Explorative Faktorenanalyse

Bißantz, Jalynskij, Kupffer & Prestele

BF3 Testtheorie

Section 1

Einstieg

Einstieg

Example

Hinter untenstehendem Link verbirgt sich ein Fragebogen der Platform `openpsychometrics` (eine gute Quelle um kostenlos Datensätze für Analysen zu ergattern). Schauen Sie sich den Big-Five-Fragebogen einmal an. Wenn Sie möchten, beantworten Sie Ihn kurz. Im Anschluss daran stellen wir uns auf dieser Grundlage der Large Dataset Challenge!

https://openpsychometrics.org/tests/IPIP-BFFM/[1]

- Zeit: 2-3 Minuten

[1] Für das Projekt, siehe: https://openpsychometrics.org/

Section 2

Die “Large Data Set Challenge”

Die “Large Data Set Challenge”

Example

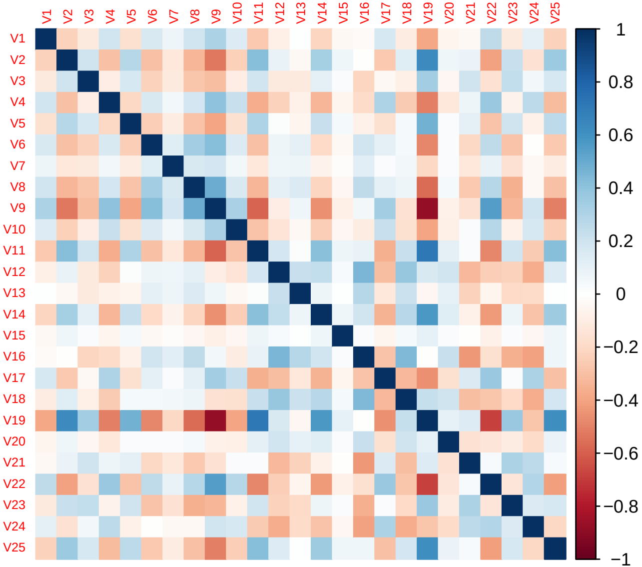
Stellen Sie sich vor, die von Ihnen soeben gesehenen/beantworteten Fragen ergäben die Korrelationsmatrix R auf der nächsten Folie. Die "Large Data Set Challenge" (LDC) lautet: Erkennen Sie eine Struktur in den Daten? Besprechen Sie sich mit ihrem Nachbarn.

Welche Items könnte man ihrer Meinung nach zu Itemgruppen zusammenfassen?

- Zeit: 2-3 Minuten

Anmerkung: Nein, das sind nicht ihre Antworten; `V1 - V30` sind Zufallsvariablen!

Übungsaufgabe 1: Struktur erkennen & Itemgruppen finden



Die “Large Data Set Challenge” (..in theory)

Large Data Set Challenge

Mit zunehmender Itemzahl nimmt die Anzahl der Korrelationen, die für eine Analyse zu berücksichtigen sind schnell zu. Die "Challenge" ist eine mögliche Struktur zu entdecken!

In a Nutshell:

- Problem: Anzahl der Korrelationen
- z.B.: 25 Items $\widehat{=} 2^{25} = 625$ Korrelationen
- Krux: Struktur erkennen
- $\Leftrightarrow$ finde: hoch korrelierende Itemgruppen

Explorative Faktorenanalyse & Large Data Set Challenge

- (ein) Hilfsmittel für die LDC: (explorative) *Faktorenanalyse*
- andere Helferlein zur *Datenreduktion* (eine Auswahl):
  - Hauptkomponentenanalyse
  - Clusteranalyse
  - Explorative Likertskalierung
  - (Non-) Metric Data Scaling (Distanzmatrizen!)

Wichtig: "meaningful" (Faktoren) vs. "full compression" (Komponenten)

Fokus (heute): Common Factor Model (CFM)

Section 3

Das Common Factor Model (CFM)

Das Common Factor Model

Eingangsgleichung des CFM

$$x = \Lambda\xi + \epsilon \tag{1}$$

- x: $m \times p$ Datenmatrix
- Λ: $m \times p$ Matrix der Item-Faktor Korrelationen (Ladung)
- ξ: Faktoren (p Stück)
- p, m: Anzahl der latenten Variablen, Items

"In other words EFA tries to find p latent variables on the basis of the correlation structure of the m manifest variables." (Ebd.)

Das Common Factor Model

Anmerkung: Für die Reformulierung von Gleichung (1) zu (2): siehe McCallum (2009)

Fudnamentaltheorem

$$P = \Lambda\Phi\Lambda^t + \Psi \tag{2}$$

- P: Modell-implizierte Korrelationsmatrix
- Λ: Ladungsmatrix
- Φ: Matrix der Zwischenfaktorkorrelationen
- Ψ: Einzigartigkeit

Zusammenhang: Modell & Struktur

Die explorative Faktorenanalyse versucht als Struktur-entdeckendes Verfahren die (reduzierte) Korrelationsmatrix unter Einsatz des CFM zu rekonstruieren; d.h. ihre Struktur (zugrundeliegenden LVs) zu entschlüsseln.

Section 4

Fakotrenanalyse: “A hurdle race”

Fakotrenanalyse: "A hurdle race"

1. Hürde: Extraktionsproblem
2. Hürde: Rotationsproblem
3. Hürde: Problem der Anzahl zu extrahierender Faktoren

> *"Unfortunately, factor analysis is frequently misunderstood and often misused. Some researchers appear to use factor analysis as a kind of divining rod, hoping to find gold hidden underneath tons of dirt. But there is nothing magical about the technique. [...] Factor analysis will yield meaningful results only when the research was meaningful to begin with." Gregory (2014, S. 165)*

Konkl.: Versuchen Sie ihr Modell zu verstehen! (siehe: Selbststudium)

"Playing Creator": 2 LVs erschaffen[^2]

Bevor wir loslegen, wollen wir eine Datenmatrix X und eine Korrelationsmatrix R simulieren.[2]

```
# Faktorladungen; 8 items
load_F1 <- c(0.6, -0.3, 0.5, 0.7, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
load_F2 <- c(-0.1, 0.1, 0.1, 0.1, -0.7, 0.5, -0.6, 0.7)
fx <- cbind(load_F1, load_F2)
# Zwischenfaktorkorrelation
phi <- diag(rep(1, 2)) ; phi[1, 2] <- phi[2, 1] <- 0.6
# Struktur
S <- psych::sim.structure(fx, phi, n=1000)
# Korrelations- und Datenmatrix
R <- S$model ; X <- S$observed  # R <- cor(X)
```

[2] Nur in simulierten Welten (in denen wir den richtigen Ausgang kennen), können wir prüfen, ob unsere Methoden das "korrekte" Ergebnis reproduzieren.

Section 5

Extraktionsproblem

Extraktionsproblem

Extraktionsproblem

Wie extrahieren wir die zur Reproduktion nötigen Faktoren/Komponenten?

1. Lösung: Bestimmung der "Principal Components" (*PCA*)
2. Lösung: Iterative Bestimmung der "Principal Components" (*PAF*)
3. Lösung: Finde die plausibelsten ("most likely") Werte (*MLF*)

Let's do it! (..in R): PCA

```r
# Old School!
# (dino_pca <- princomp(X, cor=TRUE))
# New School: Datenmatrix R -> X
(pca_fit <- psych::principal(R, nfactors = 2,
                             rotate = "none"))
## Komponentenladungen
pca_fit$loadings
## Kommunalitäten
pca_fit$communality
## Einzigartigkeit
pca_fit$uniquenesses
## Eigenwerte
pca_fit$values
# Quadrierte multiple Korrelation
pca_fit$R2
```

Übungsaufgabe 3: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 3 `06-EFA.R` und führen eine PCA durch. Interpretieren Sie die enstprechenden Kennwerte für ihr Modell und präsentieren Sie diese ihrem Nachbarn.

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Anmerkung: Normalerweise kennen Sie die Anzahl der zu extrahierenden Komponenten/Faktoren nicht. Wie man dieses Problem angeht, dazu gleich mehr!

Let's do it! (..in R): Hauptachsenanalyse (PAF)

```
(fit_paf <- psych::fa(R, nfactors=2,
                      rotate="none",
                      fm="pa"))
# Kommunalitäten
fit_paf$communality
# Eigenwerte
fit_paf$e.values
# Einzigartigkeit
fit_paf$uniquenesses
# Quadrierte multiple Korrelation
fit_paf$R2
```

Übungsaufgabe 4: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 4 `06-EFA.R` und führen Sie eine Hauptachsenanalyse (PAF) durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse der PAF mit denen der PCA. Bestehen Unterschiede zwischen den Ergebnissen? Zusatz: Haben Sie eine Vermutung wie mögliche Unterschiede zustande kommen?

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Übungsaufgabe 5: Kritische Reflexion & Diskussion

Example

Eine Folge der Extraktion mittels mit der Hauptkomponentenmethode ist, dass die extrahierten Faktoren unabhängig voneinander sind. Glauben Sie dem Modell uneingeschränkt, nähmen sie damit implizit an, dass auch die zugrundeliegende Konstrukte unabhängig voneinander sein müssten. Denken Sie an ihr Beispiel. Für wie plausibel halten Sie diese Annahme? Diskutieren Sie miteinander!

- Zeit: 10 Minuten

Primer: Maximum Likelihood Faktorenanalyse (MLF)

Kommunalitätenproblem

Das CFM ($\Lambda\Phi\Lambda' + \Psi$) ist unbestimmt. D.h. es hat (deutlich) mehr unbekannte als bekannte Bestanndteile. Die Folge: Das Modell kann deshalb nicht einfach "gelöst" werden. Wir müssen es schätzen.

- MLFA bietet nun als Lösung die plausibelsten (eng. “most likely”) Werte zur Reproduktion der Informationen in der Korrelationsmatrix an.

“Assuming that the residual variance reflects normally distributed random error, the most elegant statistical solution is that of maximum likelihood” (Revelle, in prep. S. 156)

Let's do it (..in R): Maximum Likelihood Faktorenanalyse (MLF)

```
(fit_mlf <- psych::fa(R, nfactors=2,
                      rotate="none",
                      fm="ml"))
# Kommunalitäten
fit_mlf$communality
# Eigenwerte
fit_mlf$e.values
# Einzigartigkeit
fit_mlf$uniquenesses
# Quadrierte multiple Korrelation
fit_mlf$R2
```

Übungsaufgabe 6: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 6 in `06-EFA.R` und führen Sie eine Maximum Likelihood Faktorenanalyse (MLF) durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den anderen Methoden. Prüfen die Validität der Ergebnisse in Bezug auf Ihr simuliertes Beispiel. Hat das Verfahren ihre simulierte Struktur entdeckt?

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Section 6

Rotationsproblem

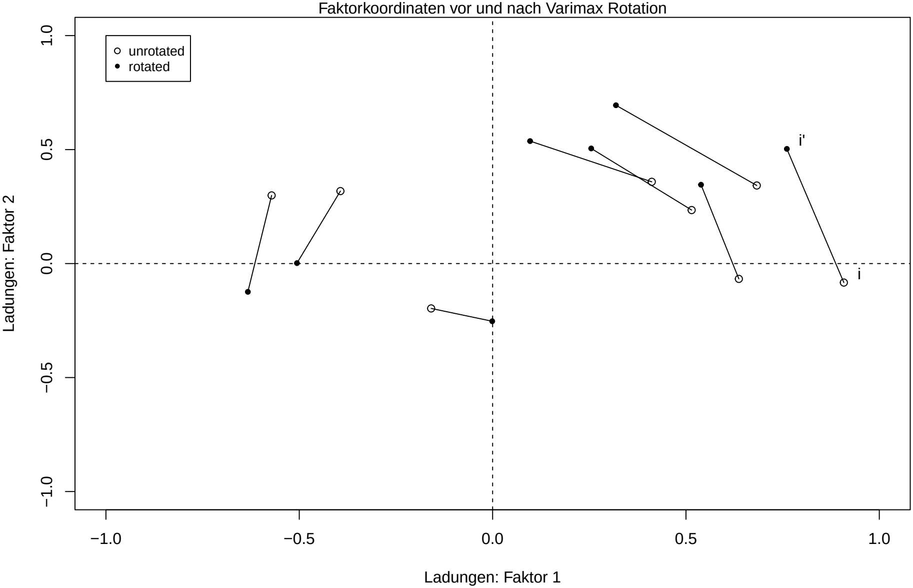
Rotationsproblem

Rotationsproblem

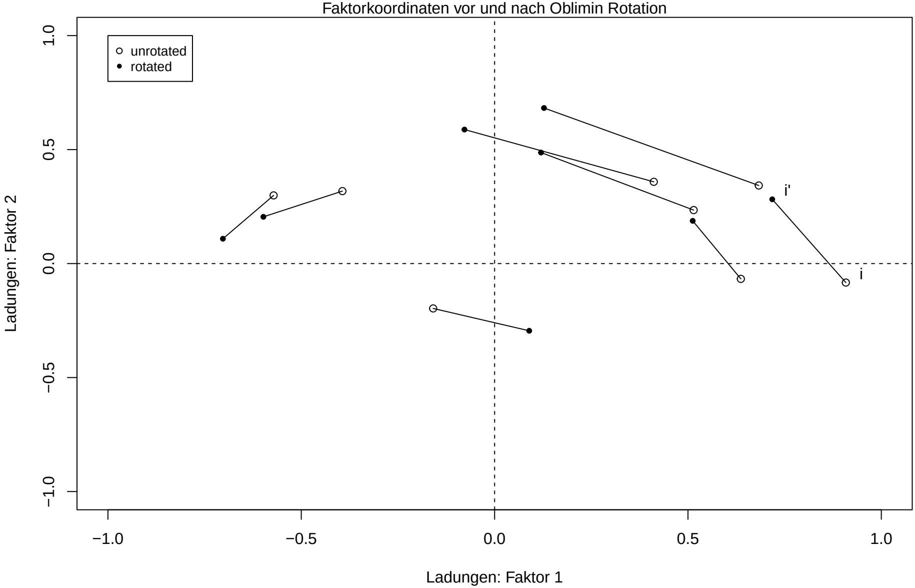
Wie rotiert die erhaltene Ladungsmatrix (Λ) derart, dass eine möglich einfach interpretierbare Lösung daraus hervorgeht?

1. Lösung: orthogonale Rotation
2. Lösung: oblique Rotation

Graphik: Orthogonale Rotation mit Varimax



Graphik: Oblique Rotation mit Oblimin



Let's do it (..in R): orthogonale Rotation (Varimax)

```r
(fit_vmax <- psych::fa(R, nfactors=2,
                             rotate="varimax",
                             fm="ml"))
# Kommunalitäten
fit_vmax$communality
# Eigenwerte
fit_vmax$e.values
# Einzigartigkeit
fit_vmax$uniquenesses
# Quadrierte multiple Korrelation
fit_vmax$R2
```

Let's do it (..in R): oblique Rotation (Oblimin)

```r
(fit_obl <- psych::fa(R, nfactors=2,
                          rotate="oblimin",
                          fm="ml"))
# Kommunalitäten
fit_obl$communality
# Eigenwerte
fit_obl$e.values
# Einzigartigkeit
fit_obl$uniquenesses
# Quadrierte multiple Korrelation
fit_obl$R2
# Wichtig: Phi
fit_obl$Phi
```

Übungsaufgabe 7: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 7 in `06-EFA.R` und führen Sie eine MLF durch. Rotieren Sie anschließend die Ergebnisse mit der Varimax und Oblimin Rotation. Wie verändert die Rotation ihre Interpretation der Ergebnisse? Erleichtert sie sie? Vergleichen Sie die Lösung dazu (1) mit der unrotierten Lösung und vergleichen Sie (2) die Ergebnisse zwischend den Rotationsmethoden.

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Zusatz: Sie kennen das "richtige" Ergebnis. Wir haben die Antowrten immerhin simuliert. Welche Lösung kommt ihren Ergebnissen am nächsten?

Section 7

Problem der Anzahl zu extrahierender Faktoren

Problem der Anzahl zu extrahierender Faktoren

Rotationsproblem

Wie ermittle ich die Anazhl der zu extrahierenden Faktoren ohne sie zu kennen?

1. Lösung: Kaiser Kriterium
2. Lösung: Scree-Test
3. Lösung. Horns Parallel Analyse

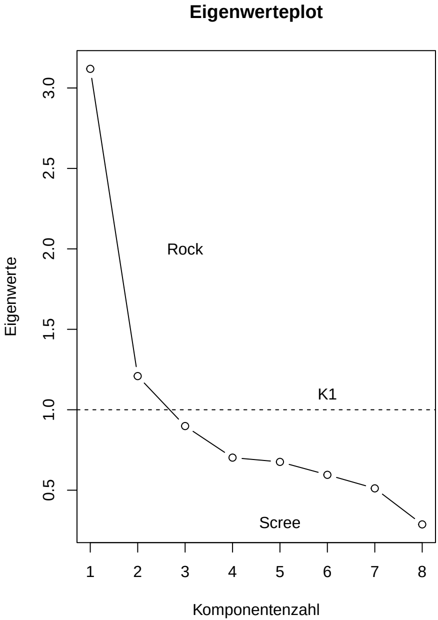
Anmerkung: Es gibt mittlerweile zahlreiche Weiterentwicklungen. Interessieren Sie sich dafür? (siehe: Lorenzo-Seva et al., 2011 & Timmerman et al., 2018)

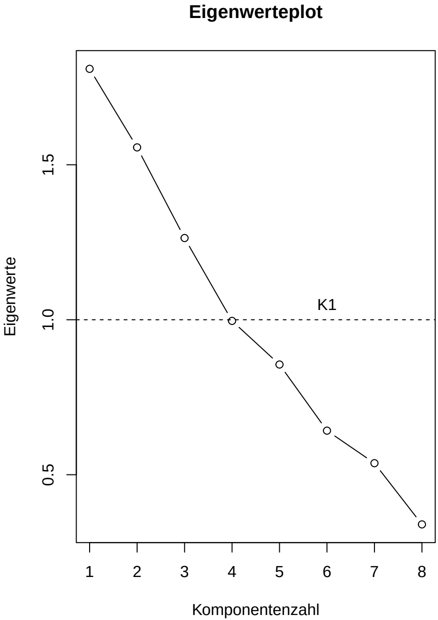
Eigenwerteplots (Kaiser Kriterium & Scree Test)

Kaiserkriterium & Scree Test

Zerlege die Korrelationsmatrix in ihre Eigenwerte (SVD/EVD) und plotte diese gegen einen Index. (1) Kaiserkriterium: Ist das Varianzaufklärungspotential eines Faktors kleiner als eines Items beende deine Suche ($\widehat{=} EW > 1$). (2) Scree-Test: Finde den "ellbow" der den "rock" vom "scree" unterscheidet.

Grafik: Eigenwertplot





Let's do it (..in R): Eigenwerteplots

```r
# Barfuß
 ev <- eigen(R)$values
 plot(ev, main="Eigenwerteplot", xlab="Eigenwerte",
      ylab = "Komponentenzahl", type="b")
 abline(h=1, lty=2)

# psych package
# psych::scree(R, factors = FALSE)
# psych::scree(R, factors = TRUE)
```

Anmerkung: Der Code ist auskommentiert, dass er in RMD nicht durchläuft

Parallel Analyse

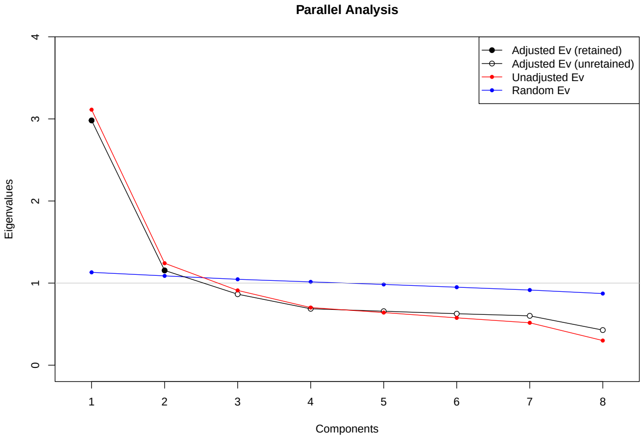
Parallel Analyse

"In parallel analysis, the criterion to be used in order to determine the number of factors is the following A factor is considered as "significant" if its eigenvalue is larger than the 95% quantile [...] of those obtained from random or resampled data." (Mair 2018, S.31)

Anmerkung: Im Orginal wurde die PA für Komponenten konstruiert. Mittlerweile gibt es sie auch für das CFM.

Grafik: Parallel Analyse (PCA)

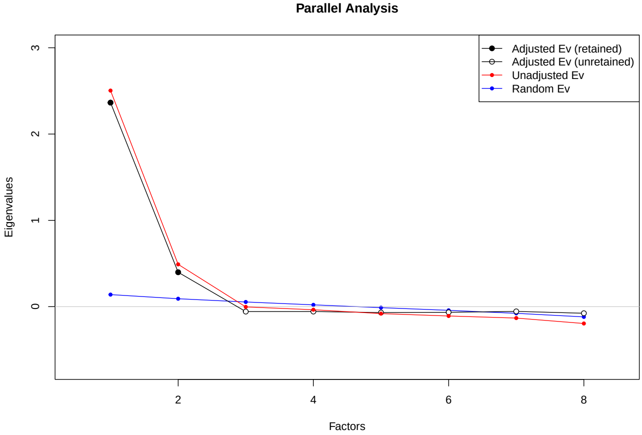
```
##
## Using eigendecomposition of correlation matrix.
```



Anmerkung: Die Grafik wurde mit `paran` nicht `psych` erstellt.

Grafik: Parallel Analyse (FA)

```
##
## Using eigendecomposition of correlation matrix.
```



Anmerkung: Die Grafik wurde mit `paran` nicht `psych` erstellt.

Let's do it (..in R): Parallel Analyse

```r
# Lange Laufzeit
psych::fa.parallel(X, fa = "pc", fm = "ml")

# Alternative
#
# Für Komponenten
paran::paran(X)
# Für Faktoren
paran::paran(X, cfa=TRUE)
```

Übungsaufgabe 8: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 8 in `06-EFA.R` und finden Sie die Anzahl zu extrahierender Faktoren in ihrem Beispiel mit den drei genannten Möglichkeiten. Welches der drei Verfahren "errät" ihre Anzahl zu extrahierender Faktoren richtig? Haben Sie eine Idee warum? (Tipp: Λ, Φ)

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Anmerkung: Sie haben den Luxus, das richtige Ergebnis zu kennen. Normalerweise ist das nicht der Fall! Darum sind Simulationen wichtig. So können wir das Verhalten einzelner Kriterien unter verschiedenen Umständen testen.

Section 8

Bonusmaterial: Bartlett-Test & KMO

(Minimal-)Voraussetzungen: Faktorenanalyse

Minimalvoraussetzungen

Sind meine Daten, bzw. ist meien Korrelationsmatrix zur Analyse überhaupt geeignet?

1. Lösung: Bartlett-Test
2. Lösung: Kaiser-Meyer-Olkin Kriterium (KMO)

(Minimal-)Voraussetzungen: Bartlett-Test

Bartlett-Test

H_0: Ist die zu faktorisierende Korrelationsmatrix signifikant von einer Identitätsmatrix verschieden?

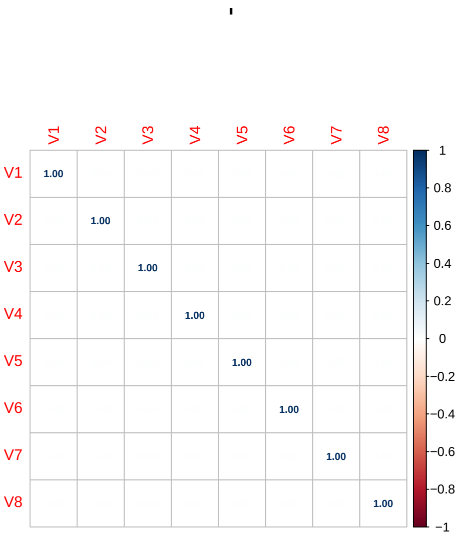
$$H_0 : verwefen \Leftrightarrow R = I \tag{3}$$

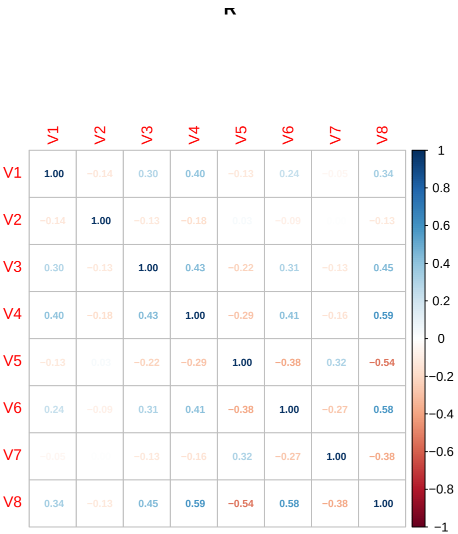
Output: Identitätsmatrix

```
(I <- diag(8))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    1    0    0    0    0    0    0    0
## [2,]    0    1    0    0    0    0    0    0
## [3,]    0    0    1    0    0    0    0    0
## [4,]    0    0    0    1    0    0    0    0
## [5,]    0    0    0    0    1    0    0    0
## [6,]    0    0    0    0    0    1    0    0
## [7,]    0    0    0    0    0    0    1    0
## [8,]    0    0    0    0    0    0    0    1
```

Grafik: I vs. R


I
V1 V2 V3 V4 V5 V6 V7 V8
V1 1.00
V2 1.00
V3 1.00
V4 1.00
V5 1.00
V6 1.00
V7 1.00
V8 1.00
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 −0.2 −0.4 −0.6 −0.8 −1


R
V1 V2 V3 V4 V5 V6 V7 V8
V1 1.00 −0.14 0.30 0.40 −0.13 0.24 −0.05 0.34
V2 −0.14 1.00 −0.13 −0.18 0.03 −0.09 −0.13
V3 0.30 −0.13 1.00 0.43 −0.22 0.31 −0.13 0.45
V4 0.40 −0.18 0.43 1.00 −0.29 0.41 −0.16 0.59
V5 −0.13 0.03 −0.22 −0.29 1.00 −0.38 0.32 −0.54
V6 0.24 −0.09 0.31 0.41 −0.38 1.00 −0.27 0.58
V7 −0.05 −0.13 −0.16 0.32 −0.27 1.00 −0.38
V8 0.34 −0.13 0.45 0.59 −0.54 0.58 −0.38 1.00
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 −0.2 −0.4 −0.6 −0.8 −1

Let's do it (..in R): Bartlett-Test

```r
# Datenmatrix (X)
# psych::cortest.bartlett(X)
# Korrelationsmatrix (R)
psych::cortest.bartlett(R, n=nrow(X))
```

```
## $chisq
## [1] 1950.464
##
## $p.value
## [1] 0
##
## $df
## [1] 28
```

(Minimal-) Voraussetzungen: KMO

KMO

Welchen Anteil an der Gesamtvarianz der Items ist auf gemeinsame Varianz rückführbar?

Anmerkung: Der gemeinsame Varianzanteil ist es letztlich, was die Faktoren aufgreifen können.

$$KMO = \frac{\sum\sum\limits_{j \neq k} r_{jk}^2}{\sum\sum\limits_{j \neq k} r_{jk}^2 + \sum\sum\limits_{j \neq k} p_{jk}^2} \in [0, 1] \tag{4}$$

r_{jk} : Korrelation zwischen zwei Items p_{jk} : Partielle Korrelation

Let's do it! (..in R)

```r
(kmo <- psych::KMO(X))
```

```
## Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy
## Call: psych::KMO(r = X)
## Overall MSA =  0.81
## MSA for each item =
##   V1   V2   V3   V4   V5   V6   V7   V8
## 0.84 0.84 0.88 0.80 0.80 0.89 0.74 0.76
```

```r
# kmo$MSA
```

Übungsaufgabe 9: Selbstexperiment

Example

Versuchen Sie es nun selbst! Nutzen Sie den Code zur Übungsaufgabe 9 in `06-EFA.R` und führen Sie einen Bartlett-Test durch. Verwenden Sie auch das KMO-Kriterium auf ihre Korrelations- oder Datenmatrix an. Wie beurteilen Sie die Ergebnisse? Sind ihre Matritzen zur Analyse geeignet?

- Zeit: 10 Minuten
- Replikation: `set.seed(123)`
- Anmerkung: Konzepte & Output verstehen $\gg$ Codes verstehen!

Übungsaufgabe 10: Evaluation

Example

Welches Verfahren hat ihre anfängliche Struktur am besten aufgefunden? Haben Sie eine Idee warum? (Tipp: Denken Sie an Φ)

Anmerkung: Wiederholen Sie die Übung im Selbststudium mit anderen Werten. Verändern Sie diese systematisch und prognostizieren Sie, was geschehen wird und warum. So lernen Sie jedes Verfahren, jeden Algorithmus und jedes Kriterium verstehen.

Section 9

Epilogue: The Power of Simulation!

Epilogue: The Power of Simulation!

…Wenn Sie wissen wollen, wie sich ein bestimmtes Kriterium unter spezifischen Voraussetzungen verhält, dann simulieren Sie!

The Power of Simulation

Sie besitzen nun die Power der Simulation! Simulieren Sie sich bestimmte Strukturen (wie in diesem Kurs getan) und testen Sie die Kriterien, Kennwerte, usw. auf Herz und Nieren! Nur so lernen Sie ihre Grenzen kennen.

Anmerkung: Gute Klausurübung! Schnappen Sie sich ihre Mitstudierenden simulieren Sie mögliche Welten und üben, üben, üben Sie!

Section 10

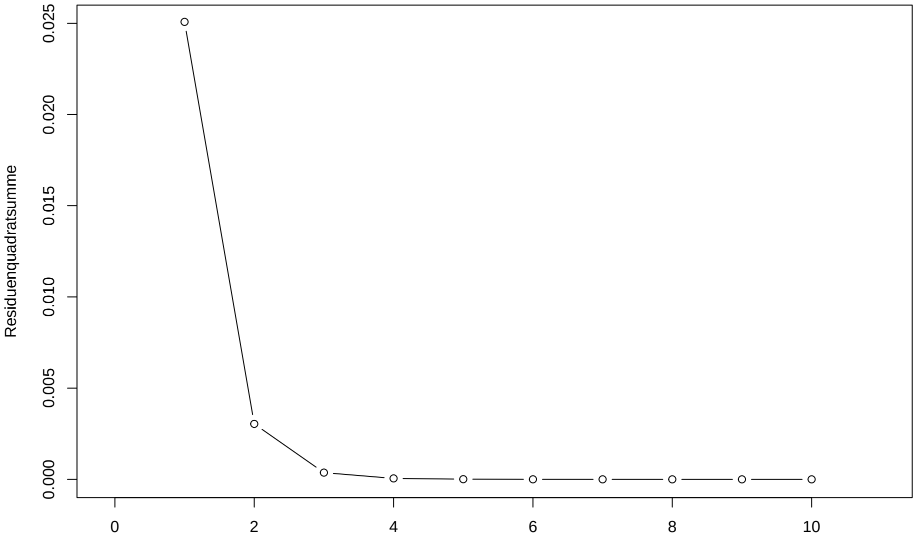
Selbststudium

Selbststudium 1: die Relevanz von Iterationen

It is a useful exercise to run fa using the principal axis factor method (fm= "pa") and specifying the number of iterations (e.g., max.iter=2). Then examine the size of the residuals as the number of iterations increases. When this is done, the solution gets progressively better, in that the size of the residuals in the off diagonal matrix become progressively smaller. (Revelle, in prep., S. 152)

Selbststudium 1: die Relevanz von Iterationen

```
##  [1] 2.508165e-02 3.040011e-03 3.681981e-04 5.153387e-05 9.
##  [6] 1.994291e-06 5.300246e-07 1.605099e-07 1.605099e-07 1.
```



Selbststudium 2: händische PCA – Eigenwertzerlegung

```
# Black Box
pca_fit <- princomp(X, cor = TRUE)

# Barfuß
R_EVD <- cor(X)
# EVD von R ; Eigenvektoren ; Eigenwerte
EVD_R <- eigen(R_EVD)
# Komponentenladungen
loadings <- EVD_R$vectors
# Gleich?
pca_fit$loadings ; print(loadings, digits=3)
```

Selbststudium 3: händische EFA – Singulärwertzerlegung

```
# Black Box
pca_fit <- prcomp(X, scale. = TRUE)

# Barfuß
n <- nrow(X)
SVD_X <- svd(scale(X)/sqrt(n-1))
U <- SVD_X$u ; D <- SVD_X$d
loadings <- U %*% diag(D) * sqrt(n-1)
# Gleich?
pca_fit$x ; loadings
```

Selbststudium 4: reduzierte Korrelationsmatrix

...Der Output zeigt die erst 8 Iterationen einer PAFA. Vergleichen Sie diese mit ihre am Anfang konstruierte Korrelationsmatrix `$R`). Achten Sie auf die Hauptdiagonalen!

Selbststudium 5: PAF

[P]rincipal axes factor analysis. This is similar to principal components, except that it is done with a reduced matrix where the diagonals are the communalities. The communalities can either be (1) specified a priori, (2) estimated by such procedures as multiple linear regression, or (3) found by iteratively doing an eigenvalue decomposition and repeatedly replacing the original 1s on the diagonal with the value of $1 - u^2$ *where* $U\hat{}2 = diag(R\text{-}FF')$*. (Revelle, in prep., S.156)*

Selbststudium 5: händische PAF (Basisalgorithmus, 1 Iteration)

```r
# EVD of R
EVD_R <- eigen(R)
# Loadings
F <- EVD_R$vectors
# Residual matrix
R_ast <- R - F %*% t(F)
# Squared uniqness matrix
U2 <- diag(R_ast)
# Replace on diagonals
(diag(R) <- 1 - U2)
R
```

Selbststudium 5: händische PAF (1 Iteration)

```
EVD_R <- eigen(R) # EVD of R
F <- EVD_R$vectors # Loadings
k <- 5 # k largest PC
# Pre reproduction
Fk <- F[,seq(k)]
Z <- matrix(0, ncol = ncol(F) - k,  nrow(F))
Fk <- cbind(Fk, Z)
# Residual matrix
R_ast <- R - Fk %*% t(Fk)
# Squared uniqness matrix
U2 <- diag(R_ast)
# Replace on diagonals
diag(R) <- 1 - U2
#...Repeat
round(R, digits = 3)
```

Selbststudium 5: händische PAF (≥ 1 Iteration)

Anmerkung: Führen Sie das Code Snippet solange immer wieder aus, bis sich die Verändeurngen in der Hauptdiagonale stabilisieren. Jede Wiederholung des Codes stellt eine Iteration in der Maschinerie der PAF dar. Nichts anderes passiert innerhalb des Algorithmuses den Sie in konventionellen Packages finden. ..nur das die Algorithmen deutlich performanter und effizienter implementiert sind.

Literaturverzeichnis I

Dinno, Alexis. 2018. *Paran: Horn's Test of Principal Components/Factors*. http://alexisdinno.com/Software/files/PA_for_PCA_vs_FA.pdf.

Francois, Romain. 2020. *Bibtex: Bibtex Parser*. https://github.com/romainfrancois/bibtex.

Lorenzo-Seva, Urbano, Marieke E. Timmerman, and Henk A. L. Kiers. 2011. "The Hull Method for Selecting the Number of Common Factors" 46 (2): 340–64. https://doi.org/10.1080/00273171.2011.564527.

R Core Team. 2021. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. https://www.R-project.org/.

Revelle, William. 2021. *Psych: Procedures for Psychological, Psychometric, and Personality Research*. https://personality-project.org/r/psych/%0Ahttps://personality-project.org/r/psych-manual.pdf.

Literaturverzeichnis II

Timmerman, Marieke E., Urbano Lorenzo-Seva, and Eva Ceulemans. 2018. "The Number of Factors Problem." In, 305–24. John Wiley & Sons, Ltd. https://doi.org/10.1002/9781118489772.ch11.

Xie, Yihui, Christophe Dervieux, and Emily Riederer. 2020. *R Markdown Cookbook*. Boca Raton, Florida: Chapman; Hall/CRC. https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook.