計算論Ａ　第２回

1. 有限オートマトン
   - ■ 決定性有限オートマトン
   - ■ 非決定性有限オートマトン
   - ■ ϵ-動作を含むオートマトン
2. 正規表現と正規言語
3. 正則言語の性質
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
2.3〜2.5節

2.3 非決定性有限オートマトン

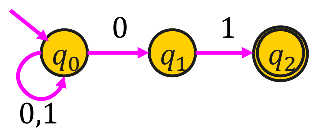
- 非決定性有限オートマトン（NFA）　$A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - Q：状態の有限集合（$Q\neq\emptyset$）
  - Σ：入力記号の有限集合（$\Sigma\neq\emptyset$）
    （入力テープ上の記号）
  - δ：状態遷移関数 $Q\times\Sigma\to 2^Q$
    （2^Q：Q のべき集合（部分集合の集合））
  - q_0：開始状態 $q_0\in Q$
  - F：受理状態（最終状態）の集合 $F\subseteq Q$

次状態が一意に定まらない
・複数の可能性
・ない場合（空集合）もある

開始状態 q_0 から列 w を読んで到達する状態の集合に
受理状態が含まれていると w を受理

例2.6 非決定性有限オートマトンの例

- 末尾が 01 の列を受理する NFA
  - 01, 001, 101, 0001, 0101, 1001, 1101, . . .



NFA　$A=(\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\},\delta,q_0,\{q_2\})$

$\delta(q_0,0)=\{q_0,q_1\}$
$\delta(q_0,1)=\{q_0\}$
$\delta(q_1,0)=\emptyset$
$\delta(q_1,1)=\{q_2\}$
$\delta(q_2,0)=\emptyset$
$\delta(q_2,1)=\emptyset$

	0	1
$\to q_0$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\,q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

実行例

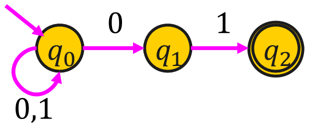
列	状態
0	q_0,q_1
01	q_0,q_2
011	q_0
0110	q_0,q_1
01100	q_0,q_1
011001	q_0,q_2

2.3.3 遷移関数の拡張

- NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$
  - $\hat{\delta}$:状態遷移関数 δ の拡張
    - 長さ 0 以上の記号列を読んだときの状態遷移
    - $\hat{\delta}\ :Q\times\Sigma^*\to 2^Q$
  - 基礎：各 $q\in Q$ に対して，$\hat{\delta}(q,\epsilon)=\{q\}$
  - 再帰：各 $q\in Q, w=xa\in\Sigma^+\ (x\in\Sigma^*, a\in\Sigma)$ に対して，
    $\hat{\delta}(q,w)=\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$
    ここで，$\hat{\delta}(q,x)=\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$
    $\bigcup_{i=1}^{k}\delta(p_i,a)=\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$
- $w\in\Sigma^*$ に対し，$\hat{\delta}(q_0,w)\cap F\neq\emptyset$ なら w を受理
  - q_0 から w を読んで到達する状態の集合に受理状態が含まれていると w を受理

例2.8 遷移関数の拡張

- 末尾が 01 の列を受理する NFA
  - 01, 001, 101, 0001, 0101, 1001, 1101, ...



$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_2\}$
$\hat{\delta}(q_0, 011) = \{q_0\}$
$\hat{\delta}(q_0, 0110) = \{q_0, q_1\}$
$\hat{\delta}(q_0, 01100) = \{q_0, q_1\}$
$\hat{\delta}(q_0, 011001) = \{q_0, q_2\}$

実行例

列	状態
0	q_0, q_1
01	q_0, q_2
011	q_0
0110	q_0, q_1
01100	q_0, q_1
011001	q_0, q_2

2.3.4 NFAの言語

- NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の言語 $L(A)$
  - $L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$
    - q_0 から w を読んで到達する状態の集合に受理状態が含まれていると w を受理

2.3.5 DFAとNFAの等価性

- $\mathcal{D}$：DFA のクラス（DFA すべての集合）
- $\mathcal{N}$：NFA のクラス（NFA すべての集合）
  - $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$　（定義から明らか）
    - 同じ言語を認識するオートマトン
      - NFA は DFA より簡潔になる可能性がある
- $L(\mathcal{D})$:DFA の言語のクラス（DFA の言語すべての集合）
- $L(\mathcal{N})$:NFA の言語のクラス（NFA の言語すべての集合）
  - $L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{N})$
    - 非決定性は有限オートマトンの受理能力には影響を与えない

サブセット構成(1)

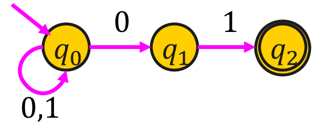
- $L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{N})$
  - $L(\mathcal{D}) \subseteq L(\mathcal{N})$　定義から明らか
  - $L(\mathcal{D}) \supseteq L(\mathcal{N})$ を示せばよい
- サブセット構成
  - NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ が与えられたとき
    - $L(N) = L(D)$ を満たす DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ を構成する方法
    - $L(\mathcal{D}) \supseteq L(\mathcal{N})$ を示せる
  - DFA D の状態を NFA N の状態の集合で表す
    - $Q_D \subseteq 2^{Q_N}$ が成り立つ

サブセット構成(2)

- NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ が与えられたとき
  - $L(N) = L(D)$ を満たす DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ を構成する方法
  1. $Q_D = 2^{Q_N}$ とする
  2. $F_D = \{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$ とする
  3. 各 $S \subseteq Q_N$，各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$ とする

例2.10 サブセット構成(1)

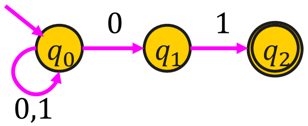
- 末尾が 01 の列を受理する NFA



- 末尾が 01 の列を受理する DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ を構成する
  1. $Q_D = 2^{Q_N}$ とする
     - $Q_D = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
  2. $F_D = \{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$ とする
     - $F_D = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
  3. 各 $S \subseteq Q_N$，各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$ とする

例2.10 サブセット構成(2)

- 末尾が 01 の列を受理する NFA



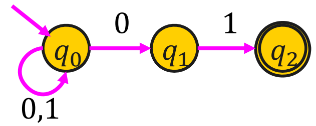
- 末尾が 01 の列を受理する DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ を構成する
  3. 各 $S \subseteq Q_N$，各 $a \in \Sigma$ に対し，$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta\_N(p, a)$ とする

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

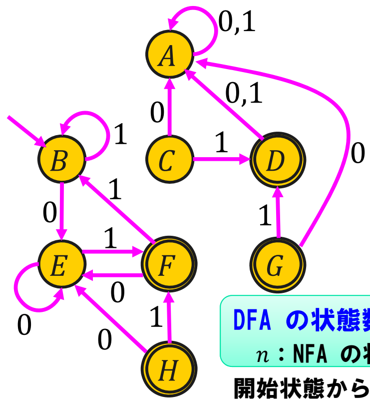
アイデア
非決定性の動作を
すべて同時に
シミュレートしている

例2.10 サブセット構成(3)

- 末尾が 01 の列を受理する NFA



- 末尾が 01 の列を受理する DFA



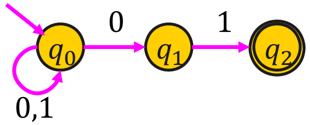
		0	1
A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
B	$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
C	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
D	$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
F	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
F	$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
G	$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
H	$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

DFA の状態数 $= 2^n$
n : NFA の状態数

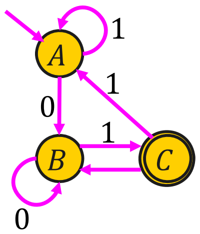
開始状態から到達できない状態も含まれる

例2.10 サブセット構成(4)

- 末尾が 01 の列を受理する NFA



- 末尾が 01 の列を受理する DFA
  - 開始状態から**到達可能な状態のみ**を順次作る
    - DFA 構成の手間を省けることがある



		0	1
A	$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
B	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
C	$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

定理2.11, 定理2.12

テキストの証明は読んでおくこと

【定理2.11】

NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ からサブセット構成によって
DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ が作られたとき,

$$L(D) = L(N)$$

が成り立つ

【定理2.12】

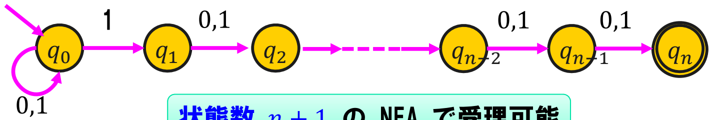
言語 L がある **DFA で受理される**ための必要十分条件は
L がある **NFA で受理される**ことである

＊DFA と NFA の受理能力は等価である

2.3.6 サブセット構成で状態数が増える場合

- NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ に対し, $L(D) = L(N)$ を満たす**状態数最小**の DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ でも, DFAの状態数が NFA の状態数に比べ**指数的に増える**ことがある

- 例2.13：最後から n 番目の記号が 1 である語すべて



状態数 $n+1$ の NFA で受理可能

DFA では直前の n 個の入力を覚えておく必要があり
状態数は 2^n 以上
（テキストの証明を読んでおくこと）

2.4 応用：テキスト検索

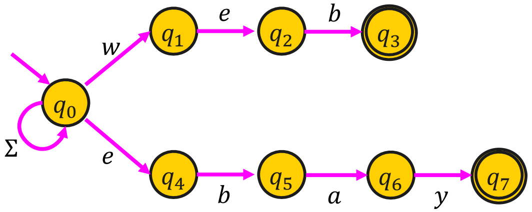
- テキストから特定の**キーワード**を検索する
  - 「データ構造とアルゴリズム」で学習した**文字列照合問題**
    - **１つの**キーワードの検索
    - 力まかせ法, ラビン–カープ法, クヌース–モリス–プラッツ法, ボイヤー–ムーア法

- **複数の**キーワードの検索に**有限オートマトン**を利用
  - $O(m)$ **時間**で検索（m：テキスト長）
  - 検索キーワードに応じた**前処理**（**DFAの構成**）が必要

テキスト検索：NFA による方法

- **複数の**キーワードの検索に NFA を利用
  - **キーワードを発見すれば受理状態**

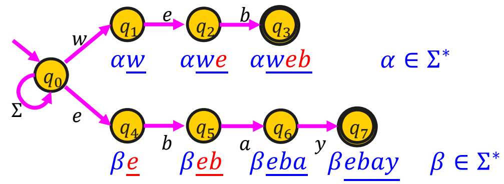
- 例：web, ebay の検索



web, ebay を受理する NFA

テキスト検索：DFA による方法

- **複数の**キーワードの検索に DFA を利用
  - **キーワードを発見すれば受理状態**
  - NFA を**サブセット構成**で DFA に変換
    - （開始状態から到達可能な）**状態数は増加しない**



状態の対応関係

NFA		DFA
q_2	$\leftrightarrow$	$\{q_2, q_4\}$
q_3	$\leftrightarrow$	$\{q_3, q_5\}$

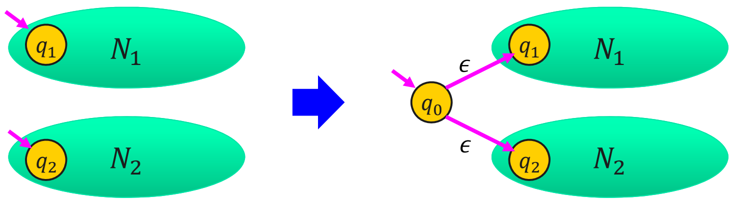
DFA の状態部分集合は**共通接尾辞**を持つ NFA の最長の**接尾辞**を持つ状態に対応

構成される DFA は図2.17

2.5 ϵ-動作を含む有限オートマトン

- **ϵ-動作**
  - ϵ を読んで（**何も読まずに**）状態遷移する
  - **非決定性動作**が発生
  - ϵ-動作を許すと，NFA を**簡潔に表現**できることがある
  - ϵ-動作は **NFA の受理能力には影響を与えない**

- 例：言語 $L = L_1 \cup L_2$ を受理する NFA N
  - N_1（L_1 を受理する NFA），N_2（L_2 を受理する NFA）から N を**合成**



2.5.2 ϵ-NFA の定義

- ϵ-動作を含む NFA（ϵ-NFA）　$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

  Q：**状態**の**有限**集合（$Q \neq \emptyset$）

  Σ：**入力記号**の**有限**集合（$\Sigma \neq \emptyset$）

  　（入力テープ上の記号）

  ϵ-動作（ϵ-遷移）を許す

  δ：状態**遷移関数**　$Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$

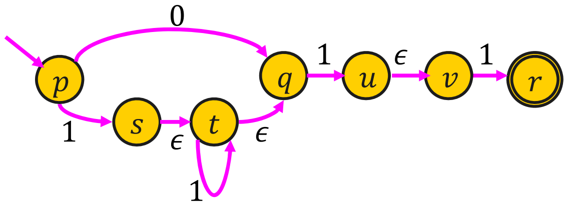
  　（2^Q：Q のべき集合（部分集合の集合））

  q_0：**開始状態**　$q_0 \in Q$

  F：**受理状態**（最終状態）の集合　$F \subseteq Q$

2.5.3 ϵ-閉包

- ϵ-動作は NFA の受理能力には影響を与えないことを示すための準備
- 状態 q の ϵ-閉包 ECLOSE(q)
  - q から ϵ-動作のみで到達可能な状態の集合（qを含む）



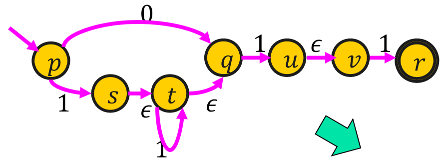
ECLOSE$(s) = \{s, t, q\}$，ECLOSE$(t) = \{t, q\}$，ECLOSE$(u) = \{u, v\}$
その他の状態 x については，ECLOSE$(x) = \{x\}$

2.5.5 ϵ-遷移の除去 (1)

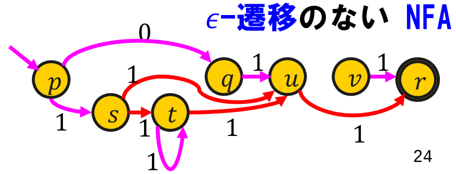
- ϵ-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ から，$L(N) = L(N')$ を満たす，ϵ-動作を含まない NFA $N' = (Q, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2)$を構成する

1. 各状態 $x \in Q$，各入力記号 $a \in \Sigma$ に対し
   $\delta_2(x, a) = \{y \mid z \in$ECLOSE$(x) \land y \in \delta_1(z, a)\}$

y は，x から a で遷移可能，または，
x から ϵ 遷移の後に a で遷移可能



ϵ-遷移のない NFA

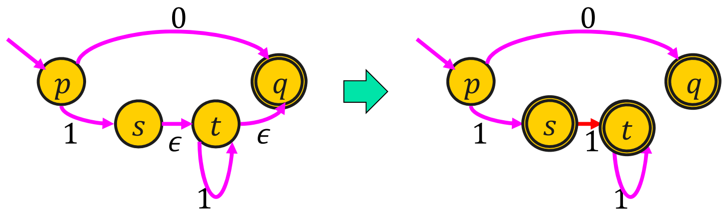


2.5.5 ϵ-遷移の除去 (2)

- ϵ-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ から，$L(N) = L(N')$ を満たす，ϵ-動作を含まない NFA $N' = (Q, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2)$を構成する

2. 受理状態集合 $F_2 = \{y \in Q \mid F_1 \cap$ECLOSE$(y) \neq \emptyset\}$

y から ϵ 遷移で受理状態に到達可能



本日の講義のまとめ

1. 有限オートマトン
   - 決定性有限オートマトン（DFA）
   - 非決定性有限オートマトン(NFA)
   - DFA と NFA の等価性，サブセット構成
   - 応用：テキスト検索
   - ϵ-NFA，NFA との等価性

テキスト
2.3～2.5節

2. 正則言語の性質
3. 文脈自由文法と言語
4. プッシュダウン・オートマトン
5. 文脈自由言語の性質
6. チューリングマシン