情報論理学
第10回：述語論理の公理系(2)

基礎工学部情報科学科　中川 博之

[復習] 述語論理の公理系

- 述語論理式集合L(C, F, P)に対する公理系Q
  - C: 定数記号集合, F: 関数記号集合, P: 述語記号集合

- Qの公理
  - A1: $P \to (Q \to P)$
  - A2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - A3: $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
  - A4: $\forall x\, T(x) \to T(t)$
    - ただし, t はT(x)の x に対して自由である項

- Qの推論規則
  - B1: PとP→QからQを得る (MP, modus ponens)
  - B2: P→QからP→∀x Qを得る
    - ただしPは自由変数 x を含まない

[A4] $\forall x\, T(x) \rightarrow T(t)$

ただし，t はT(x)の x に対して自由である項

レポート課題

レポート課題: 問9-1 (解答)

- 各論理式に対して，公理A4のインスタンスであるかどうかを，T(x)および代入(x←t)が何であるかを示した上で答えよ．（xは別の変数の場合もある）
  - (1) $\forall x\, p(x) \rightarrow p(f(a))$ ○: $T(x)=p(x)$, $x \leftarrow f(a)$
  - (2) $\forall y\, p(y) \rightarrow p(f(z))$ ○: $T(y)=p(y)$, $y \leftarrow f(z)$
  - (3) $\forall x \forall y\, p(x, y) \rightarrow \forall y\, p(f(a), y)$ ○: $T(x)=\forall y\, p(x, y)$, $x \leftarrow f(a)$
  - (4) $\forall x \forall y\, p(x, y) \rightarrow \forall y\, p(f(y), y)$ ×: 自由でない
  - (5) $\forall x(q(x) \rightarrow r(x, a)) \rightarrow (q(f(a)) \rightarrow r(x, a))$ ×: 代入が不完全
  - (6) $\forall x(q(x) \rightarrow \forall z\, r(x, z)) \rightarrow (q(f(z)) \rightarrow \forall z\, r(f(z), z))$ ×: 自由でない

[B2] P→QからP→∀x Qを得る
ただしPは自由変数 x を含まない

レポート課題

レポート課題: 問9-2 (解答)

- 各論理式に対して, 推論規則B2を正しく適用しているかどうかを答えよ.
  - (1) ∀y p(y)→q(x)から ∀y p(y)→∀x q(x) を得る
    → 正しく適用している
  - (2) ∀x p(x)→q(x)から ∀x p(x)→∀x q(x) を得る
    → 正しく適用している (Pのxは自由変数でない)
  - (3) p(x)→(q(x) →p(y)) から p(x)→(q(x) → ∀y p(y)) を得る
    → 正しく適用していない (Qの内部)
  - (4) p(x)→(q(x) →p(x)) から p(x)→ ∀y (q(y) → p(y)) を得る
    → 正しく適用していない (Qの変数名が変化)

レポート課題

レポート課題: 問9-3 (解答)

- $\vdash A(t) \to \exists x\, A(x)$
  - ただしtはAのxに対して自由

を証明せよ

- 1. $\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)$ (A4)
  - ただしtはA(x)のxに対して自由
- 2. $(\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)) \to (\neg\neg A(t) \to \neg \forall x \neg A(x))$ (問題2.1.2(6))
- 3. $\neg\neg A(t) \to \neg \forall x \neg A(x)$ (1, 2とMP)
- 4. $A(t) \to \neg\neg A(t)$ (問2.1.2(4))
- 5. $A(t) \to \neg \forall x \neg A(x)$ (3, 4 と例2.1.2(三段論法))
- 6. $A(t) \to \exists x\, A(x)$ (∃の定義より)

問4.1.2 (3)

- $\vdash \forall x\,(A \to B) \to (A \to \forall x\,B)$
  - ただしAはxを自由変数として含まない

  - 1. $\forall x\,(A\to B) \to (A\to B)$　　(A4より)
  - 2. $\forall x\,(A\to B) \land A\to B$　　(問2.1.10(12))
    - 問2.1.10(12): $A\to(B\to C) \vdash A\land B\to C$
  - 3. $\forall x\,(A\to B) \land A\to \forall x\,B$　　(B2)
    - Aがxを自由変数として含まないため可能
  - 4. $\forall x\,(A\to B) \to (A\to \forall x\,B)$　　(問2.1.10(13))
    - 問2.1.10(13): $A\land B\to C \vdash A\to(B\to C)$

  - <u>後で使います</u>

[定理4.1.2] 述語論理の演繹定理

- 演繹定理 (Deduction Theorem):

  Γ, A |- B ならば Γ |- A → B

  - ただし, A は閉論理式

- 特に, Γ = Φ のとき, A |- B ならば |- A → B

演繹定理の証明

- $\Gamma, A \vdash B$ の証明を$B_1, B_2, \cdots, B_n$とする(B_n=B)
- すべてのiについて$\Gamma \vdash A \to B_i$であることを示す

i=1のとき（$\Gamma, A \vdash B_1$ ならば$\Gamma \vdash A \to B_1$)

- B_1は, 以下のいずれかである
  - (1)仮定 Γ に属する
  - (2) 仮定 A である
  - (3) Sの公理である
- (1)(3)の場合
  - 公理A1より, $\vdash B_1 \to (A \to B_1)$
  - Γ の仮定において B_1が成り立つので, MPを用いて $\Gamma \vdash A \to B_1$
- (2)の場合 ($A = B_1$)
  - $\vdash X \to X$ (例2.1.1) より $\vdash A \to B_1$

演繹定理の証明

i>1のとき

- 1≤ k< iのkについて "Γ, A |- B_k ならばΓ |- A → B_k "が成り立つと仮定する
- B_iについて次の5つの場合がある
  - (1) B_i ∈ Γ
  - (2) B_i はAと同じ
  - (3) B_i はSの公理
  - (4) B_i はある B_j と B_h(=B_j → B_i)から<u>B1(MP)</u> により導かれた
    - ここで, j < i, h < i
  - (5) C→Dから<u>B2</u>によりB_iとして C→∀xD を導いた
    - ただしCはxを自由変数として含まない

演繹定理の証明

- (1)〜(3)の場合はi=1のときと同様にΓ $\vdash A \to B_i$
- (4) 帰納法の仮定より, Γ $\vdash A \to (B_j \to B_i)$ が既に成立している
  - 一方 A2よりΓ $\vdash (A \to (B_j \to B_i)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_i))$
  - よってこの２つからΓ $\vdash (A \to B_j) \to (A \to B_i)$
  - 帰納法の仮定より, Γ $\vdash (A \to B_j)$
  - 従ってMPにより, Γ $\vdash A \to B_i$
- (5) 帰納法の仮定より, Γ $\vdash A \to (C \to D)$が既に成立している
  - B2を用いて Γ $\vdash A \to \forall x\,(C \to D)$
    - Aは閉論理式でありxを自由変数として持たないためB2を適用可能
  - Cがxを自由変数として持たないため, 問4.1.2(3)を利用して,
  - Γ $\vdash \forall x\,(C \to D) \to (C \to \forall x\, D)$
  - 例2.1.2(1) (三段論法)より, Γ $\vdash A \to (C \to \forall x\, D)$

問4.1.2(3) $\vdash \forall x\,(A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$

[定理4.1.2] 述語論理の演繹定理

- 演繹定理 (Deduction Theorem):

  $\Gamma, A \mid\!- B$ ならば $\Gamma \mid\!- A \to B$

  - ただし, A は閉論理式

- 特に, $\Gamma = \Phi$ のとき, $A \mid\!- B$ ならば $\mid\!- A \to B$

- ※条件「ただし, Aは閉論理式」は緩められる
  - $\Gamma, A \mid\!-B$ の証明において B2 を使っていなければ, $\Gamma \mid\!- A \to B$ は必ず成り立つ
  - B2を使っていても, <u>B内で∀を適用した変数 (C→∀xDのx) をAが自由変数として持っていなければ良い</u>

問4.1.3 (3) (難)

- $\vdash \forall x (A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$
  - まず, $(A \land B) \to C \vdash (B \land A) \to C$ を証明する
  - 1. $(A \land B) \to C$ (仮定)
  - 2. $B \land A$ (これも仮定しておく)
  - 3. $A \land B$ (問2.1.10(7)の $A \land B \vdash B \land A$ より)
  - 4. C (1, 3とMP)
  - よって, $(A \land B) \to C, B \land A \vdash C$
  - 演繹定理より, $(A \land B) \to C \vdash (B \land A) \to C$

問4.1.3 (3) (難)

- $\vdash \forall x\,(A \to B) \to (\forall x\,A \to \forall x\,B)$
  - 1. $\forall x\,(A \to B) \to (A \to B)$ (公理A4)
  - 2. $\forall x\,(A \to B) \land A \to B$ (1と問2.1.10(12))
    - 問2.1.10(12): $A \to (B \to C) \vdash A \land B \to C$
  - 3. $A \land \forall x\,(A \to B) \to B$ (2と前スライドより)
    - 前スライド: $(A \land B) \to C \vdash (B \land A) \to C$
  - 4. $A \to (\forall x\,(A \to B) \to B)$ (3と問2.1.10(13))
    - 問2.1.10(13): $A \land B \to C \vdash A \to (B \to C)$
  - 5. $\forall x\,A \to A$ (例4.1.2と演繹定理)
  - 6. $\forall x\,A \to (\forall x\,(A \to B) \to B)$ (4,5と例2.1.2(三段論法))
  - 7. $\forall x\,A \land \forall x\,(A \to B) \to B$ (6と問2.1.10(12))
  - 8. $\forall x\,A \land \forall x\,(A \to B) \to \forall x\,B$ (7と推論規則B2)
  - 9. $\forall x\,(A \to B) \land \forall x\,A \to \forall x\,B$ (8と前スライドより)
  - 10. $\forall x\,(A \to B) \to (\forall x\,A \to \forall x\,B)$ (9と問2.1.10(13)))

レポート課題

レポート課題: 問10-1

- 問4.1.3 (8)
- |- ∀x(A→B) ⇔ (∃x A→B)
  - Bはxを自由変数として含まない

  - 左辺 ⇒ 右辺　と　左辺 ⇐ 右辺 の証明が必要
  - これまでに例や問で登場した定理を証明無しで使ってよい
  - 演繹定理も使うと良い
  - 左辺 ⇐ 右辺 の証明には,
    - |- X → ¬¬X　[問2.1.2(4)]
    - |- (¬Y→¬X) → (X→Y)　[問2.1.2(5)]

  が役立つかもしれない

矛盾, 無矛盾

- Γ は無矛盾 (consistent)
  $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \alpha$ かつ $\Gamma \vdash \neg \alpha$ となる α がない
- そうでないとき, Γ は 矛盾 (inconsistent)
  - 命題論理での定義と同じ

矛盾, 無矛盾に関する性質

- [性質4.1.3] Γ が矛盾であれば, どんな論理式 β も証明可能

$$\Gamma \vdash \beta$$

  - $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (問2.1.2(1))であるため

矛盾, 無矛盾に関する性質

- [性質4.1.4] 帰謬法 (背理法)の正当性
  - 帰謬法: αの否定を仮定して, 矛盾を導けば, αであると結論できること

Γを論理式の集合, αを閉論理式とすると

  - (1) $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$が矛盾であれば, $\Gamma \vdash \alpha$
  - (2) $\Gamma \cup \{\alpha\}$が矛盾であれば, $\Gamma \vdash \neg\alpha$
    - ※閉論理式という制約は緩められる

- 証明 ((1)のみ):
  - $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$が矛盾であるため, $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$かつ$\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta$となる$\beta$が存在
  - 演繹定理より, $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$, $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$
  - 公理A3より, $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$
    - 公理A3: $(\neg P \to \neg Q) \to ((\neg P \to Q) \to P)$
  - MPを2回適用して, $\Gamma \vdash \alpha$

問4.1.4

- 公理A1～A4の他に
  A5: $\forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$
  - ただしPは自由変数xを含まない

  を追加し, 推論規則B2を
  B2': Q から $\forall x$ Q を得る
  で置き換えた公理系Q'(A1～A5, B1, B2') は公理系Q
  と等価であることを示せ

  - B2' は一般化 (GEN: generalization)とも呼ばれる

問4.1.4

- 公理系 Q ⇒ 公理系Q'の証明：
  公理系Qの基でA5, B2' が証明可能であることを示す

- つまり,
  A5については,　$\vdash_Q \forall x\,(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$
  - ただしPは自由変数xを含まない

  を, B2'については,　$P \vdash_Q \forall x\, P$

  を示せばよい

問4.1.4

- A5: $\vdash_Q \forall x\,(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$
  - ただしPは自由変数xを含まない

→ 問4.1.2(3)の証明と同じ

- B2': $P \vdash_Q \forall x\, P$

→ 例4.1.2(2)の証明と同じ

問4.1.4

- 公理系 Q‘ ⇒ 公理系Qの証明 :
  公理系Q‘の基でB2 が証明可能であることを示す

- つまり, B2について, $P \to Q \vdash_{Q'} P \to \forall x\, Q$
  - ただしPは自由変数xを含まない

を示せばよい

問4.1.4

- B2: $P \to Q \mid\!-_{Q'} P \to \forall x\, Q$
  - ただしPは自由変数xを含まない

  - 1. $P \to Q$ (仮定)
  - 2. $\forall x\, (P \to Q)$ (B2')
  - 3. $\forall x\, (P \to Q) \to (P \to \forall x\, Q)$ (A5)
    - ただし, Pは自由変数xを含まない
  - 4. $P \to \forall x\, Q$ (2, 3とMP)

A5: $\forall x\, (P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$

[参考] 自然演繹 NK

- 本講義の証明体系: ヒルベルト流証明体系の一つ(HK)
  - 出来るだけ少ない数の推論規則で済ませるという流儀
  - 公理と推論規則の選び方が異なる様々な体系が存在
    - 例) 最も単純な体系SK

- 自然演繹 (NK) : より直感的な証明体系
  - ゲンツェン流の証明体系の一つ
  - 多くの推論規則を持つ
    - 各論理演算子に対して導入規則と除去規則
    - 証明の記述に木構造を用いる

$$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \quad (\wedge\mathrm{I}: \wedge\text{の導入規則})$$

コンパクト性定理

- [定理4.2.6] Γの任意の有限部分集合に対してそれぞれモデルがあるならば，Γはモデルを持つ
  - モデル: 与えられた論理式集合内の全ての論理式を真とするような解釈
  - [解釈] 論理式の集合に対して，その任意の有限部分集合が個別に充足可能ならば，集合全体を同時に充足する解釈が存在する
- 逆も明らかに成り立つ．従って，
  - 1) Γの任意の有限部分集合がモデルを持つ
  - 2) Γはモデルを持つ

  は同値

妥当性と完全性

- (第一階)述語論理においても妥当性(健全性)と完全性が成り立つ

- 健全性定理:　$\vdash P \Rightarrow \models P$
  - Pは公理系Qの定理である ⇒ Pは恒真である
- 完全性定理:　$\models P \Rightarrow \vdash P$
  - Pは恒真である ⇒ Pは公理系Qの定理である
    - 恒真(妥当)なものは必ず証明可能

- 証明は省略