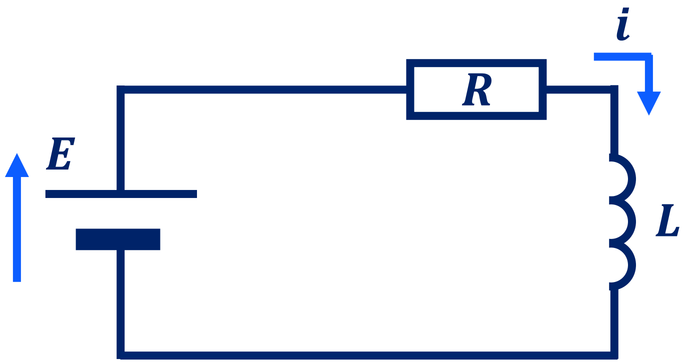
電子回路：第7回　過渡解析

基礎工学部情報科学科
粟野 皓光
awano@ist.osaka-u.ac.jp

電気回路の解析パターン

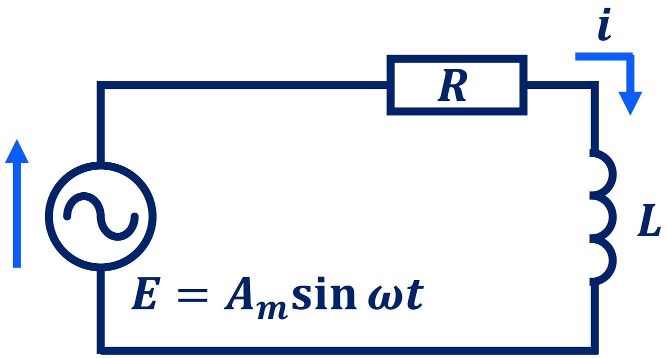
DC解析



一定電圧を印加した場合

$$E = i \cdot R$$

AC解析

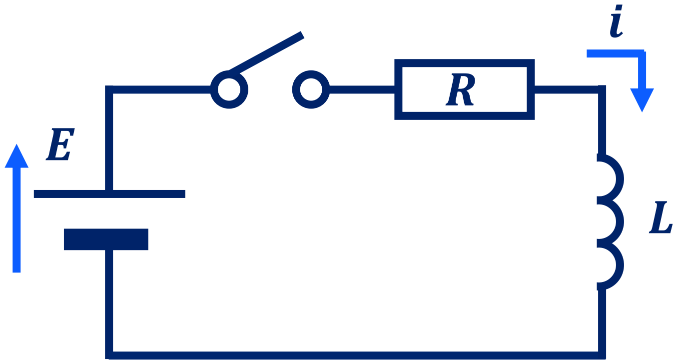


交流電圧を印加した場合

$$A_m = I \cdot (R + j\varpi L)$$

複素数表示すればDC解析と同じように解ける

過渡解析

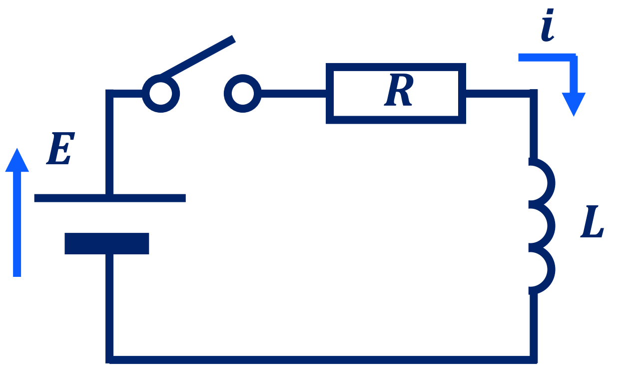


スイッチを閉じてから定常状態に遷移するまでの振る舞いを調べる

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri = E$$

微分方程式を解く必要がある

RL直列回路（1/2）



インダクタ：
電流が連続的に変化　I(0+)=I(0-)

キャパシタ：
電圧が連続的に変化　V(0+)=V(0-)

スイッチを入れる前の電流は0とする

1. 回路方程式を立てる

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E$$

2. 微分方程式を解く

求める解を定常解i_sと過渡解i_tの和と置く
1. 定常解（スイッチを入れてから十分に時間が経過した時）を求める
2. 過渡解を求める
3. 積分定数を決める

□ 定常解について

スイッチを入れてから十分に時間が経過した時，インダクタは導線と同じなので，定常解i_sは

$$i_s=\frac{E}{R}$$

$\frac{di(t)}{dt}=0$として求めても良い

□ $i=i_t+i_s$と置いて過渡解を求める

$L\frac{di(t)}{dt}+Ri=E$ に$i=i_t+i_s$を代入して整理すると

$$L\frac{di_t(t)}{dt}+Ri_t=0 \iff \frac{di_t(t)}{i_t}=-\frac{R}{L}dt$$（変数分離）

よって　$\log|i_t(t)|=-\frac{R}{L}t+C$（C：積分定数）

$$\iff |i_t(t)|=e^Ce^{-\frac{R}{L}t} \iff i_t(t)=\pm e^Ce^{-\frac{R}{L}t} \iff i_t(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

□ 初期条件から積分定数を決定する

$i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E}{R}$　において$i(0)=0$を満たすようにCを

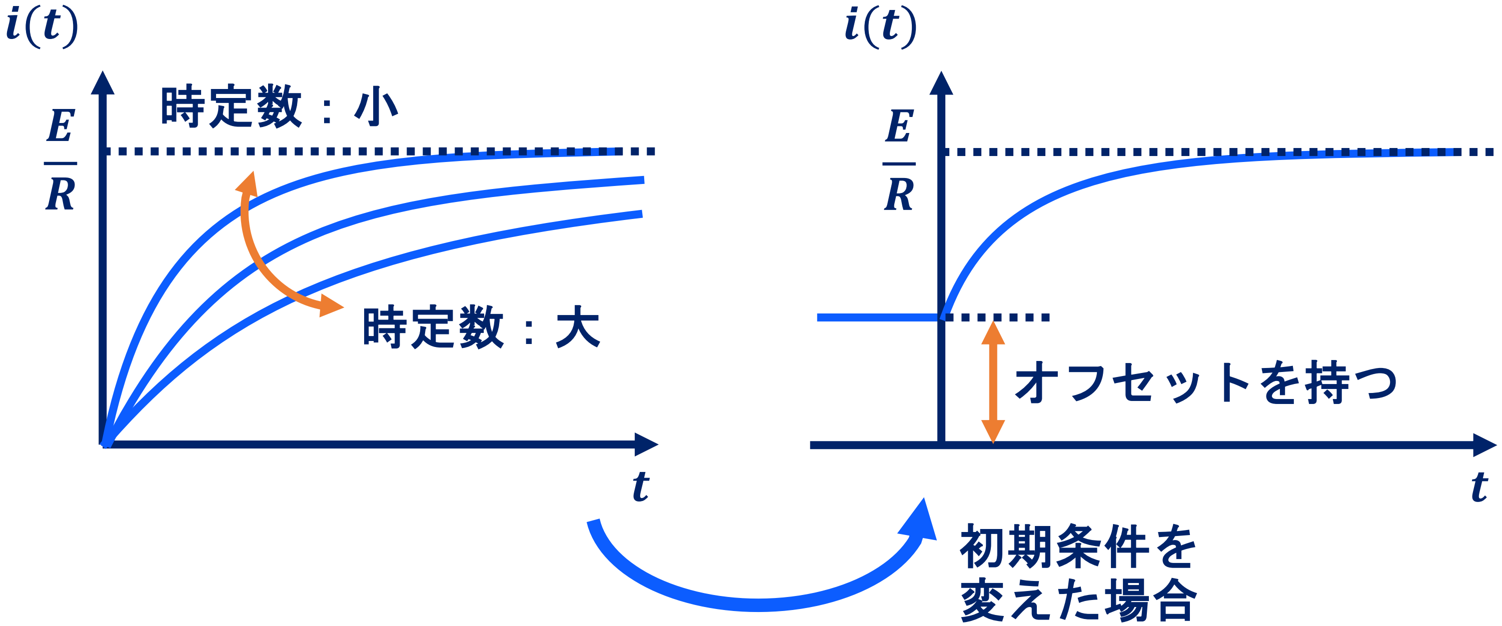
決めると $C=-\frac{E}{R}$　　よって　$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$

RL直列回路（2/2）

インダクタを流れる電流の時間変化

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\boxed{\frac{R}{L}}t\right)\right)$$

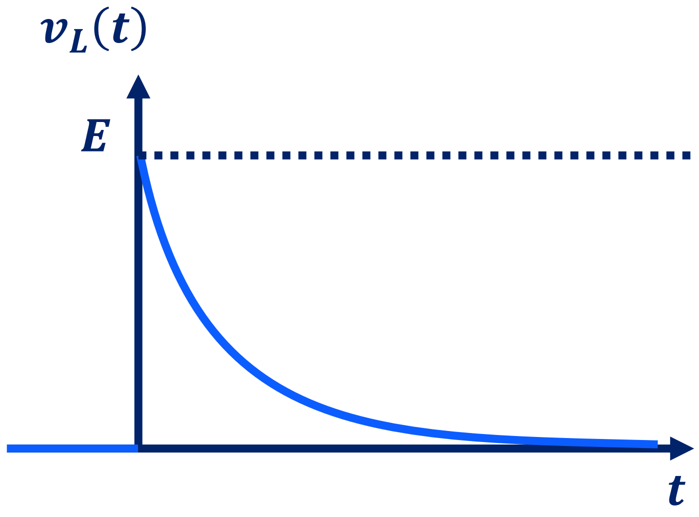
$\frac{R}{L}$が収束速度を決めている
（**時定数**と呼ぶ）



インダクタ両端の電圧変化

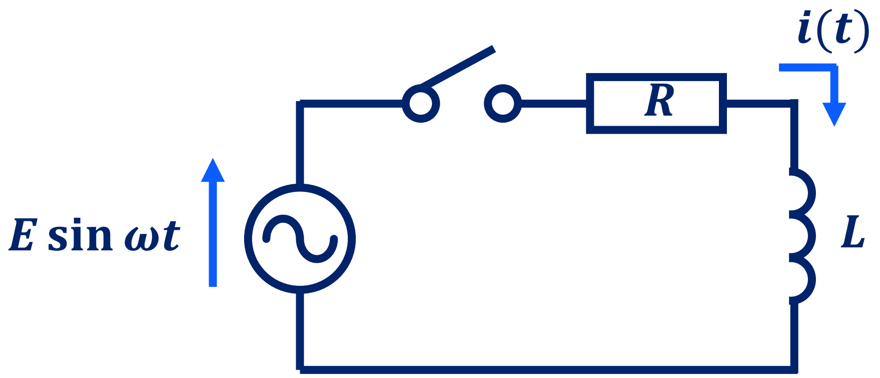
$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \mathrm{E}\cdot\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

$$\lim_{t\to+0} v_L(t) = E \qquad \lim_{t\to-0} v_L(t) = 0$$



電圧は不連続に変化

RL交流回路 (1/2)



t=0でインダクタに電流は流れていないとする

1. 回路方程式を立てる

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri=E\sin\omega t$$

2. 定常解$i_S(t)$を求める

スイッチを入れて十分時間が経過した時は交流回路理論が適用可能

複素数表示に変換して回路方程式を立てると

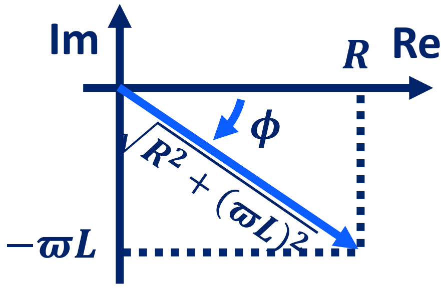
$$(R+j\varpi L)I=E$$

Iについて解くと $I=E\dfrac{1}{R+j\varpi L}=E\dfrac{R-j\varpi L}{R^2+(\varpi L)^2}$

絶対値と偏角ϕは $|I|=E\dfrac{1}{\sqrt{R^2+(\varpi L)^2}}$　$\phi=\tan^{-1}\left(-\dfrac{\varpi L}{R}\right)$

となるので，これを瞬時値表示に戻すと

$$i_S(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\varpi L)^2}}\sin(\omega t+\phi)$$



3. 求める解を$i(t)=i_T(t)+i_S(t)$と置いて$i_T(t)$に対する微分方程式を求める

- ☐ $\dfrac{di(t)}{dt}=\dfrac{di_T(t)}{dt}+\dfrac{E\omega}{\sqrt{R^2+(\varpi L)^2}}\cos(\omega t+\phi)$
- ☐ $\sin\phi=-\dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\varpi L)^2}}$
- ☐ $\cos\phi=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+(\varpi L)^2}}$

この3つの式を使うと

$$L\frac{di_T(t)}{dt}+Ri_T=0$$

を得る

RL交流回路 (2/2)

4. 過渡解$i_T(t)$を求める

$$\log|i_T(t)| = -\frac{R}{L}t + C \quad \text{（C：積分定数）}$$

$$\Rightarrow i_T(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

5. 初期条件から積分定数を決める

一般解$i(t)$は $$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\varpi L)^2}}\sin(\omega t + \phi) + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

初期条件から$i(0) = 0$なので

$$i(0) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\varpi L)^2}}\sin(\phi) + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\varpi L)^2}}\sin(\phi) = \frac{E\varpi L}{R^2 + (\varpi L)^2}$$

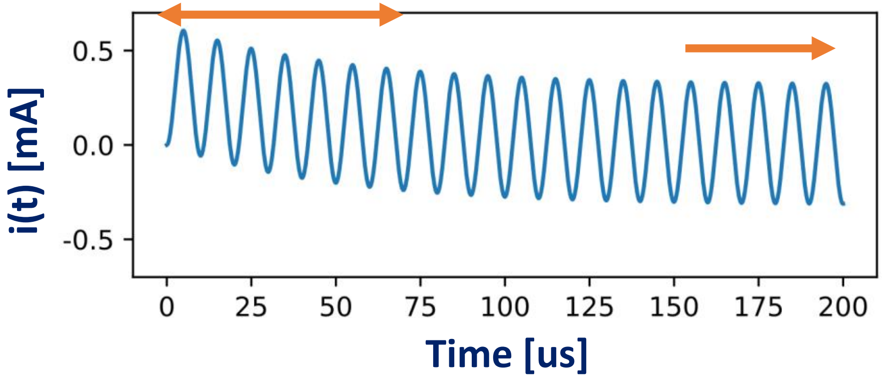
以上から

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\varpi L)^2}}\sin(\omega t + \phi) + \frac{E\varpi L}{R^2 + (\varpi L)^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

R:1k[Ω], L:50m[H]の回路に対して
10Vpp / 100kHzの交流を印加した時の電流i(t)の変化

expの項が効いている部分

時間が経つと過渡部分は無視できる（⇒交流解析）



定数係数微分方程式の解法まとめ

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_n y=f(t)$$

解き方

1. $\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_n y=f(t)$ の解をどれか1つ求めy_Sとする（定常解）

2. $\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_n y=0$ の解を求めy_Tとする（過渡解）

3. 微分方程式の解は $y=y_S+y_T$ で与えられる

定常解y_Sの求め方：電気回路で出てくるパターン

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_n y = f(t)$$

- $f(t)$が定数（直流電圧源）

  微分項 $\frac{d^n y}{dt^n}$ を全て0と置いて解を求めればOK

> 例：RL直列回路の場合
>
> $L\frac{di(t)}{dt} + Ri = E$ で $\frac{di(t)}{dt}$ を0と置いて定常解を求めると $i_S(t) = \frac{E}{R}$

- $f(t) = E_m \sin(\varpi t + \varphi)$（交流電圧源）

  複素数表示を使って微分方程式を多項式に変換してから解く

瞬時値表示	$\frac{d^n y}{dt^n}$	y	$E_m \sin(\varpi t + \varphi)$
複素数表示	$(j\omega)^n$	Y	$E_m e^{j\varphi}$

対応表を使って複素数表示に変換してYについて解くと…

$$Y = \frac{1}{(j\varpi)^n + a_1 (j\varpi)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} j\varpi + a_n} E_m e^{j\varphi}$$

過渡解y_Tの求め方

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

1. $\frac{d^n y}{dt^n} \Rightarrow p^k$として特性方程式に変換し根を求める

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

2. □ 重解を持たない場合

解を$\alpha_1 \pm j \cdot \beta_1, \alpha_2 \pm j \cdot \beta_2, \ldots, \alpha_m \pm j \cdot \beta_m$とすると過渡解は

$$y_0 = \underbrace{C_{1,1} e^{\alpha_1 t} \cos\beta_1 t + C_{1,2} e^{\alpha_1 t} \sin\beta_1 t}_{\alpha_1 \pm j \cdot \beta_1 \text{に対応}} + \cdots + \underbrace{C_{m,1} e^{\alpha_m t} \cos\beta_m t + C_{m,2} e^{\alpha_m t} \sin\beta_m t}_{\alpha_m \pm j \cdot \beta_m \text{に対応}}$$

□ 重解を持つ場合

$C_{1,1}, \ldots, C_{m,2}$や$C_{1,1,1}, \ldots, C_{m,2,r_m}$は時刻0の初期条件から決定

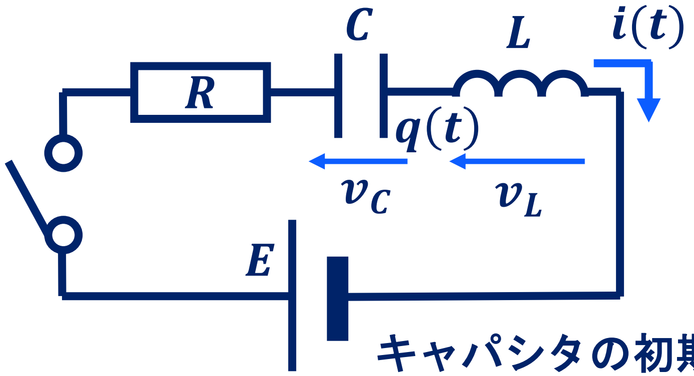
解$\alpha_1 \pm j \cdot \beta_1, \alpha_2 \pm j \cdot \beta_2, \ldots, \alpha_m \pm j \cdot \beta_m$がそれぞれ$r_1, r_2, \ldots, r_m$乗根を持つとき，過渡解は

$$y_0 = \left(C_{1,1,1} + C_{1,1,2} t + \cdots + C_{1,1,r_1} t^{r_1 - 1}\right) e^{\alpha_1 t} \cos\beta_1 t + \left(C_{1,2,1} + C_{1,2,2} t + \cdots + C_{1,2,r_1} t^{r_1 - 1}\right) e^{\alpha_1 t} \sin\beta_1 t +$$

$$\vdots$$

$$+\left(C_{m,1,1} + C_{m,1,2} t + \cdots + C_{m,1,r_m} t^{r_m - 1}\right) e^{\alpha_m t} \cos\beta_m t + \left(C_{m,2,1} + C_{m,2,2} t + \cdots + C_{m,2,r_m} t^{r_m - 1}\right) e^{\alpha_m t} \sin\beta_m t$$

RLC回路



キャパシタの初期電荷は0とする

1. 回路方程式を立てる

$$\begin{cases} v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} \\ v_C(t) = \dfrac{1}{C}q(t) \\ Ri(t) + v_C(t) + v_L(t) = E \end{cases}$$

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = E$$

2. 定常解$q_S(t)$を求める： 微分項を0とおいて$q_S(t) = CE$

3. 過渡解$q_T(t)$を求める

$R\dfrac{dq(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}q(t) + L\dfrac{d^2q\,(t)}{dt^2} = 0$ の特性方程式は $Rp + \dfrac{1}{C} + Lp^2 = 0$

よって根は $p = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\,L/C}}{2L}$ となる．$R^2C - 4L > 0$を仮定すると，

過渡解は $q_T(t) = C_1 \cdot e^{\frac{-R+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t} + C_2 \cdot e^{\frac{-R-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t}$

4. 初期条件から積分定数を決定

一般解は
$$q(t) = C_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + CE$$
$$i(t) = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 t}$$
と書ける

$q(0) = 0$，$i(0) = 0$なので $\begin{cases} C_1 + C_2 + CE = 0 \\ C_1 \cdot \alpha_1 + C_2 \cdot \alpha_2 = 0 \end{cases}$

これを解くと $C_1 = \dfrac{\alpha_1 CE}{\alpha_1 - \alpha_2}$ $\quad C_2 = -\dfrac{\alpha_2 CE}{\alpha_1 - \alpha_2}$

従って $q(t) = \dfrac{\alpha_1 CE}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 t} - \dfrac{\alpha_2 CE}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 t} + CE$

【補足】ラプラス変換

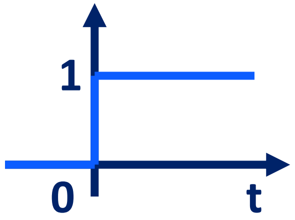
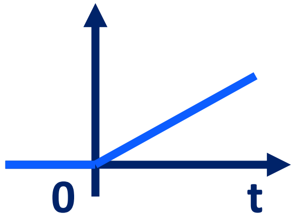
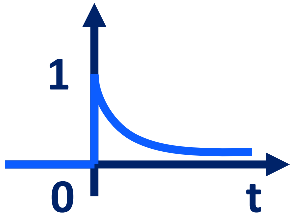
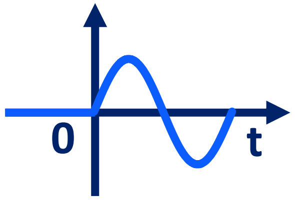
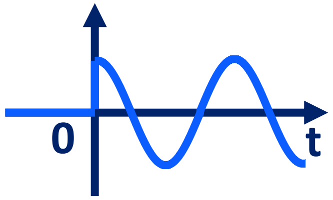
- $f(t)$に対して　$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$　をラプラス変換（Laplace transform）　ただし $s=\sigma+j\omega$ （複素数）

  右辺の積分が存在するためには$f(t)$の増加が指数オーダで押さえられる必要がある
  （$|f(t)|\le Me^{\alpha t}$を満たすMとαが存在する）

- $F(s)$に対して　$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$　をラプラス逆変換（Inverse Laplace transform）と呼ぶ

  逆変換を定義式から計算することは殆どない（ラプラス変換対応表を使う）

ラプラス変換対応表

名称・概形	ステップ信号	ランプ信号	片側指数信号	片側正弦波信号	
					
$f(t)$	$u(t)$	$t\cdot u(t)$	$e^{\pm at}\cdot u(t)$	$\sin\varpi t\cdot u(t)$	$\cos\varpi t\cdot u(t)$
$F(s)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{1}{s\mp a}$	$\dfrac{\varpi}{s^2+\varpi^2}$	$\dfrac{s}{s^2+\varpi^2}$

【補足】ラプラス変換の性質

□ 加法定理

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]=a\mathcal{L}^{-1}[F(s)]+b\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

□ 導関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

□ 積分のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0}f(t)dt$$

【補足】ラプラス変換を用いた微分方程式の解き方

ラプラス変換を使うことで**微分方程式を代数的に解ける**

時間領域

s領域

ラプラス変換

微分方程式 $V = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

$$V = RI(s) + \frac{1}{sC}\left(I(s) + \int_{-\infty}^{0} i(t)dt\right)$$

代数的に解く

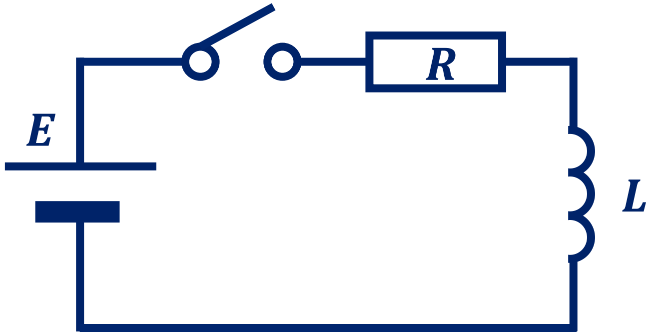
逆ラプラス変換

$$I(s) = \frac{\frac{V}{R} - \frac{\int_{-\infty}^{0} i(t)dt}{CR}}{s + \frac{1}{CR}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

【補足】ラプラス変換によるRL直列回路の過渡解析

時刻$t=0$でスイッチをONにした後のインダクタに流れる電流iを求める



1. 回路方程式を立てる

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=E\cdot \underline{u(t)}$$

単位ステップ関数

2. 両辺をラプラス変換する

$$sLI(s)-L\underline{i(0)}\ +RI(s)=\frac{E}{s}$$

時刻0で回路に流れている電流（初期条件）
今は“0”として考える

3. $I(s)$について整理して部分分数分解する

$$I(s)=\frac{E}{L}\frac{1}{s}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}=\frac{E}{L}\left(\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+\frac{R}{L}}\right)$$ と分解できると置いてK_1, K_2を決める

- K_1について：両辺にsを掛けて$s=0$とすると

$$\frac{1}{s+\frac{R}{L}}=K_1+s\frac{K_2}{s+\frac{R}{L}} \Rightarrow K_1=\frac{L}{R}$$

- K_2について：両辺に$s+\frac{R}{L}$を掛けて$s+\frac{R}{L}=0$とすると

$$\frac{1}{s}=\frac{K_1}{s}\left(s+\frac{R}{L}\right)+K_2 \Rightarrow K_2=-\frac{L}{R}$$

よって　$I(s)=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$ と書ける

4. ラプラス変換対応表を用いて逆変換する

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(u(t)-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)=\frac{E}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)\quad t\geq 0$$