摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用LaTeX文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

本节首先定义了**度量空间**.

例 1.1.1 (空间 $C[a,b]$). 区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体记为 $C[a,b]$, 按距离

$$\rho(x,y) \triangleq \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

形成度量空间 $(C[a,b],\rho)$, 简记为 $C[a,b]$. 可以证明此空间是完备的, 这个空间是泛函中常见的例子.

定义 1.1.1 (压缩映射). 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个**压缩映射**, 如果存在 $0<\alpha<1$, 使得 $\rho(Tx,Ty)\le\alpha\rho(x,y)\quad(\forall x,y\in\mathscr{X})$

定理 1.1.1 (压缩映射原理). 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个完备的度量空间, T 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 到其自身的一个压缩映射, 则 T 在 $\mathscr{X}$ 上存在唯一的不动点.

证明. 任取初始点 $x_0\in\mathscr{X}$, 考察序列 $x_{n+1}=Tx_n$, 下证其为基本列:

$$|x_{n+p}-x_n|\le\sum_{i=1}^{p}|x_i-x_{i+1}|\le\sum_{i=1}^{p}\alpha^{n+i-1}|x_1-x_0|<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1-x_0|$$

□

利用压缩映射原理可以证明**常微分方程的一种初值问题的局部存在唯一性**与**隐函数存在定理**.

1.2 完备化

定义 1.2.1 (稠密子集). 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是度量空间, 集合 $E\subset\mathscr{X}$ 叫作在 $\mathscr{X}$ 中的**稠密子集**, 如果 $\forall x\in\mathscr{X},\forall\epsilon>0,\exists z\in E$, 使得 $\rho(x,z)<\epsilon$.

定义 1.2.2 (完备化空间). 包含给定度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 的最小的完备度量空间称为 $\mathscr{X}$ 的**完备化空间**, 其中最小的含义是: 任何一个以 $(\mathscr{X},\rho)$ 为子空间的完备度量空间都以此空间作为子空间.

定理 1.2.1. 如果 $(\mathscr{X}_1,\rho_1)$ 是一个以 $(\mathscr{X},\rho)$ 为子空间的完备度量空间, $\rho_1|_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}}=\rho$, 并且 $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{X}_1$ 中稠密, 则 $\mathscr{X}_1$ 是 $\mathscr{X}$ 的完备化空间.

定理 1.2.2. 每一个度量空间都有一个完备化空间.

证明. 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个度量空间, 考虑其上的基本列组成的等价类, 可以证明这是一个度量空间, 且是 $(\mathscr{X},\rho)$ 的完备化空间. □

1.3 列紧集

定义 1.3.1 (列紧集)**.** 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个度量空间, A 是其一子集, 称 A 是**列紧的**, 如果 A 中的任意点列在 $\mathscr{X}$ 中有一个收敛子列. 若这个子列还收敛到 A 中的点, 则称 A 是**自列紧的**. 如果空间 $\mathscr{X}$ 是列紧的, 那么称 $\mathscr{X}$ 为**列紧空间**.

1.4 赋范线性空间

定义 1.4.1 (次线性泛函)**.** 设 $P:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$ 是线性空间$\mathscr{X}$上的一个函数,若它满足

(i) $P(x+y)\le P(x)+P(y) \quad (\forall x,y\in\mathscr{X})$

(ii) $P(\lambda x)=\lambda P(x) \quad (\forall\lambda>0,\forall x\in\mathscr{X})$

则称P为$\mathscr{X}$上的一个**次线性泛函**.

1.5 凸集与不动点

定义 1.5.1 (Minkowski泛函)**.** 设$\mathscr{X}$是线性空间,C是$\mathscr{X}$上含有θ的凸子集,在$\mathscr{X}$上规定一个取值于$[0,\infty]$的函数

$$P(x)=\inf\{\lambda>0|\frac{x}{\lambda}\in C\} \quad (\forall x\in\mathscr{X})$$

与C对应,称函数P为C的Minkowski**泛函**.

1.6 内积空间

定理 1.6.1. 如果C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集, 那么在C上存在唯一元素x_0取到最小范数.

证明. 存在性: 设 $d=\inf_{z\in C}\|z\|$,取 x_n, 使得 $d\le\|x_n\|\le d+\frac{1}{n}$ 利用

$$\|x_m-x_n\|^2=2(\|x_m\|^2+\|x_n\|^2)-4\|\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

可以证明 $\{x_n\}$ 是柯西列.
唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1 (Hilbert空间闭凸子集中最佳逼近元存在且唯一)**.** 若C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集,则对 $\forall y\in\mathscr{X}$,$\exists! x_0\in C$,使得

$$\|y-x_0\|=\inf_{x\in C}\|x-y\|$$

证明. 将C平移$-y$之后,利用上面的定理即可. □

定理 1.6.2 (最佳逼近元的刻画). 设C是内积空间$\mathscr{X}$中的闭凸子集, $\forall y \in \mathscr{X}$ 为了x_0是y在C上的最佳逼近元,必须且仅须它适合

$$\operatorname{Re}(y - x_0, x_0 - x) \geq 0, \forall x \in C$$

证明. $\forall x \in C$,考虑函数$\varphi_x(t) = \|y - tx - (1-t)x_0\|^2$,为了$x_0$是$y$在$C$上的最佳逼近元,必须且仅需

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0) \quad \forall x \in C, \forall t \in [0,1]$$

考察此二次函数的取值即可,这是容易地. □

推论 1.6.2. 设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$的一个闭线性子流形,$\forall x \in \mathscr{X}$,为了$y$是$x$在$M$上的最佳逼近元,必须且仅须它适合

$$x - y \perp M - \{y\}$$

这个推论对线性子流形(子空间)中的最佳逼近元作了很到位的刻画,可以利用这个刻画得到最小二乘法的具体算法.

推论 1.6.3 (正交分解). 设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭线性子空间,那么$\forall x \in \mathscr{X}$,存在下列唯一的正交分解:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^{\top})$$

证明. 实际上,y为x在M上的最佳逼近元. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

定义 2.1.1 (线性算子). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是两个线性空间,D是$\mathscr{X}$的一个线性子空间.$T:D\to\mathscr{Y}$是一个映射, D称为定义域,也记作$D(T)$,$R(T)=\{Tx|x\in D\}$称为T的值域.如果

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad (\forall x,y\in D,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K})$$

那么称T是一个**线性算子**.取值于实数$\mathbb{R}$(复数$\mathbb{C}$)的线性算子称为**实(复)线性泛函**.

定义 2.1.2 (连续性). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是F^*空间,$D(T)\subset\mathscr{X}$,称线性算子$T:D(T)\to\mathscr{Y}$在$x_0\in D(T)$是**连续的**,如果

$$x_n\in D(T),\quad x_n\to x_0\Rightarrow Tx_n\to Tx_0$$

定义 2.1.3 (有界性). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B^*空间,称线性算子$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$是**有界的**,如果存在常数$M\geq 0$,使得

$$\|Tx\|_{\mathscr{Y}}\leq M\|x\|_{\mathscr{X}} \quad (\forall x\in\mathscr{X})$$

定理 2.1.1 (有界等价于连续). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B^*空间,为了线性算子T连续,必须且只须T有界.

定义 2.1.4 (线性算子空间). 用$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$表示一切由$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的有界线性算子的全体,并规定

$$\|T\|=\sup_{x\in\mathscr{X}\backslash\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

为$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$的**范数**,特别用$\mathscr{L}(\mathscr{X})$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$, 用$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{K})$,即$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{X}$上的有界线性泛函全体.

定理 2.1.2 (线性算子空间上的运算). 设$\mathscr{X}$是B^*空间,$\mathscr{Y}$是B空间,若在$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$上规定线性运算:

$$(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)(x)=\alpha_1T_1x+\alpha_2T_2x \quad (\forall x\in\mathscr{X})$$

其中$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K},T_1,T_2\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,则$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$按$\|T\|$ 构成一个Banach空间.

证明. 主要是证范数的三角不等式与完备性,三角不等式基于算子范数的定义与$\mathscr{Y}$中范数的三角不等式.根据$\mathscr{Y}$的完备性可以定义极限算子. □

2.2 Riesz表示定理及其应用

定理 2.2.1 (Riesz表示定理(Hilbert空间)). 设f是Hilbert空间$\mathscr{X}$上的一个连续线性泛函,则必存在唯一的$y_f \in \mathscr{X}$,使得

$$f(x) = (x, y_f) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

证明. 考虑$M \triangleq \{x \in \mathscr{X} | f(x) = 0\}$,不妨设$f$不恒等于0,由$f$连续线性保证$M$是一个真闭线性子空间. 任取$x_0 \perp M$,正交分解定理保证了$x_0$是存在的.由于

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in M \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

(由此可以看到M是余1维的)于是

$$f(x) \frac{\|x_0\|^2}{f(x_0)} = (x, x_0)$$

所以取$y_f = (\overline{f(x_0)}/\|x_0\|^2) x_0$即可. □

实际上还有$\|f\| = \|y_f\|$.

定理 2.2.2 (共轭双线性函数的表示). 设$\mathscr{X}$是一个Hilbert空间,$a(x,y)$是$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数,并$\exists M > 0$.使得

$$|a(x,y)| \le M\|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

则存在唯一的$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$,使得

$$a(x,y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

且

$$\|A\| = \sup_{(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}, x\neq\theta, y\neq\theta} \frac{|a(x,y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Riesz表示定理有很多应用,这首先依赖于Hilbert空间本身的良好性质,其次要求是连续线性泛函.

Laplace方程 $-\Delta u = f$ Dirichlet边值问题的弱解

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有界开区域,$f \in L^2(\Omega)$,称实函数$u$是

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{\#}$$

的一个**弱解**是指$u \in H_0^1(\Omega)$,满足

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

这是因为:如果$u \in C^2(\overline{\Omega})$,并且是一个解,那么$\forall v \in C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \cdot v \mathrm{d}x \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

由于$\{v \in C^2(\Omega) | v|_\Omega = 0\}$在$H_0^1(\Omega)$中稠密,所以上式对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$也成立,于是$u$是一个弱解.

对Laplace方程直接求解是很困难的,近代偏微分方程理论的基本方法是先求弱解,证其存在唯一,再证其光滑性,正因如此,泛函分析是研究近代偏微分方程理论必不可少的工具.

定理 2.2.3 (Laplace方程Dirichlet边值问题的弱解存在唯一)**.** *$\forall f \in L^2(\Omega)$,(#)式所代表的0-Dirichlet问题(即边界条件为0)弱解存在唯一.*

证明. 可以证明:(书上有证)

$$(u, v) \triangleq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个内积,对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\| \cdot \|v\|_1$$

其中$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$分别表示$L^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega)$上的范数.上式表明

$$v \to \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个连续线性泛函.应用Riesz表示定理,$\exists u \in H_0^1(\Omega)$,使得

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = (u_0, v)_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

从而u_0是一个弱解.唯一性略. □

2.3 纲与开映射定理

定义 2.3.1 (疏集,第一纲集,第二纲集)**.** *设$(\mathscr{X}, \rho)$是一个度量空间,集合$E \subset \mathscr{X}$,称E是**疏的**,如果$\overline{E}$的内点是空的. 集合E称为是**第一纲的**,如果$E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$,其中$E_n$是疏集.不是第一纲的集合称为**第二纲集**.*

定理 2.3.1 (Baire)**.** *完备度量空间$(\mathscr{X}, \rho)$是第二纲集.*

证明. 根据疏集去构造基本列，并使得基本列的极限不在$\mathscr{X}$中. □

定理 2.3.2. *在$C[0,1]$中处处不可微的函数集合E的余集是第一纲集,特别地,E非空.*

定理 2.3.3 (开映射定理)**.** *设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$都是B空间,若$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是一个满射,则$T$是开映射.*

定理 2.3.4 (Banach)**.** *设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是B空间,若$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,它既是单射又是满射, 那么$T^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

定义 2.3.2 (闭线性算子)**.** *设T是$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的线性算子,$D(T)$是其定义域.称$T$是***闭的***.是指由 $x_n\to x$ 以及 $Tx_n\to y$ 就能推出 $x\in D(T)$, 而且 $y=Tx$.*

推论 2.3.1 (等价范数定理)**.** *设线性空间 $\mathscr{X}$ 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 如果 $\mathscr{X}$ 关于这两个范数都构成 B 空间, 而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 必等价.*

定理 2.3.5 (闭图像定理)**.** *设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, 若 T 是 $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的闭线性算子,并且 $D(T)$ 是闭的, 则 T 是连续的.*

定理 2.3.6 (一致有界定理)**.** *设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, 如果 $W\subset\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 使得*

$$\sup_{A\in W}\|Ax\|<\infty\quad(\forall x\in\mathscr{X})$$

那么存在常数 M, 使得 $\|A\|\le M\quad(\forall A\in W)$.

本小节后面的两个应用还没怎么细看,这节东西太多了,一下子看完不是很消化...另外一个原因是已经等不及赶紧进入下一节去看凸集分离定理了! 在最优化方法的课上就早有耳闻,如今终于可以学到了!

2.4 Hahn-Banach定理

定理 2.4.1 (实 Hahn-Banach 定理)**.** *设 $\mathscr{X}$ 是实线性空间, p 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的次线性泛函, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的实线性子空间, f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的实线性泛函并满足 $f(x_0)\le p(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0)$. 那么 $\mathscr{X}$ 上必有一个实线性泛函 f, 满足:*

(i) $f(x)\le p(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X})$

(ii) $f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0)$

证明. 每次延拓一维, 这等价于在一个已有定义的子空间之外的一个向量上定义取值, 但是取值需要满足被给定的次线性泛函 $p(x)$ 控制, 最后用Zorn引理可以保证最后能延拓到整个空间上去. □

定理 2.4.2 (复 Hahn-Banach 定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间, p 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数. $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, f 是 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函, 并满足 $|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in \mathscr{X}_0$, 那么 $\mathscr{X}$ 上必有一个线性泛函 f 满足:

(i) $|f(x)| \leq p(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$

(ii) $f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X}_0)$

定理 2.4.3 (Hahn-Banach 定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函, 则在 $\mathscr{X}$ 上必有有界线性泛函 f 满足:

(i) $f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$

(ii) $\|f\| = \|f_0\|_0$

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 $\mathscr{X}_0$ 上的范数.

证明. 在 $\mathscr{X}$ 上定义 $p(x) \triangleq \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$, 那么 $p(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数, 从而根据实 Hanh-Banach 定理, 必存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$, 满足

$$f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X}_0)$$

并且

$$|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\|_0 \cdot \|x\| \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

因此 $\|f\| = \|f_0\|_0$. □

定理 2.4.4. 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, M 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, 若 $x_0 \in \mathscr{X}$, 且

$$d \triangleq \rho(x_0, M) > 0$$

则必 $\exists f \in \mathscr{X}^*$ 适合条件:

(i) $f(x) = 0 \quad (\forall x \in M)$

(ii) $f(x_0) = d$

(iii) $\|f\| = 1$

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱