ミニレポート 5-2

以下の言語が正則言語でないことを反復補題を用いて証明しなさい

(1) $L_1 = \{0^x 1^y \mid x > y\}$

(2) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は異なる個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$

ミニレポート 5-2 (1)：解答例 (1)

(1) $L_1 = \{0^x 1^y \mid x > y\}$

L_1 **が正則言語と仮定する**

反復補題の n **に対し，** $w = 0^{n+1}1^n$ **とする**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せ，任意の** k $(k \geq 0)$ **に対し，** $xy^k z \in L$

$y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$ **より** $y = 0^s$ $(1 \leq s \leq n)$ **である**

$xy^0 z = 0^{n+1-s}1^n$

$n + 1 - s \leq n$ **より，** $xy^0 z \notin L_1$ **矛盾！**

従って， L_1 **は正則言語でない**

w で 0 と 1 の個数の差を 1 にし，
繰り返し数 $k = 0$ とするのがポイント！

ミニレポート 5-2 (1)：解答例 (2)
反復補題の変形を用いた別の解答例

(1) $L_1 = \{0^x 1^y \mid x > y\}$

L_1 **が正則言語と仮定する**

反復補題の n **に対し，** $w = 0^m 1^n$ **（ただし，** $m > n$**）とする**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |yz| \leq n)$ **と表せ，（反復補題の変形）**

任意の k $(k \geq 0)$ **に対し，** $xy^k z \in L_1$

$y \neq \epsilon$, $|yz| \leq n$ **より** $y = 1^s$ $(0 < s \leq n)$ **である**

$xy^{m+1}z = 0^m 1^{n+sm}$

$m \leq n + sm$ **より，** $xy^{m+1}z \notin L_1$ **矛盾！**

従って， L_1 **は正則言語でない**

反復補題の変形を用いれば w を適当に選んでも，
繰り返し数 k を十分に大きくすれば矛盾を導ける

ミニレポート 5-2 (2)：解答例

(2) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は異なる個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$

L_2 **が正則言語と仮定する**

反復補題の n **に対し，** $w = 0^n 1^{n+n!}$ **とする**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せ，任意の** k $(k \geq 0)$ **に対し，** $xy^k z \in L$

$y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$ **より** $y = 0^s$ $(1 \leq s \leq n)$ **である**

$xy^{\frac{n!}{s}+1}z = 0^{n-s}(0^s)^{\frac{n!}{s}+1}1^{n+n!} = 0^{n+n!}1^{n+n!} \notin L_2$ **矛盾！**

従って， L_2 **は正則言語でない**

ミニレポート 5-3

正則言語の族が以下の演算のもとで閉じていることを示しなさい

(1) $\min(L) = \{w \mid w$ は L に属するが w の真の接頭語は L に属さない$\}$

(2) $\max(L) = \{w \mid w$ は L に属するが ϵ 以外のすべての x に対し wx は L に属さない$\}$

ミニレポート 5-3 (1)：解答例

(1) $\min(L) = \{w \mid w$ は L に属するが w の真の接頭語は L に属さない$\}$

L が正則言語なら，L を受理するDFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が存在する．
A から $\min(L)$ を受理する DFA $A_{min} = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$ を次のように構成する．
・$Q' = Q \cup \{q'\}$ 　ただし，$q' \notin Q$ 　（q' はドボン状態）
・各 $q \in F, a \in \Sigma$ に対し，$\delta'(q, a) = q'$
・各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta'(q', a) = q'$
・上記以外は $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$
＊一度受理状態になれば，それ以降，受理状態に到達しないように変形している

ミニレポート 5-3 (2)：解答例

(2) $\max(L) = \{w \mid w$ は L に属するが ϵ 以外のすべての x に対し wx は L に属さない$\}$

L が正則言語なら，L を受理するDFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が存在する．
A から $\max(L)$ を受理する DFA $A_{max} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_{max})$ を次のように構成する．（A と の違いは最終状態集合のみ）
・$p, q \in F$（$p = q$ でもよい）に対し，$\hat{\delta}(p, w) = q$ となる $w \in \Sigma^+$ が存在するなら，p を受理状態でなくす．つまり，
$F_{max} = \{p \in F \mid \hat{\delta}(p, w) \in F$ となる $w \in \Sigma^+$ が存在しない$\}$