

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, welche Eigenschaften die Wavelet-Transformation besitzt und in welchen Bereichen sie erfolgreich eingesetzt werden kann. Bei der Wavelet-Transformation wird das Signal  $f$  mit Hilfe des sogenannten Wavelets  $\psi$  untersucht, genauer gesagt, man bildet  $L^2$ -Skalarprodukte von  $f$  mit translatierten und dilatierten Versionen von  $\psi$ :

$$\tilde{L}_\psi f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (1.1)$$

ein Wavelet.

Aus dieser groben Skizze lassen sich bereits einige Eigenschaften der Wavelet-Transformation erkennen. Zur Veranschaulichung ihrer Wirkungsweise betrachten wir ein Wavelet  $\psi$ , das einen kompakten Träger besitzt. Der Parameter  $b$  verschiebt das Wavelet so, daß in  $\tilde{L}_\psi f(a, b)$  lokale Informationen von  $f$  um den Zeitpunkt  $t = b$  enthalten sind. Der Parameter  $a$  steuert die Größe des Einflußbereiches, für  $a \rightarrow 0$  "zoomt" die Wavelet-Transformation immer schärfer auf  $t = b$ .

Für die folgende Untersuchung der Wavelet-Transformation benötigen wir eine weitere Integraltransformation, die *Fourier-Transformation*, deren wesentlichen Eigenschaften im Anhang nachgelesen werden können. Für Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist diese definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^n f(x) e^{-ix\omega} dx,$$

worin der Grenzwert im  $L^2$ -Sinn gemeint ist.

Um das Synthese-Problem lösen zu können, brauchen wir eine technische Voraussetzung an  $\psi$ , die wir in die Definition mit aufnehmen und deren Bedeutung in Satz 1.1.8 deutlich wird.

**Definition 1.1.1** Eine Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , welche die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (1.1.2)$$

erfüllt, heißt Wavelet. Die Wavelet-Transformierte einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zum Wavelet  $\psi$  ist durch

$$L_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , definiert.

Aus der Zulässigkeitsbedingung an  $\psi$  können wir sofort eine notwendige Bedingung an ein Wavelet ableiten: Sei  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  ein Wavelet. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue ist die Fourier-Transformierte  $\hat{\psi}$  stetig in  $\mathbb{R}$ . Der Mittelwert von  $\hat{\psi}$  verschwindet daher:

$$0 = \hat{\psi}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt.$$

Wir wollen eine einfache Methode vorstellen, wie man eine Vielzahl von Wavelets konstruieren kann.

**Lemma 1.1.2** Gegeben sei eine  $k$ -fach,  $k \geq 1$ , differenzierbare Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\varphi^{(k)} \neq 0$ . Dann ist

$$\psi(x) := \varphi^{(k)}(x)$$

ein Wavelet.

Aus den Rechenregeln der Fourier-Transformation folgt  $|\hat{\psi}(\omega)| = |\omega|^k |\hat{\varphi}(\omega)|$ . Die Berechnung der Zulässigkeitskonstanten  $c_\psi$  ergibt:

$$\begin{aligned} c_\psi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^{2k} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 |\omega|^{2k-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega + 2\pi \int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2k} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq 2\pi (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi^{(k)}\|_{L^2}^2) < \infty. \end{aligned}$$

■ Beispiele

$$(1) \text{ Sei } \psi(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & : 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist die Fourier-Transformation von  $\psi$  mit Hilfe der sinc-Funktion, siehe Abbildung 1.5 auf Seite 29,

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

gegeben durch  $\hat{\psi}(\omega) = \imath e^{-\imath \omega/2} \sin(\omega/4) \text{ sinc}(\omega/4)/\sqrt{2\pi}$ , d.h.  $|\hat{\psi}|$  ist eine gerade Funktion mit  $c_\psi = 2\ln 2$  und einem betragsmäßigen globalen Maximum bei  $\omega_0 = \pm 4.6622$ .  $\psi$  ist das *Haar-Wavelet*, das in Abbildung 1.1 zu sehen ist. Es wird uns als ein Standardbeispiel durch dieses Buch begleiten.

(2) Ist  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  eine stetig differenzierbare Funktion und ist  $\psi = \varphi' \in L^2$ , so erfüllt  $\psi$  die Zulässigkeitsbedingung. Ein wichtiges Beispiel dieser Art ist der sogenannte *Mexikanische Hut*, siehe Abbildung 1.2:

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = (1-x^2) e^{-x^2/2}. \quad (1.1.3)$$

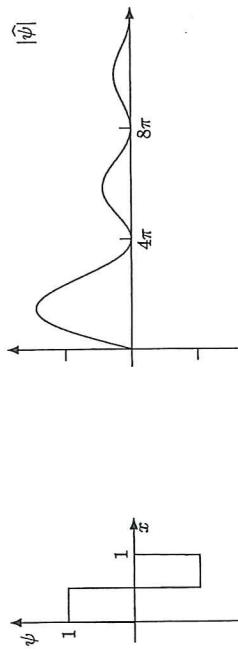


Abbildung 1.1: Das Haar-Wavelet und seine Fourier-Transformierte.

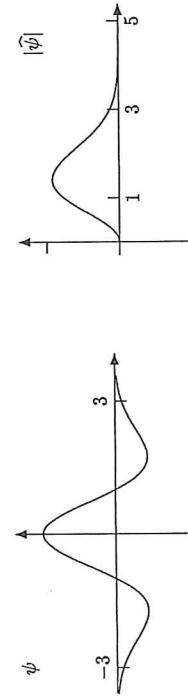


Abbildung 1.2: Der Mexikanische Hut und seine Fourier-Transformierte.

Hier ist  $\widehat{\psi}(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2/2}/\sqrt{2\pi}$  mit  $c_\psi = 1$  und mit einem globalen Maximum bei  $\omega_0 = \sqrt{2}$  mit  $\widehat{\psi}(\sqrt{2}) = 2/(\sqrt{2\pi}e)$ . Im Gegensatz zum Haar-Wavelet ist der Mexikanische Hut eine  $C^\infty$ -Funktion. Dies bewirkt ein schnelleres Abfallen im Fourier-Bereich bzw. eine schärfere Lokalisierung um die Frequenz  $\omega_0$ .

Abbildung 1.3 zeigt die Wavelet-Transformierte von

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq x \leq 0 \quad \text{oder} \quad 1 \leq x \leq 3/2 \\ 2+x & : -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

zum Haar-Wavelet (links) und zum Mexikanischen Hut (rechts). Deutlich zu erkennen ist, daß sich für  $a \rightarrow 0$  Singularitäten an den Sprungstellen von  $f$  bilden. Dies ist zumindest für das Haar-Wavelet nicht überraschend, da die Wavelet-Transformation in diesem Fall den Differenzenquotienten erster Ordnung approximiert. Auf diese Eigenschaft der Wavelet-Transformation wird im Abschnitt über Approximationseigenschaften eingegangen.

Die Zulässigkeitsbedingung (1.1.2) ist eine schwache Forderung, denn die Menge der Wavelets liegt dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Lemma 1.1.3** Die Menge der Wavelets  $\Psi = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \psi \text{ ist zulässig}\}$  ist eine dichte Teilmenge von  $L^2(\mathbb{R})$ .

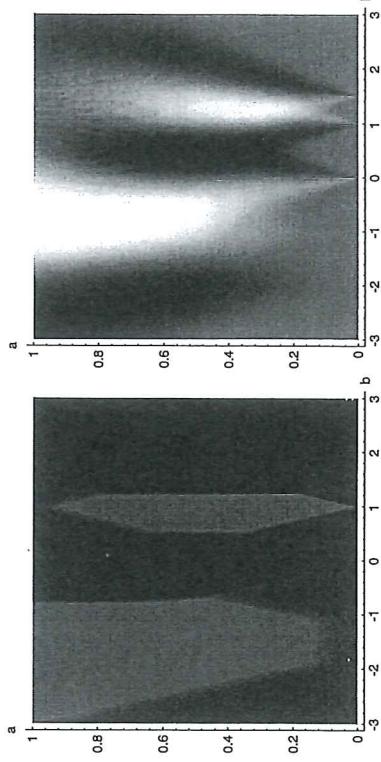


Abbildung 1.3: Die Wavelet-Transformierte der Funktion (1.1.4) zum Haar-Wavelet (links) und zum Mexikanischen Hut (rechts).

Beweis: Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , somit ist auch  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . Wir definieren  $f_\varepsilon$  als

$$\widehat{f}_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \widehat{f}(\omega) & : |\omega| \geq \varepsilon \\ 0 & : |\omega| < \varepsilon \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Damit erfüllt  $f_\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon$  die Zulässigkeitsbedingung und ist also ein Wavelet. Aufgrund von  $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$  folgt

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

somit kann jede  $L^2$ -Funktion  $f$  beliebig genau durch Wavelets approximiert werden. ■

Wie bereits erwähnt wurde, haben integrable Wavelets einen verschwindenden Mittelwert. Zusammen mit einem moderaten Abklingverhalten ist ein verschwindender Mittelwert einer Funktion auch hinreichend für die Zulässigkeitsbedingung (1.1.2). Das nachfolgende Lemma stellt sehr milde Forderungen an eine Funktion, damit diese ein Wavelet ist.

**Lemma 1.1.4** Sei  $0 \neq \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$  für ein  $\beta > 1/2$ . Dann ist  $\psi$  ein Wavelet.

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $1/2 < \beta \leq 1$  annehmen. Dann folgen  $(1 + |x|)^\beta \leq 1 + |x|^\beta$  und die Integrierbarkeit von  $(1 + |x|)^\beta |\psi(x)|$ . Die Funktion  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$  ist fast überall differenzierbar mit  $\Phi'(x) = \psi(x)$ . Wir führen die Abschätzung

$$|\Phi(x)| \leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt$$

## 2.2 Multi-Skalen-Analyse

Das Konzept der *Multi-Skalen-Analyse* (MSA), das auf Mallat [89, 88] und Meyer [92] zurückgeht, erlaubt die schnelle und stabile Wavelet-Analyse und -Synthese. Ohne die Konstruktion dieser schnellen Algorithmen hätte die Wavelet-Transformation, trotz ihrer Vorteile in signaltheoretischer Hinsicht, nicht in ernsthafter Konkurrenz zur Fourier-Transformation treten können.

In Kapitel 2.2.1 werden wir die Begriffe im eindimensionalen Kontext einführen und erläutern. Im Anschluß skizzieren wir den Schritt vom Ein- ins Mehrdimensionale.

Die schnellen Algorithmen sind Gegenstand des Kapitels 2.3.

### 2.2.1 Eindimensionale Multi-Skalen-Analyse

Vom Blickwinkel der einfachen Rekonstruktion des Signals  $f$  aus den diskreten Werten  $\sqrt{c_\psi} L_\psi f(a_0^m, n, b_0 a_0^m)$  bevorzugt man Wavelets  $\psi$ , deren Frame  $(\psi, 2, 1)$  (O.B.d.A. seien  $a_0 = 2, b_0 = 1$ ) eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$  bildet,

$$f = \sum_{m,n} \langle \psi_{m,n}^{(2,1)}, f \rangle_{L^2} \psi_{m,n}^{(2,1)},$$

die man dann *Wavelet-Basis* des  $L^2(\mathbb{R})$  nennt. Dies haben wir im letzten Abschnitt gesehen. Bisher ist unsere Auswahl an solchen Wavelets aber eher dürftig. Wir kennen das Meyer-Wavelet (Korollar 2.1.12) und das Haar-Wavelet, das die aus der Funktionalanalysis bekannte Haar-Basis erzeugt. Es handelt sich um Wavelets, wie sie unterschiedlicher nicht sein könnten. Das eine, sehr kompliziert konstruiert, beliebig glatt, schnell abfallend, aber ohne kompakten Träger, das andere, mit einer einfachen Struktur und einem kompakten Träger, dafür aber unstetig.

Gibt es Wavelets zwischen beiden Extremen und wie kann man sie erhalten? Die MSA wird sich als "Kochrezept" zur Erzeugung solcher Wavelets erweisen.

Bevor die mathematische Definition einer MSA mehr verschleiert als erhellt, beginnen wir mit einer einfachen Motivation. Ein alternativer Weg, eine Multi-Skalen-Analyse zu motivieren, wird in [101] eingeschlagen.

Wir wollen ein Signal  $f$  aus einem Unterraum  $V_{-1}$  des  $L^2(\mathbb{R})$  in seinen hoch- und niedrifrequennten Anteil aufspalten. Den glatten (niedrifrequenten) Anteil beschreiben wir durch die orthogonale Projektion  $P_0 f$  auf einen kleineren Raum  $V_0$ , der die "glätten" Funktionen von  $V_{-1}$  enthält. Das orthogonale Komplement von  $V_0$  in  $V_{-1}$  bezeichnen wir mit  $W_0$ , ein Raum, der dank seiner Konstruktion die "rauen" (hochfrequenten) Elemente umfaßt. Die Projektion von  $f$  auf  $W_0$  sei  $Q_0 f$ , dann ist

$$\begin{aligned} f &= P_0 f + Q_0 f, \\ V_{-1} &= V_0 \oplus W_0. \end{aligned}$$

Analog verfahren wir nun mit  $P_0 f$ , indem wir  $V_0$  darstellen als orthogonale Summe der Räume  $V_1$  ("glatte" Elemente) und  $W_1$  ("raue" Elemente). Die zugehörigen Projektoren heißen  $P_1$  und  $Q_1$ . Wegen  $P_1 P_0 f = P_1 f$  sowie  $Q_1 Q_0 f = Q_1 f$  gelangen wir zu

$$\begin{aligned} P_0 f &= P_1 f + Q_1 f \\ f &= P_1 f + Q_1 f + Q_0 f. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Rekursiv könnte nun  $P_1 f$  weiter zerlegt werden in  $P_2 f$  und  $Q_2 f$  usw. Zum Verständnis der Wirkungsweise einer MSA genügt jedoch die zweistufige Zerlegung (2.2.1), die an einem Beispiel in Abbildung 2.6 demonstriert wird (Die dort angeführte Addition ist nicht die Addition von Funktionen. Vielmehr soll ausgedrückt werden, daß aus beiden Funktionen auf der rechten Seite diejenige auf der linken rekonstruiert werden kann.).

$P_1 f$  repräsentiert die niedrifrequenten, "glatten" Anteile von  $f$ , enthält somit Details von  $f$  ab einer bestimmten Größe, vgl. Kapitel 1.3.  $Q_0 f$  bzw.  $Q_1 f$  beinhalten die Anteile von  $f$  zu bestimmten Frequenzbändern. Dabei entspricht  $Q_0 f$  einer höheren Frequenz als  $Q_1 f$ . Die Gleichung (2.2.1) kann verstanden werden als Zerlegung eines Signals in Frequenzbänder hoher Frequenzen und ein Frequenzgemisch niedriger Frequenzen. Dieser Zerlegungsprozeß läßt sich mathematisch exakt in einer Multi-Skalen-Analyse beschreiben.

**Definition 2.2.1 Eine Multi-Skalen-Analyse (MSA) des  $L^2(\mathbb{R})$  ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$**

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

so daß gilt:

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(\mathbb{R}), \tag{2.2.2}$$

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}, \tag{2.2.3}$$

$$\bigvee_{f(\cdot) \in V_m} f(2^m \cdot) \iff f(2^m \cdot) \in V_0. \tag{2.2.4}$$

Es gibt eine Funktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , deren ganzzählige Translate eine Riesz-Basis von  $V_0$  erzeugen, i.e.

$$V_0 = \overline{\text{span} \{ \varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z} \}}$$

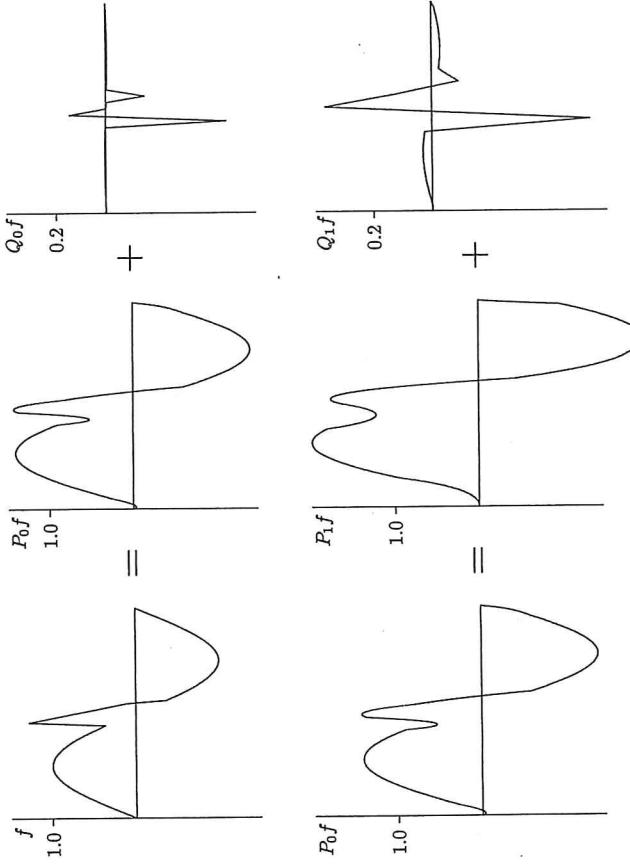


Abbildung 2.6: Zerlegung des Signals  $f$  in einen niedrifrequenten  $P_0 f$  und zwei hochfrequente Anteile  $Q_0 f$ ,  $Q_1 f$ .

und

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k) \right\|_{L^2}^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 \quad (2.2.5)$$

für alle  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ . Es bezeichnen  $A$  und  $B$  positive Konstanten.

### Bemerkung 2.2.2

(a) Die Forderungen (2.2.2) und (2.2.3) werden von vielen Familien  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  erfüllt.

Die Eigenschaft (2.2.4) zeichnet eine MSA aus: Die Räume  $V_m$  sind skalierter Versionen des Grundraumes  $V_0$ , der durch Translation einer Funktion  $\varphi$ , der Skalierungsfunktion, aufgespannt wird (2.2.5).

Für  $m \rightarrow \infty$  werden die Funktionen aus  $V_m$  gestreckt und immer breiter, ihre Details aufgebläht. Strebt  $m$  gegen  $-\infty$ , so enthalten die Räume  $V_m$  immer kleinere Strukturen. Die Grenzübergänge

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|P_m f\|_{L^2} = 0, \\ \lim_{m \rightarrow -\infty} \|P_m f - f\|_{L^2} = 0$$

präzisieren diese Interpretation.  $P_m$  bezeichnet den Orthogonalprojektor auf  $V_m$ . Folgende Sprechweise hat sich eingebürgert, sie ist mehr suggestiv als exakt:  $P_m f$  ist die Darstellung von  $f$  auf der "Skala"  $V_m$  und enthält alle Details von  $f$  bis zur Größe  $2^m$ .

(b) Wegen (2.2.5) ist  $V_0$  translationsinvariant, d.h.

$$f \in V_0 \iff f(\cdot - k) \in V_0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Mit (2.2.4) folgt

$$f \in V_m \iff f(\cdot - 2^m k) \in V_m \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Der Raum  $V_m$  wird von den Funktionen aufgespannt,

$$\varphi_{m,k}(x) := 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - k) \quad (2.2.6)$$

Dies beruht auf (2.2.4) und (2.2.5). Die Funktionen aus (2.2.6) haben alle dieselbe  $L^2$ -Norm  $\|\varphi_{m,k}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ .

**Lemma 2.2.3** Die Skalierungsfunktion  $\varphi$  erfüllt eine Skalierungsgleichung, d.h. es gibt eine Folge  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  reeller Zahlen mit

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k). \quad (2.2.8)$$

**Beweis:** Aus der Inkklusion  $\varphi \in V_0 \subset V_{-1} = \overline{\text{span} \{ \sqrt{2} \varphi(2x - k) \mid k \in \mathbb{Z} \}}$  folgt das obige Lemma. ■

In der einfachen Gleichung (2.2.8) liegt der Schlüssel zur Konstruktion sowohl orthogonaler Wavelet-Basen als auch schneller Algorithmen.

Wie in unserer einführenden Motivation definieren wir die Räume  $W_m$  als orthogonale Komplemente von  $V_m$  in  $V_{m-1}$ ,

$$V_{m-1} = W_m \oplus V_m, \quad V_m \perp W_m \quad (2.2.9)$$

und die Operatoren  $Q_m$  als orthogonale Projektoren von  $L^2(\mathbb{R})$  in  $W_m$ ,

$$P_{m-1} = Q_m + P_m.$$

Offensichtlich ist

$$V_m = \bigoplus_{j \geq m+1} W_j \quad (2.2.10)$$

und damit

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (2.2.11)$$

Die Räume  $W_m$  erben die Skalierungseigenschaft der Räume  $V_m$  (2.2.4)

$$f \in W_m \iff f(2^m \cdot) \in W_0.$$

Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  lässt sich zerlegen durch

$$\begin{aligned} f &\stackrel{(2.2.11)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = \sum_{j \geq m+1} Q_j f + \sum_{j \leq m} Q_j f \\ &\stackrel{(2.2.10)}{=} P_m f + \sum_{j=-\infty}^m Q_j f. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Für  $f \in V_0$  ( $f = P_0 f$ ) und  $m = 1$  entspricht (2.2.12) der Darstellung (2.2.1). Die eben hergeleitete Gleichheit erklärt im nachhinein die Bezeichnung *Multi-Skalen-Analyse*.  $P_m f$  repräsentiert  $f$  auf der Skala  $m$ , was der Anwendung eines Tiefpassfilters entspricht, der mit wachsendem  $m$  einen kleineren Durchlaufbereich hat. Der verbleibende Rest aus dem Hochfrequenzbereich wird in seine Anteile zu verschiedenen Frequenzändern  $Q_j f$ ,  $-\infty \leq j \leq m$ , aufgeteilt. Dabei enthält  $Q_j f$  nur die Details, die  $P_{j-1} f$  von  $P_j f$  unterscheiden,  $Q_j = P_j - P_{j-1}$ .

Was bisher ausgeführt wurde, hatte nichts mit unserem Ausgangsproblem, der Konstruktion von Wavelet-Basen, zu tun. Daher wollen wir auf das Hauptergebnis dieses Paragraphen vorgehen. Es erscheint zunächst wie ein kleines Wunder:

Zu jeder MSA existiert ein Wavelet  $\psi$ , dessen translatierte und dilatierte Versionen

$$\psi_{m,k}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} x - k) \quad (2.2.13)$$

für festes  $m \in \mathbb{Z}$  eine Orthonormalbasis für den Raum  $W_m$  bilden. Darauf hinaus lässt sich das Wavelet aus der Skalierungsfunktion explizit konstruieren.

**Beispiel**

Die einfachste MSA lässt sich mit der Skalierungsfunktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Der Grundraum  $V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi_{0,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}}$  enthält gerade die Funktionen, die auf den Intervallen  $[k, k+1]$  konstant sind. Für allgemeines  $m$  gilt

$$\begin{aligned} V_m &= \overline{\text{span}\{\varphi_{m,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ ist konstant auf } [2^m k, 2^m(k+1)] \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Die so definierte Familie  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  erzeugt offensichtlich eine MSA. Die Projektoren  $P_m$  ergeben sich aus

$$P_m f|_{[2^m k, 2^m(k+1)]} = 2^{-m} \int_{2^m k}^{2^m(k+1)} f(x) dx.$$

Eine besondere Eigenschaft dieser MSA besteht darin, dass das Funktionensystem  $\{\varphi_{m,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  eine Orthonormalbasis von  $V_m$  ist, d.h. wir können  $P_m f$  nach dieser Basis entwickeln,

$$P_m f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^m(f) \varphi_{m,k}$$

mit

$$c_k^m(f) = \langle P_m f, \varphi_{m,k} \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi_{m,k} \rangle_{L^2} = 2^{-m/2} \int_{2^m k}^{2^m(k+1)} f(x) dx.$$

Wir untersuchen nun den Unterschied zwischen  $P_m f$  und der nächstgrößeren Approximation  $P_{m+1} f$ . Die Skalierungsgleichung (2.2.8) lautet für unser Beispiel

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x-1) \right)$$

oder allgemeiner

$$\varphi_{m+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{m,2k} + \varphi_{m,2k+1}),$$

was man durch Entwickeln von  $\varphi_{m+1,k}$  bezüglich der Orthonormalbasis  $\{\varphi_{m,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  leicht bestätigt. Es folgt für die Entwicklungskoeffizienten  $c_k^m(f)$  der Zusammenhang

$$c_k^{m+1}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{2k}^m(f) + c_{2k+1}^m(f)).$$

Die Projektion  $P_{m+1} f$  entpuppt sich als gemittelte Version von  $P_m f$ . Für die Differenz  $P_m f - P_{m+1} f$  erhalten wir

$$\begin{aligned} P_m f - P_{m+1} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^m \varphi_{m,k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{m+1} \varphi_{m+1,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^m \varphi_{m,k} - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{2k}^m + c_{2k+1}^m) (\varphi_{m,2k} + \varphi_{m,2k+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{2k}^m - c_{2k+1}^m) (\varphi_{m,2k} - \varphi_{m,2k+1}). \end{aligned}$$

**Satz 2.2.10** Sei  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  eine MSA, die von der orthogonalen Skalierungsfunktion  $\varphi \in V_0$  erzeugt wird. Die Funktion  $\psi \in V_{-1}$ , definiert durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{-1,k}(x), \quad (2.2.27)$$

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}, \quad (2.2.28)$$

wobei  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  die Koeffizienten der Skalierungsgleichung (2.2.8) sind, besitzt die folgenden Eigenschaften

- (i)  $\{\psi_{m,k}(\cdot) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} \cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $V_m$ ,
- (ii)  $\{\psi_{m,k} | m, k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $L^2(\mathbb{R})$ ,
- (iii)  $\psi$  ist ein Wavelet mit  $c_\psi = 2\pi \int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = 2 \ln 2$ .

**Bemerkung 2.2.11** Die Erzeugung (2.2.27) des Wavelets aus der Skalierungsfunktion kann als diskretes Analogon der Aussage von Lemma 1.1.2 interpretiert werden:  
 $\sum_{k \leq k_a} \gamma_k$  eine endliche Folge reeller Zahlen, die  $\sum k^l \gamma_k = 0$ ,  $l = 0, \dots, N-1$  und  $\sum k^N \gamma_k = \mu \neq 0$  erfüllt. Der Operator  $\mathcal{D}_\delta^N$  sei definiert durch

$$\mathcal{D}_\delta^N f(x) = \delta^{-N} \sum_{k=k_a}^{k_e} \gamma_k f(x - \delta k), \quad \delta > 0.$$

Für  $f \in C^N$  haben wir die punktweise Konvergenz

$$\mathcal{D}_\delta^N f(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu}{N!} f^{(N)}(x), \quad (2.2.29)$$

wovon man sich durch eine Taylor-Entwicklung überzeugt.

Wegen (2.2.26) ist die Summe jeder endlichen Folge  $\{g_k\}$  aus (2.2.28) gleich Null:  $\sum g_k = 0$ . Zu jeder endlichen Folge  $\{g_k\}$  gibt es daher ein endliches  $N \geq 1$  mit  $\sum k^l g_k = 0$ ,  $l = 0, \dots, N-1$  und  $\sum k^N g_k \neq 0$ . Ersetzen wir in der Definition von  $\mathcal{D}_\delta^N$  die Koeffizienten  $\{\gamma_k\}$  durch  $\{g_k\}$ , dann gilt

$$\psi(x) = \mathcal{D}_1^N \varphi(2x),$$

wobei  $\mathcal{D}_1^N$  eine – wenn auch grobe ( $\delta = 1$ ) – Approximation an ein Vielfaches des Differentialoperators  $N$ -ter Ordnung ist, vgl. (2.2.29). Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 2.4.7.1 ausführlicher erläutert.

**Beweis von Satz 2.2.10:** In einem ersten Schritt zeigen wir, daß  $\psi \in W_0 \subset V_{-1}$  ist:

$$\langle \psi(\cdot), \varphi(\cdot - n) \rangle_{L^2} \stackrel{(2.2.28)}{=} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_k h_l \langle \varphi(2 \cdot - k), \varphi(2 \cdot - 2n - l) \rangle_{L^2}$$

**Satz 2.2.10** Sei  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  eine MSA, die von der orthogonalen Skalierungsfunktion  $\varphi \in V_0$  erzeugt wird. Die Funktion  $\psi \in V_{-1}$ , definiert durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{-1,k}(x), \quad (2.2.27)$$

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}, \quad (2.2.28)$$

wobei  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  die Koeffizienten der Skalierungsgleichung (2.2.8) sind, besitzt die folgenden Eigenschaften

- (i)  $\{\psi_{m,k}(\cdot) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} \cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $V_m$ ,
- (ii)  $\{\psi_{m,k} | m, k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine Orthonormalbasis für  $L^2(\mathbb{R})$ ,
- (iii)  $\psi$  ist ein Wavelet mit  $c_\psi = 2\pi \int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = 2 \ln 2$ .

Eine analoge Rechnung unter Verwendung von (2.2.22) verifiziert die Orthogonalität von  $\{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ . Zum endgültigen Beweis von (i) und (ii) fehlt uns nur noch die Vollständigkeit von  $\{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  in  $W_0$ . Hierfür überprüfen wir die Vollständigkeit des orthonormalen Systems  $\{\varphi(\cdot - k), \psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  in  $V_{-1}$ , denn  $V_0 \oplus W_0 = V_{-1}$ . Dafür wiederum genügt die Darstellbarkeit von  $\varphi_{-1,0}$  durch  $\{\varphi(\cdot - k), \psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ . Wir benutzen (2.2.8) sowie (2.2.27) und rechnen die Parsevalsche Identität nach:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi(\cdot), \varphi(\cdot - k) \rangle_{L^2}|^2 + |\langle \varphi(\cdot), \psi(\cdot - k) \rangle_{L^2}|^2 \\ &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \langle \varphi(2 \cdot), \varphi(2 \cdot - 2k - l) \rangle_{L^2} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \langle \varphi(2 \cdot), \varphi(2 \cdot - 2k - l) \rangle_{L^2} \right|^2 \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \delta_{0,2k+l} \right|^2 + \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{1-l} \delta_{0,2k+l} \right|^2 \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k}^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 \\ &\stackrel{(2.2.22)}{=} 1 = \|\varphi_{-1,0}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung (iii) folgt direkt aus unseren Erkenntnissen über feste Wavelet-Frames (Korollar 2.1.4). ■

Das Wavelet  $\psi$  erfüllt eine zu (2.2.23) analoge Gleichung.

**Korollar 2.2.12** Mit den Voraussetzungen des obigen Satzes befriedigt  $\psi$  die Identität  $\widehat{\psi}(\omega) = -e^{-i\omega/2} \overline{H(\omega/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\omega/2)$ .

**Beweis:** Einfache Umformungen bestätigen die Aussage:

$$\widehat{\psi}(\omega) \stackrel{(2.2.27)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k (\varphi_{-1,k})^\wedge(\omega)$$

Da  $R$  und  $S$  unterschiedliche Eigenwerte haben, können sie nicht äquivalent sein. Die Matrix  $S$  ist ähnlich zur "Diagonalmatrix"  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  und führt wieder zu separablen Wavelets. Neben den Tensorprodukten können so durch

$$\varphi_S(x_1, x_2) := \widehat{\varphi}(x_1) \widehat{\varphi}(x_1 - x_2)$$

eindimensionale auf zweidimensionale orthogonale Skalierungsfunktionen erweitert werden [17].

Die interessante Wahl für die Skalierungsmatrix ist also  $R$ , und sie wird für die Konstruktion von 2D-Wavelets unser Standardbeispiel sein. Aus geometrischer Sicht bewirkt  $R$  eine Drehung um den Winkel  $-\pi/4$ , gefolgt von einer Streckung um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Die Konstruktion zweidimensionaler orthogonaler Wavelets für die Matrizen  $R$  und  $S$  wird ausführlich in Kapitel 2.5 diskutiert.

## 2.3 Schnelle Wavelet-Transformation

In diesem Abschnitt führen wir die grundlegenden Algorithmen zur schnellen Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation ein. Zentrales Hilfsmittel ist hierbei die Multi-Skalen-Analyse, darauf aufbauend lassen sich die Algorithmen elegant und einfach aus den Skalierungsgleichungen ableiten.

Beachten wir dazu eine Funktion  $f$  in  $V_0$ , den Grundraum einer Multi-Skalen-Analyse zu einer orthogonalen Skalierungsfunktion  $\varphi$ . Die Funktion  $f$  besitzt aufgrund der Definition 2.2.1 eine Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k)$$

mit reellen Entwicklungskoeffizienten

$$c^0 = \{c_k^0 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wie bisher bezeichne  $\psi$  das zu  $\varphi$  gehörende orthogonale Wavelet, demnach bildet

$$\{\psi_{m,k} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} \cdot -k) \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$$

eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$ .

Jetzt können wir mit der Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation, d.h. mit der Auswertung der Skalarprodukte

$$\sqrt{c_\psi} L_\psi f(2^m, 2^m k) = \langle f, \psi_{m,k} \rangle_{L^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z},$$

bEGINNEN. Dazu führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} a_k^m &= \langle f, \psi_{m,k} \rangle_{L^2}, \quad d_k^m = \{d_k^m \mid k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \\ c_k^m &= \langle f, \varphi_{m,k} \rangle_{L^2}, \quad c^m = \{c_k^m \mid k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ein und erhalten mit Hilfe der Skalierungsgleichungen (2.2.8), (2.2.27) die Darstellungen

$$\begin{aligned} d_k^m &= \langle f, \psi_{m,k} \rangle_{L^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_\ell \langle f, \varphi_{m-1, 2k+\ell} \rangle_{L^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_{\ell-2k} c_\ell^{m-1}, \\ c_k^m &= \langle f, \varphi_{m,k} \rangle_{L^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell \langle f, \varphi_{m-1, 2k+\ell} \rangle_{L^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} c_\ell^{m-1}. \end{aligned}$$

Damit ist der Zerlegungsalgorithmus bereits fertig: Ausgehend von der Folge  $c^0$  können wir die diskrete Wavelet-Zerlegung rekursiv durch diskrete Faltungen berechnen. Die kontinuierliche Funktion  $f$  ist dabei in den Hintergrund getreten, alle Operationen werden diskret auf den Koeffizientenfolgen  $c^m$  bzw.  $d^m$  ausgeführt.  
Diesen Rechenvorgang können wir kürzer mit Hilfe der Zerlegungsoperatoren  $H$  und  $G$  ausdrücken. Wir definieren

$$\begin{aligned} H : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) & c &\longmapsto Hc = c *_2 h = \{(Hc)_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} c_\ell\}, \\ G : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) & c &\longmapsto Gc = c *_2 g = \{(Gc)_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_{\ell-2k} c_\ell\}, \end{aligned} \quad (2.3.1) \quad (2.3.2)$$

wobei  $h = \{h_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  bzw.  $g = \{g_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  die Folge der Skalierungskoeffizienten bzw. die Folge der Wavelet-Koeffizienten bezeichnen. Die Koeffizienten der Daubechies-Wavelets, die im Kapitel 2.4.3 konstruiert werden, sind auf Seite 170 tabelliert.  
Da wir hier nicht die übliche diskrete Faltung vor uns haben – zum einen ist die Faltung nur an jedem zweiten Index auszuwerten und zum anderen sind die Indizes  $\ell - 2k$  vertauscht – wählen wir das Symbol  $*_2$  für diese Operation. In der Sprache der Signalverarbeitung bezeichnet dies eine Faltung mit anschließendem "Sub-Sampling" um den Faktor 2.

Für diesen Algorithmus, der von Mallat in [89] eingeführt wurde, erhalten wir ein einfaches Schema zur Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation auf den ersten  $M$  Skalen, siehe Abbildung 2.8.

Wenden wir uns nun der Rekonstruktion der Ausgangsfolge  $c^0$  aus den berechneten Koeffizientenfolgen  $\{c^M, d^m \mid m = 1, \dots, M\}$  zu. Betrachten wir zunächst den Vorgang, wie wir aus  $c^1$  und  $d^1$  die Folge  $c^0$  rekonstruieren können. Dazu verwenden wir die orthogonale Zerlegung von  $V_0$  in die beiden Unterräume  $V_1$  und  $W_1$ . Demnach gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^0 \varphi_{0,k} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^1 \varphi_{1,j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j^1 \psi_{1,j} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^1 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell \varphi_{0,2j+\ell} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j^1 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_\ell \varphi_{0,2j+\ell}. \end{aligned}$$

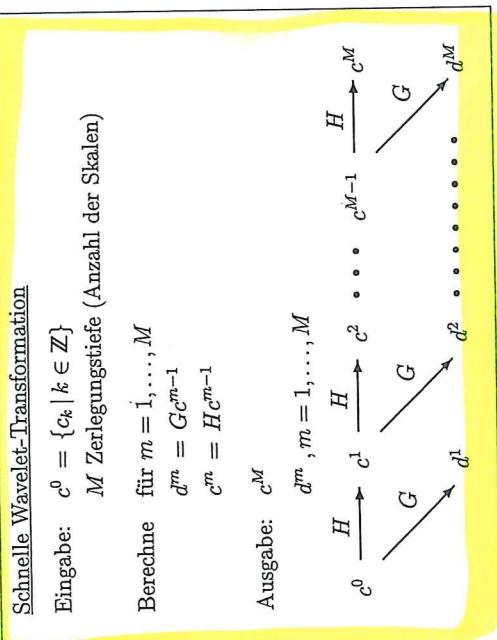


Abbildung 2.8 Ein Schema für die Berechnung der schnellen Wavelet-Transformation.

Dabei haben wir wiederum die Skalierungsgleichungen ausgenutzt. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_k^0 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell^1 h_{k-2\ell} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} d_\ell^1 g_{k-2\ell}.$$

Ebenso können wir ausgehend von  $d^M$  und  $c^M$  zunächst  $c^{M-1}$  rekonstruieren. Rekursiv werden dann die Zerlegungskoeffizienten  $d^m$  auf den Skalen  $M-1, \dots, 1$  eingearbeitet. Der Rekonstruktionsalgorithmus lässt sich wiederum mit Hilfe von Operatoren schreiben. Dazu führen wir die zu  $H$  und  $G$  adjungierten Operatoren  $H^*$  und  $G^*$  ein.

**Lemma 2.3.1** Die zu  $H$  und  $G$  adjungierten Operatoren  $H^*$  und  $G^*$  sind

$$\begin{aligned} H^* : \quad \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ c &\longmapsto \left\{ (H^*c)_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{k-2\ell} c_\ell \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^* : \quad \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ c &\longmapsto \left\{ (G^*c)_k = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_{k-2\ell} c_\ell \right\}. \end{aligned}$$

Der Beweis von Lemma 2.3.1 folgt direkt aus der definierenden Eigenschaft des adjungierten Operators  $\langle Hc, b \rangle_{\ell^2} = \langle c, H^*b \rangle_{\ell^2}$  und einer geeigneten Umsortierung der

**Schnelle Wavelet-Rekonstruktion**

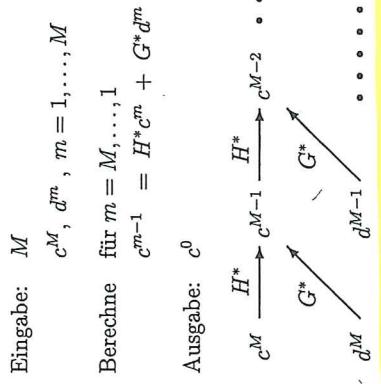


Abbildung 2.9 Ein Schema für die Berechnung der schnellen Wavelet-Rekonstruktion.

Summen.

Ein einzelner Rekonstruktionsschritt wird demnach beschrieben durch

$$c^{m-1} = H^* c^m + G^* d^m.$$

Rekursive Anwendung dieses Schritts führt schließlich zum Rekonstruktionsalgorithmus für  $M$  Level, der Abbildung 2.9 entnommen werden kann.

Als nächstes bestimmen wir die Komplexität des diskreten Wavelet-Algorithmus. Wir gehen davon aus, daß die Ausgangsfolge  $c^0$  eine endliche Länge  $n(0)$  besitzt:

$$c^0 = \{c_k^0 \mid n_{c_{\min}}(0) \leq k \leq n_{c_{\max}}(0)\},$$

$$n(0) = n_{c_{\max}}(0) - n_{c_{\min}}(0) + 1.$$

Des weiteren wollen wir uns auf den Fall endlicher Filter  $h$  und  $g$  beschränken:

$$h = \{h_k \mid h_{\min} \leq k \leq h_{\max}\}, \quad g = \{g_k \mid g_{\min} \leq k \leq g_{\max}\}.$$

Die Filterlänge ist in beiden Fällen

$$n_f = \{h_k \mid h_{\min} \leq k \leq h_{\max}\} = g_{\max} - g_{\min} + 1.$$

Dies ist insbesondere für die Filter des Haar-Wavelets und die Filter der orthogonalen Daubechies-Wavelets der Fall. Die bei der Wavelet-Zerlegung entstehenden Folgen

$$d^m = \{d_k^m \mid n_{d_{\min}}(m) \leq k \leq n_{d_{\max}}(m)\},$$

$$c^m = \{d_k^m \mid n_{c_{\min}}(m) \leq k \leq n_{c_{\max}}(m)\},$$

$$n(m) = n_{c_{\max}}(m) - n_{c_{\min}}(m) + 1$$