計算論A　第12回ミニレポート解答例

園孝直人，難波瑛次郎

教科書332ページ 問7.4.4
　任意のCNF文法Gにおいて,長さnの列の導出木は2n-1個の内点を持つ（すなわち変数ラベルを持つ点が2n-1個ある）ことを示せ.

証明はn についての帰納法による.

任意の変数Aと，似にの長さnの列wについてA =>* wが成り立つとき，
Aを根としwを生成する導出木は，必ず2n-1個の内点を持つことを示す.

基礎: n = 1. 導出木は根に変数Aを持ち，葉に1つ終端記号を持つ．この木は2n-1 = 1の内点を持つ.

帰納: n （> 1）より短い文字列を仮定する.
導出木は根に変数Aを持ち，２つの子として変数B，Cを持つ.
B =>* x ，C =>* yであるようなxとyをもちいて，w=xyのようにかける.
xと y の長さはいずれも nより短いので帰納法の仮定が成立．xとyの導出木は，それぞれ2|x|-1個，　2|y|-1 個の内点を持つ.

A =>* wの導出木の内点の数は，これらの内点の総和に親の節点の数としてひとつ加えたものとなる.

$$(2|x|-1)+(2|y|-1)+1 \;=\; 2(|x|+|y|)-1 \;=\; 2(|w|)-1 \;=\; 2n-1$$

以上より，A =>* wの導出木が2n-1個の内点を持つことを示せた.