- **判定アルゴリズム**
  - 開始状態から到達可能な状態に最終状態（受理状態）が１つでも含まれる $\Leftrightarrow L(A)\neq\emptyset$
  - 開始状態から遷移をたどって，到達可能な状態にマーク付けを行う（状態遷移表でも状態遷移グラフでも）



4.3.2　正則言語の空言語判定(2)

- **空言語問題：正則表現**
  - 入力：正則表現 R
  - 出力：$L(R)=\emptyset$ かどうか？
- **判定アルゴリズム**
  - A) 正則表現 R を有限オートマトン A に変換してから判定
  - B) 正則表現 R の構造を考慮して判定
    - $R=\emptyset \;\Leftrightarrow\; L(R)=\emptyset$
    - $R=a\ (\in\Sigma)$ または $R=\epsilon \;\Leftrightarrow\; L(R)\neq\emptyset$
    - $R=R_1+R_2$：$L(R_1)=L(R_2)=\emptyset \;\Leftrightarrow\; L(R)=\emptyset$
    - $R=R_1R_2$：$L(R_1)=\emptyset$ または $L(R_2)=\emptyset \;\Leftrightarrow\; L(R)=\emptyset$
    - $R=R_1^*$：$L(R)\neq\emptyset$（$\because \epsilon\in L(R)$）

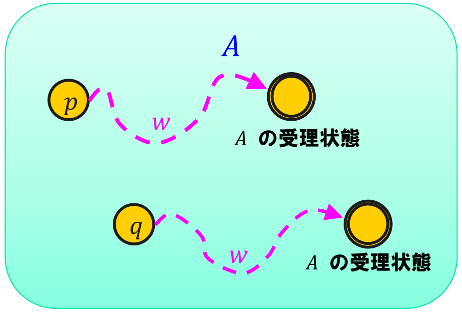
4.3.3　正則言語における所属性判定

- **所属性判定問題：有限オートマトン**
  - 入力：有限オートマトン A，文字列 w
  - 出力：$w \in L(A)$ かどうか？
- **判定アルゴリズム**
  - 有限オートマトン A に w を入力する
    - DFA，NFA，ϵ-NFA のいずれでも容易

正則表現 R が与えられたときは，
有限オートマトンに変換して判定

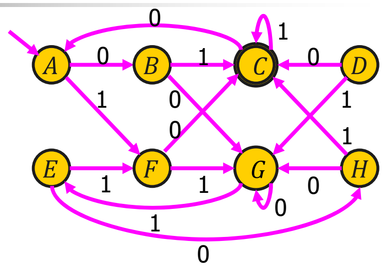
4.4　オートマトンの等価性と最小性
4.4.1　状態の同値性の判定

- **DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の２つの状態 p, q が同値**
  - 任意の入力列 $w \in \Sigma^*$ に対し，
    $\hat{\delta}(p, w)$ が受理状態 $\Leftrightarrow$ $\hat{\delta}(q, w)$ が受理状態
  - 状態 p, q が**区別可能** $\Leftrightarrow$ p, q が同値でない



状態の同値性：例4.18

- **状態 C と G は区別可能**
  - $\hat{\delta}(C, \epsilon) = C$ は受理状態
  - $\hat{\delta}(G, \epsilon) = G$ は受理状態でない
- **状態 A と G は区別可能**
  - $\hat{\delta}(A, 01) = C$ は受理状態
  - $\hat{\delta}(G, 01) = E$ は受理状態でない
- **状態 A と E は同値**
  - $\hat{\delta}(A, \epsilon) = A$, $\hat{\delta}(E, \epsilon) = E$ はともに受理状態でない
  - $\hat{\delta}(A, 1) = (E, 1) = F$　従って，$1w\ (w \in \Sigma^*)$ で到達する状態は同じ
  - $\hat{\delta}(A, 00) = (E, 00) = G$　従って，$00w\ (w \in \Sigma^*)$ で到達する状態は同じ
  - $\hat{\delta}(A, 01) = (E, 01) = C$　従って，$01w\ (w \in \Sigma^*)$ で到達する状態は同じ
  - $\hat{\delta}(A, 0) = B$, $\delta(E, 0) = H$ はともに受理状態でない



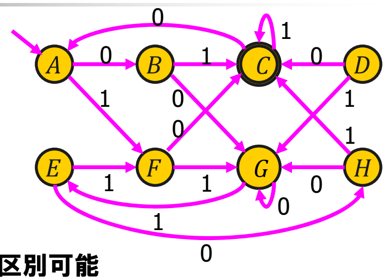
同値な状態をすべて見つけるアルゴリズム

- **（表の）穴埋めアルゴリズム**
  - DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
    - **区別可能な状態の対を見つけていく**
    - **基礎**：受理状態 $p \in F$ と非受理状態 $q \in Q - F$ は区別可能
    - **再帰**
      - 既に区別可能と分かっている状態対 (r, s)
      - ある $a \in \Sigma$ に対し，$\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$ なら p と q は区別可能

【定理4.20】 ２つの状態が穴埋めアルゴリズムで区別可能と判定されなければ，それらの状態は同値である

同値な状態をすべて見つけるアルゴリズム：例

- **例4. 19**
  - DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$



B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

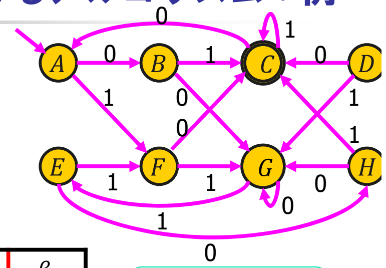
x：区別可能

$\{A, E\}, \{B, H\}, \{D, F\}$は
それぞれ同値

テキストにはない手法

同値な状態をすべて見つけるアルゴリズム：例

- **例4. 19**
  - DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$



α														β	
A		B		D		E		F		G		H		C	
α	α	α	β	β	α	α	α	β	α	α	α	α	β	α	β
$\gamma\ (\alpha, \alpha)$						$\delta\ (\alpha, \beta)$				$\epsilon\ (\beta, \alpha)$				β	
A		E		G		B		H		D		F		C	
δ	ϵ	δ	ϵ	γ	γ	γ	β	γ	β	β	γ	β	γ	γ	β
$\zeta\ (\delta, \epsilon)$				$\eta\ (\gamma, \gamma)$		δ				ϵ				β	
A		E		G		B		H		D		F		C	
δ	ϵ	δ	ϵ	η	ζ	η	β	η	β	β	η	β	η	ζ	β

非受理状態と受理状態で分割

入力 0, 1 の遷移先

入力 0, 1 の遷移先で分割

$\{A, E\}, \{B, H\}, \{D, F\}$は
それぞれ同値

4. 4. 2　正則言語の等価性の判定

- **DFA A と B が等価**
  - $L(A) = L(B)$　　A と B が同じ言語を受理する

- **DFA A と B の等価性の判定**
  - **DFA A と B が等価 $\Leftrightarrow$**
    A の開始状態と B の開始状態が同値

NFA, ϵ-NFA, 正則表現 が与えられたときは,
DFA に変換して判定

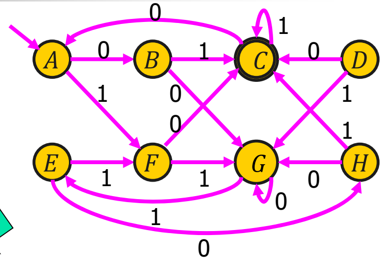
4. 4. 3　DFA の最小化

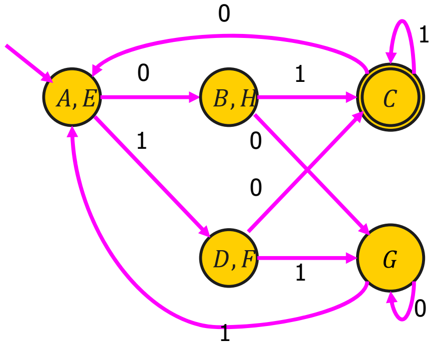
- **同値な状態が複数**
  - DFA が冗長
  - **同値な状態を１状態にまとめる**ことで, **簡単化が可能**

- **DFA の最小化**
  - 与えられた DFA A に対し,
    $L(A) = L(B)$ となる**状態数最小**の DFA B を構成する

DFA の最小化：例4.22

- 状態の同値類
  - $\{A,E\},\{B,H\},\{C\},\{D,F\},\{G\}$
- 状態と同値類を状態と見なす





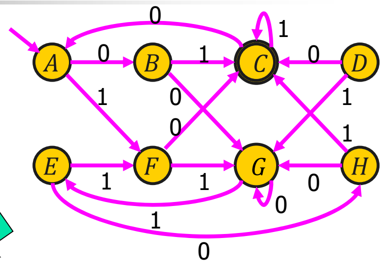
$\{A,E\},\{B,H\},\{D,F\}$は
それぞれ同値

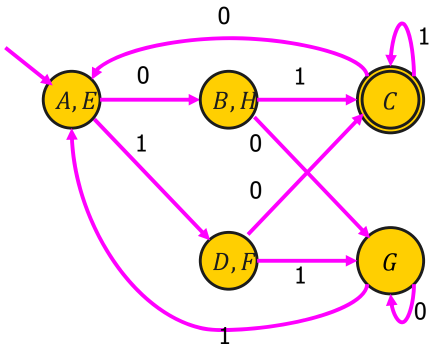
DFA の最小化：アルゴリズム(1)

- DFA $A=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$ の状態数最小化アルゴリズム
  1. 各状態 $p \in Q$ と同値な状態をすべて求める
  2. 状態の同値類を１つの状態として
     DFA $B=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$ を構成する
     - Q'：Q の同値類の集合
     - δ'：$\delta'(p',a)=q'$　ただし，$p \in p'$ に対し $\delta(p,a) \in q'$
       このような q' は一意に定まる
     - $p_0{}'$：p_0 を含む同値類
     - F'：$p \in F$ なる p を含む同値類の集合
       同値類 p' が A の受理状態を含めば，p' は受理状態
  3. 開始状態から到達不能な状態があれば削除する

DFA の最小化：例4.22

- 状態の同値類
  - $\{A,E\},\{B,H\},\{C\},\{D,F\},\{G\}$
- 状態と同値類を状態と見なす





$\{A,E\},\{B,H\},\{D,F\}$は
それぞれ同値

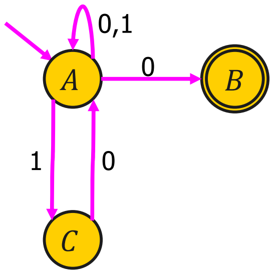
DFA の最小化：アルゴリズム(2)

【定理4.23】　状態の同値という関係は推移律を満たす．
つまり，状態 p,q が同値であり，状態 q,r も同値で
あれば，p,r も同値である

- 同値関係（反射律，対称律，推移律）
  - 状態集合は同値類に分割される
    - 各状態は，いずれかの同値類に含まれる
    - 各状態は，２つ以上の同値類に含まれることはない

NFA の最小化

- NFA の状態数最小化
  - **状態の同値関係だけではできない**
  - テキスト p.187 の例
    - 同値な状態はない
      - $\delta(A,0)=B$　受理状態
      - $\delta(C,0)=A$　非受理状態
    - 受理する言語：$\{w0 \mid w \in \Sigma^*\}$
      - **2状態の NFA** で受理可能
        - 状態 C は不要

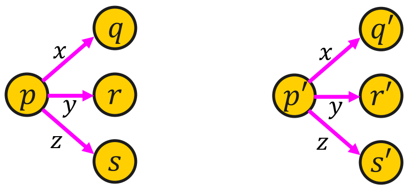


4.4.4　最小化 DFA が最小である理由(1)

- $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$：**最小化アルゴリズム**で得られた DFA
  - M が言語 $L(M)$ を受理する DFA の中で**状態数最小**であることを証明する
    - この証明から，状態数最小の DFA は（状態名の違いを除き）一意に定まることが分かる
  - 背理法：$L(M)=L(N)$ なる DFA $N=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$
    （ただし，$|Q'|<|Q|$）を仮定
  - **M の状態 p と N の状態 q が区別不能**
    - 任意の入力列 $w \in \Sigma^*$ に対し，
      $\hat{\delta}(p,w)$ が受理状態 $\Leftrightarrow$ $\widehat{\delta'}(q,w)$ が受理状態

4.4.4　最小化 DFA が最小である理由(2)

- DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$：最小化アルゴリズムの結果
- DFA $N=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$（$|Q'|<|Q|$）
  - **開始状態 $p_0,{p_0}'$ は区別不能**
    - $L(M)=L(N)$ なので
  - $p \in Q$，$p' \in Q'$ が区別不能 $\Rightarrow$
    各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta(p,a) \in Q$，$\delta'(p',a) \in Q'$ も区別不能



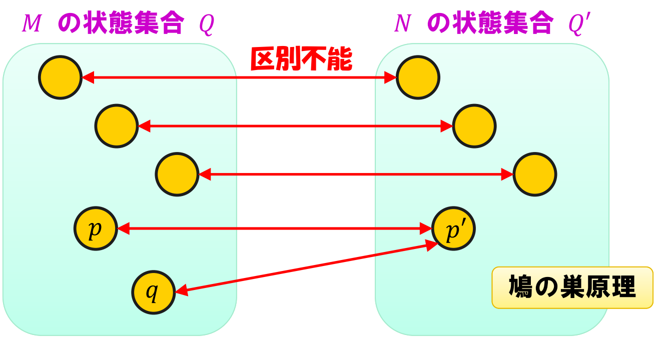
p と p' が区別不能なら，q と q'，r と r'，s と s' も区別不能

4.4.4　最小化 DFA が最小である理由(3)

- DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$：最小化アルゴリズムの結果
- DFA $N=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$（$|Q'|<|Q|$）
  - **開始状態 $p_0,{p_0}'$ は区別不能**
    - $L(M)=L(N)$ なので
  - $p \in Q$，$p' \in Q'$ が区別不能 $\Rightarrow$
    各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta(p,a) \in Q$，$\delta'(p',a) \in Q'$ も区別不能
  - 任意の $p \in Q$ は開始状態 p_0 から到達可能
    - **各 $p \in Q$ に対し，区別不能な $q \in Q'$ が存在**
  - $|Q'|<|Q|$ より，**ある $p \in Q, q \in Q$ $(p \neq q)$，$p' \in Q'$ が存在し，p,p' が区別不能，かつ，q,p' が区別不能**　次ページに図
  - **p,q が区別不能（つまり，同値）となり，M が最小化アルゴリズムの結果であることに矛盾**

4. 4. 4　最小化 DFA が最小である理由 (4)

- 任意の $p \in Q$ は開始状態 p_0 から到達可能
  - 各 $p \in Q$ に対し，区別不能な $q \in Q'$ が存在
- $|Q'| < |Q|$ より，ある $p \in Q, q \in Q$ $(p \neq q)$, $p' \in Q'$ が存在し，p, p' が区別不能，かつ，q, p' が区別不能



4. 4. 4　最小化 DFA が最小である理由 (3)

- DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, p_0, F)$：最小化アルゴリズムの結果
- DFA $N = (Q', \Sigma, \delta', p_0', F')$（$|Q'| < |Q|$）
  - 開始状態 $p_0, p_0{}'$ は区別不能
    - $L(M) = L(N)$ なので
  - $p \in Q$, $p' \in Q'$ が区別不能 ⇒
    各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta(p, a) \in Q$, $\delta'(p', a) \in Q'$ も区別不能
  - 任意の $p \in Q$ は開始状態 p_0 から到達可能
    - 各 $p \in Q$ に対し，区別不能な $q \in Q'$ が存在
  - $|Q'| < |Q|$ より，ある $p \in Q, q \in Q$ $(p \neq q)$, $p' \in Q'$ が存在し，p, p' が区別不能，かつ，q, p' が区別不能
  - p, q が区別不能（つまり，同値）となり，M が最小化アルゴリズムの結果であることに矛盾

本日のまとめ

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 正則言語に関する決定問題
   - DFAの最小化
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
4. 3～4. 4節

本日の学習目標

目標を達成できたか
確認してみよう
（復習も含めて）

- 空言語問題，所属性判定問題の定義と解法を説明できる
- 有限オートマトンの状態の同値性の定義と，その判定法を説明できる
- 正則言語の等価性の判定法を，例を用いて説明できる
- 与えられた有限オートマトンを状態数最小の等価な有限オートマトンに変換できる