

Machine Learning

Übungsblatt 2

20 Punkte

Aufgabe 1. *Univariate Normalverteilung*

11 P.

Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eine standard normalverteilte Zufallsvariable, d.h., X hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ wobei $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeitsdichte handschriftlich in ein Koordinatensystem ein und beschreiben Sie seine Form.
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X .
- (c) Berechnen Sie die Varianz von X .

Hinweis: Der Erwartungswert einer Zufallsvariable $\phi(X)$ ist gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$.

Um $\mathbb{E}[X^2]$ zu bestimmen, integrieren Sie beide Seiten der Gleichung $\frac{d(xf(x))}{x} = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}$.

Wir schreiben $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ falls $Y = \sigma X + \mu$ wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- (d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .
- (e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y , d.h., finden Sie eine Funktion g , so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[Y < t] = \int_{-\infty}^t g(y)dy$.
Hinweis: Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[Y < t]$ zunächst durch die Wahrscheinlichkeitsdichte f der Zufallsvariable X aus. Transformieren Sie dieses Integral dann durch eine Variablensubstitution.
- (f) Mithilfe numerischer Integration von $f(x)$ lässt sich $\mathbb{P}[X < 1] \approx 0.841$ und $\mathbb{P}[X < 2] \approx 0.977$ berechnen. Verwenden Sie diese Werte um $\mathbb{P}[Y \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)]$ und $\mathbb{P}[Y \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)]$ zu bestimmen.

Aufgabe 2. *Unabhängigkeit*

4 P.

Zwei diskrete Zufallsvariablen X, Y mit jeweiliger Wertemenge \mathcal{X} und \mathcal{Y} heißen unabhängig falls für alle $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$ gilt, dass $\mathbb{P}[X = x \text{ und } Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$.

- (a) Interpretieren Sie die Definition und geben Sie jeweils ein Beispiel für unabhängige und abhängige (=nicht unabhängige) Zufallsvariablen an.
- (b) Wie würden Sie die Definition der Unabhängigkeit auf stetige (reellwertige) Zufallsvariablen erweitern (informell)?

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen ist definiert als $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ und (X, Y) heißen unkorreliert falls $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

- (c) Zeigen Sie dass unabhängige Zufallsvariablen auch unkorreliert sind. Sind unkorrelierte Zufallsvariablen immer auch unabhängig?

Aufgabe 3. *Mehrdimensionale Normalverteilung*

5 P.

Die d -dimensionale standard Normalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Zufallsvektoren $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, wobei alle Komponenten voneinander unabhängig sind und einer eindimensionalen standard Normalverteilung folgen, d.h., $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$.
- (b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^\top]$ (Matrix) und erklären Sie, wieso diese Matrix die Kovarianzmatrix von \mathbf{X} genannt wird.

Ähnlich zum eindimensionalen Fall schreiben wir $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ falls $(Y_1, \dots, Y_d) = \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ und $(X_1, \dots, X_k) = \mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Hierbei ist $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

- (c) Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Zufallsvektoren $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^k$, Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[\mathbf{M}\mathbf{Z} + \mathbf{v}] = \mathbf{M}\mathbb{E}[\mathbf{Z}] + \mathbf{v} .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Komponenten der Vektoren.

- (d) Bestimmen Sie nun $\mathbb{E}[\mathbf{Y}]$ und $\mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])^\top]$.