Reliabilität

Bißantz, Jalynskij, Kupffer & Prestele

BF3 Testtheorie

1. Reliabilität als Konzept
2. Methoden der Reliabilitätsschätzung
3. Einflussfaktoren auf die Höhe der Reliabilität
4. Selbststudium

Section 1

Reliabilität als Konzept

Reliabilität als Konzept

Leitfrage

Was ist Reliabilität?

Inhaltliche Schwerpunkte der Einheit:

1. Reliabilität als Konzept
2. Definition der Reliabilität
3. Das Reliabilitätsproblem

Ziel: Wiederholung der Konzepte (re-fresher) & Problematisierung

How2: Kurzinput

Reliabilität als Konzept

Reliabilität als Maß der Messgenauigkeit

Messinstrument mit hoher Messgenauigkeit, Messergebnisse mit geringem Messfehler

Reliabilität, Wahrer Wert und Messfehler

Perfekte Reliabilität entspricht der Abwesenheit von zufälligem Messfehlern:

$$E(\epsilon) \to 0 : E(X) \to \tau \tag{1}$$

Testwertvariable als Summe der Itemvariable

Der Testwert ist der Summenwert oder Mittelwert über alle Itemvariablen ($\in$ Itemuniverse):

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2}$$

Reliabilität, Validität, Objektivität

Wie hängen die drei Hauptgütekriterien zusammen?

Reliabilität & Objektivität

Objektivität $\Rightarrow$ Reliabilität

- via: Messbedingungen standardisieren

Reliabilität & Validität

Reliabilität $\Rightarrow$ Validität

- v.a.: Beständigkeit gleicher Testergebnisse bei wiederholter Messung[1]

[1] Hinweis: über den genauen Zusammenhang zwischen den drei Hauptgütekriterien lässt sich diskutieren! Das würde allerdings den Rahmen dieser Übung sprengen.

Reliabilität: Definitionen

Definition: Reliabilität einer Testvariable

Die Reliabilität einer Testwertvariablen (X) lässt sich bestimmen als:

$$Rel(X) = \frac{Var(T)}{Var(X)} = \frac{Var(T)}{Var(T) + Var(E)} \quad (3)$$

Definition: Reliabilität einer Itemvariable

Reliabilität einer Itemvariable (x) lässt sich bestimmen als:

$$Rel(x_i) = \frac{Var(\tau_i)}{Var(x_i)} = \frac{Var(\tau_i)}{Var(\tau_i) + Var(\epsilon_i)} \quad (4)$$

Reliabilität, Wertebreich & Bedeutung

$Rel \in [0, 1]$, wobei $Rel = 1$: Abwesenheit von (zufälligen) Messfehlern; das entspricht einer vollständig reliablen Messung (vice versa).

Das Reliabilitätsproblem

Problem: Wir kennen die True-Score- und Fehlervarianz nicht. Die Messwerte bei einer einzigen Messung sind lediglich *Schätzer* der wahren Werte, die *approximativ* dem wahren Wert entsprechen:

$$\tau = E(X)|E(\epsilon) = 0 \tag{5}$$

Damit lässt sich mit einer *Einzelmessung* die Reliabilität nicht eindeutig *bestimmten*! (siehe auch: Moosbrugger & Kelava, 2021 : 210).

$\Rightarrow$ Wir müssen sie *schätzen*!

Section 2

Methoden der Reliabilitätsschätzung

Methoden der Reliabilitätsschätzung

Leitfrage

Wie schätze ich die Reliabilität?

Inhaltliche Schwerpunkte der Einheit:

0. Lösungsansatz zum Reliabilitätsproblem
1. Retest-Reliabilität
2. Paralleltest-Reliabilität
3. *Testhalbierungsreliabilität*
4. *Interne Konsistenz*

Ziel: Wiederholung und Vertiefung der Konzepte, Umsetzung in R

How2: Kurzinput, (Olat-Übung), Rechenbeispiele & R-Übungen

Lösungansatz zum Reliabilitätsproblem

"Aber auch ohne die wahren Werte einzelner Personen zu kennen, kann das Varianzverhältnis als Maß für die Messgenauigkeit geschätzt werden, wenn man die Ebene der einzelnen Personen und einzelnen Items verlässt und stattdessen ***alle Items, aus denen sich ein Test zusammensetzt****, sowie die* ***Messungen mehrerer Personen betrachtet****: Wird ein latentes Merkmal anhand mehrerer Items gemessen, so liegen* ***Mehrfachmessungen desselben Merkmals mit unterschiedlichen aber ähnlichen Messinstrumenten/Items*** *vor, die* ***zu einer Testwertvariablen aufsummiert werden können****, sofern sie zumindest die Bedingung der Eindimensionalität*[2] *erfüllen." (Moosbrugger & Kelava, 2020: 310 – Hervorherbungen nicht im Original)*

[2] Die Bedingung der Eindimensionalität können und sollten Sie überprüfen (Hilsmittel: CFA). Die Unkorreliertheit der Messfehler ($Cov(\epsilon_i, \epsilon_i') = 0$) ist dabei eine Basisvoraussetzung, für die Erfüllung der Bedingung. (Siehe: ebd., 14.2.2)

Lösungansatz zum Reliabilitätsproblem

Lösungsansatz in a Nuthshell: Mehrfachmessungen

Reliabilität(-sschätzung) $\Rrightarrow$ Mehrfachmessungen! D.h. Alle Methoden zur Reliabilitätsschätzung setzen eine Mehrfachmessung des Konstruktes voraus.

Möglichkeiten zur Mehrfachmessung (Population/Itemuniversum)

1. Wiederholte Messung anhand derselben/verschiedener Testdurchläufe[3]
   - Test/Test Reliabilität(en)
2. Verschiedene Items innerhalb eines Tests[4]
   - Interne Konsistenz (Cronbach's alpha)

[3] Erinnerung an Sitzung 04-KTT (v.a. Übungsaufgaben 2 & 3)

[4] Erinnerung an das Konzept des "Item-Universums"

Testhalbierungsreliabilität (Split-half)

Kochrezept: Testhalbierungsreliabilität

Zubereitungszeit: 5-10 min
Schwierigkeit: mittel

Zutaten:

- (Simultierter) Test voll mit Items
- Partitionierungsmethode[5]
- Korrelationskoeffizient
- Spearman-Brown-Korrektur

Zubereitung: Den Test voll mit Items mit einer Partitionierungsmethode in zwei parallele Testhälften aufteilen. Anschließend die Halbtestreliabilität mit der *Spearman-Brown-Korrektur* zur vollständigen Reliabilität aufwerten.

[5] zum Beispiel: *Odd-Even Aufteilung*, Zeitpartitionierungsmethode, Selektion von Itemzwillinge oder *Zufallsaufteilung*

Simulation: Test voll mit Items (..in R)

```
# Tau-parallel
M <- 8
mu <- c(5,4,3,4,5,3,5,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .8, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .8, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .8, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, .8, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5, .8),
  M,M)
N <- 1000
# Multivariate Half-Normal Distribution
X <- data.frame(abs(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma)))
```

Partiotionierung & Halbtestreliabilität (..in R)

Partitionierungsmethode: Odds-Even Aufteilung

```
even <- seq(2,8, by=2)
uneven <- seq(1,8, by=2)
rsx_even <- rowSums(X[,even])
rsx_uneven <- rowSums(X[,uneven])
# Halbtestreliabilität
(Rel_halb <- cor(rsx_even, rsx_uneven))
```

```
## [1] 0.8710395
```

$\Rightarrow$ Mit der Halbtestreliabilität soll nun die vollständige Reliabilität geschätzt werden.

Spearman-Brown Korrektur (..in R)

Spearman-Brown Formel

$$Rel(X_{voll.}) = \frac{2 \cdot Corr(X_p, X_q)}{1 + Corr(X_p, X_q)} = \frac{2 \cdot Rel_{halb}}{1 + Rel_{halb}} \tag{6}$$

…in R-isch:

```
Rel_SBK <- function(X_p, X_q) {
  r <- cor(X_p, X_q)
  2 * r / (1+r)
}
```

Vollständige Reliabilität (..händisch)

Example

$$
\begin{aligned}
Rel(X_{voll.}) &= \frac{2 \cdot Corr(X_p, X_q)}{1 + Corr(X_p, X_q)} \\
&= \frac{2 \cdot Rel_{halb}}{1 + Rel_{halb}} \\
&\approx \frac{2 \cdot 0.87}{1 + 0.87} \\
&\approx \frac{2 \cdot 0.87}{1 + 0.87} \\
&\approx \frac{1.74}{1.87} \\
&\approx \frac{1.74}{1.87} \\
&\approx 0.93
\end{aligned}
$$

Vollständige Reliabilität (..in R)

Bei der Überprüfung der händischen Berechnung kommt nun `Rel_SBK()` zum Einsatz. Zur Erinnerung: Die Aufteilungsmethode ist nach wie vor "Odds-Even."

```
Rel_SBK(X_p, X_q)
```

```
## [1] 0.9310755
```

Übung 1: Selbsttest

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Sie bekommen auf der nächsten Folie eine Halbtestreliabilität vorgegeben. Berechnen Sie diese zunächst händisch. Im Anschluss daran nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 1 in `10-Rel.R` und überprüfen ihr Ergebnis.

- Zeit: 10-15 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Übung 1: Selbsttest

Nach untenstehender Zufallsaufteilung der Items ist folgende Halbwertsreliabilität geben:

```
N <- 100
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
m <- length(X) ; seq <- seq(m)
rseq <- sample(seq, m, replace=FALSE)
X_p <- rowSums(X[,rseq[1:4]])
X_q <- rowSums(X[,rseq[5:8]])
(Rel_halb <- cor(X_p, X_q))
```

```
## [1] 0.8404478
```

```
round(Rel_halb, 2)
```

```
## [1] 0.84
```

Übung 1: Lösungsvorschlag (..händisch & R)

$$
\begin{aligned}
Rel(X_{voll.}) &= \frac{2 \cdot Corr(X_p, X_q)}{1 + Corr(X_p, X_q)} \\
&= \frac{2 \cdot Rel_{halb}}{1 + Rel_{halb}} \\
&\approx \frac{2 \cdot 0.84}{1 + 0.84} \\
&\approx \frac{2 \cdot 0.84}{1 + 0.84} \\
&\approx \frac{1.68}{1.84} \\
&\approx 0.91
\end{aligned}
$$

Übung 1: Lösungsvorschlag (..in R)

```
Rel_SBK(X_p, X_q)
```

```
## [1] 0.913308
```

Interne Konsistenz & Cronbach's Alpha

Eine in der Forschung häufig genutzte Variante zur Schätzung der Reliabilität ist die *Beurteilung der internen Konsistenz* von Items mittels Cronbach's Alpha[6] (α).

Definition: Cronbach's Alpha

$$Rel : \alpha = \frac{m}{m-1} \cdot \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} Var(x_i)}{Var(x)}\right] \tag{7}$$

Note: Alpha is eine Verallgemeinerung der Testhalbierungsreliabilität auf beliebig viele (m) Testteile bzw. Items (aus einem *Itemuniversum*).

[6] Neben Cronbach's Alpha gewinnt in der angewandten Forschung zunehmend eine Verallgemeinerung des alpha-Koffizient an Einfluss: McDonald's ω.

Simulation: Test voll mit Items (..in R)

```
# Essenziell Tau-Äquivalent
M <- 8
mu <- c(5,4,3,4,5,3,5,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(1.8, .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, 1.7, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, 1.8, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, 1.6, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, 1.6, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, 1.7, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, 1.8, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5, 1.8),
  M,M)
N <- 1000
# Multivariate Half-Normal Distribution
X <- data.frame(abs(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma)))
```

Reliabilität: Interne Konsistenz

```
VCOV <- cov(X)
V_items <- diag(VCOV)
V_X <- sum(VCOV)
list("Gesamtvarianz" = round(V_X, 2),
     "Itemvarianz" = round(V_items,2))
```

```
## $Gesamtvarianz
## [1] 40.65
##
## $Itemvarianz
##   X1   X2   X3   X4   X5   X6   X7   X8
## 1.77 1.59 1.90 1.65 1.56 1.64 1.62 1.75
```

$\Rightarrow$ Nun wollen wir die interne Konsistenz als Schätzung für die Reliabilität unseres Itembündels ermitteln.

Reliabilität: Interne Konsistenz (..händisch)

$$
\begin{aligned}
Rel : \alpha &= \frac{m}{m-1} \cdot \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} Var(x_i)}{Var(x)}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot \left[1 - \frac{(1.77 + \cdots + 1.75)}{40.65}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot \left[1 - \frac{13.48}{40.65}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot [1 - 0.33] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot 0.67 \\
&\approx 0.76
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Cronbachs Alpha (..in R)

Definition: Cronbach's Alpha

$$Rel : \alpha = \frac{m}{m-1} \cdot \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} Var(x_i)}{Var(x)} \right] \quad (9)$$

...in R-isch:

```
alpha <- function(X) {
  VCOV <- cov(X) ; m <- length(X)
  V_x <- sum(VCOV) ; V_xi <- sum(diag(VCOV))
  m/(m-1) * (1-(V_xi/V_x))
}
```

Reliabilität: Interne Konsistenz (..in R)

Bei der Überprüfung der händischen Berechnung kommt nun `alpha()` zum Einsatz.

```
set.seed(123)
N <- 1000
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
alpha(X)
```

```
## [1] 0.7639353
```

Dafür gibt es natürlich auch schon Funktionen! Sie erinnern sich?

```
item_stats <- psych::alpha(X)
item_stats$total[["raw_alpha"]]
```

```
## [1] 0.7639353
```

Übung 2: Selbsttest

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Sie bekommen auf den nächsten zwei Folien nach der Simulation die Itemvarianzen sowie die Gesamtvarianz vorgegeben. Berechnen Sie Cronbach's alpha zunächst händisch. Im Anschluss daran nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 2 in `10-Rel.R` und überprüfen Ihr Ergebnis.

Zusatz: Nutzen Sie im Anschluss die R Funktion `psych::alpha()` mit Ihrem Datensatz. Finden Sie Ihr Ergebnis im Output der Funktion wieder?

- Zeit: 10-15 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Übung 2: Selbsttest (Simulation)

```r
# Tau-parallel
M <- 8
mu <- c(5,4,3,4,5,3,5,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .8, .5, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .8, .5, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .8, .5, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, .8, .5,
    .5, .5, .5, .5, .5, .5, .5, .8),
  M,M)
N <- 100
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
```

Übung 2: Selbsttest (Kennwerte)

```r
# Varianz-Kovarianz-Matrix
VCOV <- cov(X)
# Summe der Varianzen
V_items <- diag(VCOV)
# Gesamtvarianz
V_X <- sum(VCOV)
# Kennwerte
list("Gesamtvarianz" = round(V_X, 2),
     "Itemvarianz" = round(V_items,2))
```

```
## $Gesamtvarianz
## [1] 28.66
##
## $Itemvarianz
##   X1   X2   X3   X4   X5   X6   X7   X8
## 0.67 0.86 0.77 0.59 0.58 0.63 0.80 0.74
```

Übung 2: Lösungsvorschlag (..händisch & R)

$$
\begin{aligned}
Rel : \alpha &= \frac{m}{m-1} \cdot \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} Var(x_i)}{Var(x)}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot \left[1 - \frac{(0.67 + \cdots + 0.74)}{28.66}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot \left[1 - \frac{5.64}{28.66}\right] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot [1 - 0.20] \\
&\approx \frac{8}{7} \cdot 0.80 \\
&\approx 0.91
\end{aligned} \tag{10}
$$

```
alpha(X)
```

```
## [1] 0.9180177
```

Section 3

Einflussfaktoren auf die Höhe der Reliabilität

Einflussfaktoren auf die Höhe der Reliabilität

Leitfrage

Welche Faktoren können die Reliabilität beeinflussen?

Inhaltliche Schwerpunkte der Einheit:

1. Testlänge
2. Homogenität oder Heterogenität der Items
3. Streuung der Testwerte

Ziel: Verstehen, wie unterschiedliche Faktoren die Reliabilität beeinflussen.

How2: Kurzinput, Rechenbeispiel & R-Übung

Einflussfaktor: Testlänge

Definition: Spearman-Brown-Formel

$$Rel_k^* = \frac{k \cdot Rel}{1 + (k-1)Rel} \tag{11}$$

Mit der Spearman-Brown-Formel lässt sich auch berechnen, um wie viele parallele Items ein bestehender Test verlängert werden muss, um eine bestimmte Reliabilität zu erreichen.

Reformulierung: Spearman-Brown-Formel

$$k = \frac{Rel^* \cdot (1 - Rel)}{Rel \cdot (1 - Rel*)} \tag{12}$$

Daten simulieren

```
set.seed(123)
```

```
# Essenziell Tau-Äquivalent
M <- 6
mu <- c(5,4,3,4,5,3)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .4, .4, .4, .4, .4,
    .4, .7, .4, .4, .4, .4,
    .4, .4, .8, .4, .4, .4,
    .4, .4, .4, .7, .4, .4,
    .4, .4, .4, .4, .8, .4,
    .4, .4, .4, .4, .4, .7),
  M,M)
N <- 100
# Multivariate Half-Normal Distribution
X <- data.frame(abs(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma)))
```

Testverlängerung & Reliabilität (via Cronbach's alpha)

Stellen Sie sich vor, Sie wollen mit dem soeben simulierten Test eine Reliabilität von 0.99 erreichen, um wie viele Items müssten Sie Ihren Test verlängern, wenn nachfolgende Reliabilitässchätzung gegeben ist?

```
alpha(X)
```

```
## [1] 0.8544687
```

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{Rel^{*} \cdot (1 - Rel)}{Rel \cdot (1 - Rel*)} \\
k &\approx \frac{0.99 \cdot (1 - 0.87)}{0.87 \cdot (1 - 0.99)} \\
k &\approx \frac{0.99 \cdot 0.13}{0.87 \cdot 0.01} \\
k &\approx 15
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Testverlängerung mit der SB-Formel (..in R)

Reformulierung: Spearman-Brown-Formel

$$k = \frac{Rel^* \cdot (1 - Rel)}{Rel \cdot (1 - Rel*)} \tag{14}$$

...in R-isch:

```
calc_k <- function(Rel_ast, Rel) {
 (Rel_ast * (1-Rel)) / (Rel * (1 -Rel_ast))
}
Rel_ast <- 0.99 ; Rel <- 0.87
calc_k(Rel_ast, Rel)
```

```
## [1] 14.7931
```

Übung 3: Selbsttest

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Berechnen Sie wie viele Item nötig wären, um einen Test mit $m = 3$ Items und einer Reliabilität von 0.45 auf eine Reliabilität von 0.9 ansteigen zu lassen. Berechnen Sie das Ergebnis zunächst händisch. Nutzen Sie danach den Code zur Übungsaufgabe 4 in `10-Rel.R` und überprüfen Ihr Ergebnis.

- Zeit: 15 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte verstehen $\gg$ Codes verstehen!

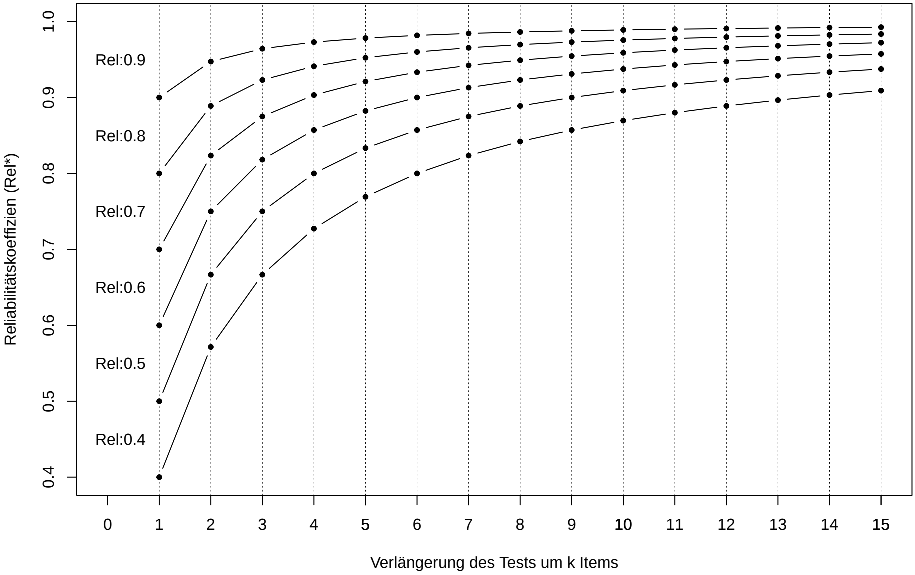
Übung 3: Lösungsvorschlag

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{Rel^{*} \cdot (1 - Rel)}{Rel \cdot (1 - Rel*)} \\
k &\approx \frac{0.9 \cdot (1 - 0.45)}{0.45 \cdot (1 - 0.9)} \\
k &\approx \frac{0.9 \cdot 0.55}{0.45 \cdot 0.1} \\
k &\approx 11
\end{aligned}
\tag{15}
$$

```
calc_k(Rel_ast=0.9, Rel=0.45)
```

```
## [1] 11
```

Grafik: Testverlängerung & Reliabilität



Homogenität/Heterogenität der Items

Aus der Vorlesung: "Tests mit homogenen Items haben meistens eine hohe Reliabilität, da die Items sehr ähnlich sind und daher hoch positiv miteinander korrelieren."

Definition: Korrelation

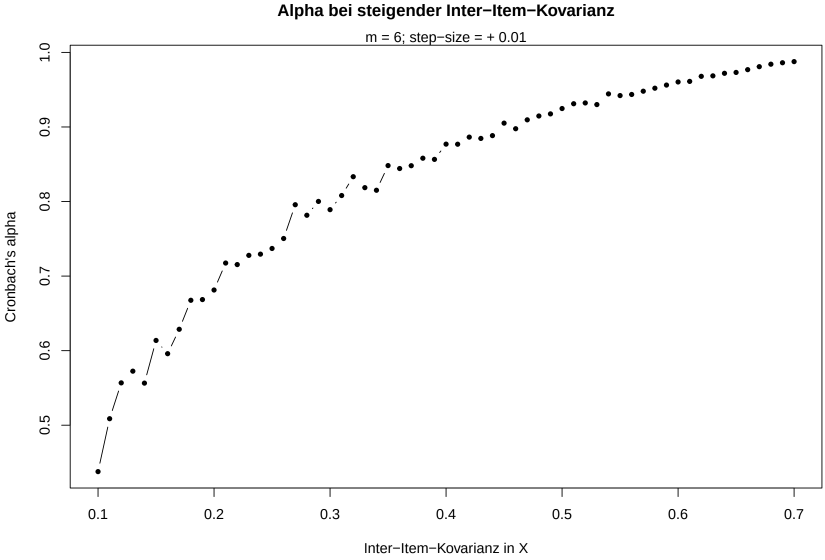
$$Corr(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} \tag{16}$$

Knobelfrage: Wie wirkt sich ein Zuwachs in den Kovarianzen – ceteris paribus – auf Cronbach's alpha aus? (a) α steigt (b) α sinkt (c) α bleibt gleich

Simulation: Zuwachs in den Kovarianzen

```r
# Essenziell Tau-Äquivalent
M <- 6
mu <- c(5,4,3,4,5,3)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .1, .1, .1, .1, .1,
    .1, .7, .1, .1, .1, .1,
    .1, .1, .8, .1, .1, .1,
    .1, .1, .1, .7, .1, .1,
    .1, .1, .1, .1, .8, .1,
    .1, .1, .1, .1, .1, .7),
  M,M)
N <- 1000
# Multivariate Half-Normal Distribution
X <- data.frame(abs(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma)))
```

Grafik: simulierter Zuwachses in den Kovarianzen (Ausgansmatrix)



Streuung der Testwerte

Aus der Vorlesung: "Eine hohe Streuung ($Var(T)$) geht meist mit einer hohen Reliabilität einher, während bei geringer Streuung eine hohe Reliabilität unwahrscheinlich ist."

Definition: Reliabilität

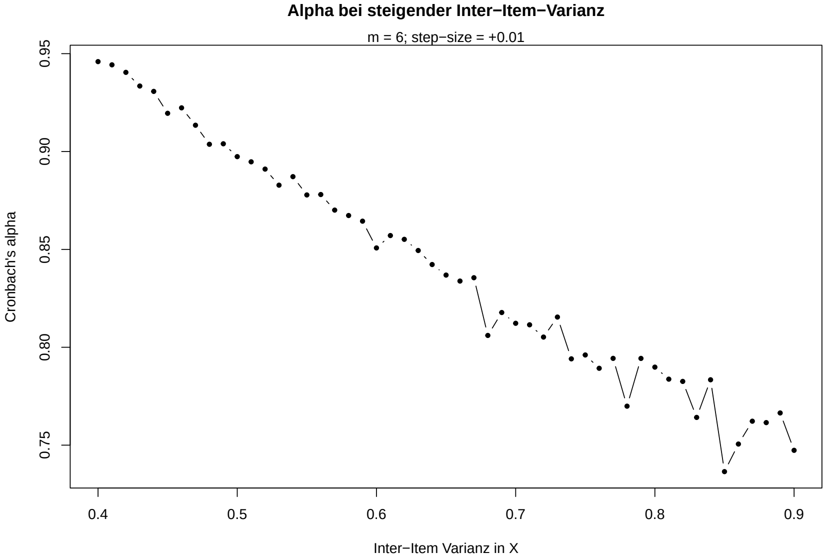
$$Rel(X) = \frac{Var(T)}{Var(X)} \tag{17}$$

Knobelfrage: Wie wirkt sich nach dieser Logik hingegen ein Zuwachs in den *Inter-Item-Varianzen* ($Var(X)$) – ceteris paribus – auf Cronbach's alpha aus? (a) α steigt (b) α sinkt (c) α bleibt gleich

Simulation: Zuwachs in den Varianzen (Ausgansmatrix)

```r
# Essenziell Tau-Äquivalent
M <- 6
mu <- c(5,4,3,4,5,3)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.2, .1, .1, .1, .1, .1,
    .1, .2, .1, .1, .1, .1,
    .1, .1, .2, .1, .1, .1,
    .1, .1, .1, .2, .1, .1,
    .1, .1, .1, .1, .2, .1,
    .1, .1, .1, .1, .1, .2),
  M,M)
N <- 1e3
# Multivariate Half-Normal Distribution
X <- data.frame(abs(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma)))
```

Grafik: simulierter Zuwachses in den Varianzen (Ausgangsmatrix)



Section 4

Selbststudium

Messmodell-Roulette

Im R-Skript finden Sie die Funktion: `messmodell_roulette()`. Damit können Sie für die Klausur üben. Die Funktion simuliert Ihnen aus einer Halbnormalverteilung zufällig ein Messmodell und zeigt Ihnen die Spaltenmittelwerte und die Kovarianzmatrix. Können Sie erraten, um welches Messmodell es sich handelt? Versuchen Sie es!

Lesen Sie die Funktion – wie in der Übung gezeigt – ein und führen Sie `messmodell_roulette()` aus.

Bestandteile der Funktion

Grundlage der Funktion sind simulierte Datenmatrizen aus einer multivariaten Halb-Normalverteilung. Nachfolgend sehen Sie jede einzelne Funktion und wie sie implementiert ist. Keine Angst, das Wissen um die Implementation ist *nicht* Klausur-relevant!

Hinweis: Für das Selbststudium benötigen Sie das Package `MASS`. Wenn Sie es nicht selbst installieren wollen, kopieren Sie den Code auf der nächsten Folie. Der Code-Schnipsel klärt, ob Sie das Package bereits installiert haben und bietet Ihnen gegebenenfalls an, es zu installieren. Nach erfolgreicher Installation, testen Sie mit der gleichen Funktion, ob alles passt.

Preparation

```
if(!requireNamespace("MASS", quietly = TRUE)) {
  msg <- "'MASS' is not installed, want to install it? Type 'y
  answer <- readline(prompt = message(msg))
  no_msg <- "Did not install the package `MASS`."
  switch(answer,
         yes = install.packages("MASS"),
         no = stop(no_msg, call. = FALSE),
         stop("Please answer 'yes' or 'no' (omitt quotes!)" ))
} else {
 message("`MASS is already installed!") ; Sys.sleep(1)
 message("Time to rock!\n(*weird guitar sound*)")
}
```

```
## `MASS is already installed!

## Time to rock!
## (*weird guitar sound*)
```

Paralleles Messmodell

```
M <- 4
mu <- rep(5,M)
# Covariance Matrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .8, .5,
    .5, .5, .5, .8),
  M,M)
N <- 1e5
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
# Spaltenmittelwerte (gerundet)
round(colMeans(X), digits = 1)
# Kovarianzmatrix
round(cov(X), digits = 1)
```

Essenziell paralleles Messmodell

```r
M <- 4
mu <- c(5,4,3,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.8, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .8, .5,
    .5, .5, .5, .8),
  M,M)
N <- 1e5
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
# Spaltenmittelwerte (gerundet)
round(colMeans(X), digits = 1)
# Kovarianzmatrix
round(cov(X), digits = 1)
```

Tau-äquivalentes Messmodell

```r
M <- 4
mu <- rep(5,M)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.7, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .7, .5,
    .5, .5, .5, .6),
  M,M)
N <- 1e5
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
# Spaltenmittelwerte (gerundet)
round(colMeans(X), digits = 1)
# Kovarianzmatrix
round(cov(X), digits = 1)
```

Essenziell tau-äquivales Messmodell

```
M <- 4
mu <- c(5,4,3,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.7, .5, .5, .5,
    .5, .8, .5, .5,
    .5, .5, .7, .5,
    .5, .5, .5, .6),
  M,M)
N <- 1e5
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
# Spaltenmittelwerte (gerundet)
round(colMeans(X), digits = 1)
# Kovarianzmatrix
round(cov(X), digits = 1)
```

Tau-kongenerisches Messmodell

```r
M <- 4
mu <- c(5,4,3,4)
# Kovarianzmatrix
Sigma <- matrix(
  c(.7, .5, .6, .7,
    .5, .8, .5, .6,
    .6, .5, .7, .5,
    .7, .6, .5, .8),
  M,M)
N <- 1e5
X <- data.frame(MASS::mvrnorm(N, mu, Sigma))
# Spaltenmittelwerte (gerundet)
round(colMeans(X), digits = 1)
# Kovarianzmatrix
round(cov(X), digits = 1)
```

Literaturverzeichnis I

Francois, Romain. 2020. *Bibtex: Bibtex Parser*. https://github.com/romainfrancois/bibtex.

R Core Team. 2021. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. https://www.R-project.org/.

Revelle, William. 2021. *Psych: Procedures for Psychological, Psychometric, and Personality Research*. https://personality-project.org/r/psych/%0Ahttps://personality-project.org/r/psych-manual.pdf.

Xie, Yihui, Christophe Dervieux, and Emily Riederer. 2020. *R Markdown Cookbook*. Boca Raton, Florida: Chapman; Hall/CRC. https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook.