情報論理学
第9回：述語論理の公理系(1)

基礎工学部情報科学科　中川 博之

レポート課題

レポート課題: 問8-1 (解答)

- 例にならい，各論理式の束縛関係を示すとともに，自由変数を指摘せよ．

- 例) $\forall x\,(p\,(x, y) \to \exists y\, q(y, y))$

※束縛関係の例示は省略

- (1) $\forall x \exists y((p(x) \to q(y)) \to \exists z(p(x) \to q(z)))$ 自由変数なし

- (2) $\neg \forall x \exists y\, p(x, y) \to q(y) \to \exists z(p(z) \to q(x))$

- (3) $\forall y \exists z(\exists x\, p(x, y, z) \to \neg q(x, z)) \to (p(y) \to \forall x \neg r(x, y))$

レポート課題

レポート課題: 問8-2 (解答)

- 各論理式に対して, 与えられた代入は可能であるか. 代入可能であれば適用結果を示せ. 代入可能でなければそう答えよ.
  - (1) $\forall x(\exists y\, p(x, y) \to q(y))$ に項f(z)を代入
    → $\forall x(\exists y\, p(x, y) \to q(\underline{f(z)}))$
  - (2) $\forall y \exists x\, p(x, y) \to q(y) \land \neg \exists z\, r(z) \lor s(y)$ に項f(x, z)を代入
    → $\forall y \exists x\, p(x, y) \to q(\underline{f(x, z)}) \land \neg \exists z\, r(z) \lor s(\underline{f(x, z)})$
  - (3) $\forall y \exists x\, p(x, y) \to q(y) \land \neg\, r(z) \lor s(y)$ に項f(x, z)を代入
    → 代入可能でない (代入指定が曖昧)
  - (4) $\forall y \exists x\, p(x, y) \to q(y) \land \neg \exists z\, (r(z) \lor s(y))$ に項g(z)を代入
    → 代入可能でない (g(z)が与式のyに対して自由でない)

レポート課題

レポート課題: 問8-3

- 以下の各論理式が, (a) 恒真, (b) 充足可能であるが恒真でない, (c) 充足不能のいずれであるかを判断し, 記号で答えよ． (b) である場合は, 真になる解釈と偽になる解釈を１つずつ挙げよ.
- (1) $\forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x(p(x) \land q(x))$
- (2) $\forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, p(x, y)$

レポート課題

レポート課題: 問8-3 (解答)

- (1): $\forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \land q(x))$

  → (a) 恒真
- ただし, $\forall x\, p(x) \lor \forall x\, q(x)$と $\forall x\, (p(x) \lor q(x))$ は等価ではない

- (2): $\forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, p(x, y)$

  → (b) 充足可能であるが恒真でない
- $\forall x \exists y\, p(x, y)$と$\exists y \forall x\, p(x, y)$は等価ではない
  - ただし, $\exists y \forall x\, p(x, y) \rightarrow \forall x \exists y\, p(x, y)$ は恒真

レポート課題

レポート課題: 問8-3 (解答)

(2): $\forall x \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists y \forall x\, p(x, y)$ の解釈

- 真にする解釈
  - D: {0, 1}
  - C, F: なし
  - P: p(0, 0)= p(0, 1)= p(1, 0)= p(1, 1)= false
- 偽にする解釈
  - D: {0, 1}
  - C, F: なし
  - P: p(0, 0)= true, p(0, 1)= false,
    p(1, 0)= false, p(1, 1)= true

述語論理の公理系

- 述語論理式集合L(C, F, P)に対する公理系Q
  - C: 定数記号集合, F: 関数記号集合, P: 述語記号集合

- Qの公理
  - A1: $P\rightarrow (Q \rightarrow P)$
  - A2: $(P\rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P\rightarrow Q) \rightarrow (P\rightarrow R))$
  - A3: $(\neg P\rightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg P\rightarrow Q) \rightarrow P)$
  - A4: $\forall x\, T(x) \rightarrow T(t)$
    - ただし, t はT(x)の x に対して自由である項

- Qの推論規則
  - B1: PとP→QからQを得る (MP, modus ponens)
  - B2: P→QからP→∀x Qを得る
    - ただしPは自由変数 x を含まない

公理A4のインスタンス

- [A4] $\forall x\, T(x) \rightarrow T(t)$
  - ただし，t はT(x)の x に対して自由である項

- 例1: $\forall x\, p(x) \rightarrow p(a)$
  - $T(x)=p(x)$, 代入: $x \leftarrow a$

- 例2: $\forall y\, q(y, x) \rightarrow q(a, x)$
  - $T(y)=q(y, x)$, 代入: $y \leftarrow a$
  - 限定作用素∀に修飾される変数はxでなくても良い

- 例3: $\forall y\, \exists x\, q(y, x) \rightarrow \exists x\, q(f(a), x)$
  - $T(y)=\exists x\, q(y, x)$, 代入: $y \leftarrow f(a)$

- 例4: $\forall x(p(y) \rightarrow q(y, z)) \rightarrow (p(y) \rightarrow q(y, z))$
  - $T(x) = p(y) \rightarrow q(y, z)$, 代入: $x \leftarrow t$ (か何か)
  - T(x)が自由変数xを持たない場合, T(t)はTそのもの

公理A4のインスタンスでないもの

- [A4]　$\forall x\, T(x) \rightarrow T(t)$
  - ただし, t はT(x)の x に対して自由である項

- 例5: $\forall y\, (p(y) \rightarrow \forall z\, q(y, z)) \rightarrow (p(f(z)) \rightarrow \forall z\, q(f(z), z))$
  - $T(y) = p(y) \rightarrow \forall z\, q(y, z)$,　代入: $y \leftarrow f(z)$
  - しかし, 項f(z) が∀z のスコープに入るため, T(y)のyに対して自由ではない (代入できない)

レポート課題

レポート課題: 問9-1

- 各論理式に対して, 公理A4のインスタンスであるかどうかを, T(x)および代入(x←t)が何であるかを示した上で答えよ.　(xは別の変数の場合もある)
  - (1) $\forall x\, p(x) \rightarrow p(f(a))$
  - (2) $\forall y\, p(y) \rightarrow p(f(z))$
  - (3) $\forall x \forall y\, p(x, y) \rightarrow \forall y\, p(f(a), y)$
  - (4) $\forall x \forall y\, p(x, y) \rightarrow \forall y\, p(f(y), y)$
  - (5) $\forall x (q(x) \rightarrow r(x, a)) \rightarrow (q(f(a)) \rightarrow r(x, a))$
  - (6) $\forall x (q(x) \rightarrow \forall z\, r(x, z)) \rightarrow (q(f(z)) \rightarrow \forall z\, r(f(z), z))$

推論規則B2の適用例

- [B2] $P \to Q$ から $P \to \forall x\, Q$ を得る
  - ただしPは自由変数 x を含まない
- 例1: $p(a) \to (q(x, y) \to r(y))$ から
  $p(a) \to \forall y\, (q(x, y) \to r(y))$ を得る
  - $P = p(a),\ Q = q(x, y) \to r(y)$
  - $P\ (= p(a))$が自由変数yを含まないため適用可能
- 例2: $p(x) \to (q(x, y) \to r(y))$ から
  $p(x) \to \forall y\, (q(x, y) \to r(y))$ を得る
  - $P = p(x),\ Q = q(x, y) \to r(y)$
  - $P\ (= p(x))$が自由変数yを含まないため適用可能

推論規則B2の適用でないもの

- [B2] $P \to Q$から$P \to \forall x\, Q$を得る
  - ただしPは自由変数 x を含まない
- 例3: $p(y) \to (q(y, z) \to r(y))$ から
  $p(y) \to \forall y\, (q(y, z) \to r(y))$ を得る
  - $P = p(y)$, $Q = q(y, z) \to r(y)$
  - P (= p(y))が自由変数yを含むため適用できない
- 例4: $p(y) \to q(y)$ から $p(y) \to \forall z\, q(z)$ を得る
  - $P = p(y)$, $Q = q(y)$
  - Qの変数名を変えてはいけない
- 例5: $p(x) \to (q(x) \to r(y))$ から
  $p(x) \to (q(x) \to \forall y\, r(y))$ を得る
  - $P = p(x)$, $Q = q(x) \to r(y)$ であるが, Qの部分式に適用
  - 部分式に適用してはいけない

レポート課題

レポート課題: 問9-2

- 各論理式に対して, 推論規則B2を正しく適用しているかどうかを答えよ.
  - (1) $\forall y\ p(y) \rightarrow q(x)$から $\forall y\ p(y) \rightarrow \forall x\ q(x)$ を得る
  - (2) $\forall x\ p(x) \rightarrow q(x)$から $\forall x\ p(x) \rightarrow \forall x\ q(x)$ を得る
  - (3) $p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(y))$ から $p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow \forall y\ p(y))$ を得る
  - (4) $p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(x))$ から $p(x) \rightarrow \forall y\ (q(y) \rightarrow p(y))$ を得る

証明

- 命題論理と同様に，公理系Qにおいて論理式Aが論理式集合Γから導かれる (証明可能である)ときに

$$\Gamma \vdash_Q A$$

と書く

  - 特に Γ = Φ のとき, $\vdash_Q A$ と書き, Aを (Qにおける)定理(theorem)という
  - 以降, 公理系Qは自明として，Γ $\vdash$ A と書く

- 公理と推論規則を用いてAを導出する過程の論理式の列をAの証明(proof)という

例4.1.1(1)

- $\forall x\ p(x) \mid\!- p(t)$
  - ただし項 t はp(x)のxに対して自由

  - 1. $\forall x\ p(x)$ (仮定)
  - 2. $\forall x\ p(x) \rightarrow p(t)$ (公理A4)
  - 3. $p(t)$ (1, 2とMP)

例4.1.1(2)

- $\forall x\, p(x), p(a) \to q(b) \mid\!- q(b)$
  - 1. $\forall x\, p(x)$　　(仮定)
  - 2. $p(a) \to q(b)$　　(仮定)
  - 3. $p(a)$　　(1と先ほどの例4.1.1(1)より)
    例4.1.1(1) : $\forall x\, p(x) \mid\!- p(t)$
  - 4. $q(b)$　　(2, 3とMP)

定理4.1.1

- [定理] 命題論理の定理の命題記号に述語論理式集合L(C, F, P)の論理式を代入して得られる論理式は証明可能

- 証明の概要
  - 命題論理の公理が提供する公理, 推論規則は述語論理のもののサブセットである
  - その限定的な公理, 推論規則を用いて証明できた論理式は同様の公理, 推論規則を用いれば証明できるため

これにより, 命題論理で導いた各定理が述語論理式の証明においても利用可能に

例4.1.2

- (1) $\forall x\, A(x) \mid\!\!-\, A(x)$
  - 1. $\forall x\, A(x)$　(仮定)
  - 2. $\forall x\, A(x) \to A(x)$　(公理A4. 変数xに変数xを代入)
  - 3. $A(x)$　(1, 2とMP)
- (2) $A(x) \mid\!\!-\, \forall x\, A(x)$
  - 1. $A(x)$　(仮定)
  - 2. $A(x) \to ((B \to B) \to A(x))$　(公理A1)
    - ここでBは自由変数xを含まない論理式とする
  - 3. $(B \to B) \to A(x)$　(1, 2とMP)
  - 4. $(B \to B) \to \forall x\, A(x)$　(3と推論規則B2)
    - Bを自由変数xを含まない論理式としているので適用可能
  - 5. $B \to B$　(例2.1.1と定理4.1.1)
  - 6. $\forall x\, A(x)$　(4, 5とMP)

※以降，定理4.1.1は省略する

問4.1.1(略解)

- (1) $\vdash A(x_1, x_2, \ldots, x_m) \Leftrightarrow\ \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m\, A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
  - 左辺 ⇒ 右辺:
  - 1. $A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (仮定)
  - 2. $\forall x_m\, A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (1 と 例4.1.2(2) $A(x) \vdash \forall x\, A(x)$ より)
  - これを繰り返す
  - 右辺 ⇒ 左辺: 例4.1.2(1) $\forall x\, A(x) \vdash A(x)$ を繰り返し適用
- (2) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m\, A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
  $\Leftrightarrow\ \vdash \forall x_{i1} \forall x_{i2} \ldots \forall x_{im}\, A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
    - i1, i2, ..., im は1, 2, ..., mの置換
  - 適用順序を随時変えながら例4.1.2(1), (2)の両方を使う

問4.1.2 (1)

- $A \to B \vdash \exists x\, A \to B$
  - ただし, Bは x を自由変数として含まない

  - 1. $A \to B$　(仮定)
  - 2. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$　(問題2.1.2(6))
  - 3. $\neg B \to \neg A$　(1, 2とMP)
  - 4. $\neg B \to \forall x\, \neg A$　(3とB2)
  - 5. $(\neg B \to \forall x\, \neg A) \to (\neg \forall x\, \neg A \to \neg\neg B)$　(問題2.1.2(6))
  - 6. $\neg \forall x\, \neg A \to \neg\neg B$　(4, 5とMP)
  - 7. $\neg\neg B \to B$　(問題2.1.2(3))
  - 8. $\neg \forall x\, \neg A \to B$　(6, 7 と例2.1.2(三段論法))
  - 9. $\exists x\, A \to B$　(∃の定義より)

レポート課題

レポート課題: 問9-3

- $\vdash A(t) \to \exists x\, A(x)$
  - ただしtはAのxに対して自由

を証明せよ