

## 摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用 $\text{\LaTeX}$ 文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

## 目录

<b>1 度量空间</b>	<b>2</b>
1.1 压缩映射原理 . . . . .	2
1.2 完备化 . . . . .	2
1.3 列紧集 . . . . .	2
1.4 赋范线性空间 . . . . .	2
1.5 凸集与不动点 . . . . .	2
1.6 内积空间 . . . . .	2
<b>2 线性算子与线性泛函</b>	<b>4</b>
2.1 线性算子 . . . . .	4
2.2 Riesz表示定理及其应用 . . . . .	5
2.3 纲与开映射定理 . . . . .	6
2.4 Hahn-Banach定理 . . . . .	7
2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间 . . . . .	7
2.6 线性算子的谱 . . . . .	7

# 1 度量空间

## 1.1 压缩映射原理

## 1.2 完备化

## 1.3 列紧集

## 1.4 赋范线性空间

## 1.5 凸集与不动点

## 1.6 内积空间

**定理 1.6.1.** 如果  $C$  是 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  中的一个闭凸子集, 那么在  $C$  上存在唯一元素  $x_0$  取到最小范数.

证明. 存在性: 设  $d = \inf_{z \in C} \|z\|$ , 取  $x_n$ , 使得  $d \leq \|x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$  利用

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) - 4\|\frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

可以证明  $\{x_n\}$  是柯西列.

唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

**推论 1.6.1** (Hilbert 空间闭凸子集中最佳逼近元存在且唯一). 若  $C$  是 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  中的一个闭凸子集, 则对  $\forall y \in \mathcal{H}, \exists! x_0 \in C$ , 使得

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|$$

证明. 将  $C$  平移  $-y$  之后, 利用上面的定理即可. □

**定理 1.6.2** (最佳逼近元的刻画). 设  $C$  是内积空间  $\mathcal{H}$  中的闭凸子集,  $\forall y \in \mathcal{H}$  为了  $x_0$  是  $y$  在  $C$  上的最佳逼近元, 必须且仅须它适合

$$\operatorname{Re}(y - x_0, x_0 - x) \geq 0, \forall x \in C$$

证明.  $\forall x \in C$ , 考虑函数  $\varphi_x(t) = \|y - tx - (1 - t)x_0\|^2$ , 为了  $x_0$  是  $y$  在  $C$  上的最佳逼近元, 必须且仅需

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0) \quad \forall x \in C, \forall t \in [0, 1]$$

考察此二次函数的取值即可, 这是容易地. □

**推论 1.6.2.** 设  $M$  是 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  的一个闭线性子流形,  $\forall x \in \mathcal{H}$ , 为了  $y$  是  $x$  在  $M$  上的最佳逼近元, 必须且仅须它适合

$$x - y \perp M - \{y\}$$

这个推论对线性子流形(子空间)中的最佳逼近元作了很到位的刻画,可以利用这个刻画得到最小二乘法的具体算法.

**推论 1.6.3** (正交分解). 设  $M$  是 Hilbert 空间  $\mathcal{X}$  中的一个闭线性子空间, 那么  $\forall x \in \mathcal{X}$ , 存在下列唯一的正交分解:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^\top)$$

证明. 实际上,  $y$  为  $x$  在  $M$  上的最佳逼近元. □

## 2 线性算子与线性泛函

### 2.1 线性算子

**定义 2.1.1** (线性算子). 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是两个线性空间,  $D$  是  $\mathcal{X}$  的一个线性子空间.  $T : D \rightarrow \mathcal{Y}$  是一个映射,  $D$  称为定义域, 也记作  $D(T)$ ,  $R(T) = \{Tx | x \in D\}$  称为  $T$  的值域. 如果

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\forall x, y \in D, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

那么称  $T$  是一个 **线性算子**. 取值于实数  $\mathbb{R}$  (复数  $\mathbb{C}$ ) 的线性算子称为 **实 (复) 线性泛函**.

**定义 2.1.2** (连续性). 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  是  $F^*$  空间,  $D(T) \subset \mathcal{X}$ , 称线性算子  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{Y}$  在  $x_0 \in D(T)$  是 **连续的**, 如果

$$x_n \in D(T), \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0$$

**定义 2.1.3** (有界性). 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  都是  $B^*$  空间, 称线性算子  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  是 **有界的**, 如果存在常数  $M \geq 0$ , 使得

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq M\|x\|_{\mathcal{X}} \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

**定理 2.1.1** (有界等价于连续). 设  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  都是  $B^*$  空间, 为了线性算子  $T$  连续, 必须且只须  $T$  有界.

**定义 2.1.4** (线性算子空间). 用  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  表示一切由  $\mathcal{X}$  到  $\mathcal{Y}$  的有界线性算子的全体, 并规定

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{X} \setminus \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

为  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  的 **范数**, 特别用  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  表示  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ , 用  $\mathcal{X}^*$  表示  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ , 即  $\mathcal{X}^*$  表示  $\mathcal{X}$  上的有界线性泛函全体.

**定理 2.1.2** (线性算子空间上的运算). 设  $\mathcal{X}$  是  $B^*$  空间,  $\mathcal{Y}$  是  $B$  空间, 若在  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  上规定线性运算:

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ ,  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , 则  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  按  $\|T\|$  构成一个 Banach 空间.

**证明.** 主要是证范数的三角不等式与完备性, 三角不等式基于算子范数的定义与  $\mathcal{Y}$  中范数的三角不等式. 根据  $\mathcal{Y}$  的完备性可以定义极限算子.  $\square$

## 2.2 Riesz表示定理及其应用

**定理 2.2.1** (Riesz表示定理(Hilbert空间)). 设 $f$ 是Hilbert空间 $\mathcal{X}$ 上的一个连续线性泛函,则必存在唯一的 $y_f \in \mathcal{X}$ ,使得

$$f(x) = (x, y_f) \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

证明. 考虑 $M \triangleq \{x \in \mathcal{X} | f(x) = 0\}$ ,不妨设 $f$ 不恒等于0,由 $f$ 连续线性保证 $M$ 是一个真闭线性子空间. 任取 $x_0 \perp M$ ,正交分解定理保证了 $x_0$ 是存在的.由于

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in M \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

(由此可以看到 $M$ 是余1维的)于是

$$f(x) \frac{\|x_0\|^2}{f(x_0)} = (x, x_0)$$

所以取 $y_f = (\overline{f(x_0)}/\|x_0\|^2)x_0$ 即可. □

实际上还有 $\|f\| = \|y_f\|$ .

**定理 2.2.2** (共轭双线性函数的表示). 设 $\mathcal{X}$ 是一个Hilbert空间, $a(x, y)$ 是 $\mathcal{X}$ 上的共轭双线性函数,并 $\exists M > 0$ .使得

$$|a(x, y)| \leq M\|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathcal{X})$$

则存在唯一的 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ ,使得

$$a(x, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X})$$

且

$$\|A\| = \sup_{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, x \neq 0, y \neq 0} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Riesz表示定理有很多应用,这首先依赖于Hilbert空间本身的良好性质,其次要求是连续线性泛函.

### Laplace方程 $-\Delta u = f$ Dirichlet边值问题的弱解

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开区域, $f \in L^2(\Omega)$ ,称实函数 $u$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\#)$$

的一个弱解是指  $u \in H_0^1(\Omega)$ , 满足

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

这是因为: 如果  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , 并且是一个解, 那么  $\forall v \in C^2(\Omega)$ ,  $v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} -\Delta u \cdot v dx \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

由于  $\{v \in C^2(\Omega) | v|_{\Omega} = 0\}$  在  $H_0^1(\Omega)$  中稠密, 所以上式对  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  也成立, 于是  $u$  是一个弱解.

对Laplace方程直接求解是很困难的, 近代偏微分方程理论的基本方法是先求弱解, 证其存在唯一, 再证其光滑性, 正因如此, 泛函分析是研究近代偏微分方程理论必不可少的工具.

**定理 2.2.3** (Laplace方程Dirichlet边值问题的弱解存在唯一).  $\forall f \in L^2(\Omega)$ , ( $\neq$ ) 式所代表的0-Dirichlet问题(即边界条件为0)弱解存在唯一.

证明. 可以证明:(书上有证)

$$(u, v) \triangleq \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

是  $H_0^1(\Omega)$  上的一个内积, 对  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|\int_{\Omega} f \cdot v dx| \leq (\int_{\Omega} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\| \cdot \|v\|_1$$

其中  $\|\cdot\|$  与  $\|\cdot\|_1$  分别表示  $L^2(\Omega)$  与  $H_0^1(\Omega)$  上的范数. 上式表明

$$v \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

是  $H_0^1(\Omega)$  上的一个连续线性泛函. 应用Riesz表示定理,  $\exists u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$\int_{\Omega} f v dx = (u_0, v)_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

从而  $u_0$  是一个弱解. 唯一性略. □

## 2.3 纲与开映射定理

**定义 2.3.1** (疏集, 第一纲集, 第二纲集).

**定理 2.3.1** (Baire).

**定理 2.3.2** (开映射定理).

定理 2.3.3 (Banach).

定义 2.3.2 (闭线性算子).

推论 2.3.1 (等价范数定理).

定理 2.3.4 (闭图像定理).

定理 2.3.5 (一致有界定理).

本小节后面的两个应用还没怎么细看,这节东西太多了,一下子看完不是很消化...另外一个原因是已经等不及赶紧进入下一节去看凸集分离定理了! 在最优化方法的课上就早有耳闻,如今终于可以学到了!

## 2.4 Hahn-Banach定理

## 2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

## 2.6 线性算子的谱