情報論理学
(第５回)

基礎工学部情報科学科　泉 泰介

今回と次回の内容

- 前回までは命題論理の意味論的なアプローチに基づいて議論
- 今回からは自然演繹的(記号処理的)アプローチについて説明
  - 論理式を記号処理的に取り扱う
  - 真理値ベースでの同値変形等に基づかない
- 最終的に2つのアプローチは等価であることが示される
- 2つのアプローチによる議論を混同しないように
  - 意味をとれば自明なことも，演繹的な証明では自明でないことがある(逆も然り)

Part1：公理系の無矛盾性

前回の練習問題より

この仮定は(意味論的に)絶対真にならない
(≒モデルが空)
Yは何でもいいので，この仮定のもとではあらゆる
論理式を真にできる(意味論的に)

- (1) $\vdash \neg X \to (X \to$
  - 演繹定理の
    $\neg X, X \vdash Y$をまず示したのち，演繹定理×2で
    証明を完了する

1.	$\neg X$	(仮定)	6.	$\neg Y \to X$	B1(式2,5)
2.	X	(仮定)	7.	$(\neg Y \to \neg X) \to ((\neg Y \to X) \to Y)$	
3.	$\neg X \to (\neg Y \to \neg X)$	A1			(A3)
4.	$\neg Y \to \neg X$	B1(式1,3)	8.	$(\neg Y \to X) \to Y$	B1(4,7)
5.	$X \to (\neg Y \to X)$	A1	9.	Y	B1(式6,8)

- 「矛盾した仮定」は演繹的手法ではどのように定義できるだろうか？

矛盾と無矛盾性

定義(仮定の無矛盾性)

論理式の集合Γに対して，$\Gamma \vdash P$かつ$\Gamma \vdash \neg P$となるようなPが存在するとき，Γは矛盾(inconsistent)しているという．矛盾していないΓは無矛盾(consistent)であるという

- 以下のような興味深い事実を示すことができる

定理(問2.1.4)

$\Gamma \vdash P$が任意の論理式Pに対して成立$\Leftrightarrow \Gamma$が矛盾

- すなわち「なんでも証明できる」ことと仮定が矛盾することは同値

証明

- ⇒は自明
  - どんなPでも証明できるので，$\Gamma \vdash X$，$\Gamma \vdash \neg X$が言える
- ⇐の証明
  - Γが矛盾していることより，ある論理式Qが存在して,$\Gamma \vdash Q$,$\Gamma \vdash \neg Q$である
  - 練習問題(1)より，任意の論理式Pに対して，$Q, \neg Q \vdash P$
  - 演繹の性質5より，$\Gamma \vdash P$が得られる (終)

5. $\Gamma \vdash P_1$, $\Gamma \vdash P_2$, $\{P_1, P_2\} \vdash Q$ならば$\Gamma \vdash Q$

- この証明は公理A1, A3,推論規則B1のみで証明されている(練習問題(1)の内部で使われている) →それらを備える公理系であれば同様の事実が成り立つ

公理の無矛盾性

- 公理系Sが与えられたとき，Sの矛盾性を仮定の無矛盾性と同様に定義できる
  - 複数の公理系を取り扱うため，ある公理系Sによる演繹の可能性を$\vdash_S$と記述することにする

定義(公理系の無矛盾性)

公理系Sに対して，$\vdash_S P$かつ$\vdash_S \neg P$となるようなPが存在するとき，Sは矛盾(inconsistent)しているという．矛盾していないSは無矛盾(consistent)であるという

- 「公理系Sが矛盾⇔任意の論理式Pについて$\vdash_S P$」も同様に成立する
- 矛盾しているような公理系は，一般的には役に立たない
  (**公理系が無矛盾であることは公理系の正しさの最重要要件!**)
- 公理系Sが無矛盾であることは示すことができる(完全性定理による)

異なる公理系の例

- 公理系Sの公理A3を以下の論理式で置き換えた公理系S'を考える
  - (A3’) $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow P)$
- この公理系は無矛盾だろうか？

- (A1) $P{\rightarrow}(Q{\rightarrow}P)$
- (A2) $(P{\rightarrow}(Q{\rightarrow}R)){\rightarrow}((P{\rightarrow}Q){\rightarrow}(P{\rightarrow}R))$
- (A3) $(\neg P{\rightarrow}\neg Q){\rightarrow}((\neg P{\rightarrow}Q){\rightarrow}P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P{\rightarrow}Q$からQを得る

公理系S

- (A1) $P{\rightarrow}(Q{\rightarrow}P)$
- (A2) $(P{\rightarrow}(Q{\rightarrow}R)){\rightarrow}((P{\rightarrow}Q){\rightarrow}(P{\rightarrow}R))$
- (A3’) $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P{\rightarrow}Q$からQを得る

公理系S'

S'の無矛盾性(1)

- A3とA3′が本質的に等価であることを示せばよい，すなわち
  - $\vdash_S (\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$
  - $\vdash_{S'} (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
- が示せれば，SとS'で証明可能な論理式の集合に違いはないことが保証されるのでそのときSの無矛盾性がS'の無矛盾性を保証する

S'の無矛盾性(2)

- (A1) $P \to (Q \to P)$
- (A2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- (A3) $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P \to Q$からQを得る

- $\vdash_S (\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ の証明
  - $(\neg P \to Q), (\neg P \to \neg Q) \vdash_S P$を示して演繹定理×2

1.	$(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$	A3
2.	$\neg P \to Q$	仮定
3.	$\neg P \to \neg Q$	仮定
4.	$(\neg P \to Q) \to P$	B1(式3,1)
5.	P	B1(式2,4)

  - $(\neg P \to Q), (\neg P \to \neg Q) \vdash_S P$ に演繹定理を2回適用して $\vdash_S (\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ を得る (終)

S'の無矛盾性(2)

- (A1) $P \to (Q \to P)$
- (A2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- (A3') $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P \to Q$からQを得る

- $\vdash_{S'} (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$ の証明
  - $(\neg P \to \neg Q), (\neg P \to Q) \vdash_{S'} P$を示して演繹定理×2…としたいが，ちょっと注意

公理系S'において演繹定理が成り立つかどうかは分からない

- 実際には成り立つ：公理系がA1,A2,B1を含んでいれば演繹定理を導ける(第4回のスライド参照)
- よって上の方針で証明可能（実際の証明は$\vdash_S (\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$の証明とほぼ同じ)

異なる公理系の例

- Łukasiewicz(ウカシェビッチ)の公理系S''
  - Sの公理系A3を以下のA3″で置き換えた公理系
  - (A3″) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

- これも無矛盾(実際にはSと等価)であることを示せる．方針はS'のときと同じ
  - $\vdash_S (\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$ を示す(これは第4回の練習で既にやっている)
  - $\vdash_{S''} (\neg P \to \neg Q) \to \big((\neg P \to Q) \to P\big)$　(これは自習課題)
    - ヒント：第4回の例，練習問題でやった$X \to (Y \to Z), Y \vdash_S X \to Z$や$\vdash_S X \to X$が$S''$でも同様に成り立つこと(すなわち，A3を使っていないこと)を確認しよう
    - もちろんあと演繹定理も

Part2 ：完全性定理

完全性定理

- 以下の2つの定理の組み合わせによる(2つ合わせて完全性定理と呼ぶ)

定理2.2.1 (健全性定理: Soundness Theorem)

任意の論理式Pについて，$\vdash_S P \Rightarrow \vDash P$

定理2.2.2 (完全性定理: Completeness Theorem)

任意の論理式Pについて，$\vDash P \Rightarrow \vdash_S P$

健全性の証明

- $P_1, P_2, \ldots P_n$が$\vdash_S P$に対する証明であるとする
  - 各P_iが恒真であることをiについての帰納法で示す
  - 公理A1～A3はすべて恒真であることが示すことができる
    (詳細は省くが，真理値を総当たりでチェックすれば確かめられる)

- (基底段階)$i = 1$のとき，P_1は公理のインスタンスである．公理がすべて恒真であることより，公理のインスタンスもすべて恒真である．よって示された

- (帰納課程)$i' < i$なるすべての$P_{i'}$が恒真であると仮定して，P_iが恒真であることを示す．P_iが公理のインスタンスであるときは基底段階と同じなので，P_iが$P_j, P_k (j, k < i)$よりB1により導かれているケースのみを考えればよい
  - このとき$P_k = P_j \to P_i$と書けるが，帰納法の仮定よりP_j, P_kはいずれも恒真なのでそのことよりP_iも恒真であると結論できる (終)

完全性の証明

- 以下の2つの補題から示される

補題1

$\Gamma, P \vdash Q$かつ$\Gamma, \neg P \vdash Q$ならば$\Gamma \vdash Q$

補題2

命題変数として$X_1, X_2 \dots X_n$を持つ論理式$P(X_1, X_2, \dots X_n)$を考える．ある解釈$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$に対して，論理式$X_i^{\boldsymbol{a}}$を$a_i = T$ならば$X_i^{\boldsymbol{a}} = X_i$， $a_i = F$ならば$X_i^{\boldsymbol{a}} = \neg X_i$と定義する．このとき，

- $P(a_1, a_2, \dots a_n) = T$ならば$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash P$
- $P(a_1, a_2, \dots a_n) = F$ならば$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash \neg P$

が証明可能である．

完全性の証明

- まず，個々の補題の証明の前に，補題1, 2の組み合わせにより完全性定理が証明できることを先に示そう

- 証明
  - $X_1, X_2, \ldots X_n$をPに表れる命題記号とする．また，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots T)$，$\boldsymbol{a}' = (a_1, a_2, \ldots F)$をそれぞれ$P$解釈とする． $\vDash P$であるならば，$P(\boldsymbol{a}) = P(\boldsymbol{a}') = T$が成立するので，補題2より，$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \ldots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash P$ かつ $X_1^{\boldsymbol{a}'}, X_2^{\boldsymbol{a}'}, \ldots X_n^{\boldsymbol{a}'} \vdash P$が成立する．
  - 定義より$X_i^{\boldsymbol{a}'} = X_i^{\boldsymbol{a}} (1 \leq i < n)$であり，$X_n^{\boldsymbol{a}} = X_n$，$X_n^{\boldsymbol{a}'} = \neg X_n$ なので$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \ldots X_n \vdash P$，$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \ldots \neg X_n \vdash P$である
  - 補題1を適用することで，$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}} \ldots X_{n-1}^{\boldsymbol{a}} \vdash P$が(任意の解釈$\boldsymbol{a}$について)得られる．同様の議論を繰り返すことで，最終的に$\vdash P$が得られる (厳密には帰納法で証明する) (終)

補助補題

- 2つの補題の証明のために，さらに補助補題を一つ導入する

補題3

1. $\vdash X \to \neg\neg X$
2. $\vdash (X \to Y) \to ((\neg X \to Y) \to Y)$

- また，(前回使った)三段論法を推論規則の形で形式的に定めておく

系(三段論法)

1. $X \to Y$ および $Y \to Z$ より$X \to Z$を得る

- 証明は以下の2つより直ちに得られる
  - (第4回で証明した) $\mathrm{X} \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$
  - 演繹の性質5 $\Gamma \vdash P_1,\ \Gamma \vdash P_2,\ \{P_1, P_2\} \vdash Q$ならば$\Gamma \vdash Q$

補題3の証明(2.のみ)

- 2. の証明：おなじみの「演繹定理×2」より$(X \to Y), (\neg X \to Y) \vdash Y$を示せばOK

1. $\vdash (\neg\neg X \to \neg\neg Y) \to (\neg Y \to \neg X)$ 問2.1.2(5) (第4回の練習より)
2. $(X \to Y)$ 仮定
3. $\neg\neg X \to X$ 問2.1.2(3)
4. $\neg\neg X \to Y$ 式2,3 + 三段論法
5. $Y \to \neg\neg Y$ 補題3(1)
6. $\neg\neg X \to \neg\neg Y$ 式4,5 + 三段論法
7. $(\neg Y \to \neg X)$ B1(1, 6)

問2.1.2(5)$\vdash (\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$

$\vdash X \to \neg\neg X$

- 上の1～6の議論においてXを$\neg X$に置き換えることで，以下も同様に得られる

8. $\neg Y \to \neg\neg X$

補題3の証明

- 2. の証明(続き)

7. $(\neg Y \to \neg X)$ 前項より
8. $(\neg Y \to \neg\neg X)$ 前項より
9. $(\neg Y \to \neg\neg X) \to \big((\neg Y \to \neg X) \to Y\big)$ A3
10. $(\neg Y \to \neg X) \to Y$ B1(8,9)
11. Y B1(7,10)

- (A1) $P \to (Q \to P)$
- (A2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- (A3) $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P \to Q$からQを得る

補題1の証明

補題1(再掲)

$\Gamma, P \vdash Q$かつ$\Gamma, \neg P \vdash Q$ならば$\Gamma \vdash Q$

- 証明

1. $\Gamma \vdash (P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$　補題3(2)+演繹の性質3
2. $\Gamma \vdash P \to Q$　仮定+演繹定理
3. $\Gamma \vdash \neg P \to Q$　仮定+演繹定理
4. $\Gamma \vdash (\neg P \to Q) \to Q$　B1(1, 2)
5. $\Gamma \vdash Q$　B1(3　4)

(終)

補題2の証明

補題2(再掲)

命題変数として$X_1, X_2 \ldots X_n$を持つ論理式$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$を考える．ある解釈$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$に対して，論理式$X_i^{\boldsymbol{a}}$を$a_i = T$ならば$X_i^{\boldsymbol{a}} = X_i$，$a_i = F$ならば$X_i^{\boldsymbol{a}} = \neg X_i$と定義する．このとき，

- $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = T$ならば$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \ldots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash P$
- $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = F$ならば$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \ldots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash \neg P$

が証明可能である.

- 証明は$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$に含まれる記号→, ¬の個数($k(P)$とする)に関する帰納法
  - (基底段階) $k(P) = 0$であるような任意の論理式Pは単一の命題変数X_1のみからなる論理式である
    - $P(a_1) = T$ならば$\mathrm{a}_1 = \mathrm{T}$ゆえ$X_1^{\boldsymbol{a}} = X_1$であり，$X_1 \vdash X_1$は明らかに成立
    - $P(a_1) = F$ならば$a_1 = F$ゆえ$X_1^{\boldsymbol{a}} = \neg X_1$であり，$\neg X_1 \vdash \neg X_1$は明らかに成立

補題2の証明

- (帰納段階) $k(P') < k$であるような任意の論理式P'について補題2が成立すると仮定して，$k(P) = k$であるような(任意の)論理式$P(X_1, X_2, \dots X_n)$が補題を満たすことを示す． $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$を任意の解釈とする

- 論理式の定義より，Pは，$k(Q) < k$, $k(R) < k$であるようなある論理式Q, Rにより，$P = \neg Q$, または$P = Q \rightarrow R$の形で表すことができる

- ケース１：$P = \neg Q$のとき
  - $P(\boldsymbol{a}) = T$ならば，$Q(\boldsymbol{a}) = F$なので，帰納法の仮定より$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash \neg Q$が成立 $\neg Q$は(**記号列的な意味で**)Pと等しいので， $X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash P$を得る
  - $P(\boldsymbol{a}) = F$ならば，$Q(\boldsymbol{a}) = T$なので，帰納法の仮定より$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash Q$が成立．補題3(1)より，$\vdash Q \rightarrow \neg\neg Q$なので，演繹の性質より$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash Q \rightarrow \neg\neg Q$が成立する．2つの式にB1を適用して$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash \neg\neg Q$を導いた後，$\neg Q$を$P$で置き換えて$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash \neg P$を得る

補題2の証明

- ケース2: $P = Q \to R$のとき
  - (2-1): $Q(\boldsymbol{a}) = T$, $R(\boldsymbol{a}) = T$のとき，帰納法の仮定より

$$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash Q$$
$$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash R$$

を得る．$Q, R \vdash Q \to R$を示せば，演繹の性質5より

$\Gamma \vdash P_1$, $\Gamma \vdash P_2$, $\{P_1, P_2\} \vdash Q$ならば$\Gamma \vdash Q$

$$X_1^{\boldsymbol{a}}, X_2^{\boldsymbol{a}}, \dots X_n^{\boldsymbol{a}} \vdash Q \to R$$

となる．$Q, R \vdash Q \to R$の証明は以下の通り

1.	$R \to (Q \to R)$	A1
2.	R	仮定
3.	$Q \to R$	B1(1,2)

- (A1) $P \to (Q \to P)$
- (A2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- (A3) $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，

  Pと$P \to Q$からQを得る

補題2の証明

- ケース2：$P = Q \to R$のとき(続き)
  - 残りのケースも前項(2-1)と同様の議論で示せる
  - (2-2) $Q(\boldsymbol{a}) = T$, $R(\boldsymbol{a}) = F$のとき，$Q, \neg R \vdash \neg(Q \to R)$を示せばOK
    (ミニレポート課題)
  - (2-3) $Q(\boldsymbol{a}) = F$のとき，$\neg Q \vdash Q \to R$を示せばOK
    - 今回の冒頭で述べた$\neg Q, Q \vdash R$に演繹定理を適用すればよい

(終)

最後に:Sの無矛盾性

- 完全性定理から，公理系Sの無矛盾性を結論できる
  - 意味論的に解釈ができるので，$\vdash_S P$ならばPは恒真
  - もし$\vdash_S P$かつ$\vdash_S \neg P$ならば，Pと$\neg P$のいずれも恒真であることになるが明らかに矛盾．よって，Sは無矛盾

補題3の証明

- (A1) $P \to (Q \to P)$
- (A2) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- (A3) $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
- (B1) 任意の論理式PとQに対して，
  Pと$P \to Q$からQを得る

- 1.の証明

1.	$(\neg\neg\neg X \to \neg X) \to ((\neg\neg X \to X) \to \neg\neg X)$	A3
2.	$\neg\neg\neg X \to \neg X$	問2.1.2(3)(第4回目練習問題)
3.	$(\neg\neg X \to X) \to \neg\neg X$	B1(1,2)
4.	$X \to (\neg\neg X \to X)$	A1
5.	$X \to \neg\neg X$	三段論法(3,4)

問2.1.2(3) $\vdash \neg\neg X \to X$