摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用LaTeX文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

1.2 完备化

1.3 列紧集

1.4 赋范线性空间

1.5 凸集与不动点

1.6 内积空间

定理 1.6.1. *如果C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集, 那么在C上存在唯一元素x_0取到最小范数.*

证明. 存在性: 设$d=\inf_{z\in C}\|z\|$,取x_n,使得$d\le\|x_n\|\le d+\frac{1}{n}$利用

$$\|x_m-x_n\|^2=2(\|x_m\|^2+\|x_n\|^2)-4\|\frac{x_m+x_n}{2}\|^2$$

可以证明$\{x_n\}$是柯西列.
唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1 (Hilbert空间闭凸子集中最佳逼近元存在且唯一)**.** *若C是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭凸子集,则对 $\forall y\in\mathscr{X}$, $\exists! x_0\in C$,使得*

$$\|y-x_0\|=\inf_{x\in C}\|x-y\|$$

证明. 将C平移$-y$之后,利用上面的定理即可. □

定理 1.6.2 (最佳逼近元的刻画)**.** *设C是内积空间$\mathscr{X}$中的闭凸子集, $\forall y\in\mathscr{X}$ 为了x_0是y在C上的最佳逼近元,必须且仅须它适合*

$$\mathrm{Re}(y-x_0,x_0-x)\ge 0,\forall x\in C$$

证明. $\forall x\in C$,考虑函数$\varphi_x(t)=\|y-tx-(1-t)x_0\|^2$,为了$x_0$是$y$在$C$上的最佳逼近元,必须且仅需

$$\varphi_x(t)\ge\varphi_x(0)\quad\forall x\in C,\forall t\in[0,1]$$

考察此二次函数的取值即可,这是容易地. □

推论 1.6.2. *设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$的一个闭线性子流形,$\forall x\in\mathscr{X}$,为了y是x在M上的最佳逼近元,必须且仅须它适合*

$$x-y\perp M-\{y\}$$

这个推论对线性子流形(子空间)中的最佳逼近元作了很到位的刻画,可以利用这个刻画得到最小二乘法的具体算法.

推论 1.6.3 (正交分解)**.** *设M是Hilbert空间$\mathscr{X}$中的一个闭线性子空间,那么$\forall x \in \mathscr{X}$,存在下列唯一的正交分解:*

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^{\top})$$

证明. 实际上,y为x在M上的最佳逼近元. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

定义 2.1.1 (线性算子). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是两个线性空间,D是$\mathscr{X}$的一个线性子空间.$T : D \to \mathscr{Y}$是一个映射, D称为定义域,也记作$D(T)$,$R(T) = \{Tx|x \in D\}$称为T的值域.如果

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\forall x, y \in D, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

那么称T是一个**线性算子**.取值于实数$\mathbb{R}$(复数$\mathbb{C}$)的线性算子称为**实(复)线性泛函**.

定义 2.1.2 (连续性). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$是F^*空间,$D(T) \subset \mathscr{X}$,称线性算子$T : D(T) \to \mathscr{Y}$在$x_0 \in D(T)$是**连续的**,如果

$$x_n \in D(T), \quad x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$$

定义 2.1.3 (有界性). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B^*空间,称线性算子$T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$是**有界的**,如果存在常数$M \geq 0$,使得

$$\|Tx\|_{\mathscr{Y}} \leq M\|x\|_{\mathscr{X}} \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

定理 2.1.1 (有界等价于连续). 设$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$都是B^*空间,为了线性算子T连续,必须且只须T有界.

定义 2.1.4 (线性算子空间). 用$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$表示一切由$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的有界线性算子的全体,并规定

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathscr{X}\setminus\theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

为$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$的**范数**,特别用$\mathscr{L}(\mathscr{X})$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$, 用$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{K})$,即$\mathscr{X}^*$表示$\mathscr{X}$上的有界线性泛函全体.

定理 2.1.2 (线性算子空间上的运算). 设$\mathscr{X}$是B^*空间,$\mathscr{Y}$是B空间,若在$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$上规定线性运算:

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

其中$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$,则$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$按$\|T\|$ 构成一个Banach空间.

证明. 主要是证范数的三角不等式与完备性,三角不等式基于算子范数的定义与$\mathscr{Y}$中范数的三角不等式.根据$\mathscr{Y}$的完备性可以定义极限算子. □

2.2 Riesz表示定理及其应用

定理 2.2.1 (Riesz表示定理(Hilbert空间)). 设f是Hilbert空间$\mathscr{X}$上的一个连续线性泛函,则必存在唯一的$y_f \in \mathscr{X}$,使得

$$f(x) = (x, y_f) \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

证明. 考虑$M \triangleq \{x \in \mathscr{X} | f(x) = 0\}$,不妨设$f$不恒等于0,由$f$连续线性保证$M$是一个真闭线性子空间. 任取$x_0 \perp M$,正交分解定理保证了$x_0$是存在的.由于

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in M \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

(由此可以看到M是余1维的)于是

$$f(x) \frac{\|x_0\|^2}{f(x_0)} = (x, x_0)$$

所以取$y_f = (\overline{f(x_0)} / \|x_0\|^2) x_0$即可. □

实际上还有$\|f\| = \|y_f\|$.

定理 2.2.2 (共轭双线性函数的表示). 设$\mathscr{X}$是一个Hilbert空间,$a(x, y)$是$\mathscr{X}$上的共轭双线性函数,并$\exists M > 0$.使得

$$|a(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

则存在唯一的$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$,使得

$$a(x, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in \mathscr{X})$$

且

$$\|A\| = \sup_{(x,y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}, x \neq \theta, y \neq \theta} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Riesz表示定理有很多应用,这首先依赖于Hilbert空间本身的良好性质,其次要求是连续线性泛函.

Laplace方程 $-\Delta u = f$ Dirichlet边值问题的弱解

设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有界开区域,$f \in L^2(\Omega)$,称实函数$u$是

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{\#}$$

的一个**弱解**是指$u \in H_0^1(\Omega)$,满足

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

这是因为:如果$u \in C^2(\overline{\Omega})$,并且是一个解,那么$\forall v \in C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \cdot v \mathrm{d}x \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

由于$\{v \in C^2(\Omega) | v|_\Omega = 0\}$在$H_0^1(\Omega)$中稠密,所以上式对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$也成立,于是$u$是一个弱解.

对Laplace方程直接求解是很困难的,近代偏微分方程理论的基本方法是先求弱解,证其存在唯一,再证其光滑性,正因如此,泛函分析是研究近代偏微分方程理论必不可少的工具.

定理 2.2.3 (Laplace方程Dirichlet边值问题的弱解存在唯一)**.** *$\forall f \in L^2(\Omega)$,(#)式所代表的0-Dirichlet问题(即边界条件为0)弱解存在唯一.*

证明. 可以证明:(书上有证)

$$(u, v) \triangleq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个内积,对$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|\int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x| \le (\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \le C \|f\| \cdot \|v\|_1$$

其中$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|_1$分别表示$L^2(\Omega)$与$H_0^1(\Omega)$上的范数.上式表明

$$v \to \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x$$

是$H_0^1(\Omega)$上的一个连续线性泛函.应用Riesz表示定理,$\exists u \in H_0^1(\Omega)$,使得

$$\int_\Omega f v \mathrm{d}x = (u_0, v)_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

从而u_0是一个弱解.唯一性略. □

2.3 纲与开映射定理

定义 2.3.1 (疏集,第一纲集,第二纲集)**.**

定理 2.3.1 (Baire)**.**

定理 2.3.2 (开映射定理)**.**

定理 2.3.3 (Banach).

定义 2.3.2 (闭线性算子).

推论 2.3.1 (等价范数定理).

定理 2.3.4 (闭图像定理).

定理 2.3.5 (一致有界定理).

本小节后面的两个应用还没怎么细看,这节东西太多了,一下子看完不是很消化...另外一个原因是已经等不及赶紧进入下一节去看凸集分离定理了! 在最优化方法的课上就早有耳闻,如今终于可以学到了!

2.4 Hahn-Banach定理

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱