計算論A　第６回

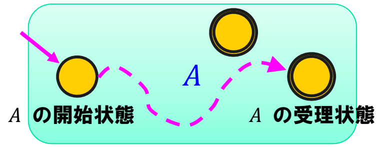
1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 正則言語に関する決定問題
   - DFAの最小化
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
4.3〜4.4節

4.3　正則言語に関する決定問題
4.3.2　正則言語の空言語判定(1)

4.3.1 は読んでおくこと

- 空言語問題：有限オートマトン
  - 入力：有限オートマトン A
  - 出力：$L(A) = \emptyset$ かどうか？
- 判定アルゴリズム
  - 開始状態から到達可能な状態に最終状態（受理状態）が１つでも含まれる $\Leftrightarrow L(A) \neq \emptyset$
  - 開始状態から遷移をたどって，到達可能な状態にマーク付けを行う（状態遷移表でも状態遷移グラフでも）



4.3.2　正則言語の空言語判定(2)

- 空言語問題：正則表現
  - 入力：正則表現 R
  - 出力：$L(R) = \emptyset$ かどうか？
- 判定アルゴリズム
  - A) 正則表現 R を有限オートマトン A に変換してから判定
  - B) 正則表現 R の構造を考慮して判定
    - $R = \emptyset \Leftrightarrow L(R) = \emptyset$
    - $R = a\ (\in \Sigma)$ または $R = \epsilon \Leftrightarrow L(R) \neq \emptyset$
    - $R = R_1 + R_2$：$L(R_1) = L(R_2) = \emptyset \Leftrightarrow L(R) = \emptyset$
    - $R = R_1 R_2$：$L(R_1) = \emptyset$ または $L(R_2) = \emptyset \Leftrightarrow L(R) = \emptyset$
    - $R = R_1^*$：$L(R) \neq \emptyset$（$\because \epsilon \in L(R)$）

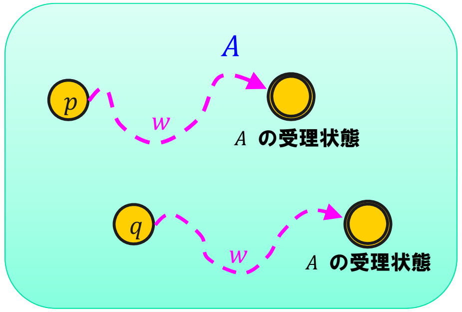
4.3.3　正則言語における所属性判定

- 所属性判定問題：有限オートマトン
  - 入力：有限オートマトン A，文字列 w
  - 出力：$w \in L(A)$ かどうか？
- 判定アルゴリズム
  - 有限オートマトン A に w を入力する
    - DFA，NFA，ϵ-NFA のいずれでも容易

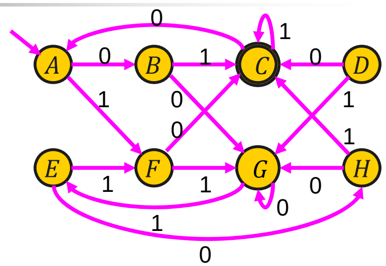
正則表現 R が与えられたときは，
有限オートマトンに変換して判定

4.4　オートマトンの等価性と最小性
4.4.1　状態の同値性の判定

- DFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ の２つの状態 p,q が同値
  - 任意の入力列 $w\in\Sigma^*$ に対し，
    $\hat{\delta}(p,w)$ が受理状態 $\Leftrightarrow$ $\hat{\delta}(q,w)$ が受理状態
  - 状態 p,q が区別可能 $\Leftrightarrow$ p,q が同値でない



状態の同値性の判定：例4.18



- 状態 C と G は区別可能
  - $\hat{\delta}(C,\epsilon)=C$ は受理状態
  - $\hat{\delta}(G,\epsilon)=G$ は受理状態でない
- 状態 A と G は区別可能
  - $\hat{\delta}(A,01)=C$ は受理状態
  - $\hat{\delta}(G,01)=E$ は受理状態でない
- 状態 A と E は同値
  - $\hat{\delta}(A,\epsilon)=A,\ \hat{\delta}(E,\epsilon)=E$ はともに受理状態でない
  - $\hat{\delta}(A,1)=(E,1)=F$　従って，$1w\ (w\in\Sigma^*)$ で到達する状態は同じ
  - $\hat{\delta}(A,00)=(E,00)=G$　従って，$00w\ (w\in\Sigma^*)$ で到達する状態は同じ
  - $\hat{\delta}(A,01)=(E,01)=C$　従って，$01w\ (w\in\Sigma^*)$ で到達する状態は同じ

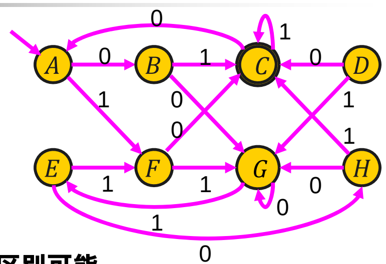
同値な状態をすべて見つけるアルゴリズム

- （表の）穴埋めアルゴリズム
  - DFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
    - 区別可能な状態の対を見つけていく
    - 基礎：受理状態 $p\in F$ と非受理状態 $q\in Q-F$ は区別可能
    - 再帰
      - 既に区別可能と分かっている状態対 (r,s)
      - ある $a\in\Sigma$ に対し，$\delta(p,a)=r,\ \delta(q,a)=s$ なら p と q は区別可能

【定理4.20】 ２つの状態が穴埋めアルゴリズムで区別可能と判定されなければ，それらの状態は同値である

同値な状態をすべて見つけるアルゴリズム：例

- 例4.19
  - DFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$



B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

x：区別可能

$\{A,E\},\{B,H\},\{D,F\}$はそれぞれ同値

4.4.2 正則言語の等価性の判定

- DFA A と B が等価
  - $L(A) = L(B)$　　A と B が同じ言語を受理する
- DFA A と B の等価性の判定
  - DFA A と B が等価 $\Leftrightarrow$
    A の開始状態と B の開始状態が同値

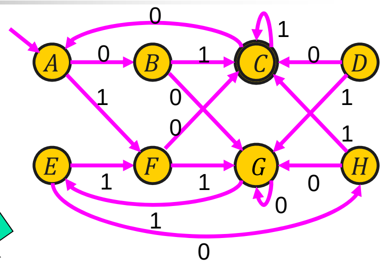
NFA，ϵ-NFA，正則表現 が与えられたときは，
DFA に変換して判定

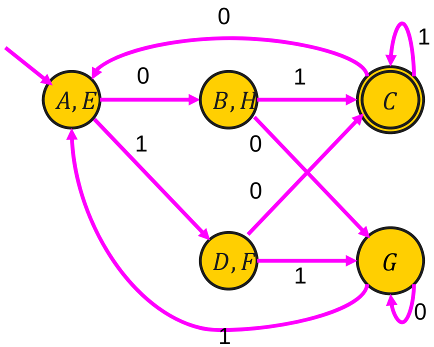
4.4.3 DFA の最小化

- 同値な状態が複数
  - DFA が冗長
  - 同値な状態を１状態にまとめることで，簡単化が可能
- DFA の最小化
  - 与えられた DFA A に対し，
    $L(A) = L(B)$ となる状態数最小の DFA B を構成する

DFA の最小化：例4.22

- 状態の同値類
  - $\{A,E\},\{B,H\},\{C\},\{D,F\},\{G\}$
- 状態と同値類を状態と見なす





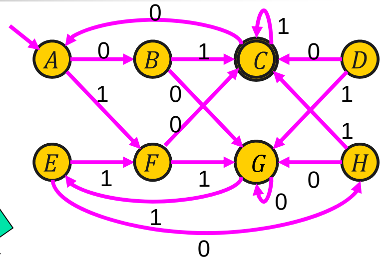
$\{A,E\},\{B,H\},\{D,F\}$は
それぞれ同値

DFA の最小化：アルゴリズム(1)

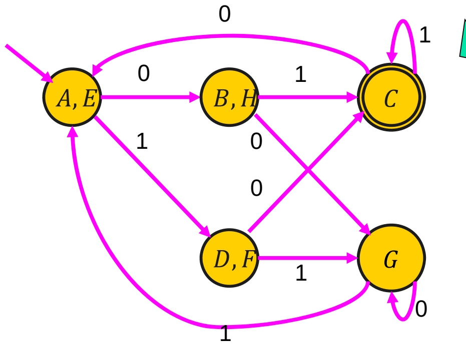
- DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, p_0, F)$ の状態数最小化アルゴリズム
  1. 各状態 $p \in Q$ と同値な状態をすべて求める
  2. 状態の同値類を１つの状態として
     DFA $B = (Q', \Sigma, \delta', p'_0, F')$ を構成する
     - Q'：Q の同値類の集合
     - δ'：$\delta'(p', a) = q'$　ただし，$p \in p'$ に対し $\delta(p, a) \in q'$
       このような q' は一意に定まる
     - ${p_0}'$：p_0 を含む同値類
     - F'：$p \in F$ なる p を含む同値類の集合
       同値類 p' が A の受理状態を含めば，p' は受理状態
  3. 開始状態から到達不能な状態があれば削除する

DFA の最小化：例4.22

- 状態の同値類
  - $\{A,E\},\{B,H\},\{C\},\{D,F\},\{G\}$
- 状態と同値類を状態と見なす



$\{A,E\},\{B,H\},\{D,F\}$**は**
それぞれ同値



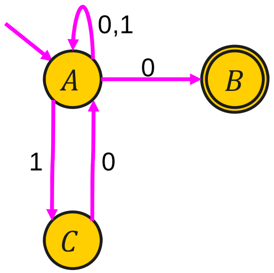
DFA の最小化：アルゴリズム(2)

【定理4.23】　状態の同値という関係は推移律を満たす．つまり，状態 p,q が同値であり，状態 q,r も同値であれば，p,r も同値である

- 同値関係（反射律，対称律，推移律）
  - 状態集合は**同値類に分割**される
    - 各状態は，いずれかの同値類に含まれる
    - 各状態は，２つ以上の同値類に含まれることはない

NFA の最小化

- NFA の状態数最小化
  - **状態の同値関係だけではできない**
  - テキスト p.187 の例
    - 同値な状態はない
      - $\delta(A,0)=B$　受理状態
      - $\delta(C,0)=A$　非受理状態
    - 受理する言語：$\{w0 \mid w \in \Sigma^*\}$
      - **２状態の NFA** で受理可能
        - 状態 C は不要



4.4.4　最小化 DFA が最小である理由(1)

- $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$：**最小化アルゴリズム**で得られた DFA
  - M が言語 $L(M)$ を受理する DFA の中で**状態数最小**であることを証明する
  - 背理法：$L(M)=L(N)$ なる DFA $N=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$
    （ただし，$|Q'|<|Q|$）を仮定
  - **M の状態 p と N の状態 q が区別不能**
    - 任意の入力列 $w \in \Sigma^*$ に対し，

$$\hat{\delta}(p,w) \text{ が受理状態} \Leftrightarrow \widehat{\delta'}(q,w) \text{ が受理状態}$$

4.4.4　最小化 DFA が最小である理由(2)

- DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,p_0,F)$：最小化アルゴリズムの結果
- DFA $N=(Q',\Sigma,\delta',p_0',F')$（$|Q'|<|Q|$）
  - 開始状態 $p_0,p_0{}'$ は区別不能
    - $L(M)=L(N)$ なので
  - $p\in Q$，$p'\in Q'$ が区別不能 ⇒
    各 $a\in\Sigma$ に対し，$\delta(p,a)\in Q$，$\delta'(p',a)\in Q'$ も区別不能
  - 任意の $p\in Q$ は開始状態 p_0 から到達可能
    - 各 $p\in Q$ に対し，区別不能な $q\in Q'$ が存在
  - $|Q'|<|Q|$ より，ある $p\in Q,q\in Q$ $(p\neq q)$，$p'\in Q'$ が存在し，
    p,p' が区別不能，かつ，q,p' が区別不能
  - p,q が区別不能（つまり，同値）となり，
    M が最最小化アルゴリズムの結果であることに矛盾

本日のまとめ

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 正則言語に関する決定問題
   - DFAの最小化

テキスト
4.3～4.4節

4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン