計算論Ａ　第４回

テキスト
3.2.3〜3.4節

3.2 有限オートマトンと正則表現

- 有限オートマトンが受理する言語のクラスと、正則表現で定義できる言語のクラスは一致する

(1) 任意の有限オートマトン A に対し，$L(A)$ を表す正則表現 R が存在する（3.2.1節，3.2.2節）
- A を DFA と仮定してよい

(2) 任意の正則表現 R に対し，$L(R)$ を受理する有限オートマトンが存在する（3.2.3節）
- A を ϵ-NFA と仮定してよい

3.2.3 正則表現からオートマトンへの変換

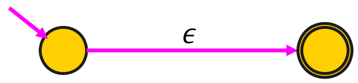
【定理3.7】正則表現で表される言語はすべて有限オートマトンの受理集合である．

証明の方針
- 正則表現 R の構造に関する帰納法
- 任意の正則表現 R に対して，$L(E) = L(R)$ となる ϵ-NFA E を構成する

正則表現から ϵ-NFA への変換：基礎

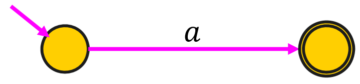
- 帰納法の基礎

1. ϵ，$\emptyset$ は正則表現
   - ϵ



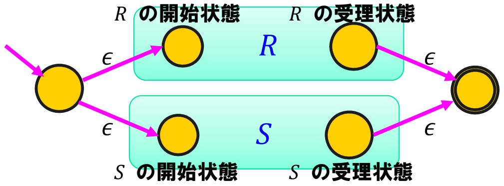
   - $\emptyset$

2. $a \in \Sigma$ に対し，a は正則表現

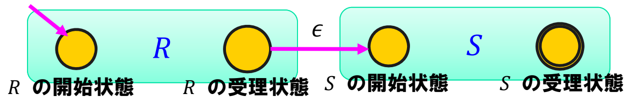


正則表現から ϵ-NFA への変換：帰納(1)

- **帰納**
  1. R, S **が正則表現** $\Rightarrow$ $R+S$ **も正則表現**

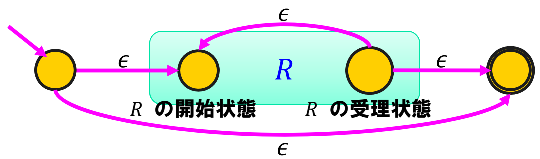


  2. R, S **が正則表現** $\Rightarrow$ RS **も正則表現**

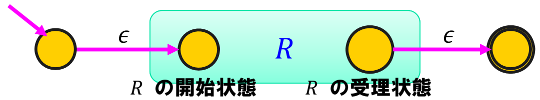


正則表現から ϵ-NFA への変換：帰納(2)

- **帰納**
  3. R **が正則表現** $\Rightarrow R^*$ **も正則表現**

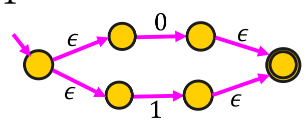


  4. R **が正則表現** $\Rightarrow (R)$ **も正則表現**

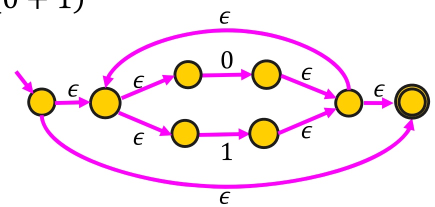


正則表現から ϵ-NFA への変換：例3.8(1)

- $(0+1)^*1(0+1)$**の** ϵ-**NFA への変換**
  - $0+1$

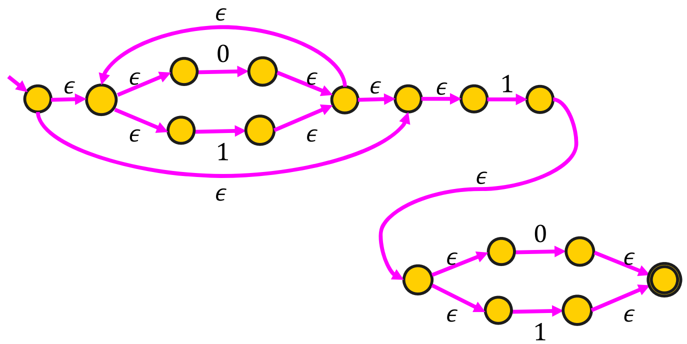


  - $(0+1)^*$



正則表現から ϵ-NFA への変換：例3.8(2)

- $(0+1)^*1(0+1)$**の** ϵ-**NFA への変換**



3.4 正則表現の代数的法則
3.4.1 結合法則と交換法則

3.3 正則表現の応用
は読んでおくこと

正則表現の簡単化のために利用できる法則

- L, M, N：任意の正則表現
- 集合和に関する交換法則

  $L + M = M + L$
- 集合和に関する結合法則

  $(L + M) + N = L + (M + N)$
- 連接に関する結合法則

  $(LM)N = L\,(MN)$

- 連接に関する交換法則は成立しない

  $LM = ML$ は一般には成立しない

3.4.2 単位元と零元

- L：任意の正則表現
- 集合和に関する単位元

  $\emptyset + L = L + \emptyset = L$
- 連接に関する単位元

  $\epsilon L = L\epsilon = L$
- 連接に関する零元

  $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

3.4.3 分配法則 (1)

- L, M, N：任意の正則表現
- 集合和に対する連接の左分配法則（定理3.11）

  $L(M + N) = LM + LN$
- 集合和に対する連接の右分配法則

  $(M + N)L = ML + NL$

3.4.3 分配法則 (2)

- 集合和に対する連接の左分配法則（定理3.11）

  $L(M + N) = LM + LN$

証明

- $L(M + N) \subseteq LM + LN$ の証明
  - $w \in L(M + N)$ ならば，$w = xy\ (x \in L, y \in M + N)$ と書ける
    $y \in M$ ならば，$w = xy \in LM$
    $y \in N$ ならば，$w = xy \in LN$
    従って，$w \in LM + LN$
- $LM + LN \subseteq L(M + N)$ の証明
  - $w \in LM + LN$ ならば，$w \in LM$ または $w \in LN$
    $w \in LM$ ならば，$w = xy\ (x \in L, y \in M)$ と書け，$w \in L(M + N)$
    $w \in LN$ ならば，$w = xy\ (x \in L, y \in N)$ と書け，$w \in L(M + N)$

3.4.3 分配法則(3)

- **例3.12　$0+01^*$ の簡単化**
  - $0+01^* = 0\epsilon + 01^*$ （ϵ が連接に関する単位元）
    $= 0(\epsilon + 1^*)$ （左分配法則）
    $= 01^*$ （$\epsilon \in 1^*$ なので，$\epsilon + 1^* = 1^*$）

3.4.4 冪等法則

- L：任意の正則表現
- **集合和に関する冪等法則**
  $L + L = L$

3.4.5 閉包に関する法則

- L：任意の正則表現
- $(L^*)^* = L^*$
- $\emptyset^* = \epsilon$
- $\epsilon^* = \epsilon$
- $L^+ = LL^* = L^*L$
  - $L^+ = L + LL + LLL + LLLL + \cdots$
- $L^* = L^+ + \epsilon$
- $L? = \epsilon + L$ （$L?$ の定義）

3.4.6 正則表現に関する法則の発見(1)

定理3.13

E：変数 $L_1, L_2, \ldots, L_m$ を含む正則表現

C：E 中の各 L_j を記号 a_j で置換して得られる正則表現

$L(E)$：E 中の $L_1, L_2, \ldots, L_m$ をそれぞれ具体的な言語と見たときに E が表す言語

$L(E)$ は，$L(C)$ の要素（例えば，$a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k}$）の各記号 a_{j_i} を対応する言語 L_{j_i} の任意の要素で置換することによって得られる列全体に等しい

＊記号 a_{j_i} の異なる出現を L_{j_i} の異なる要素で置換してよい

3.4.6 正則表現に関する法則の発見(2)

定理3.13：例

$E = A^*(A+B)$

$C = a^*(a+b)$

$L(E)$：$\mathrm{A} = (01)^*$, $\mathrm{B} = (101)^*$ としたときに E が表す言語

$L(E)$ は，$L(C)$ の要素の記号 a, b それぞれを言語 A, B それぞれの任意の要素で置換することによって得られる列全体に等しい

$aab \in L(C)$

$a \leftarrow 01,\ a \leftarrow \epsilon,\ b \leftarrow 101 \Rightarrow 01101 \in L(E)$

$a \leftarrow 0101,\ a \leftarrow 01,\ b \leftarrow 101101 \Rightarrow 010101101101 \in L(E)$

3.4.6 正則表現に関する法則の発見(3)

定理3.13 の証明

- 正則表現 E の構成に関する帰納法
- 基礎
  - $E = \epsilon$ または $E = \emptyset$ のときは，$E = C$ となり明らか
  - $E = A$（変数単独）のとき
    - $C = a$ となる
    - a を $L(A)$ の要素で置換して得られる列全体が $L(A)$ に等しいのは明らか

3.4.6 正則表現に関する法則の発見(4)

定理3.13 の証明（つづき）

- 帰納
  - $E = F + G$ のとき
    - C：F 中の変数を記号に置換して得られる正則表現
    - D：G 中の変数を記号に置換して得られる正則表現
      - F, G 中の同じ変数は同じ記号で置換しておく
    - E から置換で得られる正則表現は $C + D$
    - E 中の変数を具体的な言語とみたとき，
      $w \in L(E)$ ならば，$w \in L(F)$ または $w \in L(G)$
      - 帰納仮定より，$L(F)$ は $L(C)$ の要素の記号を対応する言語の要素に置換して得られる列の集合に一致する
      - $L(G)$ についても同様
  - $E = FG$, $E = F^*$ の場合も同様

3.4.7 正則表現に関する法則の検証(1)

- E, F：変数を含む正則表現
- $E = F$ かどうかを検証したい
  - E, F の変数をどのような言語と見ても $L(E) = L(F)$ が成立するかどうかを検証したい

1. E, F に現れる各変数を記号に置換して得られる正則表現を C, D とする
2. $L(C) = L(D)$ かどうかを調べる
   - $L(C) = L(D)$ なら $E = F$ が成立
   - $L(C) \neq L(D)$ なら $E = F$ が不成立

3.4.7 正則表現に関する法則の検証(2)

定理3.14　この判定法により，$E = F$ か否かを判定できる

証明：$E = F \Leftrightarrow L(C) = L(D)$ を示す

- $E = F \Rightarrow L(C) = L(D)$
  - E, F の変数に任意の言語を代入しても $L(E) = L(F)$
  - E, F から C, D を作るときに，変数 A に記号 a を代入したなら，A に言語 $\{a\}$ を代入する
    - $L(E) = L(C)$, $L(F) = L(D)$ となる
    - $L(E) = L(F)$ より，$L(C) = L(D)$
- $L(C) = L(D) \Rightarrow E = F$
  - $L(E), L(F)$：E, F の変数に任意の言語を代入して得られる言語
  - $L(E)$ は，$L(C)$ の記号を対応する言語の要素で置換して得られる列の集合に一致する（定理3.13）．$L(F)$ についても同様．
  - $L(C) = L(D)$ より，$L(E) = L(F)$

3.4.7 正則表現に関する法則の検証(3)

例3.15(1)　$(L + M)^* = (L^*M^*)^*$

- L を記号 a で，M を記号 b で置換する
  - 左辺＝$(a + b)^*$，右辺＝$(a^*b^*)^*$
  - 左辺，右辺とも，a, b からなる列全体の集合
  - 従って，$(L + M)^* = (L^*M^*)^*$ が成立

3.4.7 正則表現に関する法則の検証(4)

例3.15(2)　$L^* = L^*L^*$

- L を記号 a で置換する
  - 左辺＝a^*，右辺＝a^*a^*
  - 左辺，右辺とも，a からなる列全体の集合
  - 従って，$L^* = L^*L^*$ が成立

3.4.7 正則表現に関する法則の検証(5)

例3.15(3)　$L + ML = (L + M)L$

- L を記号 a で，M を記号 b で置換する
  - 左辺＝$a + ba$，右辺＝$(a + b)a$
  - 左辺，右辺は等しくない
    - $aa \notin L(a + ba)$，$aa \in L((a + b)a)$
  - 従って，$L + ML = (L + M)L$ は成立しない

本日の講義のまとめ

1. 有限オートマトン
2. 正則表現と正則言語
   - 正則表現から有限オートマトンへ
   - 正則表現の代数的法則
3. 正則言語の性質
4. 文脈自由文法と言語
5. プッシュダウン・オートマトン
6. 文脈自由言語の性質
7. チューリングマシン

テキスト
3.2.3～3.4節