摘要

我自学使用的教材为谭小江, 伍胜健的《复变函数简明教程》，在此笔记中主要记录书中的核心内容，配以心得体会。

目录

1 Cauchy 定理和 Cauchy 公式

定理 1.1 (Cauchy 定理)**.** 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中以有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内解析, 则

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

定理 1.2 (Cauchy 公式)**.** 设 Ω 是由有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域, $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内解析, 则 $\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega$$

定理 1.3. 函数 $f(z)$ 在区域 Ω 上解析的充分必要条件是 $\forall z_0 \in \Omega$, $f(z)$ 可在 z_0 的邻域上展开为 $(z - z_0)$ 的幂级数. 其中在 z_0 的邻域幂级数展开的形式为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\omega - z_0| = r}\frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\omega\right](z - z_0)^n$$

定理 1.4 (Morera 定理)**.** 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一个区域, $f(z)$ 在 Ω 内连续. 则 $f(z)$ 在 Ω 内解析的充分必要条件是对 Ω 中任意由逐段光滑曲线为边界围成的有界区域 D, 如果 $\overline{D} \subset \Omega$, 则

$$\int_{\partial D} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0$$

2 利用幂级数研究解析函数

定理 2.1. 设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析, 如果存在 $z_0 \in \Omega$, 使得

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^n(z_0) = \cdots = 0$$

则 $f(z)$ 在 Ω 上恒为零.

推论 2.1. 设 $f(z)$ 是区域 Ω 上不为常数的解析函数, 则 $\forall z_0 \in \Omega$, 存在正整数 m, 使得

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{m-1}(z_0) = 0, \text{而 } f^m(z_0) \neq 0$$

这时存在 z_0 的邻域 O, 使得 $f(z)$ 在 O 上可表示为

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$$

其中 $g(z)$ 在 O 上解析, 且 $g(z_0) \neq 0$.

定理 2.2 (开映射定理)**.** 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 山不为常数的解析函数, 则 $f(z)$ 将 Ω 中的开集映为开集.

定理 2.3. 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 上的单叶解析函数, 则 $f(\Omega)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的开集, 因而是区域; $f'(z)$ 在 Ω 上处处不为零. 因此 $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ 是解析的; $f: \Omega \to f(\Omega)$ 是解析同胚.

定理 2.4 (最大模原理)**.** 如果 $f(z)$ 是区域 Ω 上不为常数的解析函数, 则 $|f(z)|$ 在 Ω 内无极大值点.

定理 2.5 (代数学基本定理)**.** 设

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

是一 n 次多项式, 其中 $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, 则方程 $P(z) = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有解.

证明. 容易推出

$$\lim_{z \to \infty} |P(z)| = +\infty$$

取 R 充分大, 使得

$$\min\{|P(z)|||z| = R\} > |P(0)|$$

设 z_0 是 $|P(z)|$ 在闭圆盘 $\overline{D(0,R)}$ 内的最小值点, 由假设知 $z_0 \in D(0,R)$. 因为 $P(z)$ 解析且不为常数, 所以 $P(D(0,R))$ 是 $\mathbb{C}$ 中的开集. 从而 $P(z_0)$ 是 $P(D(0,R))$ 的内点, 如果 $P(z_0) \neq 0$, 则 $|P(z_0)|$ 不能是最小, 此矛盾说明 $P(z_0) = 0$.

□

3 Cauchy不等式

定理 3.1 (Cauchy 不等式)**.** 设 $f(z)$ 在区域 Ω 上解析, 且在 Ω 上 $|f(z)| \leq M$, 则 $\forall z_0 \in \Omega, 0 < r \leq \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$, 恒有

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

4 Laurent 级数

定理 4.1. 函数 $f(z)$ 在圆环区域 $D(z_0, r, R)$ 内解析的充分必要条件是 $f(z)$ 可在 $D(z_0, r, R)$ 上展开为关于 $z - z_0$ 的 Laurent 级数.

定义 4.1. 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的空心邻域上解析, 即存在 $\epsilon > 0$, 使 $f(z)$ 在 $D_0(z_0, \epsilon)$ 上解析, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 如果存在 $R_0 > 0$, 使得 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} - \overline{D(0, R_0)}$ 上解析, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 例如任何整函数都以 ∞ 为孤立奇点.

定义 4.2. 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立零点.

(1) 如果存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得函数

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ c & z = z_0 \end{cases}$$

在 z_0 的邻域上解析, 则称 $f(z)$ **可解析开拓**到 z_0 处, 并称 z_0 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 如果 $f(z)$ 不能解析开拓到 z_0 处, 但 $\frac{1}{f(z)}$ 可解析开拓到 z_0, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的**极点**.

(3) 如果 z_0 既不是 $f(z)$ 的可去奇点, 也不是 $f(z)$ 的极点, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

下面写点对于上述定义的刻画:

定理 4.2. 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立零点, 则下面的条件等价:

(1) z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点

(2) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中存在

(3) $f(z)$ 在 $f(z)$ 的邻域上有界

(4) $f(z)$ 在 z_0 的 Larurent 展式的主部为零

定理 4.3. 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下面条件等价:

(1) z_0 是 $f(z)$ 的极点

(2) z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立零点

(3) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

(4) $f(z)$ 在 z_0 处 Laurent 展式的主部中有且仅有有限项不为零

证明. (1) ⇒ (2): 由于 $\frac{1}{f(z)}$ 可解析开拓到 z_0, 从而由前面一个定理可知 $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 中存在, 但由于 $f(z)$ 不能解析开拓到 z_0, 因此必有

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

(2) ⇒ (3): 显然

(3) ⇒ (4): 由 $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, 我们得到 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立零点. 设其是 m 阶零点, 则 $\frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 邻域可展开为

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^m g(z)$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内解析且处处不为零. 因此

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

由于 $\frac{1}{g(z)}$ 在 z_0 的邻域内解析, 我们有

$$\frac{1}{g(z)} = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

其中 $c_0 \neq 0$, 从而推出

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots$$

(4) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在 z_0 处 Laurent 展式的主部为

$$\frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}$$

其中 $a_{-m} \neq 0$, 则

$$(z - z_0)^m f(z) \overset{\text{记为}}{=} g(z)$$

在 z_0 处解析, 且 $g(z_0) \neq 0$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z)$$

不能解析开拓到 z_0, 但

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{g(z)}$$

可解析开拓到 z_0, 即 z_0 是 $f(z)$ 的极点. □

定理 4.4. *设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下面的条件等价:*

(1) *z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点*

(2) *$\lim_{z \to z_0} f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 中不存在*

(3) *$f(z)$ 在 z_0 的 Laurent 展式中主部有无穷多项不为零*

定理 4.5 (Weierstrass 定理)**.** *如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $\forall \epsilon > 0$, $f(D_0(z_0, \epsilon))$ 都是 $\mathbb{C}$ 中的稠密子集.*

证明. 若结论不成立, 则存在 $z^* \in \mathbb{C} - \overline{f(D_0(z_0, \epsilon))}$, 使得

$$D(z^*, \delta) \cap \overline{f(D_0(z_0, \epsilon))} = \varnothing$$

令

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z^*}$$

则

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - z^*|} \leq \frac{1}{\delta}$$

因此 $g(z)$ 在 z_0 的邻域上有界, 由上面定理得 z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点, 而由于

$$f(z) = z^* + \frac{1}{g(z)}$$

所以 z_0 只能是 $f(z)$ 的可去奇点或者极点, 矛盾! □

5 留数

定义 5.1 (留数). 设 $f(z)$ 在 $D_0(z_0,R)$ 内解析, 即 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 函数 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**, 记作 $\operatorname{Res}(f,z_0)$, 定义为

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\mathrm{d}z$$

其中 $0<\rho<R$.

当 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 即存在 $R>0$, 使得 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}-\overline{D(0,R)}$ 上解析, 则 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数记作 $\operatorname{Res}(f,\infty)$, 定义为

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=\rho} f(z)\mathrm{d}z$$

其中 $R<\rho<+\infty$

定理 5.1 (留数定理). 设 Ω 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 中以有限条逐段光滑曲线为边界的区域, $\infty\notin\partial\Omega$, $z_1,\cdots,z_n$ 位于 Ω 的内部, 再设 $f(z)$ 在 Ω 内除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外解析, 在 $\overline{\Omega}$ 上除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外连续, 则

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)$$