情報論理学
(第 1 週)

基礎工学部情報科学科　泉 泰介

はじめに

- ソフトウェア科学・計算機科学コース 選択A群(3年次)
- 担当教員: 泉 泰介(前半)　/ 中川 博之(後半)
- 授業の目的
  - コンピュータサイエンス分野における基礎知識としての数理論理学の基礎を学ぶ
  - 応用分野：知識表現や推論，自然言語の意味処理，データベース操作、プログラムの正しさの検証
  - 非常にラフな理解：「論理的正しさ」を機械的に証明するための概念と手法を学ぶ
    - 副作用として，自分自身の「論理的に考える，論理的に書く」というスキルの向上もできる（希望）

授業テキスト

- まだ取りに行っていない人は取りに行ってください
(CLE上のアナウンス参照)
- 著者の先生方の意向により，電子的な配布は行いません
  - スキャンしてPDFを流布したりしないように！
- 各授業スライドのPDFはCLE上で閲覧・ダウンロード可能
  - 勝手に不特定多数に配布しないように

授業計画(泉担当分)

- 第1週　　導入/自然言語と論理式の関係
- 第2-3週　命題論理の論理式と意味論
- 第4-5週　命題論理の公理系
- 第6週　　述語論理の論理式と意味論
- 第7週　　中間試験

- 毎週ではないが，内容の切れ目で適宜ミニレポートを出題
- 中間+ミニレポート (6:4)で評価
- 中間試験の実施形態はコロナウィルスの状況を鑑みて判断

授業計画(中川先生担当分)

- 第8-9週　　述語論理の公理系
- 第10-12週　述語論理の定理の証明法，エルブランの定理，導出原理
- 第13週　　論理型プログラミング言語
- 第14週　　演習
- 第15週　　期末試験

注意：中川先生の授業は泉と違ってリアルタイム配信を予定しているそうなので，聞き逃しのないように！

第1週 Part1：
論理式事始め

第1週の目的

- 形式的な定義は脇にやって，まずは論理式に「素朴に」触れてみる
  - 自然言語表現がどのように論理式表現されるかを考えながら
- 各種の記号の取り扱いに慣れる
- 命題論理，述語論理がどのようなものかを理解する
- 論理学における「証明」
- 情報科学とのつながりについてざっくりと理解する

論理式の構成要素

- **陳述**(proposition) (**言明**(statement)とも)
  - 真が偽であるような文言(「…である」調の文章)
- 例
  - 「整数２は５より大きい」
  - 「R3年度情報科学科３年生には自宅生が50人以上」
  - 「整数 x は５より大きい」 ← このような「引数(x)」を取る陳述は **述語**(predicate)と呼ばれる

論理式の構成要素

- 陳述PやQを次のように組み合せてできるものも陳述である
  - $P \land Q$ (P かつ Q / P and Q)
    - Pが成り立ち，かつ Qも成り立つ
  - $P \lor Q$ (P または Q / P or Q)
    - PとQの少なくとも一方が成り立つ
  - $\neg P$ (P でない / not P)
    - Pであるということはない
  - $P \to Q$ (P ならば Q / P implies Q)
    - もしPが成り立つならばQも成り立つ

論理式の構成要素

- 引数xを持つ述語$R(x)$に対して
- $\forall x\ R(x)$ （任意のxについて$R(x)$　for any x, $R(x)$）
  - すべてのxについて$R(x)$が成り立つ
- $\exists x\ R(x)$ （あるxが存在して$R(x)$　there exists x such that $R(x)$）
  - $R(x)$がなりたつようなxが(少なくともひとつ)存在する

∀, ∃ は「**限定作用素**」(quantifier) と呼ばれる

- 慣例的にxの取りうる値の集合Mを明記して
  $\forall x \in M\ R(x)$，$\exists x \in M\ \ R(x)$ のように書くこともある
  (これは厳密には論理式の文法を満たしていない．ただし，論理学以外の数学の教科書などではよく使われる)

命題論理と述語論理

- **命題論理**
  - 陳述と¬,∧,∨,→ (と，補助記号"(" ")")で構成された論理式(の体系)
- **述語論理**
  - 述語，変数，定数，限定作用素，¬,∧,∨,→ (と補助記号"(" ")")で構成された論理式(の体系)
- この説明は**定義ではない**
  - 最も重要な「論理式とは何か？」が説明されていない
  - なんなら嘘も少し混じっている

が，とりあえず上記イメージに従って話を進める(形式的な定義は後の授業で)

→ の話

- ∨ と ∧ に比べて→はわかりにくい人が多いようである
  - 誤解のもとはP =偽のとき

Pが偽ならば，$P \to Q$は無条件で真になることに注意

真理値表

P	Q	$P \to Q$
偽	偽	真
真	偽	偽
偽	真	真
真	真	真

- 日常会話での例：**「授業に殆ど出ないお前が情報論理学に80点とるなら，俺は A 群全科目100 点さ」**
  - 上のように言った本人は当然全体としては真であることを言ってるつもりであろう．この陳述はどのようなときに嘘（偽）になるだろうか？

お前が80点とれない→俺の主張は正しい(そのときに関しては何も言ってない)
お前が80点とれて，俺はA群全科目100点→いった通り
お前が80点とれて，俺はA群全科目100点ではなかった→**嘘！**

複数の限定作用素(1)

- 複数の引数x, yを持つ述語に対して複数の限定作用素をつけることができる

- $\forall x\ (\forall y\ R(x, y))$
  - 「任意のxについて「任意のyについて$R(x, y)$が成り立つ」が成り立つ」
    $\rightarrow$「任意のx, y(の組み合わせ)について$R(x, y)$が成り立つ」

- $\exists x\ (\exists y\ R(x, y))$
  - 「あるxが存在して「あるyが存在して$R(x, y)$が成り立つ」が成り立つ」
    $\rightarrow$「あるx, y(の組み合わせ)が存在して $R(x, y)$が成り立つ」

- 上の理解から，$\forall$と$\forall$の順序は入れ替えても意味は変わらない
  $\exists$と$\exists$も同様

複数の限定作用素(2)

- $\forall x\ (\exists y\ R(x,y))$
  - 「任意のxについて「あるyが存在して$R(x,y)$が成り立つ」が成り立つ」
    →「任意のxについて，**それに対応する**yが存在して$R(x,y)$が成り立つ」

- $\exists x\ (\forall y\ R(x,y))$
  - 「あるxが存在して「任意のyに対して$R(x,y)$が成り立つ」が成り立つ」
    →「あるxを**うまく選ぶと**，任意のyに対して$R(x,y)$が成り立つ」

- **∃と∀は順序の入れ替えができない(意味が全く異なる)ことに注意！**

入れ替えできない例

- love(x, y)：「xがyを好き」という意味の述語
- $\exists y \forall x$ love(x, y)
  - みんなyさんが好き
- $\forall y \exists x$ love(x, y)
  - どの人yも，誰かに好かれている

限定作用素を自然言語に直すときの注意

- うかつに言語化するとわかりにくい表現になることがある

問0.1.1

「ある元xが存在して$p(x,y)$が成り立つようなyは存在しない」は曖昧である．可能な意味の取り方それぞれに対する論理式を表し，曖昧さのない日本語で表しなさい．

- 取り方1:「ある元xが存在して」$p(x,y)$が成り立つようなyは存在しない
  - $\exists x\ (\forall y\ \neg p(x,y))$
  - あるxを選ぶと，それに対してどのようなyを選んでも$p(x,y)$は成り立たない
- 取り方2:「ある元xが存在して$p(x,y)$が成り立つ」ようなyは存在しない
  - $\neg\exists y\ (\exists x\ p(x,y))$
  - $p(x,y)$が成り立つようなx,y (の組)は存在しない

複数の限定作用素(3)

- $\forall x \exists y \forall z\ R(x, y, z)$ のように，限定作用素の後ろのカッコはしばしば省略される
  - 前から読んでいく(各変数を条件づけていく)
    「すべてのxについて，それに対応するyが存在し，そのとき，どのようなzを選んだとしても$R(x, y, z)$が成り立つ」
  - 英語だとそのまま「For any x, there exists y such that for any z $R(x, y, z)$ holds」とあいまいさなく書ける(読める)

述語の引数が対象とする集合(1)

- 述語kechi(x)を「xはケチである」ことを表す述語とする
- 例えば「大阪人はケチである」という命題を論理式表現したいとき，数学に慣れた人であれば，大阪人の集合Mを定義して

$$\forall x \in M \ \mathrm{kechi}(x)$$

と書きたくなるかもしれないが，前述の通りこれは厳密には論理式ではない

- 論理学的に正しい記述は，「xは大阪人である」osaka(x)を導入して

$$\forall x \ \mathrm{osaka}(x) \to \mathrm{kechi}(x)$$

と書く方法である($P \to Q$はPが成立しないときに関しては何も述べていないことを思い出そう)

- 同様に「ケチな大阪人もいる($\exists x \in M \ \mathrm{kechi}(x)$)」は$\exists x \ (\mathrm{osaka}(x) \land \mathrm{kechi}(x))$となる

述語の引数が対象とする集合(2)

- 問0.1.9より抜粋
  - 「だれでも，どんな科目でも，勉強すればいい点は取れる」
  - study(x, y)：xがyを勉強する
  - goodscore(x, y)：xがyの試験でよい点を取る

- 当該の論理式は$\forall x \forall y\ \mathrm{study}(x, y) \to \mathrm{goodscore}(x, y)$
  - このとき，x, yの取りうる値は明らかに違う(xは人，yは科目)

述語の引数が対象とする集合(3)

- (気持ち悪いかもしれないが)本講義は基本的に，すべての述語変数の取りうる値は同じであるとする
  - 先ほどの例だと，X:人の集合，Y:科目の集合として，$X \cup Y$がすべての述語変数の定義域になる
  - 単一ソートの述語と呼ばれる
- 定義域を定めるときは「大阪人はケチである」のときと同様に
  h(u)：uが人である / k(u)：uが科目であるという述語を導入して
  $$\forall x \forall y\ \mathrm{h}(x) \wedge \mathrm{k}(y) \rightarrow (\mathrm{study}(x, y) \rightarrow \mathrm{goodscore}\ (x, y))$$
  とする　　$(\mathrm{h}(x) \rightarrow \left(\mathrm{k}(y) \rightarrow \left(\mathrm{study}(x, y) \rightarrow \mathrm{goodscore}(x, y)\right)\right)$ でもよい)
- 場合によっては複数の定義域を考えた述語(多ソートの述語)を考えることもあるが，本講義の範囲内では上のような変形を考えると単一ソートと本質的に同じ取り扱いが可能になる

限定作用素の否定

- 限定作用素の否定をとると，記号∀と∃は入れ替わる

- $\neg\forall x \ \ R(x)$ は $\exists x \ \neg R(x)$ と等価
  - 「「任意のxについて$R(x)$が成り立つ」ことはない」と「あるxが存在して，それは$R(x)$が成り立たない」は同じ

- $\neg\exists x \ \ R(x)$ は $\forall x \ \neg R(x)$ と等価
  - 「「あるxが存在して$R(x)$が成り立つ」ことはない」と「どのxに対しても$R(x)$が成り立たない」は同じ

さまざまな等価表現(1)

$\neg\neg P$	P	(1)
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	(2)
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	(3)
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	(4)
$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \wedge \neg Q$	(5)
$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	(6)
$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	(7)
$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	(8)

さまざまな等価表現(2)

- $(P \to R) \land (Q \to R)$ $(P \lor Q) \to R$ (9)
- $\forall x \forall y\, p(x,y)$ $\forall y \forall x\, p(x,y)$ (10)
- $\neg \forall x\, \neg p(x)$ $\exists x\, p(x)$ (11)
- $\neg \exists x\, \neg p(x)$ $\forall x\, p(x)$ (12)
- $\forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x)$ $\forall x\, (p(x) \land q(x))$ (13)
- $\exists x\, p(x) \lor \exists x\, q(x)$ $\exists x\, (p(x) \lor q(x))$ (14)

この2つはp, qが単一ソートの述語のときのみに成り立つ

Part2：練習

問0.1.3

- Part1 で定義した述語love(x, y)を使って，以下の2つの文を表す論理式を書け
- (a) 誰かが誰かを愛していれば，万人が万人を愛する

$$\exists x \exists y \ \mathrm{love}(x, y) \rightarrow \forall x \forall y \ \mathrm{love}(\mathrm{x}, y)$$

- (b) 誰かを愛している人をみんなが愛する

$$\forall x \left(\exists y \ \mathrm{love}(x, y) \rightarrow (\forall z \ \mathrm{love}(z, x)) \right)$$

問0.1.4 / 0.1.5

- 整数上の述語$<, =, \leq$を考える(2項演算子は引数2つの述語と見なせる)
  - 例：「i, j, kのうちjが最大値」

$$(i < j \vee i = j) \wedge (k < j \vee k = j)$$

- d, mを正整数，aを要素数m以上の配列$(a(1), a(2), \ldots a(m), \ldots)$として，以下の2つの文を，述語$<, =, \leq$を用いて論理式で表現してみよ

- (a) $a(1), a(2), \ldots a(m)$はすべてd以下である

$$\forall x\ (1 \leq x \wedge x \leq m \rightarrow a(x) \leq d)$$

- (b) $a(1), a(2), \ldots, a(m)$の最大値はdである

$$\big(\forall x\ (1 \leq x \wedge x \leq m \rightarrow a(x) \leq d)\big) \wedge \big(\exists y\ (1 \leq y \wedge y \leq m \wedge a(y) = d)\big)$$

問0.1.7 (述語論理における関数)

- 述語論理においては，変数，定数を操作する「**関数**」を導入することが許される
  - 例えば，前述の整数上の述語を考えるとき，加法(足し算) ”+”を導入してもよい

(前述の配列$a(i)$も実は関数)

- 「２つの奇数の和は偶数である」を論理式で書け
  - まず「xは奇数/偶数である」を表す述語を設計しよう

    $\exists w\ (x = w + w + 1)$ (奇数)　　$\exists w\ (x = w + w)$ (偶数)

  - これを用いて，以下のように書ける

$$\forall x \forall y\ \left(\left(\exists u\ (x = u + u + 1)\right) \wedge \left(\exists v\ (y = v + v + 1)\right)\right)$$
$$\rightarrow \exists w\ (x + y = w + w)$$

例0.1.1 (少し改変)

※昨今の状況を考えると微妙な例という気もしますが
もちろん男女差別の意図はないのでご容赦を
(そもそも論理の正当性と命題の真偽は別の話ですが，一応お断り)

- 男性の集合をM，女性の集合をFとする
  - $m(x)$ / $f(x)$ をそれぞれxがM or Fに属することを表す述語とする

- 以下の論理式を考えよう　　(分かりよさのためにカッコの対応を色付けしている)

$$\neg\exists y\left(m(y)\wedge\left(\forall x\left(f(x)\rightarrow \mathrm{love}(x,y)\right)\vee\neg\forall x\left(f(x)\rightarrow \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)\right)$$

- (a) この論理式にそのまま対応する日本語を書き下してみよ

- (b) より簡単な言い方を考えてみよう．下の空欄1-4を，論理式の意味が変わらないように埋めよ

「すべての[　1　]が愛するような[　2　]はいないが，
[　3　]は誰でも，すべての[　4　]を愛する」

- (c) 式変形のルールを用いて，上の日本文に対応する論理式を得よ
  (前述のルールに加えて，分配則$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$が必要かも)

例0.1.1 (少し改変)

※昨今の状況を考えると微妙な例という気もしますが
もちろん男女差別の意図はないのでご容赦を
(そもそも論理の正当性と命題の真偽は別の話ですが，一応お断り)

- $m(x)$ / $f(x)$ をそれぞれxがM or Fに属することを表す述語とする

- 以下の論理式を考えよう

(分かりよさのためにカッコの対応を色付けしている)

$$\neg\exists y \left(m(y) \wedge \left(\forall x \left(f(x) \to \mathrm{love}(x,y) \right) \vee \neg\forall x \left(f(x) \to \mathrm{love}(y,x) \right) \right) \right)$$

- (a) この論理式にそのまま対応する日本語を書き下してみよ
  1. 「()であるようなyは存在しない」
  2. 「()でありかつ男性であるようなyは存在しない（=()であるような男性yは存在しない)」
  3. 「すべてのxについて()である，または「すべてのxについて()」ではないような男性yは存在しない」
  4. 「すべての女性xに対してlove(x, y)」または「すべての女性xについてlove(y, x)」でないような男性yは存在しない
  5. 「すべての女性が愛する」または「「すべての女性を愛する」ということがない」男性は存在しない

例0.1.1 (少し改変)

※昨今の状況を考えると微妙な例という気もしますが
もちろん男女差別の意図はないのでご容赦を
(そもそも論理の正当性と命題の真偽は別の話ですが，一応お断り)

- $m(x)$ / $f(x)$ をそれぞれxがM or Fに属することを表す述語とする

- 以下の論理式を考えよう

(分かりよさのためにカッコの対応を色付けしている)

$$\neg\exists y\ \Big(m(y) \land \big(\forall x\ (f(x) \rightarrow \mathrm{love}(x,y)) \lor \neg\forall x(f(x) \rightarrow \mathrm{love}(y,x))\big)\Big)$$

- (b)より簡単な言い方を考えてみよう．下の空欄1-4を，論理式の意味が変わらないように埋めよ

女性　　　　男性

「すべての[　1　]が愛するような[　2　]はいないが，
[　3　]は誰でも，すべての[　4　]を愛する」

男性　　　　女性

「すべての女性が愛する」または「「すべての女性を愛する」ということがない」男性は存在しない

例0.1.1 (少し改変)

※昨今の状況を考えると微妙な例という気もしますが

ゴール：「すべての[　女性　]が愛するような[　男性　]はいないが，[　男性　]は誰でも，すべての[　女性　]を愛する」

- (c) 式変形のルールを用いて，上の日本文に対応する論理式を得よ

$$\neg\exists y\left(m(y)\wedge\left(\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\vee\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\vee\left(m(y)\wedge\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\left(\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\vee\exists y\left(m(y)\wedge\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\wedge\neg\exists y\left(m(y)\wedge\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\wedge\forall y\neg\left(m(y)\wedge\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\wedge\forall y\left(\neg m(y)\vee\neg\neg\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\wedge\forall y\left(\neg m(y)\vee\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists y\left(m(y)\wedge\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(x,y)\right)\right)\wedge\forall y\left(m(y)\to\forall x\left(f(x)\to \mathrm{love}(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)\right)$$

第1週まとめ

- 論理式にざっくばらんに触れるとともに，各種の記号の直感的な理解を深めた
- 命題論理・述語論理のイメージをつかんだ
- 自然言語表現の論理式記述について学んだ
- 論理式の等価な変形のパタンについて学んだ

- 第1週は直感的な理解のみで論理式を捉えてきたが，実際にCS上の応用を考えたとき，直感を排した，より形式的な取り扱いが必要となる
  - その意味において・第1週のノリで以降も理解しようとすると少し面食らうかもしれないので注意