１ アルゴリズムとプログラミング

(1)

(1-1)

1 4 8

1 2 3

3 3 3

3

(1-2)

10 回

$9 < \log_2 1000 < 10$ であるため

(1-3)

N=4, A[1]=2, A[2]=4, A[3]=8, A[4]=16, x=16

探索範囲が 2 つになったときに結果を見つけることが出来なかった場合，mid の値が変化しなくなり無限ループが発生する．

(2)

(2-1)

sack[i][j]	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10	j=11	j=12	j=13	j=14	j=15
i=0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
i=1	0	-1	20	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
i=2	0	-1	20	-1	-1	-1	30	-1	50	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
i=3	0	-1	20	-1	-1	-1	30	-1	50	-1	-1	-1	45	-1	65	-1
i=4	0	-1	25	-1	45	-1	30	-1	55	-1	75	-1	45	-1	70	-1

(2-2)

(ア)

sack[i][index] – sack[i-1][index-size[i]]

(イ)

value[i]

$\boxed{2}$ 【必須問題】計算機システムとシステムプログラム

(1) 浮動小数点

(1-1)
$[0.101]_2$

(1-2)
(a) 0 01111 1010000000
(b) 0 10001 0100000000
(c) 0 01100 0000000000
(d) 0 01011 1001100110

(1-3)
0.1 を 2 進数の小数で表現する場合，仮数部のビット列 f が循環してしまう．したがって，仮数部の 10 ビットに収める際に値が丸め込まれるために誤差が生じる．

(2) メモリ管理

(2-1)
(エ)，(オ)，(イ)，(ア)，(ウ)

(2-2)
(a) (キ)
(b) (オ)
(c) (サ)
(d) (キ)
(e) (イ)
(f) (キ)
(g) (ク)
(h) (コ)
(i) (カ)

(2-3)

ページ枠	○	○	○	○		○			○	○		
1	0	0	0	0	0	1	1	3	4	2	2	0
2		1	1	1	1	2	3	4	2	1	0	5
3			2	2	2	3	4	2	1	0	5	1
4				3	3	4	2	1	0	5	1	2

図 1　LRU 法 (最近使われたページほど下にくる)

ページ枠	○	○	○	○		○			○	○	○	○
1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	4	0
2		1	1	1	1	2	2	2	3	4	0	5
3			2	2	2	3	3	3	4	0	5	1
4				3	3	4	4	4	0	5	1	2

図 2　FIFO 法

(2-4)
(イ)

(イ) のプログラムでは連続したメモリ領域にアクセスすることになるため，同じページを複数回要求することはない．しかし，(ア) のプログラムでは断続したメモリ領域にアクセスするため，一度要求したページがスワップアウトした後にもう一度要求されるということが起こる．したがって (イ) のプログラムの方がページ要求及び置換回数が少なくなり，結果的に処理時間が短くなる．

問 3　離散構造（2014 年、担当：竹之内）

(1)

(1-1-1) (b)

真:$p(u) \leftarrow (u \geq 0), a \leftarrow 1, b \leftarrow 1$

偽:$p(u) \leftarrow (u > 0), a \leftarrow 1, b \leftarrow 1$

(1-1-2)(b)

真:$p(u) \leftarrow (u = 0), q(u) \leftarrow (u = 0)$

偽:$p(u) \leftarrow (u = 0), q(u) \leftarrow (u > 0)$

(1-1-3)(a)

(1-2)

(1-2-1)

$$\begin{aligned}
\neg E &= A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \\
&= \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)) \wedge \forall x \exists y p(x,y) \wedge \exists y \neg p(z,z) \\
&= \exists u \forall x \exists v \forall y \forall z ((p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \wedge ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z)) \wedge p(x,v) \wedge \neg p(u,u)) \\
&= \exists u \forall x \exists v \forall y \forall z ((\neg p(x,y) \vee p(y,x)) \wedge (\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z)) \wedge p(x,v) \wedge \neg p(u,u))
\end{aligned}$$

(1-2-2)

$u \leftarrow a, v \leftarrow f(x)$ とおく.

$$\neg E' = \forall x \forall y \forall z ((\neg p(x,y) \vee p(y,x)) \wedge (\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z)) \wedge p(x,f(x)) \wedge \neg p(a,a))$$

(1-2-3)

1. $\neg p(x,y) \vee p(y,x)$
2. $\neg p(x,y) \vee \neg p(y,z) \vee p(x,z)$
3. $p(x,f(x))$
4. $\neg p(a,a)$

(1. で $x \leftarrow a, y \leftarrow f(a), z \leftarrow a$ より)

5.$\neg p(a,f(a)) \vee p(f(a),a)$

(2. で $x \leftarrow a, y \leftarrow f(a), z \leftarrow a$ より)

6.$\neg p(a,f(a)) \vee \neg p(f(a),a) \vee p(a,a)$

(3. で $x \leftarrow a$ より)

7.$p(a,f(a))$

(5.,7. より)

8.$p(f(a),a)$

(6.,7. より)

9.$\neg p(f(a),a) \vee p(a,a)$

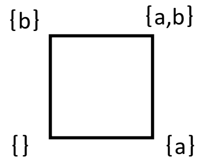
(8.,9. より)
10.$p(a,a)$
4 と 10 より空節が導出される．
(2)
(2-1)
(2-1-1) 成立する　(2-1-2) 成立しない　(2-1-3) 成立する
(2-2)
$A=\{a,b\}$ とすると $P(A)=\{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ であり、

$$\begin{aligned}R_{P(A)} = \{&(\{\},\{a\}),(\{\},\{b\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{b\},\{a,b\}),\\ &(\{\},\{\}),(\{a\},\{a\}),(\{b\},\{b\}),(\{a,b\},\{a,b\})\}\end{aligned}$$

となる．よって、$|R_{P(A)}|=8$　(答)
(2-3)
まず、$(a,b)\in R_{P(A)}$ のうち $a\neq b$ であるものの個数 N_1 を求める．$Q_{P(A)}(k)=\{e\in P(A)||e|=k\}$ を考えると、$(e_1,e_2)\in Q_{P(A)}(k-1)\times Q_{P(A)}(k)$ に対し、$(e_1,e_2)\in R_{P(A)}$ であるものは $k\times|Q_{P(A)}(k)|=k\times {}_nC_k$ 個ある．よって、

$$\begin{aligned}N_1 &= \sum_{k=1}^{n} k\times {}_nC_k\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\times\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\times {}_{n-1}C_{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

また、$(a,b)\in R_{P(A)}$ のうち $a=b$ であるものの個数は $N_2=|P(A)|=2^n$ より、求める数は $N_1+N_2=(n+2)2^{n-1}$　(答)
〇別解
この問題はべき集合のハッセ図を描いたときにできる n 次元立方体の辺の数と頂点の数の和を求める問題として考えることができる．たとえば、(2-2) のときは $n=2$ なので以下のような正方形を考えればよい．辺の数は 4、頂点の数は 4 なので、(2-2) の答えは 8 となる．



ここで、n 次元立方体の頂点の数はべき集合の要素数に等しいので、2^n 個である．次に辺の数 a_n を求める．n 次元立方体の辺の数の 2 倍と頂点の数の和が、$n+1$ 次元立方体の辺の数になることが知られているので、次の漸化式が成立する．$a_1 = 1$ であり、

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{a_n}{2^{n-1}} + 1$$

$\frac{a_n}{2^{n-1}}$ は等差数列であるので、

$$\frac{a_n}{2^{n-1}} = n \Leftrightarrow a_n = n2^{n-1}$$

以上より n 次元立方体の辺の数と頂点の数の和は $(n+2)2^{n-1}$ 　(答)

(2-4)

$$R^*_{P(A)} = \{(a,b) \in P(A) \times P(A) | a \subseteq b\}$$

である．この要素数を求める．$e_1 \in Q_{P(A)}(k)$ に対し、$e_1 \subseteq e_2$ のとき、$(e_1, e_2) \in R^*_{P(A)}$ である．このとき e_1 につき e_2 は 2^{n-k} 個存在し、$|Q_{P(A)}(k)| = {}_nC_k$ より、

$$\begin{aligned} |R^*_{P(A)}| &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 2^{n-k} \\ &= (1+2)^n \\ &= 3^n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 計算理論

(1)

(1-1)

反射性、対称性、推移性を示す

・反射性

$\hat{\delta}(p,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(p,w)$ なので 反射性が成立

・対称性

$\hat{\delta}(p,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q,w)$ ならば $\hat{\delta}(q,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(p,w)$ なので対称性が成立

・推移性

$\hat{\delta}(p,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q,w)$ かつ $\hat{\delta}(q,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,w)$ ならば $\hat{\delta}(p,w) \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,w)$ なので推移性が成立

以上より、状態集合 Q 上の 2 項関係 $\simeq$ は、Q 上の同値関係である。

(1-2)

k 等価性による分割をする。

0							1	
c	d	e	f	g	h	i	a	b
00	00	00	00	01	10	10	00	00

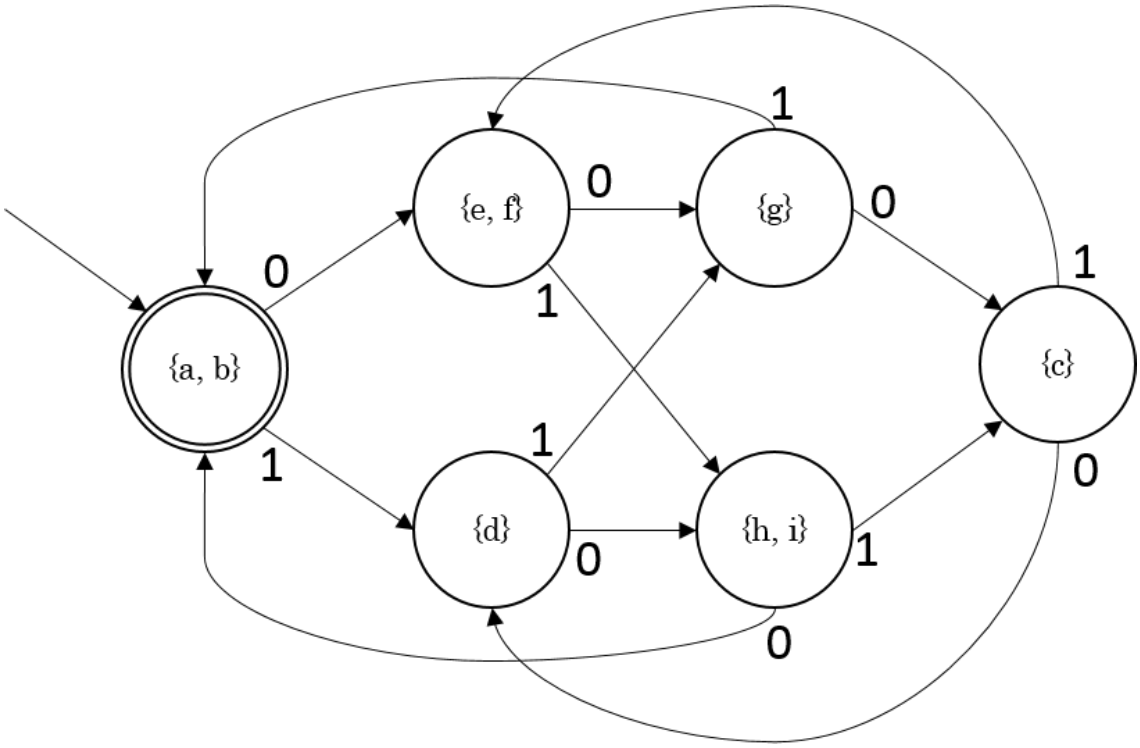
0				1	2		3	
c	d	e	f	g	h	i	a	b
00	21	12	12	03	30	30	00	00

0	1	2		3	4		5	
c	d	e	f	g	h	i	a	b
12	43	34	34	05	50	50	21	21

同値類は、

{c}, {d}, {e, f}, {g}, {h, i}, {a, b}

(1-3)



(1-4)

M_2の状態は(1-2)の同値類に対応するので、M_2の任意の 2 状態は区別可能である。

ここで、$\mathrm{L}(M_2) = L(M_3)$ 状態数がM_2よりも少ないM_3が存在すると仮定する。

M_3がM_2より状態数が少ないため、M_2のある 2 つの状態p_1, p_2がM_3のある状態pに対応する。

M_3の$\hat{\delta}(p, w)$が受理となるある文字列wについて、

M_2の$\hat{\delta}(p_1, w)$と$\hat{\delta}(p_2, w)$がともに受理とならなければならないが、

これはM_2においてp_1とp_2が区別可能であることに矛盾。

よってM_2の状態数が最小である。

(2)

(2-1)

ⓐ 10

ⓑ 5

ⓒ a

ⓓ ab

ⓔ b

ⓕ b^{K-1}

ⓖ vw^ixy^iz

ⓗ aaaaA_1bbbb

ⓘ aA_1b

(2-2)

ⓙ c^K

ⓚ $|vx| \leqq K$

ⓛ 終端記号 c の個数は K 個だが、終端記号 a または b の個数が K 個未満である

ⓜ 終端記号 a を含まない

ⓝ 終端記号 a, b, c を同時に含む

ⓞ 終端記号 b を K 個と終端記号 a, c をいくつか含むため反復補題の条件(i)を満たさない