計算論Ａ　第５回

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 言語が正則でないことの証明
   - 正則言語に関する閉包性
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
4.1～4.2節

４．正則言語の性質
4.1　言語が正則でないことの証明

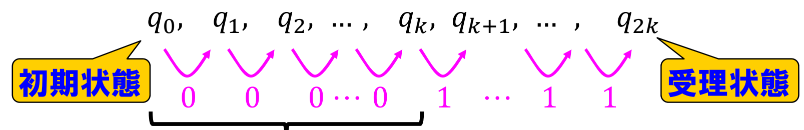
- 正則言語でない言語は存在するのか？
  - 正則表現で表現できない言語はあるのか？
  - 有限オートマトンで認識できない言語はあるのか？
- 答えはＹＥＳ
  - 正則言語でない言語が存在する
    - Σ 上の正則言語の数：加算無限
    - Σ 上の言語の数：非加算無限
  - 例：$L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ は正則言語でない
- 正則言語でないことをどのように証明するか：本日の内容

4.1.1　正則言語に対する反復補題(1)

- $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ は正則言語でない
  - 正則言語であることは、
    正則表現、有限オートマトンを構成すれば証明できる
  - 正則言語でないことの証明は？
    反復補題（強力なツール）

4.1.1　正則言語に対する反復補題(2)

- $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ は正則言語でない
  - 正則言語と仮定（背理法）
    $T(M) = L_{01}$ なる有限オートマトン M が存在
    状態数を k とする
  - $w = 0^k 1^k \in L$ を考える
  - M に w を入力したときの，M の状態変化



$q_i = q_j$ なる $0 \leq i < j \leq k$ が存在（鳩の巣原理）

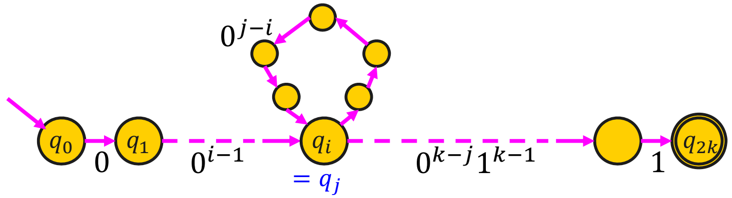
4.1.1 正則言語に対する反復補題(3)

- M に w を入力したときの，M の状態変化

初期状態 q_0，q_1，q_2，…，q_k，q_{k+1}，…，q_{2k} 受理状態

$\underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \cdots 0}$ $\quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1$

$q_i = q_j$ **なる** $0 \leq i < j \leq k$ **が存在**



$0^{k-(j-i)+n(j-i)}1^k \quad (n \geq 0)$ **も受理してしまう**

$n \neq 1$ **のとき，** $0^{k-(j-i)+n(j-i)}1^k \notin L_{01} (= \{0^n1^n \mid n \geq 1\})$

$L_{01} = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ **は正則言語でない**

反復補題(1)

- 言語 L が正則言語でないことの証明方法
- アイデア
  - **十分に長い語** $w \in L$ に対し、
    w の一部を**任意の回数繰り返して**得られる語 w'
  - $w' \in L$ **となるはず**
    →矛盾を導く
- **定理4.1**として定式化
  ポンプの補題（pumping lemma），繰返し定理とも呼ばれる

反復補題(2)

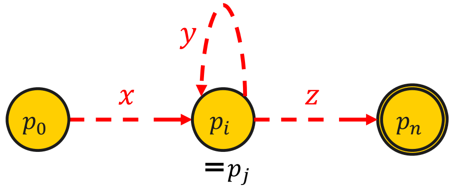
- **定理4.1（反復補題）**
  任意の正則言語 L に対し，ある正整数 n が存在し，
  $|w| \geq n$ なる任意の $w \in L$ に対し，
  $w = xyz \quad (y \neq \epsilon,\ |xy| \leq n)$ と表せ，
  任意の $k\ (k \geq 0)$ に対し，$xy^kz \in L$
- 定理4.1は，ある言語が**正則言語でない**ことの証明に有用

反復補題の証明(1)

- L ：**正則言語**
- A ：$L(A) = L$ なるオートマトン $A = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$
- $n = |Q|$ とする．
- w ：$|w| = m\ (\geq n)$ なる任意の語 $w \in L$
  $w = a_1a_2 \dots a_m \quad (a_i \in \Sigma)$
- $\delta(q_0, a_1a_2 \dots a_i) = p_i$ とする．ただし，$p_0 = q_0$
- このとき，$p_i = p_j$ なる $i, j\ (0 \leq i < j \leq m)$ が存在
- $x = a_1a_2 \dots a_i$，$y = a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j$ とする $(y \neq \epsilon,\ |xy| \leq n)$
  $w = \underbrace{a_1a_2 \dots a_i}_{x}\underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{y} \dots a_m \quad (a_i \in \Sigma)$

反復補題の証明 (2)

- $p_i = p_j$ なる $i,\ j\ (0 \le i < j \le n)$ が存在
- $x = a_1 a_2 \dots a_i$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$ とする$(0 < |y|,\ |xy| \le n)$



$\boxed{\text{任意の } k\ (\ge 0) \text{ について，} xy^k z \in L}$

反復補題の変形

- **反復補題**
  任意の正則言語 L に対し，ある正整数 n が存在し，
  $|w| \ge n$ なる任意の $w \in L$ に対し，
  $w = xyz \quad (y \ne \epsilon,\ |xy| \le n)$ と表せ，
  任意の $k\ (k \ge 0)$ に対し，$xy^k z \in L$

- **反復補題の変形**
  任意の正則言語 L に対し，ある正整数 n が存在し，
  $|w| \ge n$ なる任意の $w \in L$ に対し，
  $w = xyz \quad (y \ne \epsilon,\ |yz| \le n)$ と表せ，
  任意の $k\ (k \ge 0)$ に対し，$xy^k z \in L$

4.1.2 反復補題の応用 (1)

- $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ は正則言語でない

（証明）

L を正則言語とする（背理法）

反復補題（定理4.1）の正整数 n に対し，$w = 0^{n/2} 1^{n/2}$ とする

$|w| \ge n$ なので，$w = xyz\ (y \ne \epsilon, |xy| \le n)$ と表せ，
任意の $k\ (k \ge 0)$ に対し，$xy^k z \in L$

場合分けして，すべての場合で矛盾を導く

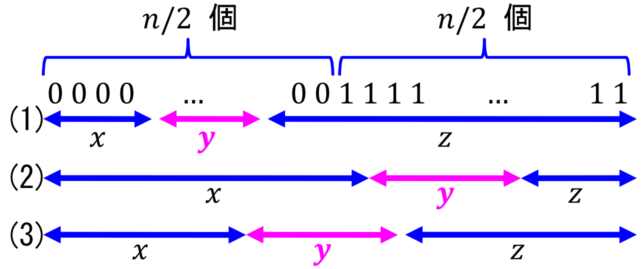
(1) $y = 0^t\ (t > 0)$ のとき
(2) $y = 1^t\ (t > 0)$のとき
(3) $y = 0^s 1^t\ (s,\ t > 0)$ のとき

反復補題の応用 (1) 補足

- 場合分けの考え方

$w = 0^{n/2} 1^{n/2}$ に対し，
$w = xyz\ (y \ne \epsilon, |xy| \le n)$ と表す

(1) $y = 0^t\ (t > 0)$ のとき
(2) $y = 1^t\ (t > 0)$のとき
(3) $y = 0^s 1^t\ (s,\ t > 0)$ のとき



反復補題の応用 (2)

- $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ **は正則言語でない**

(証明のつづき)

$w = 0^{n/2}1^{n/2}$ **とする**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せ，** $xy^kz \in L_{01}$ $(k \geq 0)$

(1) $y = 0^t$ $(t > 0)$ **のとき**

$xy^0z = 0^{n-t}1^n \notin L$ **となり矛盾**

(2) $y = 1^t$ $(t > 0)$**のとき**

$xy^0z = 0^n 1^{n-t} \notin L$ **となり矛盾**

(3) $y = 0^s1^t$ $(s,\ t > 0)$ **のとき**

$xy^2z = 0^{n-s}(0^s1^t)^2 1^{n-t} = 0^n1^t0^s1^n \notin L$ **となり矛盾**

(1)，(2)，(3) **より，** $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ **は正則言語でない**

4. 1. 2 反復補題の応用 (3)

- $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ **は正則言語でない**

(別の証明)

L_{01} **を正則言語とする（背理法）**

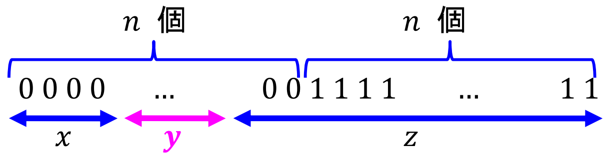
反復補題（定理4. 1）の正整数 n **に対し，** $w = 0^n1^n$ **とする**

$|w| \geq n$ **なので，** $w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せ，**

任意の k $(k \geq 0)$ **に対し，** $xy^kz \in L$

- $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$ **より，** $y = 0^t$ $(t > 0)$ **この場合しかない!**

あとは同様にして矛盾を導く



反復補題の応用 (4) 例4. 2

- **例4. 2** $L_{eq} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は同じ個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$ **は正則言語でない**

(証明)

L_{eq} **を正則言語とする（背理法）**

反復補題の正整数 n **に対し，** $w \in L_{eq}$, $|w| \geq n$ **とする**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せ，** $xy^kz \in L_{eq}$ $(k \geq 0)$

> y **に含まれる** 0 **と** 1 **の個数が異なれば，** $xy^0z \notin L_{eq}$ **となり矛盾**

反復補題の応用 (5) 例4. 2（つづき）

- **例4. 2** $L_{eq} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は同じ個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$ **は正則言語でない**

(証明)

L_{eq} **を正則言語とする（背理法）**

反復補題の正整数 n **に対し，** $w = 0^n1^n$ **とする**

＊反復補題は $|w| \geq n$ **なる任意の** w **に対して成立**

$w = xyz$ $(y \neq \epsilon, |xy| \leq n)$ **と表せることより，**

$y = 0^s$ $(s > 0)$

$xy^0z = 0^{n-s}1^n \notin L_{eq}$ **となり，矛盾**

反復補題の応用 (6) 例4.3

- 例4.3　$L_{pr} = \{w \in 1^* \mid w$ の長さが素数$\}$
 は正則言語でない

（証明）

L_{pr} を正則言語とする（背理法）

反復補題の正整数 n に対し，$w = 1^p$（$p \geq n+2$） とする

反復補題の y に対し，$y = 1^m$（$1 \leq m \leq n$）とする

このとき，$xz = 1^{p-m}$ である

$xy^{p-m}z = 1^{p-m+m(p-m)} = 1^{(m+1)(p-m)}$

$m+1 \geq 2,\ p-m \geq 2$ より，$(m+1)(p-m)$ は合成数

$xy^{p-m}z = 1^{(m+1)(p-m)} \notin L_{pr}$ となり，矛盾

4.2　正則言語に関する閉包性

- 正則言語 の閉包性

正則言語が演算 α に関して閉じている：
 正則言語に演算 α を施して得られる言語も正則言語

(1) 二つの正則言語の和集合は正則
(2) 二つの正則言語の共通集合は正則
(3) 正則言語の補集合は正則
(4) 二つの正則言語の差集合は正則
(5) 正則言語の反転は正則
(6) 正則言語のスター閉包は正則
(7) 二つの正則言語の連接は正則
(8) 正則言語の準同型の像は正則
(9) 正則言語の逆準同型の像は正則

4.2.1 ブール演算のもとでの正則言語の閉包性 (1)

- 正則言語の和集合に関する閉包性

定理4.4　L と M が正則言語であるとき，$L \cup M$ もまた正則言語である

（証明）

- $L,\ M$ が正則言語なので，$L(R) = L,\ L(S) = M$ となる正則表現 $R,\ S$ が存在する
- $R + S$ は正則表現であり，
 $L(R+S) = L(R) \cup L(S) = L \cup M$
- 従って，$L \cup M$ も正則言語である

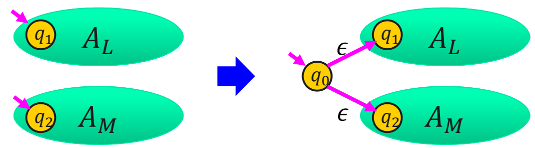
正則表現を用いた証明
オートマトンを用いた証明でもよい

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性 (2)

定理4.4　L と M が正則言語であるとき，$L \cup M$ もまた正則言語である

（別の証明）

- $L,\ M$ が正則言語なので，$L(A_L) = L,\ L(A_M) = M$ となる DFA $A_L,\ A_M$ が存在する
- DFA $A_L,\ A_M$ から，$L \cup M$ を受理する ϵ-NFA を構成する



オートマトンを用いた証明
正則表現，オートマトンどちらで証明してもよい

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(3)

- 正則言語の**補集合**に関する閉包性

定理4.5　L がアルファベット Σ 上の正則言語であるとき，$\bar{L} = \Sigma^* - L$ もまた正則言語である

（証明）

- L が正則言語なので，$L(A) = L$ となる DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が存在する
- DFA $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ を考える
- $L(B) = \Sigma^* - L(A) = \Sigma^* - L = \bar{L}$
- 従って，$\bar{L} = \Sigma^* - L$ **も正則言語**である

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(4)

- 例4.7　**正則言語でない**ことの証明に閉包性を利用

$L_{neq} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は異なる個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$ は正則言語でない

（証明）

- **背理法**：L_{neq} が正則言語と仮定
- 事実： $L_{eq} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ **は同じ個数の** 0 **と** 1 **を含む**$\}$ は正則言語でない
- DFA $L_{eq} = \overline{L_{neq}} = \Sigma^* - L_{neq}$ である
- L_{neq} が正則言語なら，定理4.5より，L_{eq} も正則言語　**矛盾！**
- 従って，L_{neq} **は正則言語でない**

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(5)

- 正則言語の**共通部分**に関する閉包性

定理4.8　L と M が正則言語であるとき，$L \cap M$ もまた正則言語である

（証明）

- $L \cap M = \overline{\bar{L} \cup \bar{M}}$ （ド・モルガンの法則）
- 補集合，和集合に関して閉じているので，**共通部分に関しても閉じている**

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(6)

- 正則言語の**共通部分**に関する閉包性

定理4.8　L と M が正則言語であるとき，$L \cap M$ もまた正則言語である

（**別の**証明）

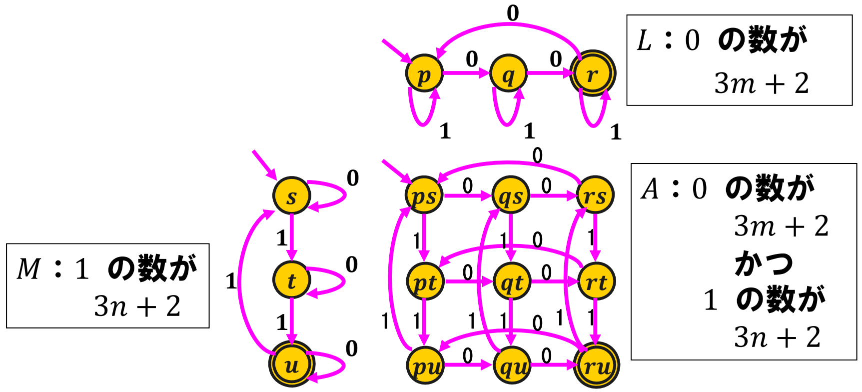
- L，M が正則言語なので，$L(A_L) = L$，$L(A_M) = M$ となる DFA A_L，A_M が存在する
  - $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$，$A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ とする
- DFA A_L，A_M から，$L \cap M$ を受理する DFA A を構成する
  - $A = (Q_L \times Q_M,\ \Sigma,\ \delta,\ (q_L,\ q_M),\ F_L \times F_M)$
    - $\delta\big((p,q),a\big) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(7)

- DFA A_L, A_M から，$L \cap M$ を受理する DFA A を構成する
  - $A = (Q_L \times Q_M,\ \Sigma,\ \delta,\ (q_L,\ q_M),\ F_L \times F_M)$
    - $\delta\big((p,q),a\big) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$
  - A の構成法のアイデア
    - A の状態：（A_L の状態，A_M の状態）の２項組
      - 第１項で A_L の動作を模倣（A_L と同じ状態に到達）
      - 第２項で A_M の動作を模倣（A_M と同じ状態に到達）
    - A_L, A_M を並列に模倣
      - A は $L(A_L) \cap L(A_M)$ を受理する

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(8)

$L \cap M$ を認識する決定性有限オートマトン A の例



ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(9)

- 正則言語の集合差に関する閉包性

定理4.10　L と M が正則言語であるとき，$L - M$ もまた正則言語である

（証明）

- $L - M = L \cap \overline{M}$
- 補集合，共通部分に関して閉じているので，
  集合差に関しても閉じている

ブール演算のもとでの正則言語の閉包性(10)

- 正則言語の集合差に関する閉包性

定理4.10　L と M が正則言語であるとき，$L - M$ もまた正則言語である

（別の証明）

- L, M が正則言語なので，$L(A_L) = L$, $L(A_M) = M$ となる DFA A_L, A_M が存在する
  - $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$,　$A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ とする
- DFA A_L, A_M から，$L - M$ を受理する DFA A を構成する
  - $A = (Q_L \times Q_M,\ \Sigma,\ \delta,\ (q_L,\ q_M),\ F_L \times (Q_M - F_M))$
    - $\delta\big((p,q),a\big) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$

4.2.2 反転(1)

- 文字列 w の**反転** w^R
  - $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ のとき，$w^R = a_n a_{n-1} \cdots a_1$
- 言語 L の**反転** L^R
  - $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$
  - $L = \{001, 10, 111\}$ のとき，$L^R = \{100, 01, 111\}$

4.2.2 反転(2)

定理4.11　L が正則言語であるとき，L^R もまた正則言語である

（証明）

- L が正則言語なので，$L(A) = L$ となるDFA A が存在する
- DFA A から ϵ-NFA A^R を作る

(1) A の状態遷移図において，**有向辺の向きをすべて逆向き**にする

(2) A の**初期状態をただ一つの受理状態**とする

(3) 新しい初期状態 p_0 を作り，p_0 から A のすべての受理状態へ ϵ-**遷移**を導入する

- $L(A^R) = L^R$ は帰納法で証明できる

テキストで証明の詳細を見ておくこと

4.2.3 準同型写像(1)

- **準同型写像**（ホモモルフィズム）
  - $h: \Sigma^* \to \Gamma^*$
  - 文字列の**各文字を特定の文字列で置き換え**
- 例4.3
  - $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $h(0) = ab$, $h(1) = \epsilon$ とする
  - このとき，$h(0011) = abab$
- 言語 L の**準同型写像** $h(L)$
  - $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$

4.2.3 準同型写像(2)

定理4.14　L がアルファベット Σ 上の正則言語であり，h が Σ 上の準同型写像であるとき，$h(L)$ も正則言語である

（証明）

- L が正則言語なので，$L(R) = L$ となる正則表現 R が存在する
- 正則表現 R から正則表現 $h(R)$ を作る
  - R において，各記号 $a \in \Sigma$ を $h(a)$ によって置き換える
- $L(h(R)) = h(L)$ は帰納法で証明できる

テキストで証明の詳細を見ておくこと

本日のまとめ

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
3. 正則言語の性質
   - 言語が正則でないことの証明
   - 正則言語に関する閉包性
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
4.1～4.2節