摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用LaTeX文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

1.2 完备化

1.3 列紧集

1.4 赋范线性空间

1.5 凸集与不动点

1.6 内积空间

定理 1.6.1. *如果C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集, 那么在C上存在唯一元素x_0取到最小范数.*

证明. 存在性: 设$d = \inf_{z\in C}\|z\|$,取x_n,使得$d \le \|x_n\| \le d + \frac{1}{n}$利用
$\|x_m - x_n\|^2 = 2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) - 4\|\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$ 可以证明$\{x_n\}$是柯西列.
唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1. *若C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集,则对 $\forall y \in \mathscr{X}, \exists! x_0 \in C$,使得 $\|y - x_0\| = \inf_{x\in C}\|x - y\|$*

证明. 将C平移$-y$之后,利用上面的定理即可. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子的概念

2.2 Riesz表示定理及其应用

2.3 纲与开映射定理

2.4 Hahn-Banach定理

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱