8 (1-1)

(a) Cとして $a=2$とする

Fはない。

Pとして $P(u) \land u > 0$ を割りあてる。

この解釈を与えると、必ず $p(a)$は真なので $\forall x(p(x) \to p(a))$ は真になる。

(b) Cはない

Fとして $f(u)$ は $u \times 0$ を割りあてる。

Pとして $P(u)$ は $u<1$ を割りあてる。

この解釈を与えると、$p(u)$のuは必ず0となり、$p(u)$は必ず真になる。

(c) Cとして $a=0$、$b=1$ とする。

Fはない

Pとして $p(u)$ は $u>0$ を与える。

この解釈で $(\neg p(a) \lor \neg p(b))$ は必ず真となり、$\forall x(p(x) \to (\neg p(a) \lor \neg p(b)))$ は真となる。

(1-2) ~~(a) どちらか真~~
~~(b) どちらか真~~
~~(c) すべてでどちらも偽~~
~~充足不能!!~~

$p(x)$は $x \geqq 0$

$q(x)$は $x>0$

(a)で $p(x)$は真 $q(x)$は偽より真

(b)で $p(x)$は真 $q(x)$は偽より真

(c)で $p(x)$は真、$q(x)$は偽より真

よって真

全てを1にする解釈がある。

(1-3) ~~$p(u) = u \geqq 0$ $q(u) = u < 0$ とすると、$\forall u$に関して$p(u)$は必ず真、$\forall u$に関して$q(u)$は必ず偽 よって $\forall x(p(x) \lor q$~~

$p(u) = u > 2$ $q(u) = u \leqq 2$ とする。

$\forall p(u)$は必ず偽、$\forall q(u)$も偽であるが、$\forall u(p(u) \lor q(u))$は、$u$が必ずどちらかを満たすので、真になる。

(2) $A' = \neg A = \neg(\neg \forall y \forall x\, p(x,y) \land \exists y \forall x(p(x,y) \to q(x))) \lor \forall z\, q(z))$

$= \forall y \forall x\, p(x,y) \land \exists y \forall x(p(x,y) \to q(x))) \land \neg \forall z\, q(z)$

$= \forall y \forall x\, p(x,y) \land \exists y \forall x(p(x,y) \to q(x)) \land \exists z \neg q(z)$

$= \forall y \forall x\, p(x,y) \land \exists y \forall x(\neg p(x,y) \lor q(x)) \land \exists z \neg q(z)$

$= \exists z \exists y(\forall u \forall x\, p(x,u) \land \forall u(\neg p(u,y) \lor q(u)) \land \neg q(z))$

(2-1) $= \exists z \exists y \forall u \forall x(p(x,u) \land (\neg p(u,y) \lor q(u)) \land \neg q(z))$

z、yにスコーレム関数 a、b を導入

(2-2) $= \forall u \forall x(p(x,u) \land (\neg p(u,b) \lor q(u)) \land \neg q(a))$

導出節は $p(x,u)$ ①, $\neg p(u,b) \lor q(u)$ ②, $\neg q(a)$ ③

②で uにaを入れると $\neg p(a,b) \lor q(a)$ …④

③と④で $\neg p(a,b)$ …⑤

①で $u=b$、$x=a$ を入れると $p(a,b)$ …⑥

⑤と⑥で導出節は0

(2-3) よってA'は充足不能である。