計算理論（Theory of Computation）
第１回

- **担当**：増澤 利光　masuzawa@ist.osaka-u.ac.jp
  　　　中川 博之　nakagawa@ist.osaka-u.ac.jp
- **ＴＡ**：吉田 征樹（M1）　m-yoshida@ist.osaka-u.ac.jp
  - ミニレポート採点，質問対応
- **オフィスアワー**：メールで質問等に対応
- **成績**：試験（中間／期末）７割，ミニレポート ３割
- **ミニレポート**
  - 大阪大学CLEの「コンテンツ／ミニレポート」で課題提示，レポート提出
- **講義資料等の配布**
  - 大阪大学CLEの「コンテンツ／講義資料」からダウンロード可能
- **講義ビデオの視聴**
  - 大阪大学CLEの「コンテンツ／講義映像」で視聴
    - タイトルが「計算論A」になっていることがあります

計算理論の内容

- **内容**：オートマトンと形式言語
- **テキスト**
  - ホップクロフト，モトワニ，ウルマン「オートマトン 言語理論 計算論Ｉ［第2版］」サイエンス社(2003)

- **計算機科学の基礎理論**
  - 抽象的な計算モデル（オートマトン）での議論
    - 実計算機システムではない
  - きっちりとした形式的議論
- **何の役に立つのか**
  - 計算機の「計算の原理」の解明
    - 計算機は，何でも計算できるのか？
    - どれだけ速く計算できるのか？
  - アセンブラやコンパイラの設計に必須
  - ソフトウェア／ハードウェアシステムの設計の基礎

受講上の注意（１）

- **内容は難しくないが，積み重ねが肝心**
  - 予備知識は不要
  - 最初の定義，表記法等を理解していないと，後は理解できない
  - パズル的な思考の愉しみがある
- **講義ではエッセンスのみの紹介**
  - テキストによる自習の補助
  - 毎週１時間程度の予習・復習が必要
    テキストの自習，ミニレポート回答

受講上の注意（２）

- **質問**
  - 増澤，中川，ＴＡに直接尋ねる
    ＊オフィスアワー
    　随時，メールで連絡してください
    　必要に応じて，オンライン面談を実施

講義の予定(前半:増澤担当)

- 予定
  - 第1回　イントロダクション，言語と決定性有限オートマトン
  - 第2回　非決定性有限オートマトン
  - 第3回　正則表現
  - 第4回　有限オートマトンと正則表現
  - 第5回　正則言語の性質
  - 第6回　有限オートマトンの等価性と最小性
  - 第7回　中間試験(第1～6回分)

※ 日程、内容を都合により変更することがあります

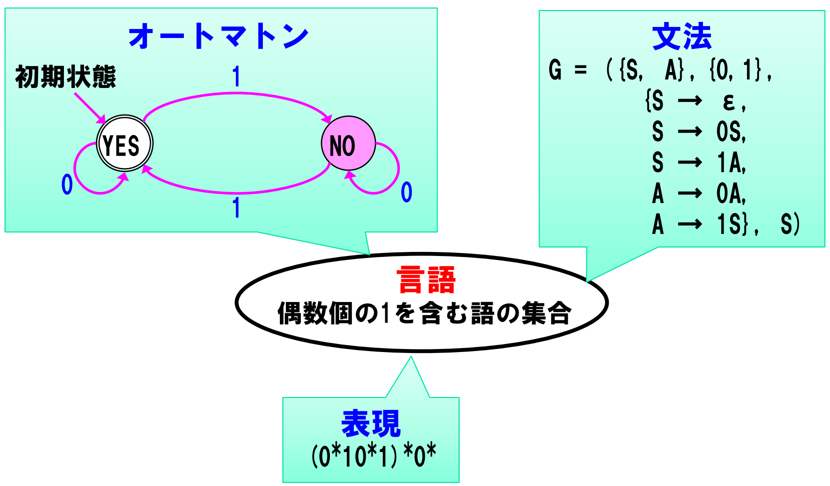
講義の予定(後半:中川担当)

- 予定
  - 第8回　文脈自由文法と構文木
  - 第9回　文脈自由文法の応用
  - 第10回 プッシュダウンオートマトン
  - 第11回 文脈自由言語の標準形
  - 第12回 文脈自由言語の反復補題
  - 第13回 文脈自由言語の閉包性と決定問題
  - 第14回 チューリングマシンと決定可能性
  - 第15回 演習と解説
  - 第16回 期末試験(第8～14回分)

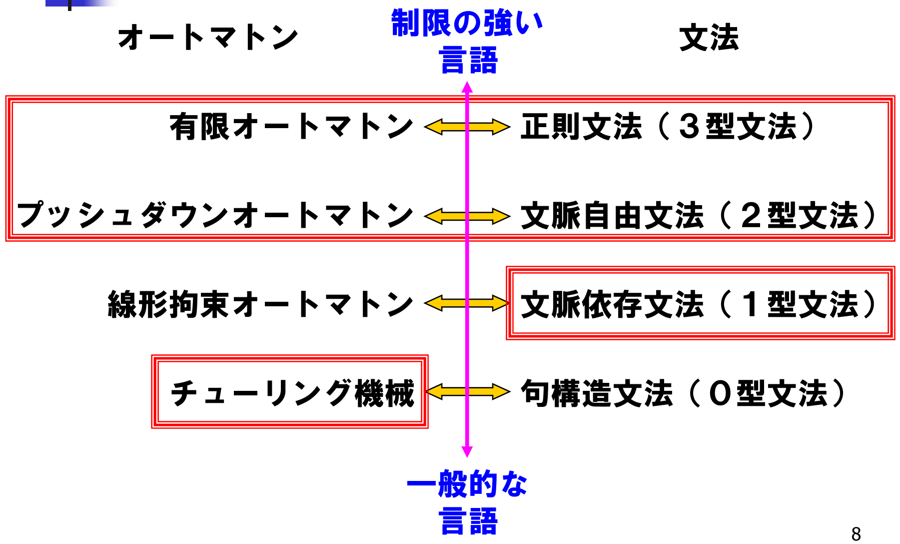
※ 日程、内容を都合により変更することがあります

オートマトン，文法，表現

言語を指定する方法



オートマトンと文法の対応



本日の内容

- 言語（第1.5節）
  - アルファベット
  - 文字列（語）
  - 言語
  - 問題
- 決定性有限オートマトン（第2.2節）
  - 決定性有限オートマトン（DFA）
  - 状態遷移図
  - 状態遷移表
  - 状態遷移関数の拡張
  - DFA の言語

本日の学習目標

- 言語に関する用語の定義を述べ、例を用いて説明できる
- 決定性有限オートマトンとは何か、例を用いて説明できる
- 決定性有限オートマトンが状態遷移図／状態遷移表で与えられたとき，その動作をトレースできる
- 決定性有限オートマトンが与えられたとき，その言語を説明できる
- 指定された言語を受理する決定性有限オートマトンを設計でき，状態遷移図／状態遷移表で表現できる

1.5 オートマトン理論の中心概念
1.5.1 アルファベット

1.1 から 1.4 は読んでおくこと

- 記号
  - 英大文字，数字，ひらがな，かたかな，漢字など
- アルファベット
  - 記号の空でない有限集合
  - Σ で表すことが多い
    - $\Sigma = \{0,1\}$
    - $\Sigma = \{a, b, \cdots, z\}$

1.5.2 文字列(1)

- 文字列（あるいは語）：アルファベット Σ の記号の有限列
  - 01101，11
- 空列（空語）：0 個の記号からなる文字列．ϵ で表す（$\epsilon \notin \Sigma$）
- $|w|$：語 w の長さ．$|01101| = 5, |11| = 2, |\epsilon| = 0$
- Σ^k（アルファベットのベキ）
  - Σ から作られる長さ k の列全体の集合
  - $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$（Σ にかかわらず）
  - $\Sigma = \{0,1\}$ ならば
    - $\Sigma^1 = \{0,1\}$，$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
      $\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,\}$
- $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \cdots$：長さ１以上の列全体の集合
- $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \cdots = \Sigma^+ \cup \{\epsilon\}$：長さ０以上の〃

1.5.2 文字列(2)

- 列の**連接** xy
  - 列 x と y をつなげて得られる列
  - $x = a_1 a_2 \cdots a_i$，$y = b_1 b_2 \cdots b_j$ のとき
    $xy = a_1 a_2 \cdots a_i b_1 b_2 \cdots b_j$
  - $\epsilon w = w \epsilon = w$

1.5.3 言語

- Σ 上の**言語** L
  - $L \subseteq \Sigma^*$
    - 言語の例
      - ある $n \geq 0$ について，n 個の 0 の後に n 個の 1 が並んだ列からなる言語：$\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \cdots\}$
      - 0 と 1 とが同じ数だけ含まれている列からなる言語：$\{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, \cdots\}$
    - Σ^* は Σ 上の言語
    - $\emptyset$ は任意の Σ 上の言語
    - $\{\epsilon\}$ は任意の Σ 上の言語

1.5.4 問題

- 文字列 $w \in \Sigma^*$ と言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対し，
  $w \in L$ かどうかを判定する
  - L **にかかわる帰属性問題**
  - **問題** L （**判定問題**，**決定問題**と呼ぶことが多い）

本日の内容

- **言語（第1.5節）**
  - アルファベット
  - 文字列（語）
  - 言語
  - 問題
- **決定性有限オートマトン（第2.2節）**
  - 決定性有限オートマトン（DFA）
  - 状態遷移図
  - 状態遷移表
  - 状態遷移関数の拡張
  - DFA の言語

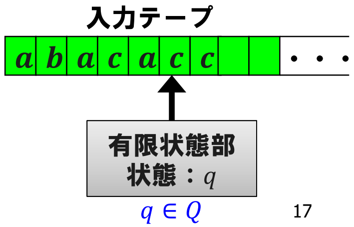
2.2 決定性有限オートマトン

2.1 は読んでおくこと

2.2.1 決定性有限オートマトンの定義(1)

- **決定性有限オートマトン（DFA）** $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q ：**状態の有限集合**（$Q\neq\emptyset$）
  - Σ ：**入力記号の有限集合**（$\Sigma\neq\emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ ：**状態遷移関数** $Q\times\Sigma\rightarrow Q$
  - q_0 ：**開始状態** $q_0\in Q$
  - F ：**受理状態（最終状態）の集合** $F\subseteq Q$

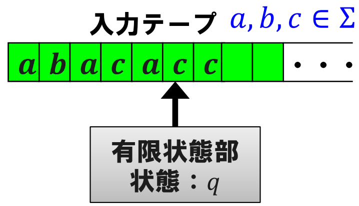
Deterministic **F**inite **A**utomaton



2.2.1 決定性有限オートマトンの定義(1)

- **決定性有限オートマトン（DFA）** $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q ：**状態の有限集合**（$Q\neq\emptyset$）
  - Σ ：**入力記号の有限集合**（$\Sigma\neq\emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ ：**状態遷移関数** $Q\times\Sigma\rightarrow Q$
  - q_0 ：**開始状態** $q_0\in Q$
  - F ：**受理状態（最終状態）の集合** $F\subseteq Q$

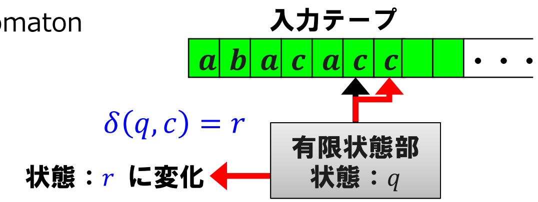
Deterministic **F**inite **A**utomaton



2.2.1 決定性有限オートマトンの定義(1)

- **決定性有限オートマトン（DFA）** $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q ：**状態の有限集合**（$Q\neq\emptyset$）
  - Σ ：**入力記号の有限集合**（$\Sigma\neq\emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ ：**状態遷移関数** $Q\times\Sigma\rightarrow Q$
  - q_0 ：**開始状態** $q_0\in Q$
  - F ：**受理状態（最終状態）の集合** $F\subseteq Q$

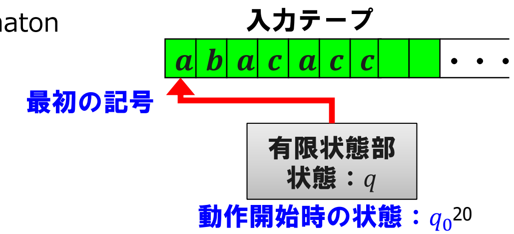
Deterministic **F**inite **A**utomaton



2.2.1 決定性有限オートマトンの定義(1)

- **決定性有限オートマトン（DFA）** $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q ：**状態の有限集合**（$Q\neq\emptyset$）
  - Σ ：**入力記号の有限集合**（$\Sigma\neq\emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ ：**状態遷移関数** $Q\times\Sigma\rightarrow Q$
  - q_0 ：**開始状態** $q_0\in Q$
  - F ：**受理状態（最終状態）の集合** $F\subseteq Q$

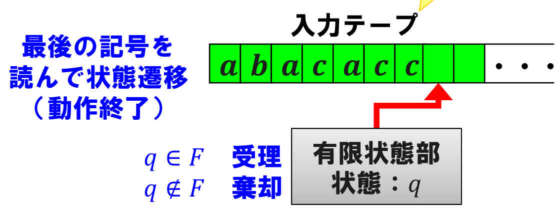
Deterministic **F**inite **A**utomaton



2.2.1 決定性有限オートマトンの定義 (1)

- 決定性有限オートマトン（DFA）　$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q ：**状態**の**有限**集合（$Q \neq \emptyset$）
  - Σ ：**入力記号**の**有限**集合（$\Sigma \neq \emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ ：状態**遷移関数**　$Q \times \Sigma \rightarrow Q$
  - q_0 ：**開始状態**　$q_0 \in Q$
  - F ：**受理状態**（最終状態）の集合　$F \subseteq Q$

$abacacc$ を
受理／棄却したという



2.2.1 決定性有限オートマトンの定義 (2)

- DFA A の**言語**（A が受理する言語）
  A が受理する記号列すべての集合

- 例2.1：$\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x, y \in \Sigma^* [w = x01y]\}$
  - L は $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語で，01 を含む語すべての集合
    - $L = \{01, 010, 001, 011, 101, 0100, 0101, 0110, 0111, \cdots\}$
  - L を受理する DFA を作りたい

まずは，**DFA の表現法**を学ぼう

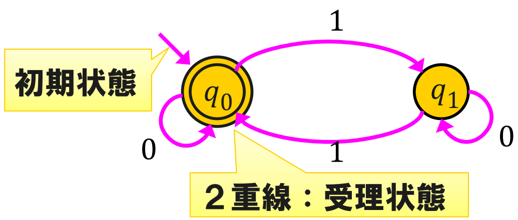
2.2.3 DFA に関する記法 (1)

- DFA $\mathrm{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の**状態遷移図**

$Q = \{q_0, q_1\}$,　$\Sigma = \{0, 1\}$,　$F = \{q_0\}$

δ ：$\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$,
　$\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_0$

状態遷移図



2.2.3 DFA に関する記法 (2)

- DFA $\mathrm{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の**状態遷移表**

$Q = \{q_0, q_1\}$,　$\Sigma = \{0, 1\}$,　$F = \{q_0\}$

δ ：$\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$,
　$\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_0$

初期状態
q_0 が初期状態

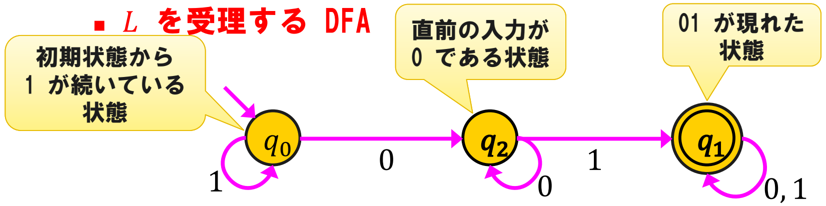
状態遷移表

		0	1
* →	q_0	q_0	q_1
	q_1	q_1	q_0

受理状態
q_0 が初期状態
複数の状態に *
が付くこともある

DFA の例：例2.1（例2.2, 2.3）

- **例2.1：** $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x,y \in \Sigma^* [w = x01y]\}$
  - L は $\Sigma = \{0,1\}$ 上の言語で，01 を含む語すべての集合
    - $L = \{01, 010, 001, 011, 101, 0100, 0101, 0110, 0111, \cdots\}$
  - L を受理する DFA



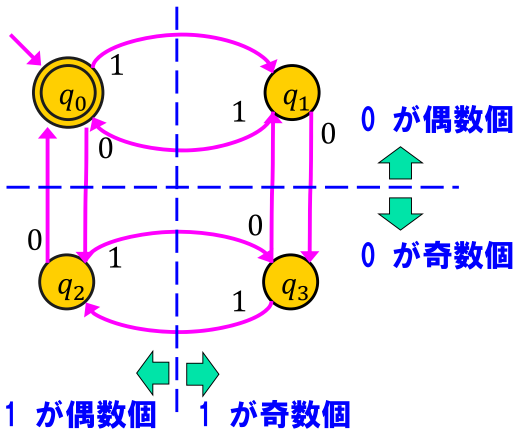
		0	1
→	q_0	q_2	q_0
*	q_1	q_1	q_1
	q_2	q_2	q_1

2.2.4 遷移関数の拡張

- DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $\hat{\delta}$:状態遷移関数 δ の拡張
    - 長さ 0 以上の記号列を読んだときの状態遷移
  - 基礎：各 $q \in Q$ に対して，$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
  - 再帰：各 $q \in Q, w = xa \in \Sigma^+$ $(x \in \Sigma^*, a \in \Sigma)$ に対して，
    $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$
    - $\hat{\delta}(q, 1101) = \delta(\hat{\delta}(q, 110), 1)$
      - $q \in Q$ から 110 を読んで状態遷移した後，1 を読んで遷移

2.2.4 遷移関数の拡張：例2.4

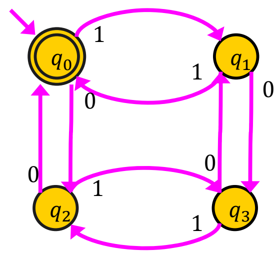
- 例2.4：$\Sigma = \{0,1\}$,
  $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ は偶数個の 0 と偶数個の 1 を含む$\}$
  - $L = \{\epsilon, 00, 11, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, \cdots\}$



$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$$
$$\hat{\delta}(q_0, 1) = q_1$$
$$\hat{\delta}(q_0, 11) = q_0$$
$$\hat{\delta}(q_0, 110) = q_2$$
$$\hat{\delta}(q_0, 1101) = q_3$$
$$\hat{\delta}(q_0, 11010) = q_1$$
$$\hat{\delta}(q_0, 110101) = q_0$$

2.2.5 DFA の言語

- DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の言語 $L(A)$
  - $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_o, w) \in F\}$
    - DFA A が受理する語の集合（言語）
  - 例2.4：$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ は偶数個の 0 と偶数個の 1 を含む$\}$



本日の講義のまとめ

- 言語（第1.5節）
  - アルファベット
  - 文字列（語）
  - 言語
  - 問題
- 決定性有限オートマトン（第2.2節）
  - 決定性有限オートマトン（DFA）
  - 状態遷移図
  - 状態遷移表
  - 状態遷移関数の拡張
  - DFA の言語

本日の学習目標

目標を達成できたか
確認してみよう
（復習も含めて）

- 言語に関する用語の定義を述べ、例を用いて説明できる
- 決定性有限オートマトンとは何か、例を用いて説明できる
- 決定性有限オートマトンが状態遷移図／状態遷移表で与えられたとき，その動作をトレースできる
- 決定性有限オートマトンが与えられたとき，その言語を説明できる
- 指定された言語を受理する決定性有限オートマトンを設計でき，状態遷移図／状態遷移表で表現できる