概率统计中的收敛

1 概率收敛的基本概念

定义 1 (几乎必然收敛). 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量序列，X 是随机变量。称 X_n **几乎必然收敛**到 X，记作 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$，如果

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

等价地，

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

定义 2 (依概率收敛). 称 X_n **依概率收敛**到 X，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$，如果对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

定义 3 (L^p 收敛). 设 $p \geq 1$。称 X_n 在 L^p **意义下收敛**到 X，记作 $X_n \xrightarrow{L^p} X$，如果

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

特别地，当 $p = 2$ 时称为**均方收敛**，记作 $X_n \xrightarrow{m.s.} X$。

定义 4 (依分布收敛/弱收敛). 称 X_n **依分布收敛**到 X，记作 $X_n \xrightarrow{d} X$ 或 $X_n \Rightarrow X$，如果对 X 的分布函数 F 的所有连续点 x，有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

其中 F_n 是 X_n 的分布函数。

2 收敛关系的层次结构

定理 1 (收敛的蕴含关系). 对于随机变量序列 $\{X_n\}$，有以下蕴含关系：

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \tag{1}$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \tag{2}$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X \tag{3}$$

特别地，几乎必然收敛和 L^p 收敛之间没有一般的蕴含关系。

3 弱收敛的重要性质

定理 2 (连续映射定理). 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，如果 $X_n \xrightarrow{d} X$，则

$$g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

定理 3 (Slutsky定理). 设 $X_n \xrightarrow{d} X$，$Y_n \xrightarrow{P} c$（其中 c 是常数），则:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c \tag{4}$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} cX \tag{5}$$

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c} \quad (c \neq 0) \tag{6}$$

定理 4 (有界连续函数的期望收敛). 设 $X_n \xrightarrow{d} X$，$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界连续函数，则

$$\lim_{n\to\infty} E[h(X_n)] = E[h(X)]$$

前提是相应的期望存在。

4 大数定律

定理 5 (弱大数定律 (Khintchine)). 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，$E[X_1] = \mu < \infty$。令 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，则

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

定理 6 (强大数定律 (Kolmogorov)). 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，$E[|X_1|] < \infty$，$E[X_1] = \mu$。则

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

5 中心极限定理

定理 7 (经典中心极限定理 (Lindeberg-Lévy)). 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，$E[X_1] = \mu$，$Var(X_1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$。则

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

或等价地，

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

定理 8 (Lindeberg中心极限定理). 设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量序列，$E[X_k] = \mu_k$，$Var(X_k) = \sigma_k^2$。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

如果 *Lindeberg* 条件成立：对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - \mu_k)^2 \mathbf{1}_{|X_k-\mu_k|>\varepsilon s_n}] = 0$$

则

$$\frac{S_n - E[S_n]}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

6 期望与极限的交换

定理 9 (单调收敛定理). 设 $\{X_n\}$ 是非负随机变量序列，且 $X_n \uparrow X$ *a.s.*（单调递增收敛），则

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

定理 10 (Fatou引理). 设 $\{X_n\}$ 是非负随机变量序列，则

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

定理 11 (控制收敛定理 (Lebesgue)). 设 $X_n \to X$ *a.s.*，且存在可积随机变量 Y 使得 $|X_n| \leq Y$ *a.s.* 对所有 n 成立，则

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

7 弱收敛的等价刻画

定理 12 (Portmanteau定理). 对随机变量 X_n 和 X，以下条件等价：

1. $X_n \xrightarrow{d} X$
2. 对所有有界连续函数 f：$E[f(X_n)] \to E[f(X)]$
3. 对所有闭集 F：$\limsup_{n\to\infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$
4. 对所有开集 G：$\liminf_{n\to\infty} P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$
5. 对所有使得 $P(X \in \partial A) = 0$ 的*Borel*集 A：$P(X_n \in A) \to P(X \in A)$

其中 ∂A 表示集合 A 的边界。

8 多元情形

定义 5 (多元弱收敛). 设 $\{X_n\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的随机向量序列。称 X_n 弱收敛到 X，记作 $X_n \Rightarrow X$，如果对所有有界连续函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，有

$$E[f(X_n)] \to E[f(X)]$$

定理 13 (多元中心极限定理). 设 $\{X_n\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上独立同分布的随机向量序列，$E[X_1] = \mu$，$Cov(X_1) = \Sigma$（正定）。则

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$$