1　命題論理の論理式と意味論

1.1　命題論理の論理式

(1). 記号集合
命題記号　$p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ 等，その集合を一つ定める：P (命題変数ともいわれる)
論理記号　$\rightarrow, \neg$
補助記号　(,)

(2). P にもとづく論理式 (表現式) の集合 $L(\mathsf{P})$

(a) 命題記号はそれ自身で論理式である

(b) P, Q が論理式ならば $\neg(P), (P) \rightarrow (Q)$ はそれぞれ論理式である

(c) 上の (a)，(b) でつくられるもののみが論理式である

注意

命題記号は引数を持ってはいけない．$p(x)$ などは命題記号ではない．引数を持つものは述語記号と呼ばれる．3 章以降で扱う．

かっこ (,) は慣例にしたがって省略することがある．
$\neg$ は $\rightarrow$ より "強い"($\neg > \rightarrow$).
例えば　$\neg\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ のもとの形は?
P にもとづくといちいち断わらずに，論理式 $\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$，$(p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg\neg p_2$ などと書く．

注意

論理式は単なる「記号列」であって，真である，偽であるとか，成り立つ，成り立たないとかの概念はない．ただし，論理式は上の (2) の (b) の操作をどのように適用して得られたかを表す「構文」をもつ．

問 1.1.1

上記 (2) の (b) にしたがって，$\mathsf{P} = \{p, q, r\}$ に対し，論理式集合 $L(\mathsf{P})$ を生成する文脈自由文法を書け.「構文」はその「導出木」で与えられる．(文脈自由文法は「計算論 A」で学ぶ．)
$G = (\{S\}, \{p, q, r, (,), \neg, \rightarrow\}, R, S)$
書換え規則の集合 R は $\{S \rightarrow p, S \rightarrow q, S \rightarrow r, S \rightarrow \neg(S), S \rightarrow (S) \rightarrow (S)\}$

$\neg$ のかわりに，$\sim$ を使うこともある．$\rightarrow$ のかわりに，$\supset$ を使うこともある．
左の論理式を右のように略記することがある．

$\neg P \rightarrow Q$	$P \vee Q$
$\neg(P \rightarrow \neg Q)$	$P \wedge Q$　又は $P \cdot Q$　又は　省略して　PQ
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$　又は　$P \equiv Q$

注意

$P \rightarrow Q$ はもともとの簡単な論理式であるので，なにかで略記することはない．
(このテキストの体系では) $P \rightarrow Q$ を $\neg P \vee Q$ と略記するというのは間違い．

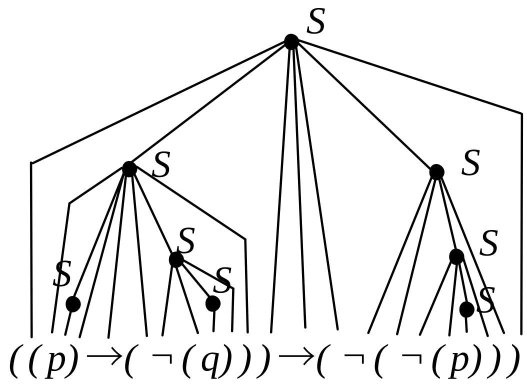

図 1.1.1: 構文を示す導出木

強　　　　　　　　弱

$\neg$ ＞ $\wedge$ ＞ $\vee$ ＞ $\to$ ＞ $\leftrightarrow$ として，( ) を省いてもよい．ややこしいので，$\vee$ 　$\to$ 　$\leftrightarrow$ は () を用いて区別する方がよい．

かっこ ( ) は，それ以外にも { } や [ ] を用いることがある．

1.2 命題論理の意味論

$\mathsf{P} = \{kbto, kb\}$ とする．

ここで，対象とする世界を「現在の日本の都市」としてみよう．そうすると，それに関する色々な命題の真偽が決まる．

東京は最大の都市である	：真
京都は大阪より大都市である	：偽
京都は最大の都市である	：偽
横浜は関東で 4 番目の大都市である	：偽
⋮	

ここで例えば，命題記号 $kbto$ に命題「京都は大阪より大都市である」を，命題記号 kb に命題「京都は最大の都市である」を対応させると，その対応のもとで，命題記号に真偽を割り当てたことになる．

このように，対象とする世界を決め，そこで真偽の決まっている具体的な命題を各命題記号に割り当てることを (命題記号の) **解釈** *(interpretation)* という．

一つの解釈を決めると，各命題記号の真偽が決まる．したがって，各命題記号への真偽の割り当て方を単に解釈ということもある．

対象とする世界を「平安時代の日本の都市」,「平安時代のアジアと日本の都市」などとすると，同じ命題であっても一般にその真偽は異なる．例えば「京都は最大の都市である」は前者においては真，後者においては偽であろう．命題記号への命題の割当が同じであっても，命題記号へ割り当てられたその真偽は異なり得る．

真，偽を，それぞれ，$\mathtt{tt}$ (true, T, 1, $\top$) , $\mathtt{ff}$ (false, F, 0, $\perp$) で表す.

論理式 A の解釈 $\mathscr{I}$ のもとでの真理値 (真偽)$[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ とは?

例えば A を $(\neg p \to q) \to \neg r$ とし，　p, q, r に対応する命題の真偽 (単に，p, q, r の真偽といってもよい) をそれぞれ，$\mathtt{ff}, \mathtt{tt}, \mathtt{tt}$ とする解釈を $\mathscr{I}$ とする．

論理式の値 (真偽) を評価するとき，$\to$ を 論理演算子 $\to$ (含意) に，$\neg$ を 論理演算子 $\neg$ (否定) にそれぞれ対応させて評価する．

x	y	$x \to y$
$\mathtt{ff}$	$\mathtt{ff}$	$\mathtt{tt}$
$\mathtt{ff}$	$\mathtt{tt}$	$\mathtt{tt}$
$\mathtt{tt}$	$\mathtt{tt}$	$\mathtt{tt}$
$\mathtt{tt}$	$\mathtt{ff}$	$\mathtt{ff}$

x	$\neg x$
$\mathtt{ff}$	$\mathtt{tt}$
$\mathtt{tt}$	$\mathtt{ff}$

厳密には評価の方法を定義する必要があるが，直観的にわかるであろう．式の内側から (構文木の葉の方から) 順に評価していく．

問 1.2.1

上記の解釈 $\mathscr{I}$ のもとで A の真理値 $[\![A]\!]^{\mathscr{I}}$ を評価をせよ．

$[\![A]\!]^{\mathscr{I}} = [\![(\neg p \to q) \to \neg r]\!]^{\mathscr{I}}$

$= (\neg[\![p]\!]^{\mathscr{I}} \to [\![q]\!]^{\mathscr{I}}) \to \neg[\![r]\!]^{\mathscr{I}}$
$=\boxed{}$

$\vee$, $\wedge$ などの略記も，その定義から，真理値を評価する際，論理演算子 $\vee$ (or)，$\wedge$ (and) などと一致することが分かる．

問 1.2.2

次の各論理式の各解釈における値を求めよ．各行における p, q への真理値の割り当てが一つの解釈である．

	p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$ ($p \vee q$ と略記)
$\mathscr{I}_1$	ff	ff	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$
$\mathscr{I}_2$	ff	tt	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$
$\mathscr{I}_3$	tt	tt	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$
$\mathscr{I}_4$	tt	ff	$[\![\neg p]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![\neg p \to q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$

	p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg(p \to \neg q)$($p \wedge q$ と略記)
$\mathscr{I}_1$	ff	ff	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_1} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_1} =$
$\mathscr{I}_2$	ff	tt	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_2} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_2} =$
$\mathscr{I}_3$	tt	tt	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_3} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_3} =$
$\mathscr{I}_4$	tt	ff	$[\![\neg q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![p \to \neg q]\!]^{\mathscr{I}_4} =$	$[\![\neg(p \to \neg q)]\!]^{\mathscr{I}_4} =$

二つの論理式 P，Q に対し，任意の解釈 $\mathscr{I}$ について $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} = [\![Q]\!]^{\mathscr{I}}$ であるとき，P，Q は**論理的に同値** *(***等価***)* であるという．

論理演算子 $\vee$，$\wedge$ は結合律を満たす．したがって，略記 $\vee$，$\wedge$ においても $(p \wedge q) \wedge r$ と $p \wedge (q \wedge r)$ は等価ゆえ，$p \wedge q \wedge r$，$\neg p \vee q \vee \neg r$ のように書くこともある．しかし，もとの形は一意には決らない．

$p \wedge q \wedge r$ は，$(p \wedge q) \wedge r = \neg(\neg(p \to \neg q) \to \neg r)$ と $p \wedge (q \wedge r) = \neg(p \to \neg(\neg(q \to \neg r)))$ の 2 通りある．

論理式 P が **恒真** *(valid)* である，**恒真式 又は 妥当式** *(valid formula)* である，**トートロジー** *(tautology)* であるとは：

任意の解釈 $\mathscr{I}$ について，$\mathscr{I}$ のもとで P は真 (すなわち $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} =$ tt (または 1)(true))

P が**充足可能** *(satisfiable)* とは：

P を真にするような解釈 $\mathscr{I}$ が存在する

P が**充足不能** *(unsatisfiable)* **または恒偽**とは：

P を真にするような解釈 $\mathscr{I}$ が存在しない

任意の解釈 $\mathscr{I}$ について，$\mathscr{I}$ のもとで P は偽 (すなわち $[\![P]\!]^{\mathscr{I}} =$ ff(または 0) (False))

P が恒真であることを $\models P$ で表わす．

Γ を論理式の集合とする (無限集合でもよい)．Γ 中の全ての論理式を真とするような解釈を Γ の**モデル**という．Γ の全てのモデルで P が真であることを

$\Gamma \models P$

で表わす．$\Gamma = \emptyset$(空) のときは上述の恒真に一致する．$\Gamma = \emptyset$ なら,「Γ 中の全ての論理式を真とする」という条件が実質無くなって，どんな解釈でもその条件は満たすということになる．したがって，$\Gamma = \emptyset$ のときの $\Gamma \models P$ は，どんな解釈 $\mathscr{I}$ に対しても P が $\mathscr{I}$ のもとで真ということ，すなわち，P が恒真になる．

例　$\{p, \neg p \vee \neg q \vee r\} \models (p \to r) \vee (q \to r)$

注意

集合を表す括弧 {, } を省略して，上式を次のように書くことがある．
$p, \neg p \vee \neg q \vee r \models (p \to r) \vee (q \to r)$
また，$\Gamma \cup \{A\} \models P$ を $\Gamma, A \models P$ のように書くことがある．

解釈は，命題記号集合に対するものであるが，それを陽に指定せず，対象とする論理式あるいはその集合を考え，単に，それらに対する解釈ということが多い．$\Gamma \models P$ かどうかを定義にしたがって確かめるには，基本的には，Γ と P に現れている各命題記号への真偽のすべての割り当て (一つの割り当てが一つの解釈に当る) を考え，Γ 中の全ての論理式を真とするような割り当て (Γ のモデル) なら，その割り当てで P も真になることを確かめればよい．Γ のすべてのモデルがうまく列挙できるなら，そのモデルに対して，P の真偽を調べればよい．

$\Gamma \models P$ かどうかの (効率的な) 判定法は後述する．

定義より二つの論理式 P，Q に対し，P，Q が論理的に同値 (等価) であるというのは，$P \models Q$ かつ $Q \models P$ であるときである．そのとき $P \models\!\dashv Q$ とも書く．$P \models\!\dashv Q$ であるのは $P \equiv Q$ すなわち $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ のときかつそのときに限る (分る?).

定義より，P が恒真 $\Leftrightarrow \neg P$ が恒偽

記法 $R \Rightarrow R'$： R が成り立つならば R' が成り立つ
$R_1 \Leftrightarrow R_2$ ：R_1 if and only if R_2 (R_1 iff R_2 と略記)
(R_1 が成り立つのは，R_2 が成り立つときかつそのときに限る)
$R_2 \Rightarrow R_1$ かつ $R_1 \Rightarrow R_2$

$\Gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ とする (注：m は有限)．定義から，確かめられるように，

$$\Gamma \models Q \Leftrightarrow \models g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to Q \qquad (*1)$$

特に

$$P \models Q \Leftrightarrow \models P \to Q \qquad (*2)$$

である．

したがって，$\Gamma \models Q$ かどうかを判定するには，$g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_m \to Q$ の恒真性を判定すればよい．

P **の恒真性の判定法**は，例えば

(A) 「全ての解釈 (k 個の命題記号があれば 2^k とおり) に対して，それぞれの解釈のもとで P は真」なら恒真．そうでなければ (すなわち，P が偽になるような解釈があれば)[1]，P は恒真で

[1]少なくとも一つの解釈が存在してその解釈のもとで P が偽であれば　と言っても同じ．

はない．全ての解釈についてそれぞれ真理値を計算することによって判定できる．

(B) 等価な積和形に変換し，それに対しコンセンサス法を適用し，1 なる項が出れば P は恒真，そうでなければ (1 なる項が出なければ)P は恒真ではない．

(C) 全ての解釈に対して $\neg P$ が偽であるなら，P は恒真．そうでなければ，P は恒真ではない．全ての解釈について調べれば良い．

(D) $\neg P$ を等価な和積形に変換し，それに対しリゾルベント法を適用し，0 なる節 (和項) が出れば，$\neg P$ は恒偽，したがって P は恒真，そうでなければ (0 なる節が出なければ)，$\neg P$ は恒偽でない，したがって P は恒真でない．

(A) や (C) の方法は，命題記号の数が 50 とか 100 とかであれば，現実には実行不可能．

問 1.2.3

恒真か，恒偽か，いずれでもないか

$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

$(p \to r) \wedge (q \to r) \leftrightarrow ((p \vee q) \to r)$

調べ方

- 恒真であることを示す．あるいは
- 恒偽であることを示す．あるいは
- 恒偽でないことを示し，さらに，恒真でないことを示す．すなわち，真にする解釈 $\mathscr{I}_1$ と偽にする解釈 $\mathscr{I}_2$ を与え，$\mathscr{I}_1$ で真になり，$\mathscr{I}_2$ で偽になることを示す．

導出節 (リゾルベント) を作っていくことにより,「和積形論理式の恒偽性」が判定できる．導出節を作る操作のことを「**導出原理** *(resolution principle)*」という．

節 (和項)t_1 と t_2 の**導出節** *(resolvent)* res(t_i, t_j) とは：

> ただ一組の変数だけ肯定と否定が含まれているとき，それを除いて，t_1 と t_2 に含まれるリテラル (命題記号またはその否定) の $\vee$ をとったもの (重複するリテラルは一つにまとめる)．(リテラル p と $\neg p$ は相補的であるともいう．)

$\neg u \vee w \vee x \vee \neg y$ と $\neg u \vee w \vee x \vee y \vee z$ のリゾルベントは $\neg u \vee w \vee x \vee z$

$\neg u \vee w \vee x \vee \neg y$ と $\neg u \vee \neg w \vee x \vee y \vee z$ のリゾルベントはない．

$\neg u \vee w \vee x \vee \neg y$ と $\neg u \vee w \vee z$ のリゾルベントはない．

性質 1.2.1 (リゾルベントの性質)

和項 t_1 と t_2 のリゾルベント res(t_1, t_2) に対し　$t_1 \wedge t_2 \leq$res(t_1, t_2)

$\leq$ の定義はいい? (各変数への $\mathtt{tt}$，$\mathtt{ff}$ のどの割当てに対しても，左辺と右辺の論理式の値が $\leq$ のこと，ただし，$\mathtt{ff} \leq \mathtt{ff}$，$\mathtt{ff} \leq \mathtt{tt}$，$\mathtt{tt} \leq \mathtt{tt}$)

例えば

$$(\neg u \vee w \vee x \vee \neg y) \wedge (\neg u \vee w \vee x \vee y \vee z) \leq (\neg u \vee w \vee x \vee z)$$

これが成り立つことを確認せよ (なるべく簡単に調べるにはどうする?)

和積形論理式 f の恒偽性を，リゾルベント (導出節) をつくっていくことにより判定する方法:
$f \equiv 1$ でないとする．$f = t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_n$ とする．各 t_i は節 (和項) で 0 でないとする．

(1). S を与えられた節集合 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ に初期設定

(2). (a) S 中のどの t_i，t_j についても

i. t_i，t_j のリゾルベントがない，か又は

ii. 存在してもそのリゾルベント res(t_i, t_j) に対し，res$(t_i, t_j) \geq t_k$ なる t_k が S にある

をみたすならば終了，f は恒偽でないと判定.

(b) そうでないとき，

「どの $t_k \in S$ に対しても　res$(t_i, t_j) \not\geq t_k$」なる res(t_i, t_j) を一つ見つける．それが 0 なら終了，f は恒偽であると判定．0 でなければ，S に追加し，(2) をくりかえす.

証明

(2) の (b) で終了したとき (0 なるリゾルベントが出てきたとき)，f は恒偽であること (すなわち，恒偽であるという判定が正しいこと).

t_1 と t_2 のリゾルベント res(t_1, t_2) に対し (性質 1.2.1 より) $t_1 \wedge t_2 \leq$res(t_1, t_2) である．したがって，いつの時点でも S 中の節 t_i は f より小さくなく ($f \leq t_i$)，出てくるリゾルベント τ はいつも $f \leq \tau$ を満たす.

$\tau = 0$ なるリゾルベント (空節という) がでれば，$f \leq 0$ すなわち f は恒偽.

(2) の (a) で終了したとき，f は恒偽ではないこと (すなわち恒偽でないという判定が正しいこと).

(2) の (a) で終了した時点で

(1). $f \leq t$ かつ

(2). $f \leq t' \leq t$ で $t' \neq t$ なる節 t' はない

のような節 t(積和形論理式のところで学んだ主項に対応して，このような節を仮に f の "主節" と呼ぼう) の全体が S に含まれている (すなわち，f の主節がすべて求まっている) ことを示そう.

(2) の (a) で終了するとき S には 0 なる節は含まれないこと，また，

0 なる f の主節がない　$\Leftrightarrow$　$f \equiv 0$(f は解釈によらず恒等的に 0) でない

が成り立つことより，もし上のこと (S は f のすべての主節を含むこと) が言えれば，S は恒偽でないという判定が正しいことになる.

$f \leq t$ なる節 t(f-節と呼ぶ) はどれも，それぞれ，少なくとも一つの f の主節 c があって $c \leq t$ が成り立つ．よって，f の主節が全て S に入っていれば，f-節 t はどれも，それぞれ,「少なくとも一つの $t_i \in S$ があって $t_i \leq t$」が成り立つ．すなわち,「どの $t_i \in S$ に対しても $t_i \not\leq t$」であるような f-節 t は存在しないということになる.

しかし，逆に，f のある主節 t で S に属さないものがあると仮定してみよう．t は主節なので，$f \leq t' \leq t$ のような節 t' は t 自身しかない．t 自身は S に属さないので，(S 中の

節はすべて f-節であることから) $t_i \le t$ なるような S 中の節 t_i はない．よって,「$t_i \le \tau$ なるような S 中の節 t_i はない」ような f-節 (f の主節とは限らない)τ があることになる (t 自身がそうである)．しかし，そんな τ があれば矛盾になる．

すなわち，そんなある τ で，ある $t_i \in S$ があって $t_i \le \tau$ が成り立ってしまう．

このことを以下で説明しよう．そのような τ のうち，極大の ものを選んでおけば，$t_i \le \tau$ のような $t_i \in S$ が存在しやすいので，そのように議論する．

S に基づいて，$f \le t$ なる節 t(f-節と呼ぶ) の全体を S' と T に分割する：

$S' \triangleq \{t \mid t$ は f-節で，少なくとも一つの $t_i \in S$ があって $t_i \le t\}$

$T \triangleq S'$ に属さない f-節の集合

$= \{t \mid t$ は f-節で，どの $t_i \in S$ に対しても $t_i \not\le t\}$

f のある主節 t で S に属さないものがあると仮定しよう．

主節の定義より，$f \le t_i \le t$ なる節 t_i があるとしても t 自身であり，t 自身は S に属さないので，$t \in T$.

ゆえに T は空ではないので，T の中の $\le$ に関する極大元を一つ選び，それを τ_0 とする．τ_0 を“最大節”(すべての変数の肯定又は否定の $\vee$) とすると，

$f = S$ の中のすべての節 t_i の論理積 ($f \equiv 1$ でないので)

τ_0 は $f \le \tau_0$ を満たし，かつ最大節

より，$t_j \le \tau_0$ なる $t_j \in S$ が存在することになり，$\tau_0 \in T$ に矛盾するので，τ_0 は最大節ではない．

したがって，ある変数 x_h が存在して，リテラル x_h , $\neg x_h$ ともに τ_0 に含まれない．

τ_0 は x_h を含まないので $\tau_0 < \tau_0 \vee x_h$．τ_0 は T の極大元ゆえ $\tau_0 \vee x_h \notin T$．一方，$\tau_0 \vee x_h$ は f-節ゆえ，ある $t_i \in S$ が存在して $t_i \le \tau_0 \vee x_h$．同様に，ある $t_j \in S$ が存在して $t_j \le \tau_0 \vee \neg x_h$.

したがって，t_i は $\tau_0 \vee x_h$ に含まれる文字のみ含み，t_j は $\tau_0 \vee \neg x_h$ に含まれる文字のみ含む．ところで t_i はもし x_h を含まなければ $t_i \le \tau_0$ となり，$\tau_0 \in T$ に矛盾するので，t_i は文字 x_h を必ず含む．同様に t_j は文字 $\neg x_h$ を必ず含む．ゆえに t_i と t_j のリゾルベント res(t_i, t_j) が存在して res$(t_i, t_j) \le \tau_0$ が成り立つ．ところが，停止条件の (2)(a)ii より，$t_k \le$ res(t_i, t_j) なる $t_k \in S$ があり，その t_k に対し $t_k \le \tau_0$ となるので $\tau_0 \in S'$ が結論され，$\tau_0 \in T$ に矛盾する．

以上で，f の主節はすべて S に属することを示した． □

(お見事な論法に感心してね)

コメント:

正確に主節の集合だけを求めたければ，S の中から主節でないのを除けばよい．

注意

なぜ，もとの論理式の恒真性でなく，その否定の和積形の恒偽性を調べようとするのか．また，一般の式を和積形へ変換するアルゴリズムの計算時間量はどれくらいだろうか．

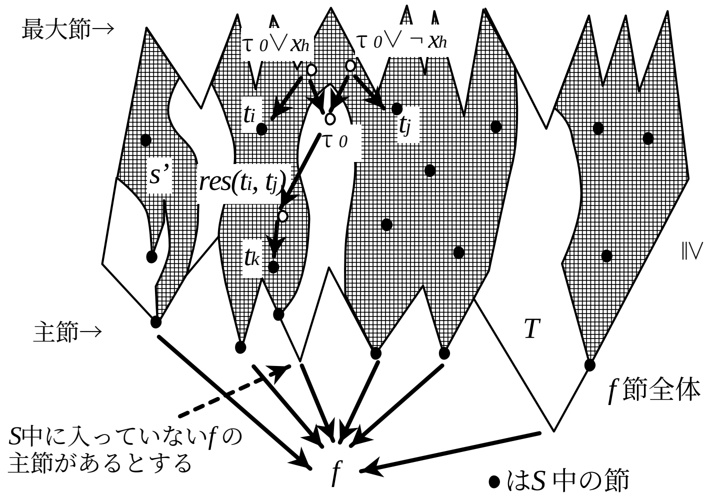

図 1.2.2: T 中の極大元 τ_0 に関連する節の大小関係

例 1.2.1

$(A \to \neg B)$
$\wedge (\neg A \wedge B \to D)$
$\wedge (\neg B \to \neg D)$
$\wedge (\neg C \to \neg D)$
$\to (\neg A \wedge C \wedge D \vee \neg B \wedge \neg D)$
の恒真性を示せ．ただし，この否定が恒偽であることを，リゾルベントをつくっていく方法により示せ．($\cdots$ が恒偽であることを空節を導出することにより示せ，というような言い方をすることもある．また,「$\cdots$ の否定が恒偽であることを」といちいち言わずに，$\cdots$ が恒真であることを導出原理を利用して示せ，などと言うこともある．)

与式を P とおく．$\neg P$ を和積形に直す.

$\neg P \equiv \quad (A \to \neg B)$
$\wedge (\neg A \wedge B \to D)$
$\wedge (\neg B \to \neg D)$
$\wedge (\neg C \to \neg D)$
$\wedge \neg(\neg A \wedge C \wedge D \vee \neg B \wedge \neg D)$

したがって，$\neg P$ の和積形の各節は次のようになる.

$\neg A \vee \neg B$	(1)
$A \vee \neg B \vee D$	(2)
$B \vee \neg D$	(3)
$C \vee \neg D$	(4)
$A \vee \neg C \vee \neg D$	(5)
$B \vee D$	(6)

リゾルベントを求めていく (例えば)

(3) と (6) より	B	(7)
(1) と (7) より	$\neg A$	(8)
(2) と (7) より	$A \vee D$	(9)
(8) と (9) より	D	(10)
(4) と (10) より	C	(11)
(5) と (8) より	$\neg C \vee \neg D$	(12)
(11) と (12) より	$\neg D$	(13)
(10) と (13) より	0	(敢えて長いものを挙げておく)

ゆえに $\neg P$ は恒偽．したがって，与式は恒真.

論理式 R に対し「$\neg R$ を和積形で表し，リゾルベントをとっていって空節 0 を導出する」ことによって，R の恒真性を示すやり方は,「**背理法 (帰謬 (きびゅう) 法)**」と見なせる.

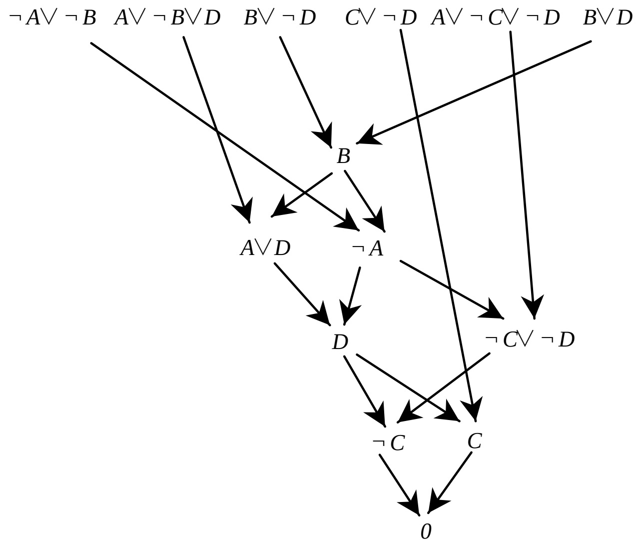

図 1.2.3: 節 0 の導出過程を表す図

$\neg R$ を仮定する．そうすると，$\neg R$ の和積形の各節は真．節 t_i，t_j が真なら res(t_i, t_j) も真でなければならない ($t_i \wedge t_j \leq$res(t_i, t_j) より).

したがって，もとの節や出てきたリゾルベントの節は全て真．ある命題記号 p に対し，節 p と $\neg p$ が得られたなら，矛盾．リゾルベント法では res$(p, \neg p) = 0$ を求めて終る．よって，R は成り立つ (恒真) と結論する．

他の本では，互いに肯定，否定のリテラル (相補的なリテラル) がただ 1 組でなくても，そのうちの 1 組の相補的なリテラルを消す (もちろん重複はまとめる) という操作 (例えば $\neg A \vee B$ と $A \vee \neg B \vee C$ から例えば相補的なリテラル $\neg A$ と A を除いて $B \vee \neg B \vee C$ を作る) を許し，これも導出節と呼んでいる．この場合，導出節には相補的なリテラルが入ってくるが，そのまま残しておく．こういう操作も許したとしても，和積形論理式が充足不能であるとき，かつそのときに限り，空節 0 が導出されるので，恒偽性の判定は上述の方法と同じようにできる (新しい節は常にもとの二つの論理積より大きいということが成り立つからである).

このテキストでは，上記の手続きは，すべての主節を求めるという立場で書いた．そのときには，2 組以上の相補的なリテラルをもつ二つの節，例えば $\neg A \vee B$ と $A \vee \neg B \vee C$ から $B \vee \neg B \vee C$ を作るのは意味がない (元の f は恒等的に 1 ではないとしており，そのときは節 $B \vee \neg B \vee C = 1$ は主節を求めるのには役立たない).

問 1.2.4

$$r \wedge \neg s \wedge \neg p \wedge (\neg p \wedge r \wedge \neg s \to (q \vee t)) \wedge (\neg p \to \neg t) \to q$$

の恒真性を導出原理を利用して示せ.

[復習] 与えられた論理式 (∧，∨，¬，→，( ) あり) を等価な和積形に変換する方法は分っていますか.

問 1.2.5

次の論理式の否定 (の論理式) を和積形で表せ．論理式を簡単化する必要はない[2]．

$\neg p_1 p_2 p_3$
$\wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
$\wedge (p_1 \neg p_2 p_4 \to p_3 \neg p_5)$
$\wedge (\neg p_1 p_3 \to (p_2 \vee \neg p_4 \vee p_5))$
$\wedge ((p_2 \vee \neg p_5) \to \neg p_1 p_4)$
$\wedge ((\neg p_1 \vee p_2 \vee p_5) \to (p_3 \vee \neg p_4))$
$\to (p_2 \neg p_5 \vee \neg p_1 p_2 p_4)$

等価な式は $=$ で結ぶ．

$$(P \wedge Q) \vee R = (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

はよく使われる．

問 1.2.6

次のことを和積形で表せ．

(1). p，q，r のうち正確に一つだけが真である．

(2). 上の (1) の否定．

(3). 「風が吹く」なら「ほこりが立つ」,「ほこりが立つ」なら「$\cdots$」，$\cdots$ 以上のことが成り立つなら，「風が吹く」なら「桶屋が儲かる」が成り立つ ($\cdots$ を世間の常識で補え).

問 1.2.7

次のことを命題論理式で表せ．

(1). 題材が興味深く，かつ講義が上手ならば，授業は楽しい．

(2). 題材が興味深くなく，かつ講義が上手でなければ，授業は楽しくない．

(3). 題材が興味深く，かつ講義も上手であるが，授業は楽しくない．

(4). 授業が楽しいのは，題材が興味深く，かつ講義が上手なときに限る．

(5). 講義が上手でなくても題材が興味深ければ授業は楽しい．

(6). 題材は興味深い．したがって，講義が上手なら授業は楽しい．

(7). 題材は興味深いけれど授業は楽しくない．それゆえ，講義は上手ではない．

(8). 題材は興味深いけれど授業は楽しくない．なぜなら，講義が上手じゃないから．

(9). 上の (1) の対偶

(10). 上の (1) の裏

(11). 題材が興味深く，かつ講義が上手ならば，授業は楽しいし，また逆も成り立つ．

命題記号及びそれに否定がついたものをリテラルと呼ぶ．人工知能の分野では，次の形の論理式の恒真性を問うことが多い．

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$$

P_i は

(1). 一つのリテラル，又は

(2). いくつかのリテラルの論理積 $\to$ リテラル

((1) は前提の事実，(2) は推論の知識)

Q はいくつかのリテラルの論理積

この形なら，この否定の恒偽性を，リゾルベント (導出節) をつくっていくことにより調べるのが得策.

問 1.2.8

次のことは正しいか．命題論理式で表して調べよ.

A 点が高圧なら，C 点の流量は多い.

C 点が高圧でなく，かつ B 点の流量が多くなければ，A 点は高圧でない.

A 点，B 点，C 点がすべて高圧なら，C 点が異常である.

C 点が高圧で，かつ C 点の流量が多ければ，B 点が異常である.

A 点が高圧である.

B 点の流量は大でない.

そうなら，B 点が異常であるか?

ヒント:

論理的に正しいかを調べるには，論理式で表して，その論理式が恒真であることを確かめれば十分である.

A 点が高圧であることを命題記号 p_A で，B 点が高圧であることを p_B で，C 点が高圧であることを p_C で，B 点の流量が多いことを s_B で，C 点の流量が多いことを s_C で，B 点が異常であることを t_B で，C 点が異常であることを t_C で表すと，上の文は次の論理式で表せる.

$(p_A \to s_C)$

$\wedge (\neg p_C \wedge \neg s_B \to \neg p_A)$

$\wedge (p_A \wedge p_B \wedge p_C \to t_C)$

$\wedge (p_C \wedge s_C \to t_B)$

$\wedge\, p_A$

$\wedge \neg s_B$

$\to t_B$

この論理式の恒真性を確かめよ.

注意

命題論理式で議論できない例：

どの点でも，高圧なら流量は多い.

B 点の流量は多くない.

そうなら，B 点は高圧でないか?

は，例えば，x 点が高圧である，x 点の流量が多いをそれぞれ述語記号 $p(x)$，$s(x)$ で表して，

$\forall x(p(x) \to s(x)) \wedge \neg s(B) \to \neg p(B)$

が恒真かどうかを調べる.

「どの点でも，高圧なら流量は多い」,「B 点の流量は多くない」,「B 点は高圧でない」をそれぞれを命題記号 p，q，r で表すことは可能である．命題論理式は $p \wedge q \to r$ となる.

この論理式は恒真になるはずがないので，命題論理式で議論しても意味がない.

問 1.2.9

次のことを命題論理式で表して，その論理式が恒真であることを示せ.

敵が攻めて来るなら我々は撤退するのであったら，我々は勝つ．我々は撤退する．よって，我々は勝つ.

休憩コラム 1.1

「または」は排他的??

私は今度の休みに信州かまたは九州へ旅行に行きます (私は今度の休みに信州へ旅行に行くかまたは私は今度の休みに九州へ旅行に行きます).

論理式では，両方なりたつ場合も含め，真と決めています.

「ならば」

勉強しないならば，試験に落ちる．対偶は，試験に落ちないなら，勉強する．??? 試験に落ちないんだったら，勉強なんかしやしない！でしょ．もとが正しかったら，対偶は正しいはずなのに $\cdots$
情報論理学にとおるには??

(1). 私が真剣にやれば私は情論にとおる．私は真剣にやる．だから，私は情論にとおる．

(2). 私は情論の勉強はしない．だから，私が情論の勉強をするなら私は情論にとおる．

(3). 私は情論におちるこちはない．なぜなら，私が情論の勉強をすれば情論におちる，ということはありえないからだ．

(4). 私が情論の勉強をすれば試験にいい点をとるのであったら，私は情論にとおる．私は情論の勉強はしない．よって，私は情論にとおる．

(5). 私が情論にとおらないなら実験にもおちる．私が実験におちるなら私は講義科目が好きだ．私が講義科目が好きなら私は情論にとおる．ゆえに私は情論にとおる．

(6). 私は実験が好きだ．私は情論も好きだ．私が実験が好きなら私は情論は好きでない．ゆえに私は情論にとおる．

(7). 私がさぼれば私は情論におちるのであったら，私はさぼらない．そして，私はさぼる．ゆえに，私は情論におちない．

(8). 私は病気であるなら私は勉強しないのであったら，私は情論にとおる．私は勉強しない．ゆえに私は情論にとおる．

適当な命題記号を用いて，(1)~(8) のそれぞれを論理式で表してみよう．その論理式は恒真ですか?
もしそうなら，当然，それぞれもとの文章は論理的には正しいですよね．だったら，私は情論にとおる!

休憩コラム 1.2

(a). ギリシャ神話のスフィンクスは，道行く人に謎をかけ，解けなかった者を食い殺したという．その謎とは次のようなものであった．
「私が人魚であるなら私はスフィンクスである」が偽であるとすると，
A :「私がスフィンクスなら私は女性である」
B :「私がスフィンクスなら私は女性でない」
の真偽はどうじゃ.

ヒント:
私は人魚である，私はスフィンクスである，私は女性であるをそれぞれ命題記号で表せ．

(b). 情太は A 子，B 子，C 子の少なくとも一人を愛している．
情太が A 子を愛し，C 子を愛していないなら，情太は B 子を愛している．
情太は B 子と C 子をともに愛しているか，あるいは，その二人ともを愛していない．
情太が C 子を愛しているなら，情太は A 子を愛している．
情太は 3 人のうち誰を愛し，誰を愛していないか.

ヒント:
情太は A 子を愛している，情太は B 子を愛している，情太は C 子を愛しているをそれぞれ命題記号で表せ．

前提全体を積和形で表せば，導出節はその前提のもとで真となります (リゾルベントの性質 1).

誰であるかを導出節として直接求めましょう．答である誰かを予測してそれを含んだ式全体を改めて書き下し，その式に対し恒真性の判定を行うという必要はありません．

休憩コラム 1.3

(a). C はうそつきか正直者かのどちらかである．C は次のように言った．
「A は金持ちだ．A と B がともに金持ちということはない」
C はうそつきか正直者か，また，A や B は金持ちかどうか.

ヒント:
正直者のいうことはどれも真であり，うそつきのいうことはどれも偽であるとする．

C は正直者である，A は金持ちである，B は金持ちであるということを表す命題記号をそれぞれ HC，RA，RB としよう (簡単のため，C はうそつきであるということを表す命題記号は用いない．C はうそつきであるということは C は正直者でない $\neg HC$ で表される)．問題は

$$(HC \to (RA \wedge (\neg(RA \wedge RB)))) \wedge (\neg HC \to (\neg RA \wedge \neg\neg(RA \wedge RB)))$$

が真であるという前提のもとで HC，RA，RB の真偽値を求めよということ．

上述の休憩コラム 1.2 (b) のヒントのようにして求めてもよいし，あるいは，HC の値 (真偽) で場合分けをして議論してもよい．

(注) 式自体としては，　$HC \wedge (\qquad) \vee \neg HC \wedge (\qquad)$　の形にも書ける．

上述の休憩コラム 1.2 (b) のヒントのようにして求めるのであれば，和積形に直しやすい方を採用する．

(b). 人はうそつきか正直者かどちらかである．ふたりのうち，ひとりが言いました.「私が正直者なら，おまえもそうだ.」しゃべった人と相手の人はそれぞれうそつきでしょうか，正直者でしょうか.

(c). H 氏とその息子は正直者で，L 氏とその息子はうそつきであった．4 人の誰かが作った箱に「この箱は H 氏の息子によって作られたものではない」と書かれてある．その箱は 4 人のうち誰が作ったのか.

(d). うそつきか正直者のみが住むある島で，旅人が Y 字路へさしかかった．一方は宿へ通じているが，案内板がない．島の人はみなどちらの道が宿へ通じているか知っている．通りがかった島の人に，答が「はい」か「いいえ」であるような質問を 1 回だけして，どちらが宿へ通じている道か聞き出しましょう.

ヒント:
質問として,「あなたは正直者である」,「右の道が宿へ通じている」を命題記号とする命題論理式を作れ.

(e). A はうそつきか正直者かどちらかである．答が「はい」か「いいえ」であるような質問を A に 1 回だけして，うそつきか正直者かを当てましょう.

ヒント:
この (e) は適当な命題，例えば「あなたは正直者である」などを命題記号とする命題論理式の形の質問では不可能である．奇抜な質問が必要．上の (d) もそのような奇抜な質問で，簡潔なのがある.