

摘要

本来寒假打算在个人主页上面更新泛函分析的自学笔记，但在markdown文件中插入latex真不太方便，故单独用L^AT_EX文件来记泛函笔记。

我自学使用的教材为张恭庆老师的《泛函分析讲义（上）》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1	度量空间	2
1.1	压缩映射原理	2
1.2	完备化	2
1.3	列紧集	3
1.4	赋范线性空间	3
1.5	凸集与不动点	3
1.6	内积空间	4
2	线性算子与线性泛函	5
2.1	线性算子	5
2.2	Riesz 表示定理及其应用	6
2.3	纲与开映射定理	7
2.4	Hahn-Banach定理	8
2.5	共轭空间、弱收敛、自反空间	9
2.6	线性算子的谱	9

1 度量空间

1.1 压缩映射原理

本节首先定义了度量空间.

例 1.1.1 (空间 $C[a, b]$). 区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体记为 $C[a, b]$, 按距离

$$\rho(x, y) \triangleq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

形成度量空间 $(C[a, b], \rho)$, 简记为 $C[a, b]$. 可以证明此空间是完备的, 这个空间是泛函中常见的例子.

定义 1.1.1 (压缩映射). 称 $T: (\mathcal{X}, \rho) \rightarrow (\mathcal{X}, \rho)$ 是一个压缩映射, 如果存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$ ($\forall x, y \in \mathcal{X}$)

定理 1.1.1 (压缩映射原理). 设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个完备的度量空间, T 是 (\mathcal{X}, ρ) 到其自身的一个压缩映射, 则 T 在 \mathcal{X} 上存在唯一的不动点.

证明. 任取初始点 $x_0 \in \mathcal{X}$, 考察序列 $x_{n+1} = Tx_n$, 下证其为基本列:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{i=1}^p |x_i - x_{i+1}| \leq \sum_{i=1}^p \alpha^{n+i-1} |x_1 - x_0| < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$$

□

利用压缩映射原理可以证明常微分方程的一种初值问题的局部存在唯一性与隐函数存在定理.

1.2 完备化

定义 1.2.1 (稠密子集). 设 (\mathcal{X}, ρ) 是度量空间, 集合 $E \subset \mathcal{X}$ 叫作在 \mathcal{X} 中的稠密子集, 如果 $\forall x \in \mathcal{X}, \forall \epsilon > 0, \exists z \in E$, 使得 $\rho(x, z) < \epsilon$.

定义 1.2.2 (完备化空间). 包含给定度量空间 (\mathcal{X}, ρ) 的最小的完备度量空间称为 \mathcal{X} 的完备化空间, 其中最小的含义是: 任何一个以 (\mathcal{X}, ρ) 为子空间的完备度量空间都以此空间作为子空间.

定理 1.2.1. 如果 (\mathcal{X}_1, ρ_1) 是一个以 (\mathcal{X}, ρ) 为子空间的完备度量空间, $\rho_1|_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} = \rho$, 并且 \mathcal{X} 在 \mathcal{X}_1 中稠密, 则 \mathcal{X}_1 是 \mathcal{X} 的完备化空间.

定理 1.2.2. 每一个度量空间都有一个完备化空间.

证明. 设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个度量空间, 考虑其上的基本列组成的等价类, 可以证明这是一个度量空间, 且是 (\mathcal{X}, ρ) 的完备化空间. □

1.3 列紧集

定义 1.3.1 (列紧集). 设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个度量空间, A 是其子集, 称 A 是**列紧的**, 如果 A 中的任意点列在 \mathcal{X} 中有一个收敛子列. 若这个子列还收敛到 A 中的点, 则称 A 是**自列紧的**. 如果空间 \mathcal{X} 是列紧的, 那么称 \mathcal{X} 为**列紧空间**.

定义 1.3.2 (ϵ 网). 设 M 是 (\mathcal{X}, ρ) 中的一个子集, $\epsilon > 0, N \subset M$. 如果对于 $\forall x \in M, \exists y \in N$ 使得 $\rho(x, y) < \epsilon$, 那么称 N 是 M 的一个 ϵ 网. 如果 N 还是一个有穷集(个数依赖于 ϵ), 那么称 N 为 M 的一个**有穷 ϵ 网**.

定义 1.3.3 (完全有界). 集合 M 称为是**完全有界的**, 如果 $\forall \epsilon > 0$, 都存在 M 的一个有穷 ϵ 网.

定理 1.3.1 (Hausdorff). (完备)度量空间中的集合 M 是列紧的, 必须(且仅需) M 是完全有界集.

定义 1.3.4 (可分空间). 一个度量空间若有可数的稠密子集, 那么称此度量空间是**可分的**.

定理 1.3.2. 完全有界的度量空间都是可分的.

证明. 取 N_n 为有穷的 $\frac{1}{n}$ 网, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ 为一个可数的稠密子集. □

定义 1.3.5 (紧集). 在拓扑空间 \mathcal{X} 中, 集合 M 称为是**紧的**, 如果 \mathcal{X} 中每个覆盖 M 的开集族中有有限个开集覆盖集合 M .

定理 1.3.3. 设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个度量空间, $M \subset \mathcal{X}$ 是紧的当且仅当 M 是自列紧的.

1.4 赋范线性空间

定义 1.4.1 (次线性泛函). 设 $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性空间 \mathcal{X} 上的一个函数, 若它满足

$$(i) \quad P(x + y) \leq P(x) + P(y) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X})$$

$$(ii) \quad P(\lambda x) = \lambda P(x) \quad (\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathcal{X})$$

则称 P 为 \mathcal{X} 上的一个**次线性泛函**.

1.5 凸集与不动点

定义 1.5.1 (Minkowski泛函). 设 \mathcal{X} 是线性空间, C 是 \mathcal{X} 上含有 θ 的凸子集, 在 \mathcal{X} 上规定一个取值于 $[0, \infty]$ 的函数

$$P(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C \right\} \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

与 C 对应, 称函数 P 为 C 的**Minkowski泛函**.

1.6 内积空间

定理 1.6.1. 如果 C 是Hilbert空间 \mathcal{X} 中的一个闭凸子集, 那么在 C 上存在唯一元素 x_0 取到最小范数.

证明. 存在性: 设 $d = \inf_{z \in C} \|z\|$, 取 x_n , 使得 $d \leq \|x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$ 利用

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2(\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2) - 4\|\frac{x_m + x_n}{2}\|^2$$

可以证明 $\{x_n\}$ 是柯西列.

唯一性: 同上利用极化恒等式可证唯一性. □

推论 1.6.1 (Hilbert空间闭凸子集中最佳逼近元存在且唯一). 若 C 是Hilbert空间 \mathcal{X} 中的一个闭凸子集, 则对 $\forall y \in \mathcal{X}, \exists! x_0 \in C$, 使得

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|$$

证明. 将 C 平移 $-y$ 之后, 利用上面的定理即可. □

定理 1.6.2 (最佳逼近元的刻画). 设 C 是内积空间 \mathcal{X} 中的闭凸子集, $\forall y \in \mathcal{X}$ 为了 x_0 是 y 在 C 上的最佳逼近元, 必须且仅须它适合

$$\operatorname{Re}(y - x_0, x_0 - x) \geq 0, \forall x \in C$$

证明. $\forall x \in C$, 考虑函数 $\varphi_x(t) = \|y - tx - (1 - t)x_0\|^2$, 为了 x_0 是 y 在 C 上的最佳逼近元, 必须且仅需

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0) \quad \forall x \in C, \forall t \in [0, 1]$$

考察此二次函数的取值即可, 这是容易地. □

推论 1.6.2. 设 M 是Hilbert空间 \mathcal{X} 的一个闭线性子流形, $\forall x \in \mathcal{X}$, 为了 y 是 x 在 M 上的最佳逼近元, 必须且仅须它适合

$$x - y \perp M - \{y\}$$

这个推论对线性子流形(子空间)中的最佳逼近元作了很到位的刻画, 可以利用这个刻画得到最小二乘法的具体算法.

推论 1.6.3 (正交分解). 设 M 是Hilbert空间 \mathcal{X} 中的一个闭线性子空间, 那么 $\forall x \in \mathcal{X}$, 存在下列唯一的正交分解:

$$x = y + z \quad (y \in M, z \in M^\top)$$

证明. 实际上, y 为 x 在 M 上的最佳逼近元. □

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

定义 2.1.1 (线性算子). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是两个线性空间, D 是 \mathcal{X} 的一个线性子空间. $T : D \rightarrow \mathcal{Y}$ 是一个映射, D 称为定义域, 也记作 $D(T)$, $R(T) = \{Tx | x \in D\}$ 称为 T 的值域. 如果

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\forall x, y \in D, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

那么称 T 是一个 **线性算子**. 取值于实数 \mathbb{R} (复数 \mathbb{C}) 的线性算子称为 **实(复)线性泛函**.

定义 2.1.2 (连续性). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 F^* 空间, $D(T) \subset \mathcal{X}$, 称线性算子 $T : D(T) \rightarrow \mathcal{Y}$ 在 $x_0 \in D(T)$ 是 **连续的**, 如果

$$x_n \in D(T), \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0$$

定义 2.1.3 (有界性). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 都是 B^* 空间, 称线性算子 $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 是 **有界的**, 如果存在常数 $M \geq 0$, 使得

$$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \leq M\|x\|_{\mathcal{X}} \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

定理 2.1.1 (有界等价于连续). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 都是 B^* 空间, 为了线性算子 T 连续, 必须且只须 T 有界.

定义 2.1.4 (线性算子空间). 用 $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 表示一切由 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 的有界线性算子的全体, 并规定

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{X} \setminus \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

为 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的 **范数**, 特别用 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, 用 \mathcal{X}^* 表示 $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, 即 \mathcal{X}^* 表示 \mathcal{X} 上的有界线性泛函全体.

定理 2.1.2 (线性算子空间上的运算). 设 \mathcal{X} 是 B^* 空间, \mathcal{Y} 是 B 空间, 若在 $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 上规定线性运算:

$$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 则 $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 按 $\|T\|$ 构成一个 Banach 空间.

证明. 主要是证范数的三角不等式与完备性, 三角不等式基于算子范数的定义与 \mathcal{Y} 中范数的三角不等式. 根据 \mathcal{Y} 的完备性可以定义极限算子. \square

2.2 Riesz 表示定理及其应用

定理 2.2.1 (Riesz 表示定理 (Hilbert空间)). 设 f 是 Hilbert 空间 \mathcal{X} 上的一个连续线性泛函, 则必存在唯一的 $y_f \in \mathcal{X}$, 使得

$$f(x) = (x, y_f) \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

证明. 考虑 $M \triangleq \{x \in \mathcal{X} | f(x) = 0\}$, 不妨设 f 不恒等于 0, 由 f 连续线性保证 M 是一个真闭线性子空间. 任取 $x_0 \perp M$, 正交分解定理保证了 x_0 是存在的. 由于

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in M \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

(由此可以看到 M 是余 1 维的) 于是

$$f(x) \frac{\|x_0\|^2}{f(x_0)} = (x, x_0)$$

所以取 $y_f = (\overline{f(x_0)}/\|x_0\|^2)x_0$ 即可. □

实际上还有 $\|f\| = \|y_f\|$.

定理 2.2.2 (共轭双线性函数的表示). 设 \mathcal{X} 是一个 Hilbert 空间, $a(x, y)$ 是 \mathcal{X} 上的共轭双线性函数, 并 $\exists M > 0$. 使得

$$|a(x, y)| \leq M\|x\| \cdot \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathcal{X})$$

则存在唯一的 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, 使得

$$a(x, y) = (x, Ay) \quad (\forall x, y \in \mathcal{X})$$

且

$$\|A\| = \sup_{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, x \neq 0, y \neq 0} \frac{|a(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Riesz 表示定理有很多应用, 这首先依赖于 Hilbert 空间本身的良好性质, 其次要求是连续线性泛函.

Laplace 方程 $-\Delta u = f$ Dirichlet 边值问题的弱解

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开区域, $f \in L^2(\Omega)$, 称实函数 u 是

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\#)$$

的一个弱解是指 $u \in H_0^1(\Omega)$, 满足

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

这是因为: 如果 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 并且是一个解, 那么 $\forall v \in C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} -\Delta u \cdot v dx \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

由于 $\{v \in C^2(\Omega) | v|_{\Omega} = 0\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密, 所以上式对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ 也成立, 于是 u 是一个弱解.

对Laplace方程直接求解是很困难的, 近代偏微分方程理论的基本方法是先求弱解, 证其存在唯一, 再证其光滑性, 正因如此, 泛函分析是研究近代偏微分方程理论必不可少的工具.

定理 2.2.3 (Laplace方程Dirichlet边值问题的弱解存在唯一). $\forall f \in L^2(\Omega)$, (\neq) 式所代表的0-Dirichlet问题(即边界条件为0)弱解存在唯一.

证明. 可以证明:(书上有证)

$$(u, v) \triangleq \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个内积, 对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$|\int_{\Omega} f \cdot v dx| \leq (\int_{\Omega} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} |v|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\| \cdot \|v\|_1$$

其中 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数. 上式表明

$$v \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函. 应用Riesz表示定理, $\exists u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} f v dx = (u_0, v)_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

从而 u_0 是一个弱解. 唯一性略. □

2.3 纲与开映射定理

定义 2.3.1 (疏集, 第一纲集, 第二纲集). 设 (\mathcal{X}, ρ) 是一个度量空间, 集合 $E \subset \mathcal{X}$, 称 E 是疏的, 如果 \bar{E} 的内点是空的. 集合 E 称为是第一纲的, 如果 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 E_n 是疏集. 不是第一纲的集合称为第二纲集.

定理 2.3.1 (Baire). 完备度量空间 (\mathcal{X}, ρ) 是第二纲集.

证明. 根据疏集去构造基本列, 并使得基本列的极限不在 \mathcal{X} 中. \square

定理 2.3.2. 在 $C[0, 1]$ 中处处不可微的函数集合 E 的余集是第一纲集, 特别地, E 非空.

定理 2.3.3 (开映射定理). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 都是 B 空间, 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是一个满射, 则 T 是开映射.

定理 2.3.4 (Banach). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 它既是单射又是满射, 那么 $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

定义 2.3.2 (闭线性算子). 设 T 是 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 的线性算子, $D(T)$ 是其定义域. 称 T 是闭的. 是指由 $x_n \rightarrow x$ 以及 $Tx_n \rightarrow y$ 就能推出 $x \in D(T)$, 而且 $y = Tx$.

推论 2.3.1 (等价范数定理). 设线性空间 \mathcal{X} 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 如果 \mathcal{X} 关于这两个范数都构成 B 空间, 而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 必等价.

定理 2.3.5 (闭图像定理). 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, 若 T 是 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 的闭线性算子, 并且 $D(T)$ 是闭的, 则 T 是连续的.

定理 2.3.6 (一致有界定理). 设 \mathcal{X} 是 B 空间, \mathcal{Y} 是 B^* 空间, 如果 $W \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 使得

$$\sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

那么存在常数 M , 使得 $\|A\| \leq M \quad (\forall A \in W)$.

本小节后面的两个应用还没怎么细看, 这节东西太多了, 一下子看完不是很消化... 另外一个原因是已经等不及赶紧进入下一节去看凸集分离定理了! 在最优化方法的课上就早有耳闻, 如今终于可以学到了!

2.4 Hahn-Banach定理

定理 2.4.1 (实 Hahn-Banach 定理). 设 \mathcal{X} 是实线性空间, p 是定义在 \mathcal{X} 上的次线性泛函, \mathcal{X}_0 是 \mathcal{X} 的实线性子空间, f_0 是 \mathcal{X}_0 上的实线性泛函并满足 $f_0(x_0) \leq p(x_0) \quad (\forall x_0 \in \mathcal{X}_0)$. 那么 \mathcal{X} 上必有一个实线性泛函 f , 满足:

$$(i) \quad f(x) \leq p(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

$$(ii) \quad f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X}_0)$$

证明. 每次延拓一维, 这等价于在一个已有定义子空间之外的一个向量上定义取值, 但是取值需要满足被给定的次线性泛函 $p(x)$ 控制, 最后用 Zorn 引理可以保证最后能延拓到整个空间上去. \square

定理 2.4.2 (复 Hahn-Banach 定理). 设 \mathcal{X} 是复线性空间, p 是 \mathcal{X} 上的半范数. \mathcal{X}_0 是 \mathcal{X} 的线性子空间, f 是 \mathcal{X}_0 上的线性泛函, 并满足 $|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in \mathcal{X}_0$, 那么 \mathcal{X} 上必有一个线性泛函 f 满足:

$$(i) |f(x)| \leq p(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

$$(ii) f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X}_0)$$

定理 2.4.3 (Hahn-Banach 定理). 设 \mathcal{X} 是 B^* 空间, \mathcal{X}_0 是 \mathcal{X} 的线性子空间, f_0 是定义在 \mathcal{X}_0 上的有界线性泛函, 则在 \mathcal{X} 上必有有界线性泛函 f 满足:

$$(i) f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X}_0)$$

$$(ii) \|f\| = \|f_0\|_0$$

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 \mathcal{X}_0 上的范数.

证明. 在 \mathcal{X} 上定义 $p(x) \triangleq \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$, 那么 $p(x)$ 是 \mathcal{X} 上的半范数, 从而根据实 Hahn-Banach 定理, 必存在 \mathcal{X} 上的线性泛函 $f(x)$, 满足

$$f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathcal{X}_0)$$

并且

$$|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\|_0 \cdot \|x\| \quad (\forall x \in \mathcal{X})$$

因此 $\|f\| = \|f_0\|_0$. □

定理 2.4.4. 设 \mathcal{X} 是 B^* 空间, M 是 \mathcal{X} 的线性子空间, 若 $x_0 \in \mathcal{X}$, 且

$$d \triangleq \rho(x_0, M) > 0$$

则必 $\exists f \in \mathcal{X}^*$ 适合条件:

$$(i) f(x) = 0 \quad (\forall x \in M)$$

$$(ii) f(x_0) = d$$

$$(iii) \|f\| = 1$$

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

2.6 线性算子的谱