摘要

我自学使用的教材为谭小江, 伍胜健的《复变函数简明教程》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 Cauchy 定理和 Cauchy 公式

定理 1.1 (Cauchy 定理) 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中以有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内解析, 则

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

定理 1.2 (Cauchy 公式) 设 Ω 是由有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域, $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内解析, 则 $\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega$$

定理 1.3 函数 $f(z)$ 在区域 Ω 上解析的充分必要条件是 $\forall z_0 \in \Omega$, $f(z)$ 可在 z_0 的邻域上展开为 $(z - z_0)$ 的幂级数. 其中在 z_0 的邻域幂级数展开的形式为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\omega - z_0| = r} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\omega\right](z - z_0)^n$$

定理 1.4 (Morera 定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一个区域, $f(z)$ 在 Ω 内连续. 则 $f(z)$ 在 Ω 内解析的充分必要条件是对 Ω 中任意由逐段光滑曲线为边界围成的有界区域 D, 如果 $\overline{D} \subset \Omega$, 则

$$\int_{\partial D} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0$$

2 利用幂级数研究解析函数

定理 2.1 设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析, 如果存在 $z_0 \in \Omega$, 使得

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^n(z_0) = \cdots = 0$$

则 $f(z)$ 在 Ω 上恒为零.

推论 2.1 设 $f(z)$ 是区域 Ω 上不为常数的解析函数, 则 $\forall z_0 \in \Omega$, 存在正整数 m, 使得

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{m-1}(z_0) = 0, \text{而 } f^m(z_0) \neq 0$$

这时存在 z_0 的邻域 O, 使得 $f(z)$ 在 O 上可表示为

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$$

其中 $g(z)$ 在 O 上解析, 且 $g(z_0) \neq 0$.

定理 2.2 (开映射定理) 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 山不为常数的解析函数, 则 $f(z)$ 将 Ω 中的开集映为开集.

定理 2.3 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 上的单叶解析函数, 则 $f(\Omega)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的开集, 因而是区域; $f'(z)$ 在 Ω 上处处不为零. 因此 $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ 是解析的; $f: \Omega \to f(\Omega)$ 是解析同胚.

定理 2.4 (最大模原理) 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 上不为常数的解析函数, 则 $|f(z)|$ 在 Ω 内无极大值点.

定理 2.5 (代数学基本定理) 设

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

是一 n 次多项式, 其中 $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, 则方程 $P(z) = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有解.