Universität Salzburg	Florian Graf

Machine Learning

Übungsblatt **5**	12 Punkte

Aufgabe 1. *LDA* 12 P.

(a) Nennen Sie die grundlegende Verteilungsannahme, die der Gaußschen Diskriminanzanalyse zugrunde liegt und aufgrund welcher Kriterien Beobachtungen klassifiziert werden.

(b) Nennen Sie die spezifischen Verteilungsannahmen und Modellparameter der folgenden Modelle:

- Quadratische Diskriminanzanalyse (QDA)
- Lineare Diskriminanzanalyse (LDA)
- Naive Bayes

(c) Zeigen Sie, dass im Falle von nur zwei Klassen, die LDA-Entscheidungsregionenen halbräume sind, d.h. dass Sie durch eine Gleichung der Form $\mathbf{w}^\top \mathbf{x} > c$ bzw. $\mathbf{w}^\top \mathbf{x} < c$ beschrieben werden können. Bestimmen Sie außerdem eine Formel für $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Parameter des LDA Modells.

(d) Zeigen Sie, dass im Falle von nur zwei Klassen, die QDA-Entscheidungsgrenze die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + c = 0$ ist. Hierbei ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor und $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Bestimmen Sie außerdem eine Formel für $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ und c in Abhängigkeit der Modellparameter.

Gegeben sind nun die folgenden Beobachtungen.

x_1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
x_2	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
y	1	1	1	1	2	2	2	2

Fitten Sie ein QDA Modell an die Daten. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor.

(e) Fitten Sie ein QDA Modell an die Daten. Nutzen Sie dazu die aus der Vorlesung / dem Lehrbuch bekannten Formeln für die Maximum-Likelihood Parameter Schätzungen.

(f) Skizzieren Sie die Verteilungen $p(x|y = c)$ in dem Sie mehrere Niveaumengen der entsprechenden Dichtefunktionen handschriftlich in ein Koordinatensystem einzeichnen. Achten Sie dabei besonders auf die Form der Niveaumengen.

(g) Setzen Sie die Modellparameter in die Gleichung für die Entscheidungsgrenze aus Teilaufgabe (d) ein. Lösen Sie die Gleichung nach x_2 (also nach der zweiten Koordinate von $\mathbf{x}$).

(h) Beschreiben Sie die Form der Entscheidungsgrenze und zeichnen Sie sie in ihre Skizze aus Teilaufgabe (f) ein.