平成26年度 [3] 離散構造

(1)

(1-1)

R_2 のみ

(証明)

任意の $x \in V$ に対して $x R_2 x$ が成り立つので、関係 R_2 は反射律を満たす。

任意の $x \in V$, $y \in V$ に対して、x と y を共に含む有向閉路が存在すれば、

y と x を共に含む有向閉路が存在する。

以上より $x R_2 y$ が成り立てば、$y R_2 x$ が成り立つので、関係 R_2 は対称律を満たす

任意の $x \in V$, $y \in V$, $z \in V$ に対して、x と y を共に含む有向閉路で、y と z を共に含む有向閉路が存在すると仮定する。この時、x から y へ到る有向経路で、y から z へ到る有向経路が存在するので、x から z へ到る有向経路が存在する。同様にして、z から x へ到る有向経路が存在する。すなわち、x と z を共に含む有向閉路が存在する。

以上より、$x R_2 y$ かつ $y R_2 z$ が成り立てば、$x R_2 z$ が成り立つので、関係 R_2 は推移律を満たす。 ∴ R_2 は同値関係である。

(1-2)

R_3 のみ

(証明)

任意の $x \in V$ に対して、s から x へのすべての有向経路が x を含む、すなわち $x R_3 x$ が成り立つ。

したがって、関係 R_3 は反射律を満たす。

任意の $x \in V$, $y \in V$ に対して、s から x へのすべての有向経路が y を含み、かつ

s から y へのすべての有向経路が x を含むとする。ここで、s から x への有向経路を

$s \xrightarrow[e_0]{} v_1 \xrightarrow[e_1]{} v_2 \xrightarrow[e_2]{} \cdots v_n \xrightarrow[e_n]{} x$ と書くて、 $(v_2=y)$ または … $(v_n=y)$ が成り立つ

($v_1=y$ の時「s から y へのすべての有向経路が x を含む」に矛盾)

よくなされ $v_j = y$ とすると $s \xrightarrow[e_0]{} v_1 \xrightarrow[e_1]{} \cdots \xrightarrow[e_{j-1}]{} y \xrightarrow[e_j]{} \cdots \xrightarrow[e_n]{} x$ となる。

今、s から y へのすべての有向経路が x を含むので、$(v_1=x)$ または $(v_2=x)$ または … $(v_{j-1}=x)$ が成り立つ。

すると、$s \to \cdots x \to \cdots \to y \to \cdots x$ となり、有向経路が異なる頂点を含むという部分に矛盾する。 以上より $x R_3 y$ かつ $y R_3 x$ ならば、$x=y$ が成り立つので、

関係 R_3 は反対称律を満たす。

s から x へのすべての有向経路が y を含み、s から y へのすべての有向経路が z を含むとする。

この時、s から x へのすべての有向経路は z を含む、すなわち、$x R_3 y$ かつ $y R_3 z$ が成り立てば、$x R_3 z$ が成り立つ。 ∴ 関係 R_3 は推移律を満たす。

以上より、R_3 は半順序関係である。

(1-3) R_1, R_2, R_3

$\forall (x, y) \in ((X \times Y) - M)$

(2-1)

CY3 : $\forall h \forall x \forall y$

$$r(h, x, y) \rightarrow \bigvee_{x \in X} m(h, x, y)$$

CY4 : $m(h-1, x, y) \rightarrow \bigvee_{x \in X} m(h, x, y)$

CY5 : $m(h, x, y) \rightarrow m(h-1, x, y) \vee r(h, x, y)$

(2-2) $CZ1 \wedge CZ_2 \wedge CX_1 \wedge CX_2 \wedge CX_3 \wedge CX_4 \wedge CX_5 \wedge CY_1 \wedge CY_2 \wedge CY_3 \wedge CY_4 \wedge CY_5 \wedge \neg H$

(2-3)

$(r(h, x, y) \wedge \neg r(k, x, w) \wedge n(y, w) \wedge k < h) \rightarrow w \leq_x y.$

$r(1, u1, v_2) \wedge \neg r(0, u1, v_1) \wedge n(v_2, v1) \wedge 0 < 1 \rightarrow v1 \leq_{u1} v_2$

(d) $\neg r(1, u1, v_2) \vee \cancel{r(0, u1, v_2)} \vee \neg n(v_2, v1)$

(e) $\neg r(1, u2, v_2) \vee \cancel{r(0, u2, v_2)} \vee \neg n(v_2, v_1)$

(f) $r(1, u1, v1) \rightarrow m(1, u_1, v_1)$

$\neg r(1, u1, v1) \vee m(1, u_1, v_1)$

(g) $\neg m(1, u1, v_2) \vee \cancel{m(0, u1, v2)} \vee r(1, u1, v2)$

(h) $\neg m(1, u2, v2) \vee \cancel{m(0, u2, v2)} \vee r(1, u2, v2)$

A1: $r(1, u1, v1) \vee r(1, u1, v2)$

A2 : $r(1, u2, v1) \vee r(1, u2, v2)$

A5: $\neg r(1, u1, v1) \vee \neg r(1, u2, v1) \vee \neg m(1, u1, v1)$

$\neg m(1, u2, v1)$