

摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用 \LaTeX 文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 度量空间	2
1.1 压缩映射原理	2
1.2 完备化	2
1.3 列紧集	2
1.4 赋范线性空间	2
1.5 凸集与不动点	2
1.6 内积空间	2
2 线性算子与线性泛函	3
2.1 线性算子的概念	3
2.2 Riesz表示定理及其应用	3
2.3 纲与开映射定理	3
2.4 Hahn-Banach定理	3
2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间	3
2.6 线性算子的谱	3

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

1.2 完备化

1.3 列紧集

1.4 赋范线性空间

1.5 凸集与不动点

1.6 内积空间

定理 1.6.1. 如果 C 是Hilbert空间 \mathcal{H} 中的一个闭凸子集, 那么在 C 上存在唯一元素 x_0 取到最小范数.

证明. 存在性: 设 $d = \inf_{z \in C} \|z\|$, 取 x_n , 使得 $d \leq \|x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$ 利用

$\|x_m - x_n\|^2 = 2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) - 4\|\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$ 可以证明 $\{x_n\}$ 是柯西列.

唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1. 若 C 是Hilbert空间 \mathcal{H} 中的一个闭凸子集, 则对 $\forall y \in \mathcal{H}, \exists! x_0 \in C$, 使得
 $\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|$

证明. 将 C 平移 $-y$ 之后, 利用上面的定理即可. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子的概念

2.2 Riesz表示定理及其应用

2.3 纲与开映射定理

2.4 Hahn-Banach定理

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱