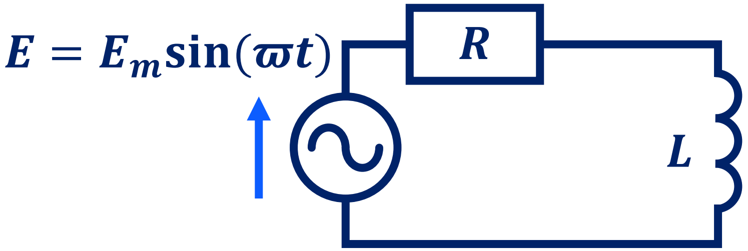
電子回路：第4回　交流回路

基礎工学部情報科学科
粟野 皓光
awano@ist.osaka-u.ac.jp

RL交流回路（再掲）



$$\boxed{\text{回路方程式：}\quad L\frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin \varpi t}$$

(Step1)複素数表示に変換：

$$L \cdot j\varpi I + RI = E_m(\cos 0 + j \cdot \sin 0) = E_m$$

I：電流$i(t)$の複素数表示

(Step2)代数的に解く：

$$I = \frac{E_m}{j\varpi L + R} = \frac{E_m}{\varpi^2 L^2 + R^2}(R - j\varpi L)$$

(Step1)の式 $L \cdot j\varpi I + RI = E_m$ は $(j\varpi L + R)I = E_m$ と書き換えられる

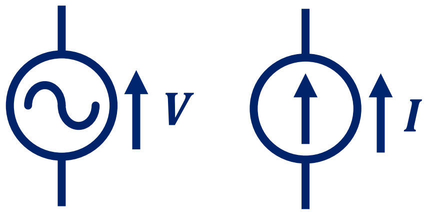
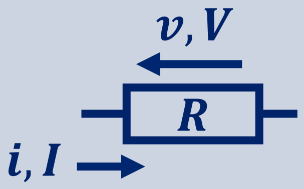
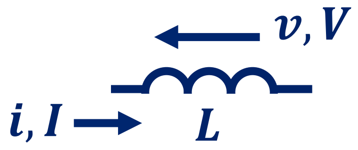
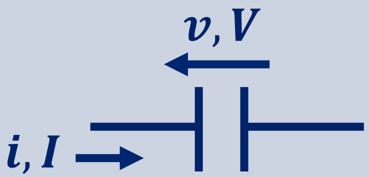
これは，インダクタの抵抗を$j\varpi L$とみなせば，直流回路解析と同じ

$$\underbrace{(j\varpi L + R)}_{\text{インピーダンス（複素変換された抵抗）}}\ \underbrace{I}_{\text{複素電流}} = \underbrace{E_m}_{\text{複素電圧}}$$

つまり，**複素変換してから直流回路と同じように解けば良い**

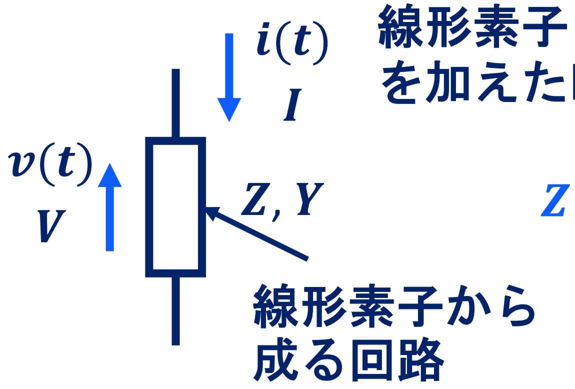
> この様な解き方を記号法と呼ぶ
> - アメリカの電気工学者Charles Proteus Steinmetzが考案
> - 微分方程式を介することなく交流回路解析が出来るため現在の標準的な解き方になっている

交流回路における素子特性一覧

		瞬時値表示	複素数表示
交流電圧源		$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$ θ：初期位相	$V = V_m e^{j\theta}$ $I = I_m e^{j\theta}$
抵抗		$v(t) = Ri(t)$	$V = RI$
インダクタ		$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$V = j\varpi LI$ 高周波：インピーダンス高 直流：導線
キャパシタ		$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$ $\left(v(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt\right)$	$V = \dfrac{1}{j\varpi C} I$ 高周波：導線 直流：抵抗無限大

インピーダンス

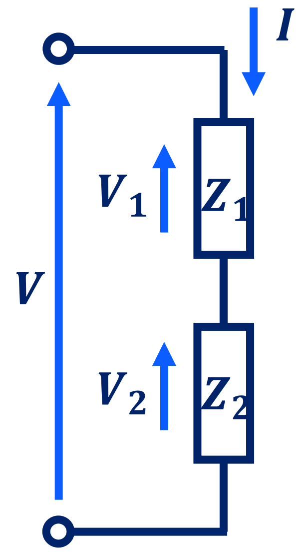
インピーダンス



線形素子（抵抗・インダクタ・キャパシタ）に交流電圧$v(t)$（複素数表示：V）を加えた時に流れる電流を$i(t)$（複素数表示：I）とすると

$Z = \frac{V}{I}$ をインピーダンス，$Y = \frac{I}{V}$ をアドミタンスと呼ぶ

直列接続



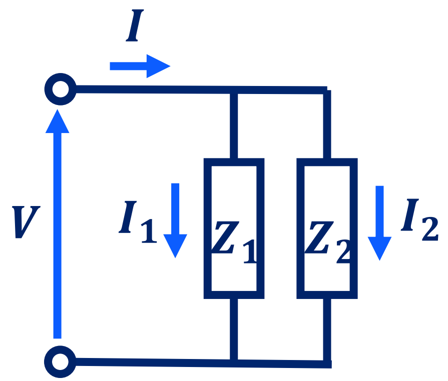
$$V = (Z_1 + Z_2)I$$

から合成インピーダンスZは

$$Z = Z_1 + Z_2$$

となる

並列接続



$I = I_1 + I_2$であり，インピーダンスの定義から$V = I_1 Z_1, V = I_2 Z_2$ なので，

$$I = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)V$$

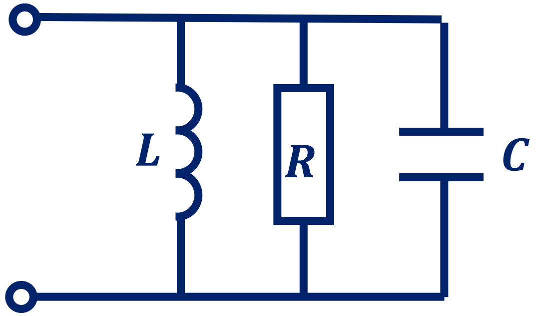
よって合成インピーダンスは

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

合成インピーダンスの計算例

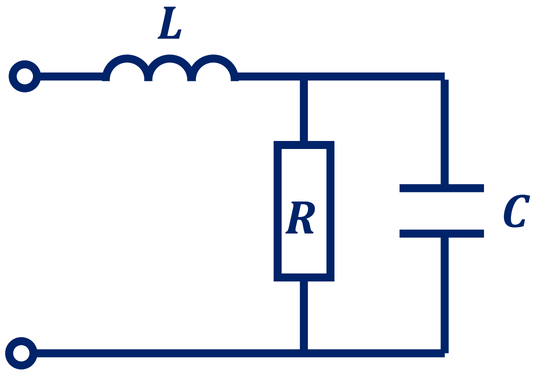
電源の角周波数はϖとする

$$Z=R+j\varpi L+\frac{1}{j\varpi C}=R+j\left(\varpi L-\frac{1}{\varpi C}\right)$$



$$Z=\frac{1}{\frac{1}{j\varpi L}+\frac{1}{R}+j\varpi C}=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(\varpi C-\frac{1}{\varpi L}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{R}-j\left(\varpi C-\frac{1}{\varpi L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\varpi C-\frac{1}{\varpi L}\right)^2}$$

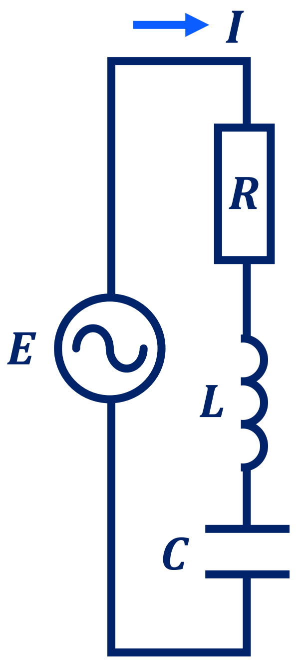


$$Z=j\varpi L+\frac{1}{\frac{1}{R}+j\varpi C}=j\varpi L+\frac{R}{1+j\varpi CR}$$

$$=j\varpi L+\frac{R(1-j\varpi CR)}{1+(\varpi CR)^2}$$

$$=\frac{R}{1+(\varpi CR)^2}+j\left(\varpi L-\frac{\varpi CR^2}{1+(\varpi CR)^2}\right)$$

RLC直列回路



交流電圧源Eの角周波数はϖとする

□ 回路方程式

$$\left(R + j\varpi L + \frac{1}{j\varpi C}\right) I = E$$

Iについて解くと

$$I = \frac{1}{R + j\left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)} E = \frac{R - j\left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)}{R^2 + \left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)^2} E$$

□ 電流の大きさ

$$|I| = \frac{E}{R^2 + \left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)^2} \sqrt{R^2 + \left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)^2}$$

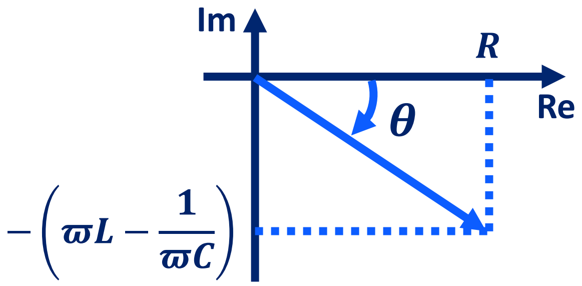
$$= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)^2}}$$

$\varpi L - \frac{1}{\varpi C} = 0$の時，つまり

$\varpi = \sqrt{1/LC}$の時に最大値E/Rをとる

（共振周波数）

□ 電流の位相



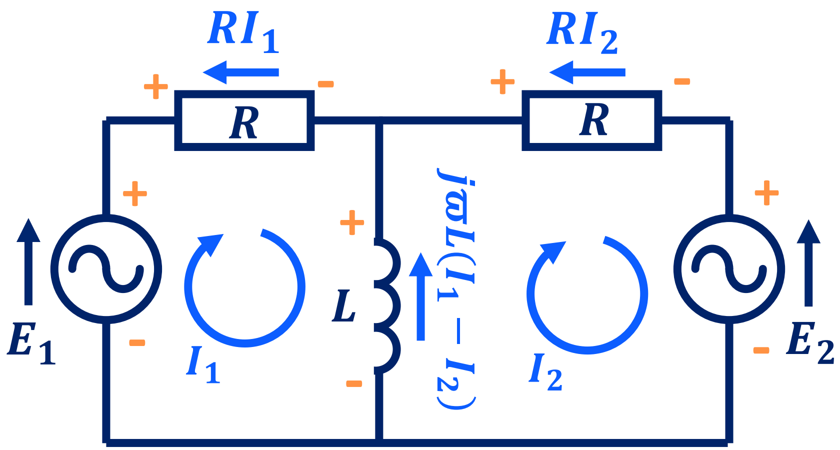
$\frac{E}{R^2 + \left(\varpi L - \frac{1}{\varpi C}\right)^2}$は省略

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{\varpi L - \frac{1}{\varpi C}}{R}\right)$$

- $\varpi L - \frac{1}{\varpi C} > 0 \Leftrightarrow \varpi > \sqrt{1/LC}$ ：
  電流は電圧より位相が遅れる
  インダクタが支配的
- $\varpi L - \frac{1}{\varpi C} = 0 \Leftrightarrow \varpi = \sqrt{1/LC}$ ：
  電流と電圧は同相
- $\varpi L - \frac{1}{\varpi C} < 0 \Leftrightarrow \varpi < \sqrt{1/LC}$ ：
  電流は電圧より位相が進む
  キャパシタが支配的

複素表現を用いた交流回路解析

インダクタに流れる電流iを求めよ



交流電圧源E_1, E_2の角周波数はともにϖとする

閉路電流法により

- $RI_1 + j\varpi L(I_1 - I_2) - E_1 = 0$
- $RI_2 - j\varpi L(I_1 - I_2) + E_2 = 0$

行列表示すると…

$$\begin{pmatrix} R + j\varpi L & -j\varpi L \\ -j\varpi L & R + j\varpi L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}$$

クラメルの公式を使うと

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -j\varpi L \\ -E_2 & R + j\varpi L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R + j\varpi L & -j\varpi L \\ -j\varpi L & R + j\varpi L \end{vmatrix}} = \frac{E_1(R + j\varpi L) - j\varpi L E_2}{R^2 + 2j\varpi LR}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R + j\varpi L & E_1 \\ -j\varpi L & -E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R + j\varpi L & -j\varpi L \\ -j\varpi L & R + j\varpi L \end{vmatrix}} = \frac{-E_2(R + j\varpi L) + j\varpi L E_1}{R^2 + 2j\varpi LR}$$

インダクタに流れる電流は

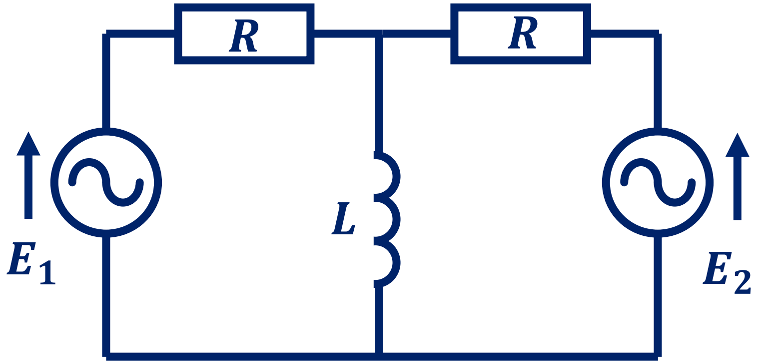
$$I_1 - I_2 = \frac{E_1(R + j\varpi L) - j\varpi L E_2 + E_2(R + j\varpi L) - j\varpi L E_1}{R^2 + 2j\varpi LR}$$

$$= \frac{E_1 + E_2}{R + 2j\varpi L}$$

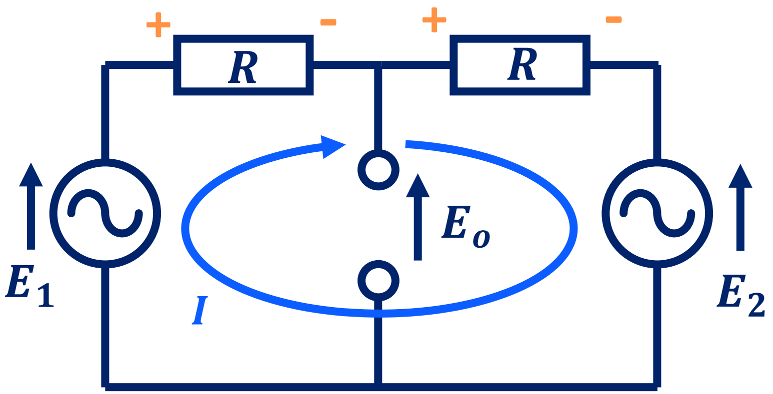
交流回路における諸定理（1/2）

テブナンの定理・ノートンの定理・重ね合わせの理は交流回路でも適用可能

テブナンの定理を用いた別解



Step1: 開放電圧を求める



図の様に電流をおくと

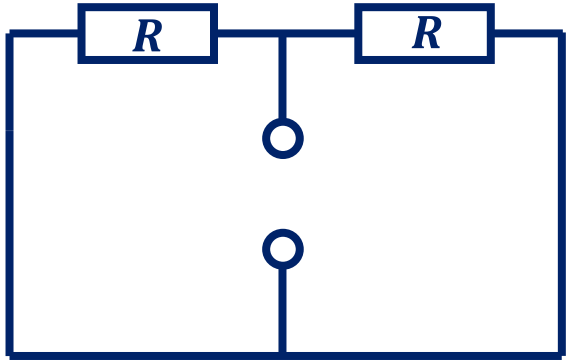
$$2RI + E_2 = E_1$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{2R}$$

よって，開放電圧は

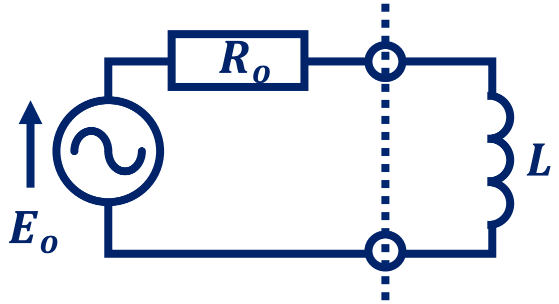
$$E_o = RI + E_2 = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

Step2: 等価抵抗を求める



これは明らかに $R_o = \dfrac{R}{2}$

Step3: 等価回路を描く



よってコイルに流れる電流は

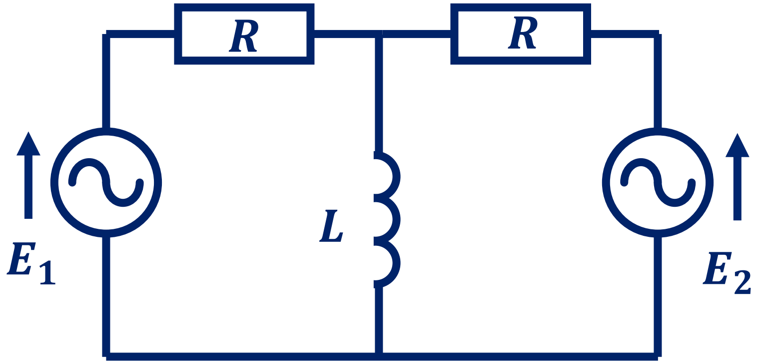
$$I = \frac{E_o}{R_o + j\omega L} = \frac{\frac{E_1 + E_2}{2}}{\frac{R}{2} + j\omega L}$$

$$= \frac{E_1 + E_2}{R + 2j\omega L}$$

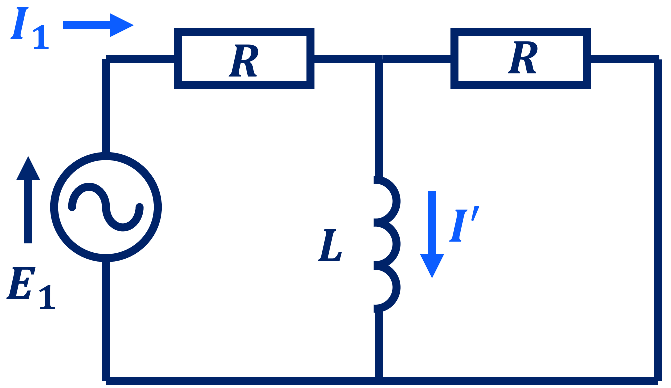
電圧源を取り除く=0Vにする=短絡
電流源を取り除く=0Aにする=開放

交流回路における諸定理（2/2）

重ね合わせの理を用いた別解



Step1: 片方の電圧源を除去した回路を解析



合成インピーダンスは

$$R+\frac{1}{\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{R}}=R+\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}$$

なので，電源を流れる電流は

$$I_1=\frac{E_1}{R+\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}}$$

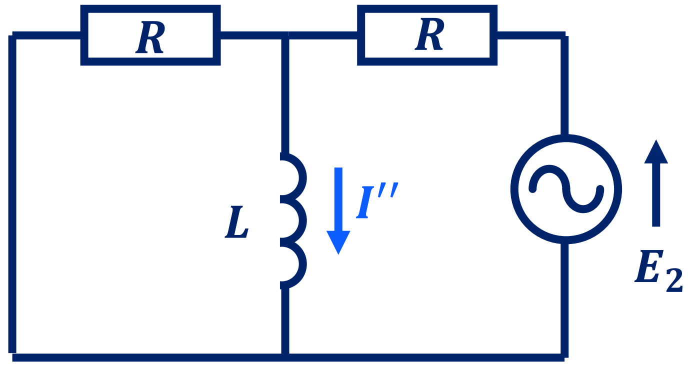
この電流が抵抗とインダクタで分流されるので，インダクタに流れる電流は

$$I'=\frac{R}{R+j\omega L}I$$

$$=\frac{R}{R+j\omega L}\frac{E_1}{R+\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}}$$

$$=\frac{RE_1}{R^2+2j\omega LR}=\frac{E_1}{R+2j\omega L}$$

Step2: もう片方の電圧源を除去した回路を解析



Step1の結果でE_1をE_2と入れ替えれば良い

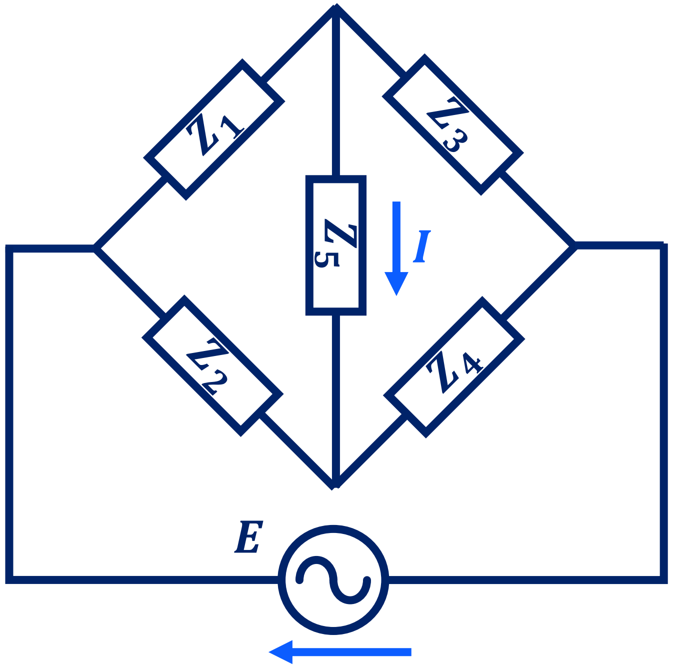
$$I''=\frac{E_2}{R+2j\omega L}$$

Step3: 重ね合わせる

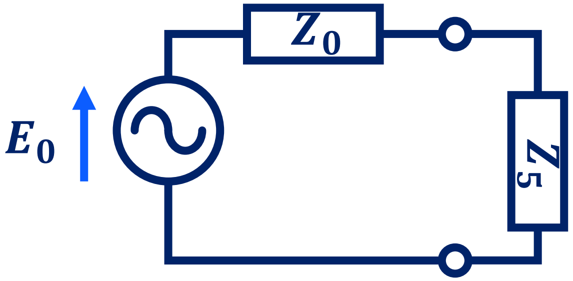
$$I=I'+I''=\frac{E_1+E_2}{R+2j\omega L}$$

ブリッジ回路 (1/2)

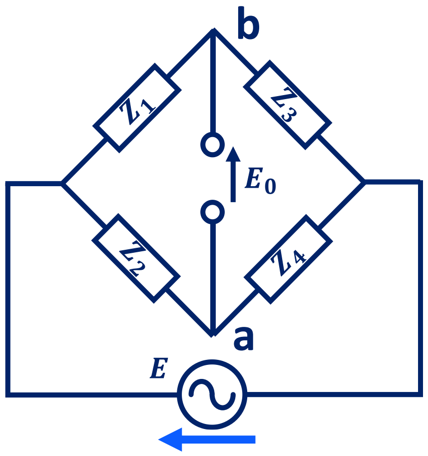
- 図中のZ_5に流れる電流Iを求めたい
  （Z_i：複素インピーダンス）



テブナンの定理で等価回路に変換



(1) E_0の導出

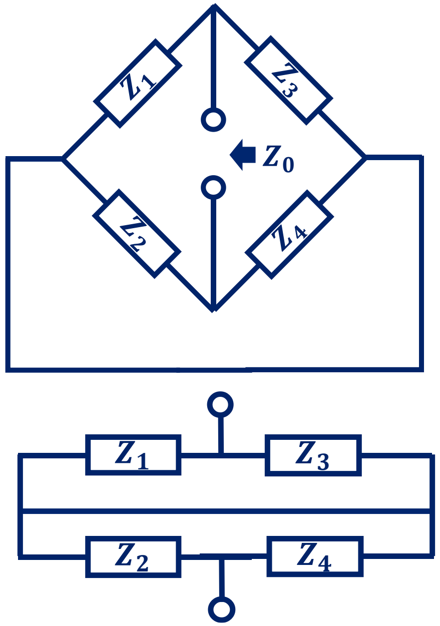


左の回路で分圧の法則からaの電位は $\dfrac{Z_4}{Z_2+Z_4}E$

同様にbの電位は $\dfrac{Z_3}{Z_1+Z_3}E$ なので

$$E_0=\left(\frac{Z_3}{Z_1+Z_3}-\frac{Z_4}{Z_2+Z_4}\right)E$$

(2) Z_0の導出



「Z_1とZ_3の並列」と「Z_2とZ_4の並列」が直列になっていると考えるとZ_0は

$$Z_0=\frac{1}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_3}}+\frac{1}{\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_4}}$$

$$=\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_3}+\frac{Z_2Z_4}{Z_2+Z_4}$$

ブリッジ回路 (2/2)

以上から，Z_5に流れる電流Iは

$$I = \frac{E_0}{Z_0 + Z_5} = \frac{\left(\dfrac{Z_3}{Z_1 + Z_3} - \dfrac{Z_4}{Z_2 + Z_4}\right)E}{\dfrac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} + \dfrac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_4} + Z_5}$$

$$= \frac{\left(Z_3(Z_2 + Z_4) - Z_4(Z_1 + Z_3)\right)E}{Z_1 Z_3(Z_2 + Z_4) + Z_2 Z_4(Z_1 + Z_3) + Z_5(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}$$

$$= \frac{(Z_2 Z_3 - Z_4 Z_1)E}{S_0 + Z_5 S_1}$$

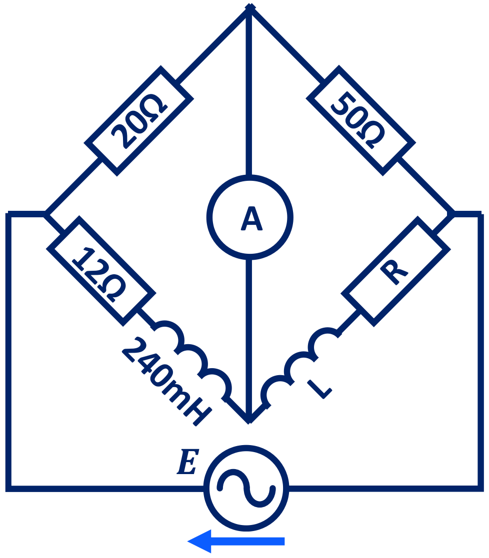
- $S_0 = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_3 Z_4 Z_1 + Z_4 Z_1 Z_2$
- $S_1 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 + Z_4 Z_1$

ブリッジの平衡条件

$Z_2 Z_3 = Z_4 Z_1$の時に$I = 0$となる．
これをブリッジの平衡条件と呼ぶ

平衡条件を利用したインピーダンス測定

右の回路でブリッジが平衡している（電流計が0を示している）とき，LとRを求めよ．電源の周波数は100/2π [Hz]とする．



- $Z_1 = 20$
- $Z_2 = 12 + j \cdot 100 \cdot 240 \cdot 10^{-3} = 12 + j \cdot 24$
- $Z_3 = 50$
- $Z_4 = R + j \cdot 100 \cdot L$

平衡条件から$20(R + j \cdot 100 \cdot L) = 50(12 + j \cdot 24)$

実部・虚部を等しいと置くと
- $R = 30\ [\Omega]$
- $L = 0.6\ [\mathrm{H}]$