Universität Salzburg | Florian Graf

Machine Learning

Übungsblatt **2** | 20 Punkte

Aufgabe 1. *Univariate Normalverteilung* 11 P.

Es sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ eine standard normalverteilte Zufallsvariable, d.h., X hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ wobei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeitsdichte handschriftlich in ein Koordinatensystem ein und beschreiben Sie seine Form.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Hinweis. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable $\phi(X)$ ist gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$. Um $\mathbb{E}[X^2]$ zu bestimmen, integrieren Sie beide Seiten der Gleichung $\frac{d(xf(x))}{dx} = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}$.

Wir schreiben $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ falls $Y = \sigma X + \mu$ wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y, d.h., finden Sie eine Funktion g, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[Y < t] = \int_{-\infty}^{t} g(y) dy$.

Hinweis: Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[Y < t]$ zunächst durch die Wahrscheinlichkeitsdichte f der Zufallsvariable X aus. Transformieren Sie dieses Integral dann durch eine Variablensubstitution.

(f) Mithilfe numerischer Integration von $f(x)$ lässt sich $\mathbb{P}[X < 1] \approx 0.841$ und $\mathbb{P}[X < 2] \approx 0.977$ berechnen. Verwenden Sie diese Werte um $\mathbb{P}[Y \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)]$ und $\mathbb{P}[Y \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)]$ zu bestimmen.

Aufgabe 2. *Unabhängigkeit* 4 P.

Zwei diskrete Zufallsvariablen X, Y mit jeweiliger Wertemenge $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ heißen unabhängig falls für alle $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$ gilt, dass $\mathbb{P}[X = x \text{ und } Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$.

(a) Interpretieren Sie die Definition und geben Sie jeweils ein Beispiel für unabhängige und abhängige (=nicht unabhängige) Zufallsvariablen an.

(b) Wie würden Sie die Definition der Unabhängigkeit auf stetige (reellwertige) Zufallsvariablen erweitern (informell)?

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen ist definiert als $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ und (X, Y) heißen unkorreliert falls $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

(c) Zeigen Sie dass unabhängige Zufallsvariablen auch unkorreliert sind. Sind unkorrellierte Zufallsvariablen immer auch unabhängig?

Aufgabe 3. *Mehrdimensionale Normalverteilung* 5 P.

Die d-dimensionale standard Normalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Zufallsvektoren $\mathbf{X} = (X_1, \ldots X_d)$, wobei alle Komponenten voneinander unabhängig sind und einer eindimensionalen standard Normalverteilung folgen, d.h., $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^\top]$ (Matrix) und erklären Sie, wieso diese Matrix die Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ genannt wird.

Ähnlich zum eindimensionalen Fall schreiben wir $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ falls $(Y_1, \ldots, Y_d) = \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$ und $(X_1, \ldots, X_k) = \mathbf{X} = \mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$. Hierbei ist $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d\times k}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Zufallsvektoren $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^k$, Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d\times k}$ und Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[\mathbf{M}\mathbf{Z} + \mathbf{v}] = \mathbf{M}\mathbb{E}[\mathbf{Z}] + \mathbf{v} \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Komponenten der Vektoren.

(d) Bestimmen Sie nun $\mathbb{E}[\mathbf{Y}]$ und $\mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])^\top]$.