摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用LaTeX文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

1.2 完备化

1.3 列紧集

1.4 赋范线性空间

定义 1.4.1 (次线性泛函)**.** 设 $P : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 是线性空间$\mathscr{X}$上的一个函数,若它满足

(i) $P(x+y) \leq P(x) + P(y) \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$

(ii) $P(\lambda x)\lambda P(x) \quad (\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathscr{X})$

则称P为$\mathscr{X}$上的一个**次线性泛函**.

1.5 凸集与不动点

定义 1.5.1 (Minkowski泛函)**.** 设$\mathscr{X}$是线性空间,C是$\mathscr{X}$上含有θ的凸子集,在$\mathscr{X}$上规定一个取值于$[0, \infty]$的函数

$$P(x) = \inf\{\lambda > 0 | \frac{x}{\lambda} \in C\} \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

与C对应,称函数P为C的Minkowski**泛函**.

1.6 内积空间

定理 1.6.1. 如果C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集, 那么在C上存在唯一元素x_0取到最小范数.

证明. 存在性: 设$d = \inf_{z \in C} \|z\|$,取x_n,使得$d \leq \|x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$利用

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) - 4\|\frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

可以证明$\{x_n\}$是柯西列.
唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1 (Hilbert空间闭凸子集中最佳逼近元存在且唯一)**.** 若C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集,则对 $\forall y \in \mathscr{X}$, $\exists! x_0 \in C$,使得

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|$$

证明. 将C平移$-y$之后,利用上面的定理即可. □

定理 1.6.2 (最佳逼近元的刻画). 设C是内积空间$\mathscr{X}$中的闭凸子集, $\forall y \in \mathscr{X}$为了$x_0$是$y$在$C$上的最佳逼近元,必须且仅须它适合

$$\mathrm{Re}(y - x_0, x_0 - x) \geq 0, \forall x \in C$$

证明. $\forall x \in C$,考虑函数$\varphi_x(t) = \|y - tx - (1-t)x_0\|^2$,为了$x_0$是$y$在$C$上的最佳逼近元,必须且仅需

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0) \quad \forall x \in C, \forall t \in [0,1]$$

考察此二次函数的取值即可,这是容易地. □

推论 1.6.2. 设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$的一个闭线性子流形,$\forall x \in \mathscr{X}$,为了$y$是$x$在$M$上的最佳逼近元,必须且仅须它适合

$$x - y \perp M - \{y\}$$

这个推论对线性子流形(子空间)中的最佳逼近元作了很到位的刻画,可以利用这个刻画得到最小二乘法的具体算法.

推论 1.6.3 (正交分解). 设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭线性子空间,那么$\forall x \in \mathscr{X}$,存在下列唯一的正交分解:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^{\top})$$

证明. 实际上,y为x在M上的最佳逼近元. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

定义 2.1.1 (线性算子). 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是两个线性空间,D是$\mathscr{X}$的一个线性子空间.$T:D\to\mathscr{Y}$是一个映射, D称为定义域,也记作$D(T)$,$R(T)=\{Tx|x\in D\}$称为T的值域.如果

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty\quad(\forall x,y\in D,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K})$$

那么称T是一个**线性算子**.取值于实数$\mathbb{R}$(复数$\mathbb{C}$)的线性算子称为**实(复)线性泛函**.

定义 2.1.2 (连续性). 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是F^*空间,$D(T)\subset\mathscr{X}$,称线性算子$T:D(T)\to\mathscr{Y}$在$x_0\in D(T)$是**连续的**,如果

$$x_n\in D(T),\quad x_n\to x_0\Rightarrow Tx_n\to Tx_0$$

定义 2.1.3 (有界性). 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$都是B^*空间,称线性算子$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$是**有界的**,如果存在常数$M\geq 0$,使得

$$\|Tx\|_{\mathscr{Y}}\leq M\|x\|_{\mathscr{X}}\quad(\forall x\in\mathscr{X})$$

定理 2.1.1 (有界等价于连续). 设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$都是B^*空间,为了线性算子T连续,必须且只须T有界.

定义 2.1.4 (线性算子空间). 用$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$表示一切由$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的有界线性算子的全体,并规定

$$\|T\|=\sup_{x\in\mathscr{X}\setminus\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

为$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$的**范数**,特别用$\mathscr{L}(\mathscr{X})$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$, 用$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{K})$,即$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{X}$上的有界线性泛函全体.

定理 2.1.2 (线性算子空间上的运算). 设$\mathscr{X}$是B^*空间,$\mathscr{Y}$是B空间,若在$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$上规定线性运算:

$$(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)(x)=\alpha_1T_1x+\alpha_2T_2x\quad(\forall x\in\mathscr{X})$$

其中$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K},T_1,T_2\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,则$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$按$\|T\|$ 构成一个Banach空间.

证明. 主要是证范数的三角不等式与完备性,三角不等式基于算子范数的定义与$\mathscr{Y}$中范数的三角不等式.根据$\mathscr{Y}$的完备性可以定义极限算子. □

2.2 Riesz表示定理及其应用

定理 2.2.1 (Riesz表示定理(Hilbert空间)). 设f是Hilbert空间$\mathscr{X}$上的一个连续线性泛函,则必存在唯一的$y_f \in \mathscr{X}$,使得

$$f(x) = (x, y_f) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

证明. 考虑$M \triangleq \{x \in \mathscr{X} | f(x) = 0\}$,不妨设$f$不恒等于0,由$f$连续线性保证$M$是一个真闭线性子空间. 任取$x_0 \perp M$,正交分解定理保证了$x_0$是存在的.由于

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in M \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

(由此可以看到M是余1维的)于是

$$f(x) \frac{\|x_0\|^2}{f(x_0)} = (x, x_0)$$

所以取$y_f = (\overline{f(x_0)}/\|x_0\|^2)x_0$即可. □

实际上还有$\|f\| = \|y_f\|$.

定理 2.2.2 (共轭双线性函数的表示). 设$\mathscr{X}$是一个Hilbert空间,$a(x, y)$是$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数,并$\exists M > 0$.使得

$$|a(x, y)| \le M\|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

则存在唯一的$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$,使得

$$a(x, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

且

$$\|A\| = \sup_{(x,y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}, x \neq \theta, y \neq \theta} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Riesz表示定理有很多应用,这首先依赖于Hilbert空间本身的良好性质,其次要求是连续线性泛函.

Laplace方程 $-\Delta u = f$ Dirichlet边值问题的弱解

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有界开区域,$f \in L^2(\Omega)$,称实函数$u$是

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{\#}$$

的一个**弱解**是指$u \in H_0^1(\Omega)$,满足

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

这是因为:如果$u \in C^2(\overline{\Omega})$,并且是一个解,那么$\forall v \in C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \cdot v \mathrm{d}x \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

由于$\{v \in C^2(\Omega) | v|_\Omega = 0\}$在$H_0^1(\Omega)$中稠密,所以上式对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$也成立,于是$u$是一个弱解.

对Laplace方程直接求解是很困难的,近代偏微分方程理论的基本方法是先求弱解,证其存在唯一,再证其光滑性,正因如此,泛函分析是研究近代偏微分方程理论必不可少的工具.

定理 2.2.3 (Laplace方程Dirichlet边值问题的弱解存在唯一)**.** *$\forall f \in L^2(\Omega)$,(#)式所代表的0-Dirichlet问题(即边界条件为0)弱解存在唯一.*

证明. 可以证明:(书上有证)

$$(u, v) \triangleq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个内积,对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\| \cdot \|v\|_1$$

其中$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$分别表示$L^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega)$上的范数.上式表明

$$v \to \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个连续线性泛函.应用Riesz表示定理,$\exists u \in H_0^1(\Omega)$,使得

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = (u_0, v)_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

从而u_0是一个弱解.唯一性略. □

2.3 纲与开映射定理

定义 2.3.1 (疏集,第一纲集,第二纲集)**.** *设$(\mathscr{X}, \rho)$是一个度量空间,集合$E \subset \mathscr{X}$,称E是**疏的**,如果$\overline{E}$的内点是空的. 集合E称为是**第一纲的**,如果$E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$,其中$E_n$是疏集.不是第一纲的集合称为**第二纲集**.*

定理 2.3.1 (Baire)**.** *完备度量空间$(\mathscr{X}, \rho)$是第二纲集.*

证明. 根据疏集去构造基本列，并使得基本列的极限不在$\mathscr{X}$中. □

定理 2.3.2. *在$C[0,1]$中处处不可微的函数集合E的余集是第一纲集,特别地,E非空.*

定理 2.3.3 (开映射定理)**.** *设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B空间,若$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是一个满射,则$T$是开映射.*

定理 2.3.4 (Banach)**.** *设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是B空间,若$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,它既是单射又是满射，那么$T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

定义 2.3.2 (闭线性算子)**.** *设T是$\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$的线性算子,$D(T)$是其定义域.称$T$是***闭的***.是指由 $x_n \to x$ 以及 $Tx_n \to y$ 就能推出 $x \in D(T)$, 而且 $y = Tx$.*

推论 2.3.1 (等价范数定理)**.** *设线性空间 $\mathscr{X}$ 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 如果 $\mathscr{X}$ 关于这两个范数都构成 B 空间, 而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 必等价.*

定理 2.3.5 (闭图像定理)**.** *设 $\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 是 B 空间, 若 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的闭线性算子,并且 $D(T)$ 是闭的, 则 T 是连续的.*

定理 2.3.6 (一致有界定理)**.** *设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, 如果 $W \subset \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 使得*

$$\sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

那么存在常数 M, 使得 $\|A\| \leq M \quad (\forall A \in W)$.

本小节后面的两个应用还没怎么细看,这节东西太多了,一下子看完不是很消化...另外一个原因是已经等不及赶紧进入下一节去看凸集分离定理了! 在最优化方法的课上就早有耳闻,如今终于可以学到了!

2.4 Hahn-Banach定理

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱