Klassische Test Theory

Jalynskij et al.

Einstieg

Stellen Sie sich vor, Sie dürfen völlig frei ein Thema für eine Forschungsarbeit wählen. Was würden Sie untersuchen?

Auflösung

Viele Sozialwissenschaftlern/innen gemeint ist, ist ein aufgeprägtes Interesse an komplexen (oft unbeobachtbaren) sozialwissenschaftlichen Konstrukten (z.B. Intelligenz, Narzissmus, Ehre, Liebe, Depression...).

$\longrightarrow$ "The burden of complex measurement"

Die Bürde der Messung komplexer Phänomene

"Psychological measurement can be a difficult task. We aim to measure not directly observable variables like cognitive abilities, personality traits, motivation, quality of life, diseases in psychopathology, etc. Measuring such latent constructs is much more challenging than determining body height or weight (for which we have a measuring tape and a scale as measurement instruments). Obviously we cannot simply ask: "How depressed are you?" or "How intelligent are you?". We need a measurement instrument such as a test or questionnaire to assess a participant's location on the underlying latent variable." (Mair, 2018, S. 1)

Die Bürde der Messung komplexer Phänomene

Die Bürde der Messung komplexer Phänomene

...being (almost always) doomed to measure with error when accessing latent constructs.

. . . zur Kontrolle benötigen wir eine Theorie über die Entstehung des Messfehlers (Messfehlertheorie).

- Beispieltheorie: Klassische Test Theorie (KTT)
- Erklärung: Wahrer Wert $\sim$ Beobachtungswert $\sim$ Messfehler
- (..demnächst: Item Response Theory (IRT))

Das True Score Approach

Formal: Die Bürde der Messung komplexer Phänomene

$$X = \tau - \epsilon \tag{1}$$

Daraus folgt logisch äquivalent..

Definition: True Score

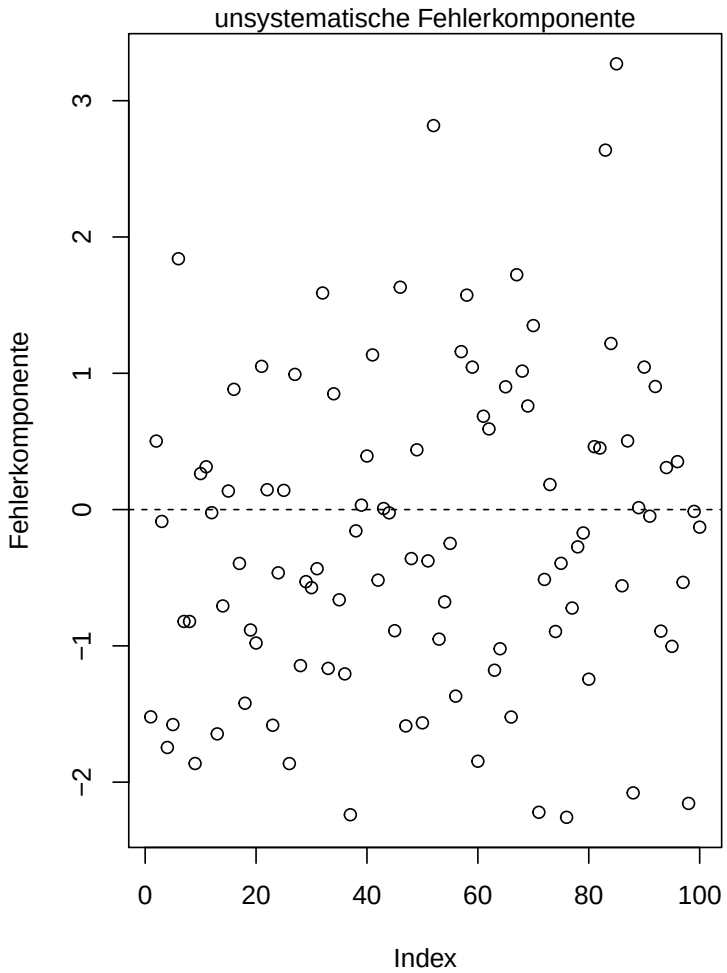
$$\tau = X + \epsilon \tag{2}$$

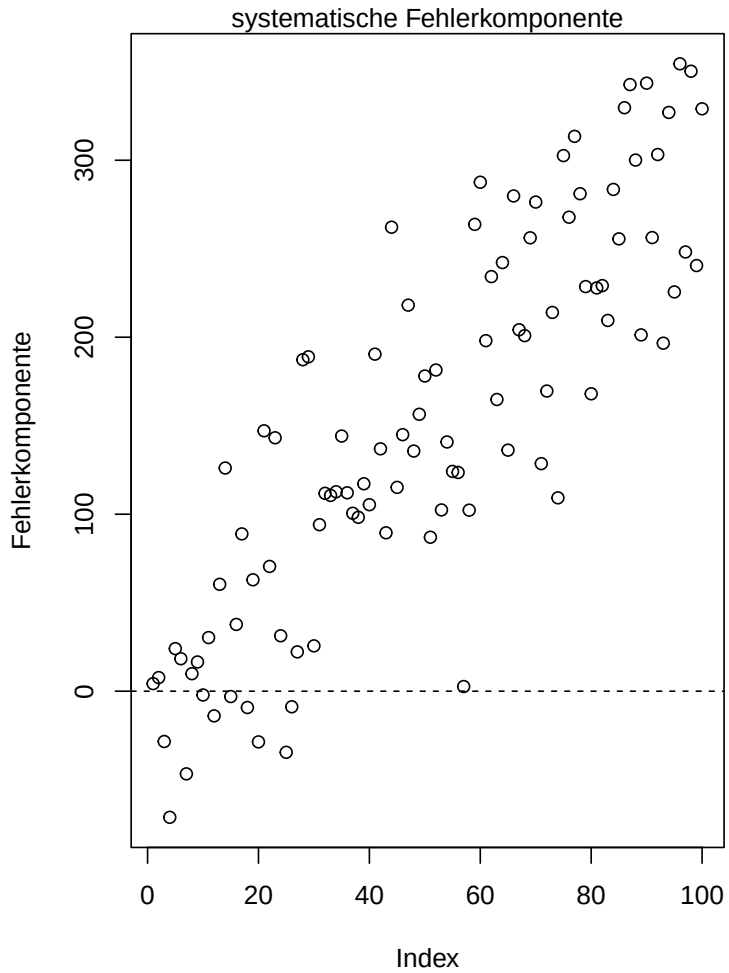
- X: Beobachtungswert (bekannt)
- τ: Wahrer Wert (unbekannt)
- ϵ: Fehlerkomponente, Messfehler (unbekannt)

CTT als Messfehlertheorie

Grundannahme: unsystematische Fehlerkomponente

$$E(\epsilon) = 0 \tag{3}$$





Warum “unsystematisch”?

McElreath, 2020, S. 73:

Fluktuationsphänomen

"Adding small fluctuations tend to dampen one another!"

> *“Consider a simple case of asking students their ages but to insure privacy, asking them to flip a coin before giving their answer. If the coin comes up heads, they should add 1 to their real age, if it comes up tails, they should subtract 1. Clearly no observed score corresponds to the true scores. But if we repeat this exercise 10 times, then the mean for each student will be quite close to their true age”. (Revelle, in prep., S. 207)*

Let's do it! (..in R)

```
true_age <- 28
add_privacy <- function(true_age){
  # heads or tails
  hot <- sample(c(0,1), 1, replace = TRUE)
  ifelse(hot==1, true_age+1, true_age-1)
}
# Anzahl der Messwiederholungen
M <- 10
reps <- replicate(M, add_privacy(true_age))
mean(reps)
```

```
## [1] 27.8
```

Prognose & Selbstexperiment

- Wie verändert sich der Wert mit steigender Wiederholungszahl?
- Ab wann sind die Veränderungen konstant?

Example

Versuchen Sie es selbst! Nutzen Sie den Code auf der vorherigen Folie. Geben Sie ihr eigenes Alter ein und verändern Sie den Wert für `n`. (siehe: Übungsaufgabe 1)

Anmerkung: Sie sollen die Konzepte *nicht* jede Zeile des Codes verstehen!

True Score Logik: Gedankenexperiment

Gedankenexperiment

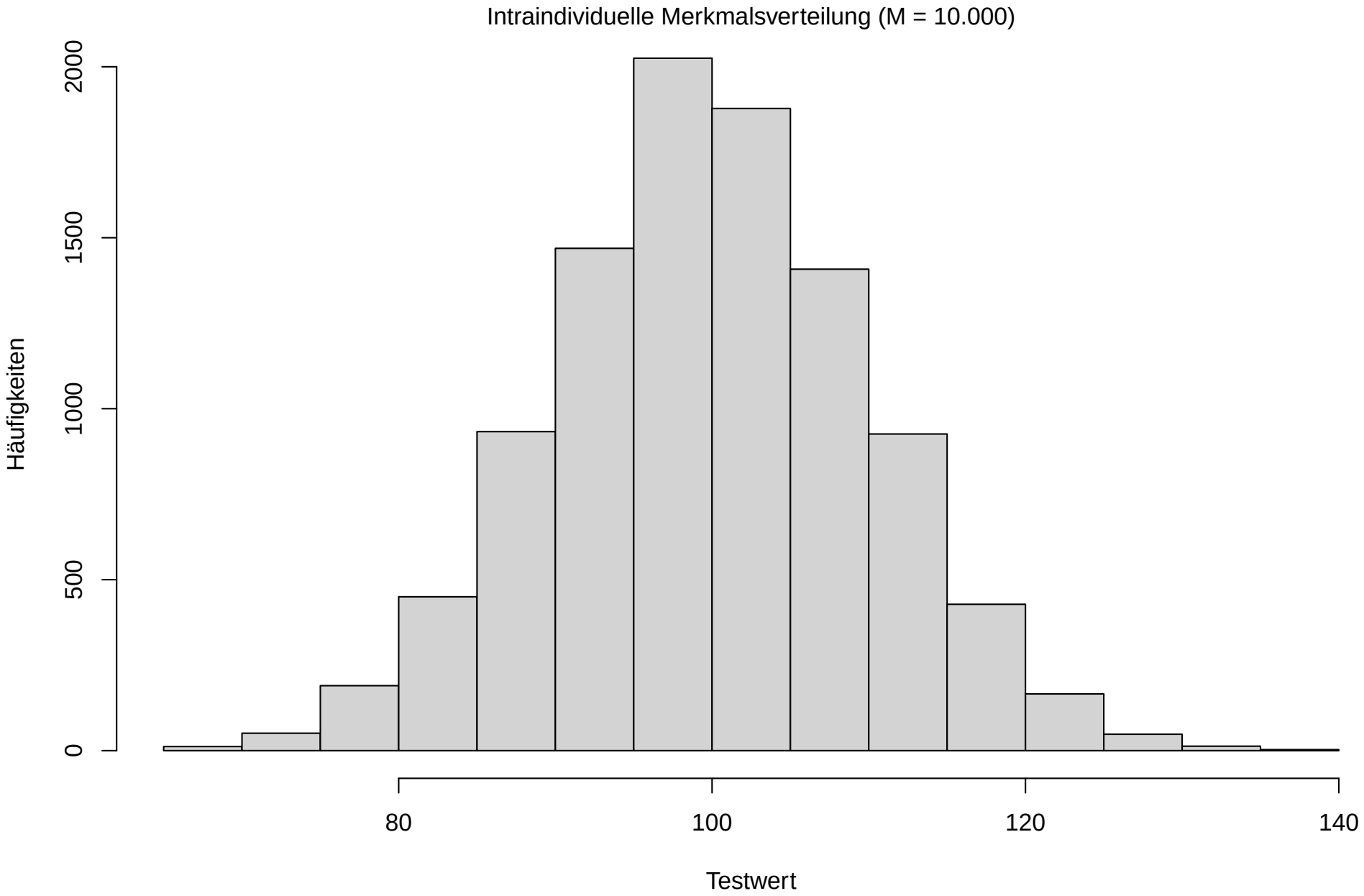
Hätten wir die Möglichkeit eine Person i unzählige Male zu unter den gleichen Bedinungen zu messen (m=1,...,M), dann erhalten wir eine (Normal-)verteilung seiner Messwerte (unter der Annahme $E(\epsilon) = 0$)), wobei im Mittel über alle intraindividuellen Messwerte ($X_j = 1, \ldots, M$) die Beobachtungswerte dem wahren Wert der Person entsprechen

$$E(X_{j=1,\ldots,M}) = \tau \quad | \quad \epsilon \sim Normal(0, \sigma) \tag{4}$$

Let's do it! (..in R)

```r
set.seed(123)
# Anzahl der Messwiederholungen
M <- 1e4
# True Score(s) (z.B. Intelligenztest)
T <- 100
# Zufallsfehler; Schwankungsbreite +/- 10
E <- rnorm(M, 0, 10)
# Beobachtungswerte
X <- T + E
# (Imaginäre() Wiederholung der Testung
reps <- replicate(M, sample(X, 1))
```

Ergebnisse: Intraindividuelle Merkmalsverteilung



Ergebnisse: Beobachtungs- & Erwartungswert

```
set.seed(123)
# Ein zufällig gezogener Beobachtungswert
(X_i <- sample(X, 1))
```

```
## [1] 88.09457
```

```
# Erwartungswert des Individuums: T = E(X)
(E_X <- mean(reps))
```

```
## [1] 99.89027
```

Prognose & Selbstexperiment

- Wie verändert sich der Wert mit steigender Wiederholungszahl?
- Ab wann sind die Veränderungen konstant?

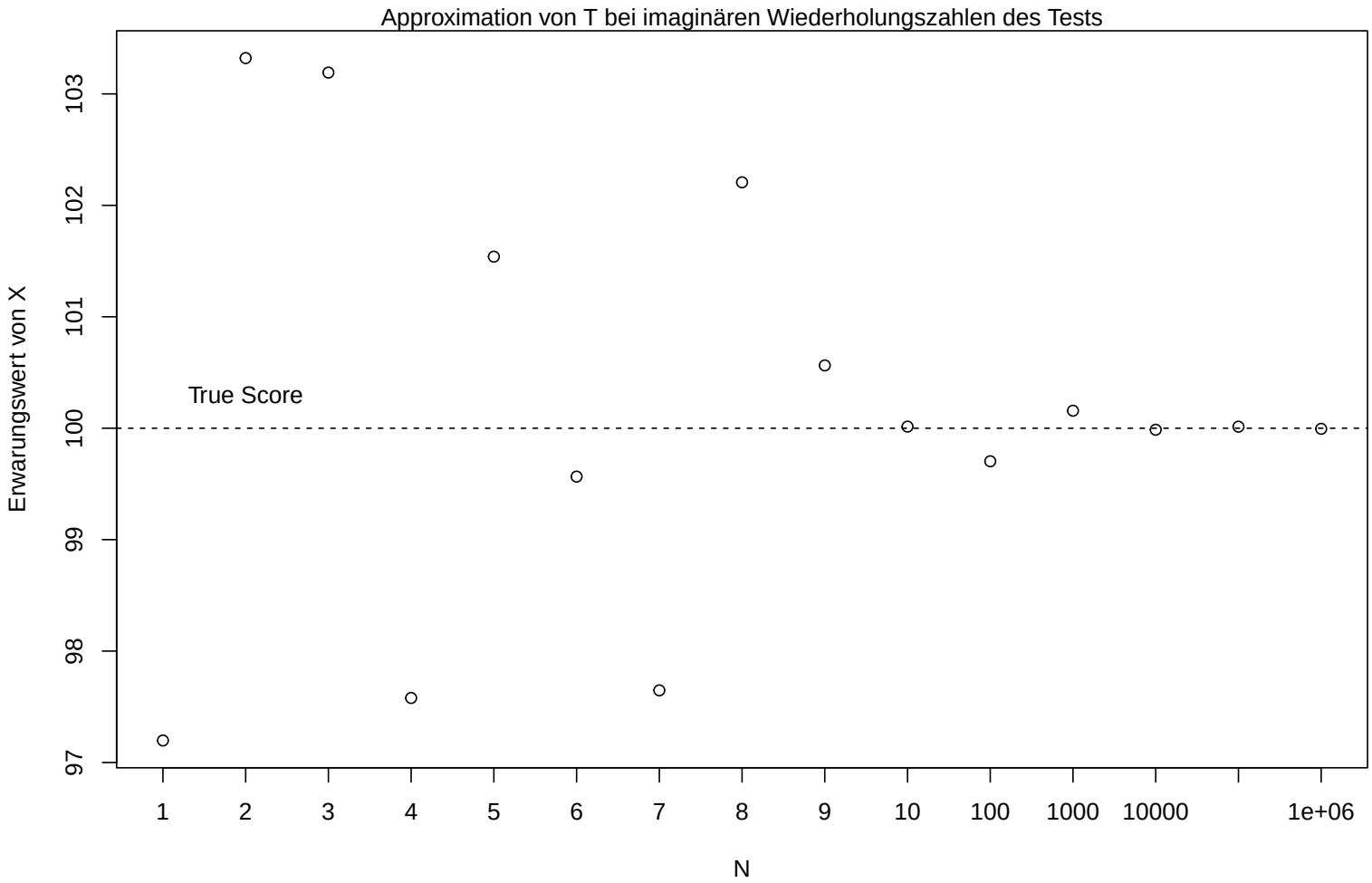
Example

Versuchen Sie es selbst! Nutzen Sie den Code auf der vorherigen Folie. Verändern Sie den Wert für `M` und überprüfen Sie Ihre Prognose. (siehe: Übungsaufgabe 2)

Anmerkungen: Wollen Sie unsere Ergebnisse exakt reproduzieren setzen Sie folgendes Snippet vor jedes Codebeispiel

```
# Set RNG state
set.seed(123)
```

Auflösung

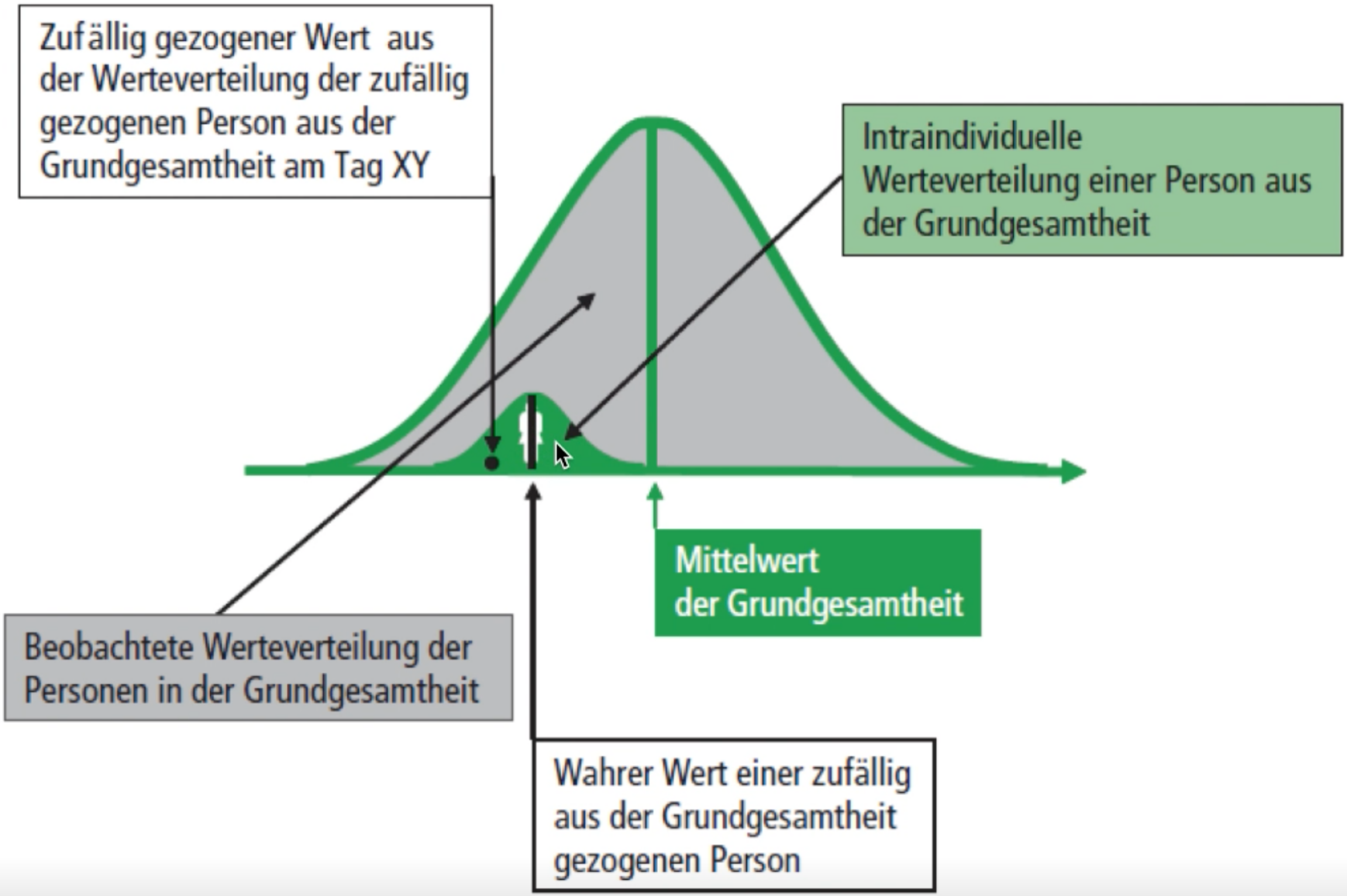

Approximation von T bei imaginären Wiederholungszahlen des Tests
Erwarungswert von X
97
98
99
100
101
102
103
True Score
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
100
1000
10000
1e+06
N

True Score Logik

Um die True Score Logik zu verinnerlichen, wollen wir die einzelnen Konzepte in R umsetzen und mit den Kennwerten "spielen" um eine Intuition für sie zu bekommen; v.a.:

- Interindividuelle Merkmalsverteilung
- Intrainduviduelle Merkmalsverteilung
- True, Observed & Error Score – $\tau.X, \epsilon$

Zur Verortung: Kernkonzepte



Anwendungsbeispiel: Intelligenztest

Gedankenexperiment

Stellen Sie sich vor wir würden mit 10.000 Probanden einen Intelligenztest durchführen, indem jeder Proband 5000 mal den gleichen Intelligenztest wiederholt.

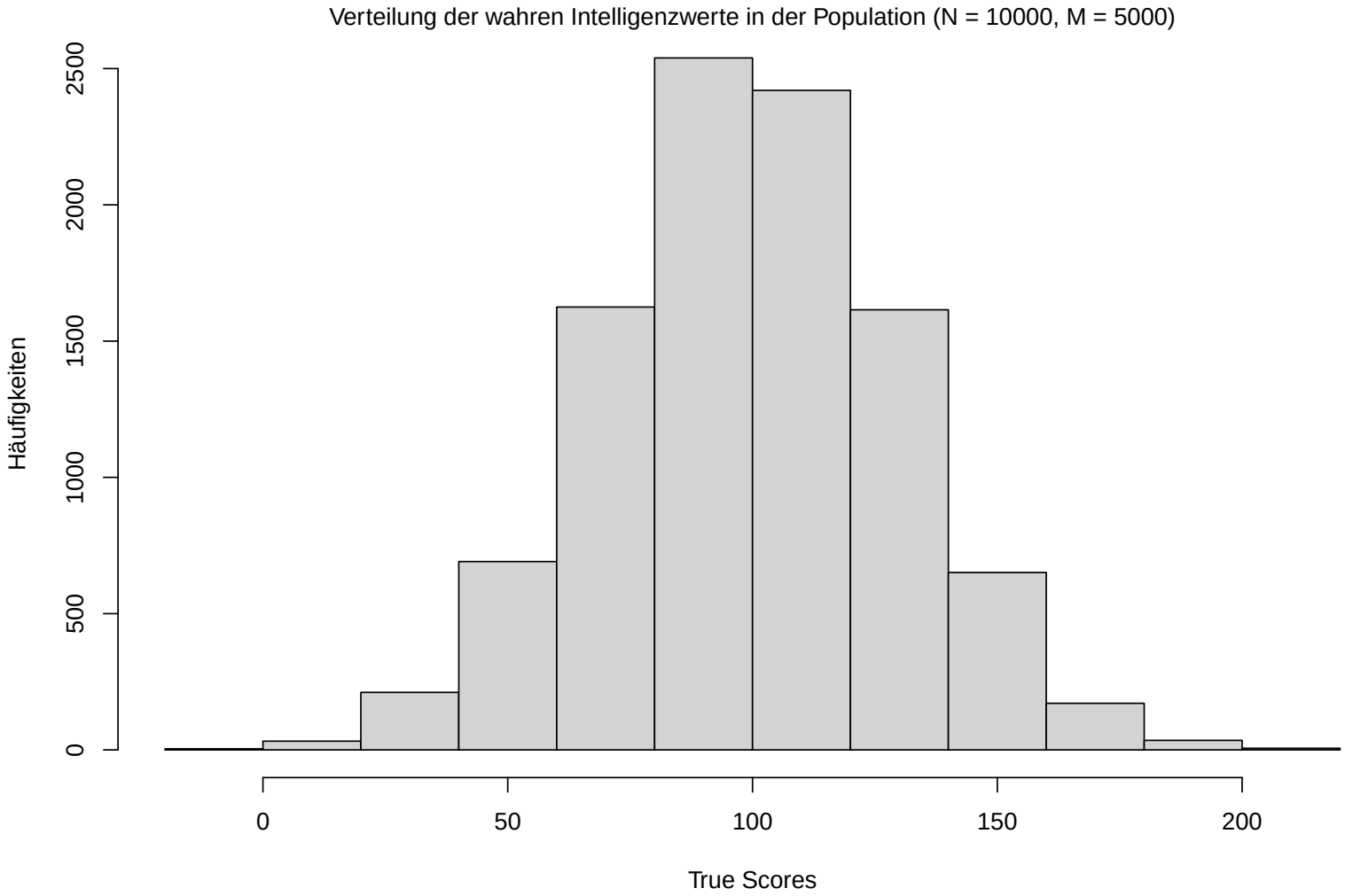
Populationen: Individuen & Messwerte

..dazu ziehen wir (zufällig) aus einer normalerweise unbekannten Population N=10.000 Personen mit den True Scores (τ)

```
# Populationsgröße
N <- 1e4
# Generierung der True Scores
# 100: Mittlere Intelligenz in der Population
# 30: Abweichungen vom Populationnsmittelwert
T <- round(rnorm(N, 100, 30), digits = 0)
# Anzahl der (imaginären) Testwiederholungen
M <- 5000
X <- lapply(T, function(T) rnorm(M, T , 5))
names(X) <- T
```

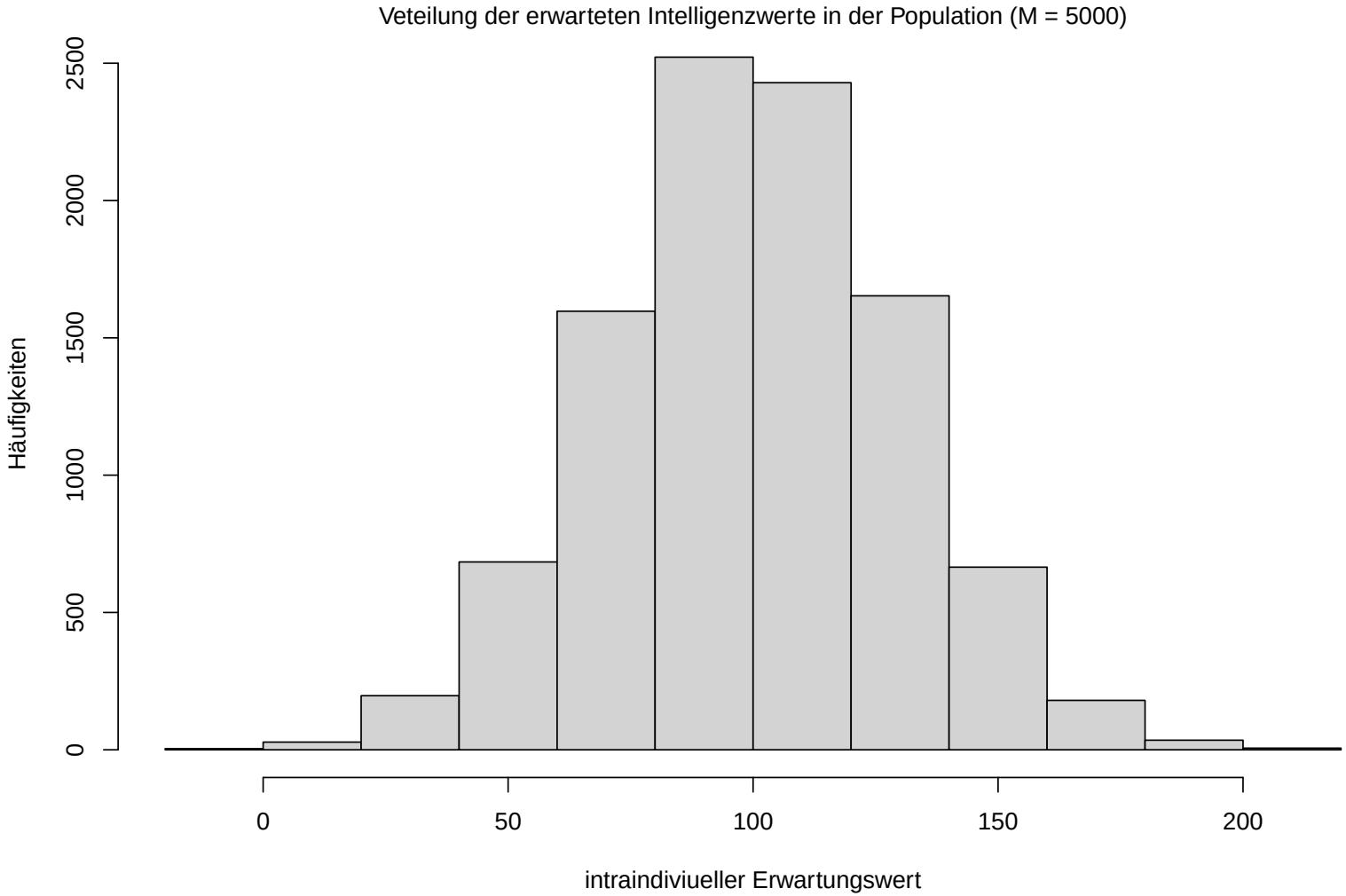
Verteilung der True Scores in der Population

. . . die uns unbekannten True Scores sind gemäß der Simulation wie folgt verteilt



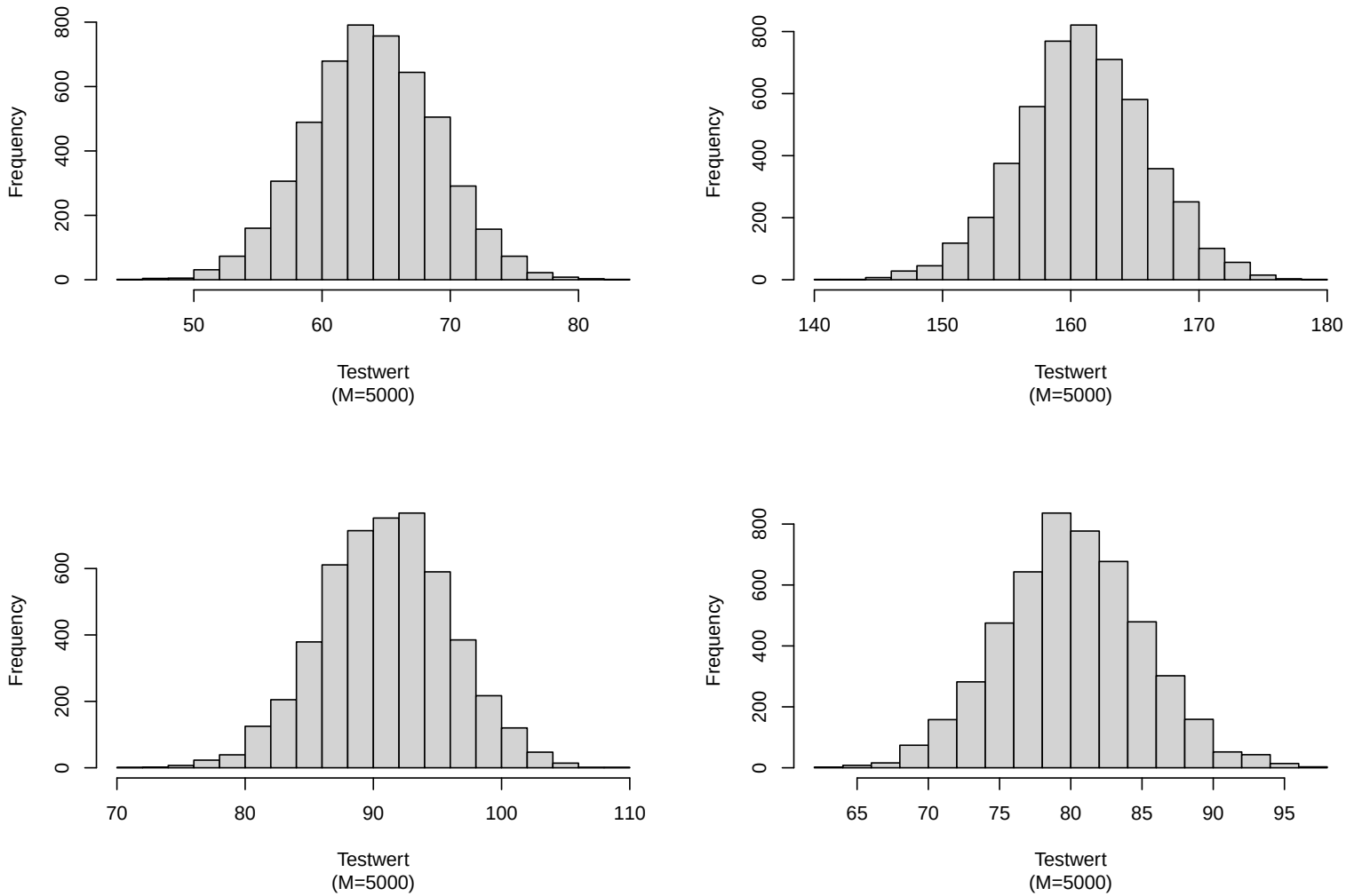
Interindividuelle Merkmalsverteilung

. . . mitteln wir die 5000 durchgeführten Testergebnisse ($X_{j=1,\ldots,5000}$) für jede Person ($i = 1, \ldots, 10000$) und plotten diese, dann erhalten wir die interindividuelle Merkmalsverteilung ($E(X) \approx T$)



Intraindividuelle Merkmalsverteilungen

. . . aus dieser Population (interindividueller Merkmalsverteilung) ziehen wir zufällig 4 Probanden/Probandinnen und betrachten ihre intraindividuellen Merkmalsverteilung über die 1000 Testwiederholungen.



Intraindividuelle Merkmalsverteilungen

..da wir nur ein einzes Mal messen, ziehen wir (zufällig) einen Wert aus der (Normal-)verteilung der intraindividuellen Messwerte. Dieser intraindividuelle Messwert (X_{ij}) ist ein Schätzer für den True Score (τ_i) der Person der wegen des Messfehlers unter oder über dem Messwert liegt.

```
# Zufallszug eines Individuums aus der Population
X_i <- sample(X, 1)
# Zufallszug eines Testwertes der Person
(X_ij <- sample(X_i[[1]], 1)) ; names(X_i)
```

```
## [1] 63.09449
```

```
## [1] "64"
```

Prognose & Selbsttests

Example

Versuchen Sie es selbst! Nutzen Sie nachfolgende Funktion und führen sie sie immer wieder aus. Damit ziehen Sie aus unserer Population immer wieder zufällig neue Probanden. Achten sie darauf, wie sich True Score, Observed Score und Messfehler verändern. (siehe: Übungsaufgabe 3)

- Funktion einlesen: Makieren + Str/Ctrl/Cmd-Enter
- Mehrfach ausführen: Makieren + Str/Ctrl/Cmd-Enter
- Ergebnis auf Folie wiederholen:

Zufallsziehung

```
rsample_i <- function(){
  # Zufallszug eines Individuums
  X_i <- sample(X, 1)
  # Zufallszug eines Testwertes
  X_ij <- sample(X_i[[1]], 1)
  cat(" True Score (T):", names(X_i), "\n",
      "Testwert (X):", round(X_ij), "\n",
      "Messfehler (E):",
      abs(round(X_ij) - as.numeric(names(X_i))))}
# Automatisierung
rsample_i()
```

```
##  True Score (T): 64
##  Testwert (X): 63
##  Messfehler (E): 1
```

Prognose & Selbsttest

- Wie wirken sich Veränderungen in der Wiederholungszahl des Tests (M) aus?
- Was geschieht bei Veränderungen der Populationsgröße (N)?
- Wie wirken sich die Veränderungen auf den Zusammenhang zwischen True Score, Observed Score und Messfehler aus (Tipp: $\tau = X + \epsilon$)

Example

Versuchen Sie es nun selbst! In vorherigem Code finden Sie die Anmerkung `Verändere mich!` (siehe v.a. `N, M`). Erstellen Sie ihre eigenen Populationen und variieren Sie systematisch die Werte M und N. (siehe: Übungsaufgabe 4)

Lokale Unabhängigkeit

Lokale Unabhängigkeit

Lokale Unabhängigkeit $\Leftrightarrow$ die Itemantworten sind unter Kontrolle der Traitausprägung unabhängig voneinander

- Die Logik lantenter Variablen (2.0)

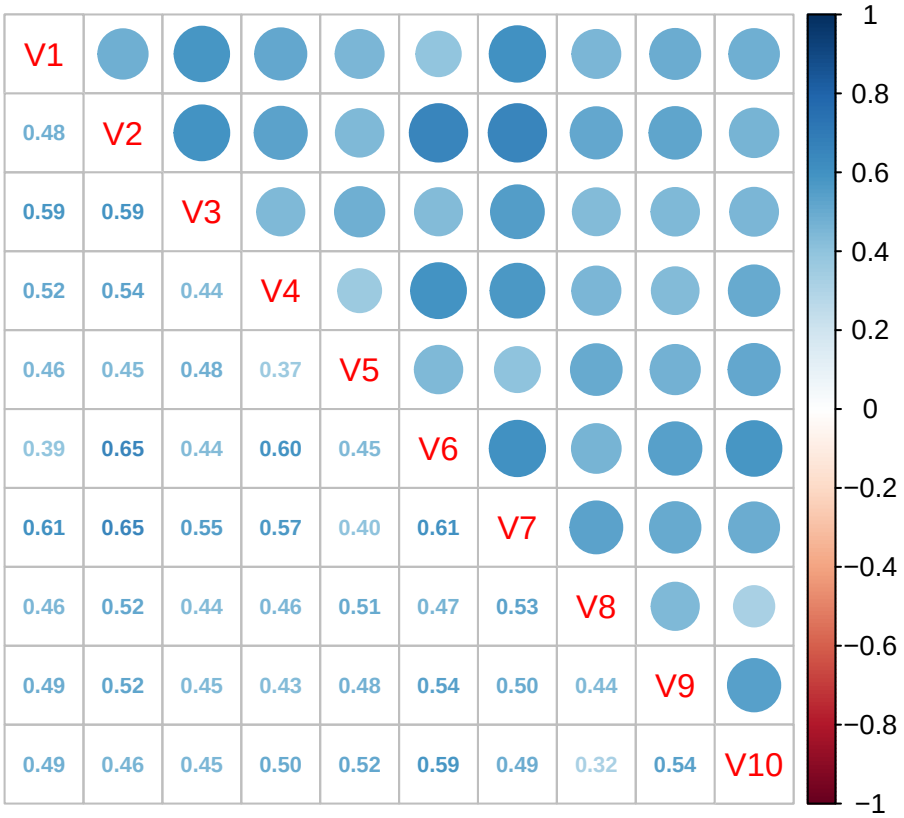
$$\zeta : gen.process \rightarrow VAR(j = 1, \ldots, M) : cor(j, k) > 0) \tag{5}$$

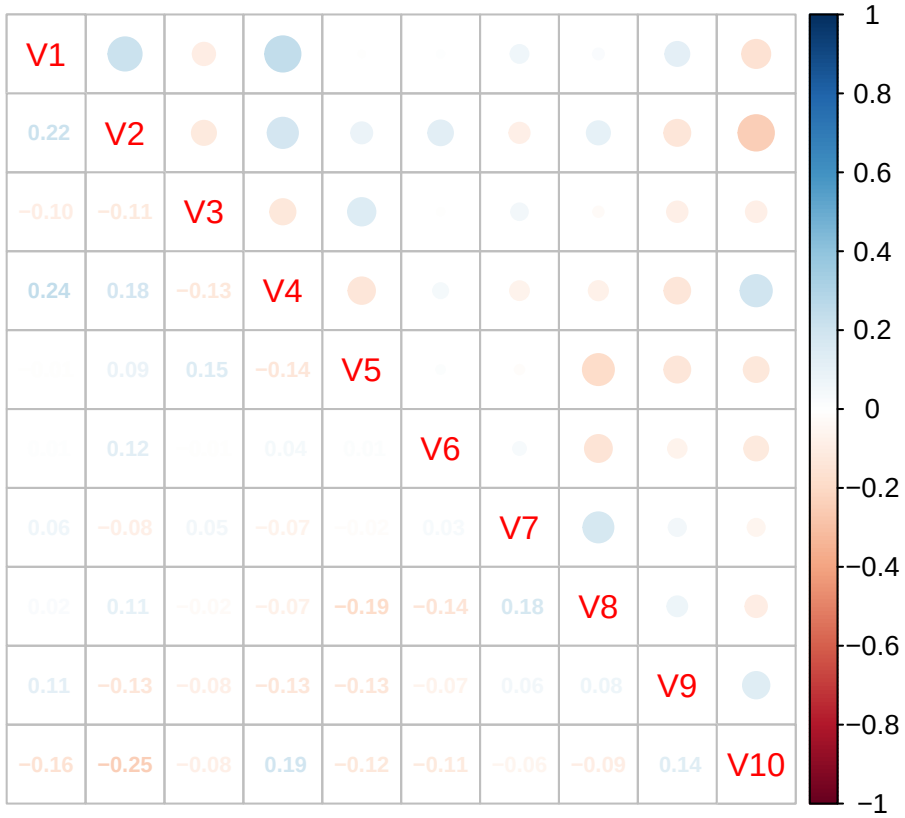
- Die Logik lokaler Unabhängigkeit

$$cor(j, k)|\zeta = 0 \tag{6}$$

- ζ: Konstrutk (latente Variable)
- j, k: Items in einem Test (beobachtete Variablen)
- M: Anzahl der Items in einem Test

Lokale Unabhängigkeit ∼ Korrelationsmatrizen

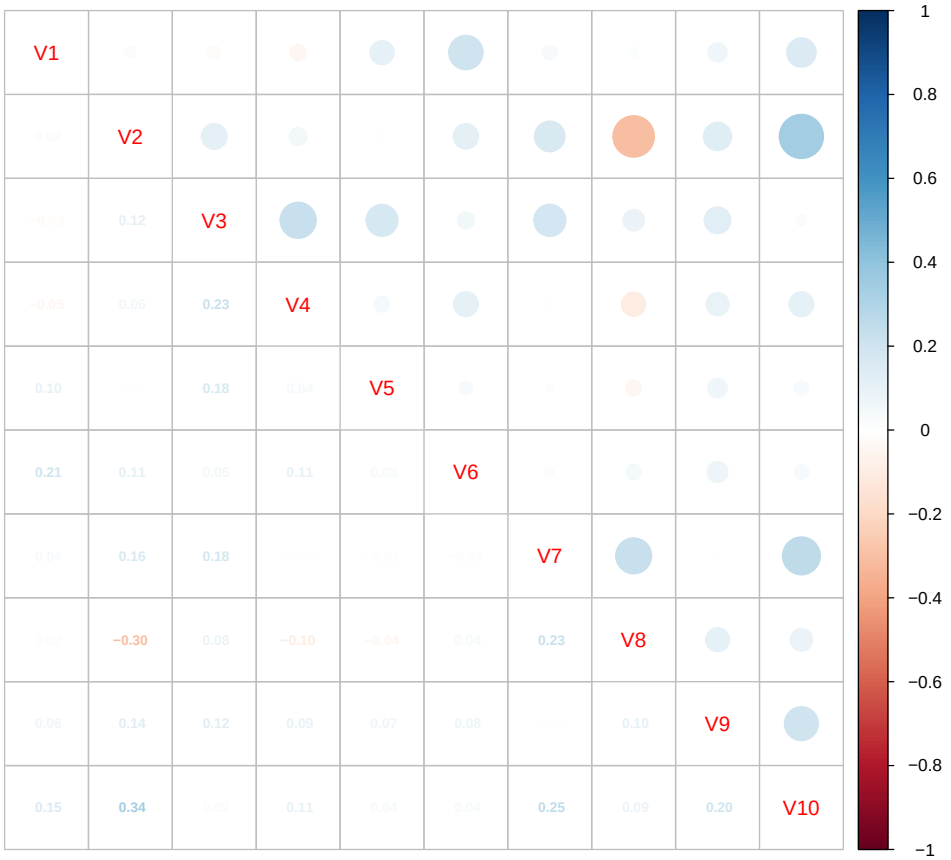




Example

Hier sehen Sie zwei Korrelationsmatrizen. Besprechen Sie sich mit Ihren Nachbarn. Wenden Sie das Prinzip lokaler Unabhängigkeit auf die 3 Korrelationmatritzen an. Zu welchem Ergebnis kommen Sie?

Lokale Unabhängigkeit ∼ Korrelationsmatrizen II



Example

Stellen Sie sich vor, nach Kontrolle der Traitausprägung sieht Ihre Korrelationsmatrix wie folgt aus. Zu welchen Schluss kommen Sie bezüglich der Annahme lokal statistischer Unabhängigkeit? Warum?

Reliabilität

..von der additive Varianzzerlegung zu Definition der Reliabilität

Definition: Reliabilität

$$Rel(Y_j) = \frac{Var(\tau_j)}{Var(Y_j)} = \frac{Var(\tau_j)}{Var(\tau_j) + Var(\epsilon_j)} \tag{7}$$

Die Reliabilität wird definiert als Anteil ($Var(\tau_j)$) der wahren Varianz an der Gesamtvarianz ($Var(Y_j)$).

Prognose & Selbsttest

Wie wirken sich eine steigende Varianz im Fehlerterm auf die Reliabilität der Messung aus? (Tipp: $Rel(Y_j) = \frac{Var(\tau_j)}{Var(\tau_j)+Var(\epsilon_j)}$)

Example

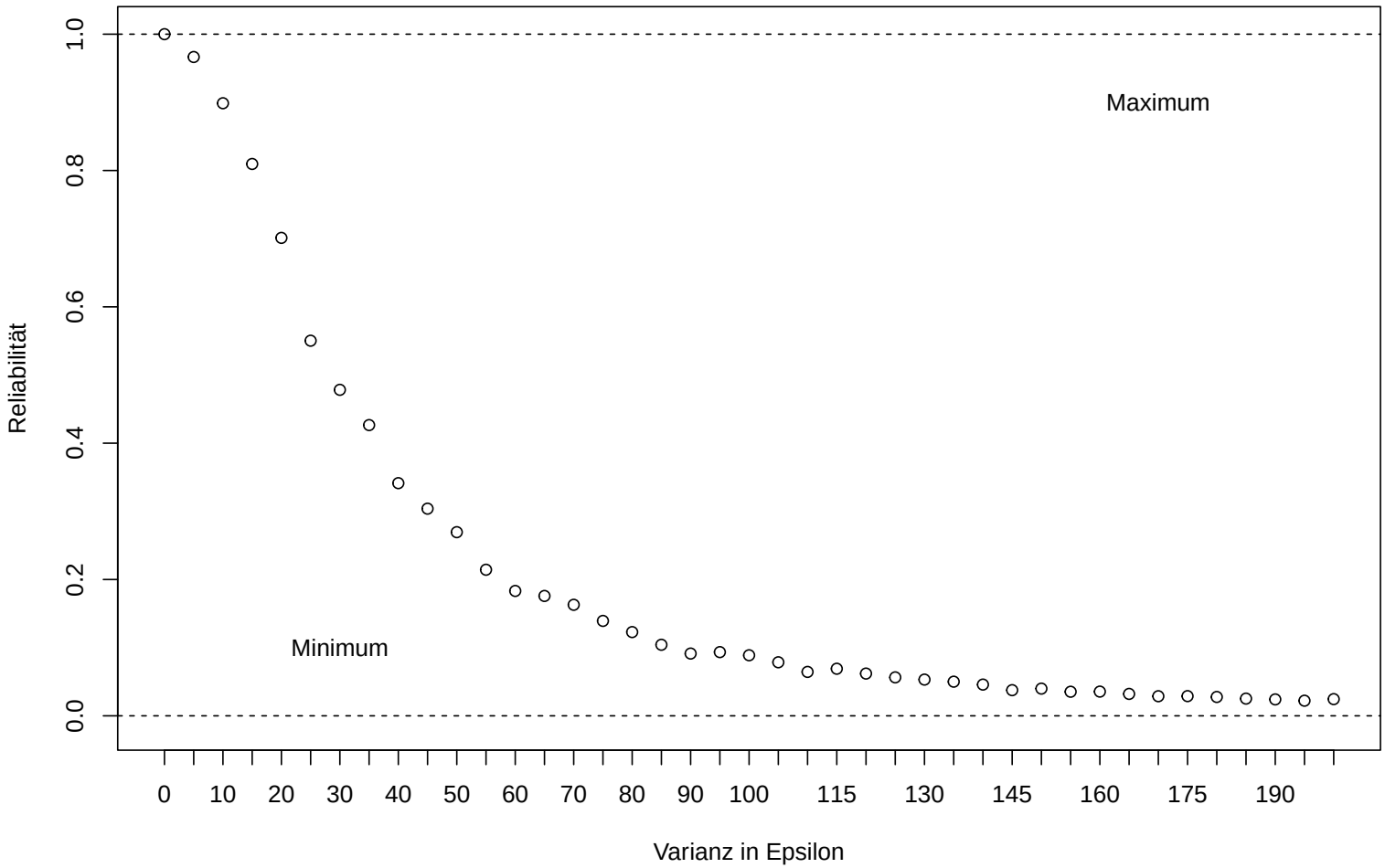
Versuchen Sie es nun selbst! In folgendem Code finden Sie die Anmerkung `Verändere mich!`. Variieren Sie die Werte und überprüfen Sie ihre Prognose. (siehe: Übungsaufgabe 7)

Reliabilität ∼ Messfehler

```
N <- 1000 # Verändere mich
tau <- rnorm(N, mean = 100, 30)
var_epsilon <- 25 # (25): Verändere mich!
epsilon <- rnorm(N, 0, var_epsilon)
reliab <- function(tau, epsilon){
 rel <- var(tau) / var(tau + epsilon)
 cat("Reliabilität der Messung:", rel)
}
reliab(tau, epsilon)
```

```
## Reliabilität der Messung: 0.5357339
```

Auflösung



. . . Die Reliabilität ist also ein Maß für die Messfehlerfreiheit einer Messung

Exkurs: Zum Problem(?) systematischer Störeinflüsse

Ausganssituation

Da die KTT nur unsystamtische Störeinflüsse berücksichtigt, bleiben systematische Einflüsse unberücksichtigt.

z.B.: soziale Erwünschtheit, politische Korrektheit

Frage: Wie wirken sich systematische Störeinflüsse aus?

- z.B. auf Korrelationen?
- z.B. auf Regressionsgewichte?

Auswkirungen system. Störeinflüsse: Korrelationen

Szenario

Systematischer Einfluss über alle Fälle hinweg

```
n <- 100
x <- rnorm(n)
y <- rnorm(x)
cor(x, y) ; cor(x+3, y) ; cor(x, y + 3) ; cor(x + 3, y + 3)
```

```
## [1] -0.04953215
```

```
## [1] -0.04953215
```

```
## [1] -0.04953215
```

```
## [1] -0.04953215
```

Auswikrungen system. Störeinflüsse: Korrelationen

Szenario

Systematischer Störeinfluss auf einige (die ersten 50) Probanden

```
x[1:50] <- x[1:50] + 3
cor(x, y)
```

```
## [1] -0.1602125
```

```
# Additional increase MME
x[1:50] <- x[1:50] + 6
cor(x, y)
```

```
## [1] -0.1608405
```

Auswirkungen system. Störeinflüsse: Regressionsgewichte

Szenario

Systematischer Einfluss über alle Fälle hinweg

```
x <- rnorm(100) ; y <- rnorm(x)
# Original result
lm(y ~ x)$coef[[2]]
```

```
## [1] -0.05247161
```

```
# Manipulatied predictor
beta_ast <- lm(y ~ I(x+3))$coef[[2]]
# Manipulatied outcome
lm(I(y+3) ~ I(x))$coef[[2]]
```

```
## [1] -0.05247161
```

Auswirkungen system. Störeinflüsse: Regressionsgewichte

Szenario

Systematischer Störeinfluss auf einige (die ersten 50) Probanden

```
x <- rnorm(100) ; y <- rnorm(x)
x[1:50] <- x[1:50] + 3
beta <- lm(y ~ x)$coef[[2]]
# Manipulatied predictor
x[1:50] <- x[1:50] + 6
# Manipulatied coefficient
lm(y ~ x)$coef[[2]]
```

```
## [1] -0.03411985
```

Messmodelle (..to be continued!)

Messmodelle & Messäquivalenz

Inwieweit messen wir mit unterschiedlichen Tests dasselbe Konstrukt?

Anmerkung: unterschiedliche Messmodelle bedingen unterschiedliche Reliabilitätskoeffizienten.

..Fortsetzung in der Übnung zur Reliabilität folgt.

Zusammenfassung

"The classical test theory model is the theory of psychological testing that is most often used in empirical applications. The central concept in classical test theory is the true score. True scores are related to the observations through the use of the expectation operator: the true score is the expected value of the observed score. Thus, a researcher who sees intelligence as a true score on an intelligence test supposes that somebody's level of intelligence is his expected score on an IQ-test." (Borseboom 2005, S. 3)

Abschließende Anmerkung

> *"However, although various authors have warned against it, the platonic true score interpretation is like an alien in a B-movie: no matter how hard you beat it up, it keeps coming back."*
> *(Borseboom 2005, S. 32)*

Probleme der Klassischen Test Theory

- z.B.: die Grundgleichung bleibt empirisch ungeprüft ($\tau = X + \epsilon$)
- z.B.: Annahme zu Messfehlern oft problematisch ($E(\epsilon) = 0$)
- z.B.: Kohli et al. (2015) Nur moderne Erweiterungen der KTT (v.a. Underlying Normal Variable Approach) können annähernd mit modernen Item Response Theory Model (IRT) mithalten.

$\Rightarrow$ Einblick in die IRT