

DPLL protseduur lahendite loendamiseks

Bakalaureusetöö, 4AP

Autor: Raivo Laanemets

Juhedaja: Tõnu Tamme

Tartu Ülikool

Arvutiteaduse instituut

17. jaanuar 2008

Kehtestatavusprobleem

- ▶ Antud n muutuja Boole'i funktsioon $f(x_1, \dots, x_n)$.
- ▶ Leidub selline muutujate x_1, \dots, x_n väärtustus, et $f(x_1, \dots, x_n) = 1$? (x_1, \dots, x_n on lahend).
- ▶ Mõnikord soovime teada ka konkreetset x_1, \dots, x_n väärtustust, millel f tõene on.

Loendamisprobleem

- ▶ Antud n muutuja Boole'i funktsioon $f(x_1, \dots, x_n)$.
- ▶ Mitu muutujate x_1, \dots, x_n väärtustust leidub, nii et $f(x_1, \dots, x_n) = 1$? (f lahendite arv)

Keerukus

- ▶ Kehtestatavusprobleem on *NP-täielik* (S.Cook, 1971).
- ▶ Klassi *NP-täielik* kuuluvad ka: sõltumatu tippude hulk, klikkide leidmine, tippude hulga kate (graafiteooria probleemid), samuti *Sudoku*, ...

Keerukus

- ▶ Lahendite loendamine on kehtestatavusele vastav loendamisprobleem ja on *#P-täielik* (D.Roth, 1996).
- ▶ Klassi *#P-täielik* kuuluvad ka: tuletus Bayes'i võrgus, Dedekindi arvude leidmine, ...

DP algoritm

- ▶ M.Davis, H.Putnam, *A Computing Procedure for Quantification Theory*, 1960
- ▶ Predikaatloogikas kirja pandud teoreemide tõestamiseks.
- ▶ Sisendiks predikaatloogika valem F .
- ▶ Algoritm asendas F tõesuse kontrolli $\neg F$ mittekehtestatavuse kontrolliga.

DP algoritm

Algoritm koosnes neljast sammust:

1. Valemi F eituse $\neg F$ leidmine.
2. Valemi $\neg F$ kirjutamine prefikskujule G_p (kvantorid "eespool", maatriks KNK-I).
3. G_p eksistentsikvantorite eemaldamine skolemiseerimise teel, saadi valem G_s .
4. Eespool saadud valemist kvantori- ja muutujavabade lausearvutusvalemite $G_{s,1}, G_{s,2}, \dots$ genereerimine kuni nendest n esimese valemi konjuktsioon $G_{s,1} \wedge \dots \wedge G_{s,n}$ on mittekehtestatav.

DP algoritm

Sammus (4) tehti järgmist:

- ▶ Leidub klausel $C = I$ - eemalda kõik klauslid, kus esineb I ja kõikidest klauslitest \bar{I} (ühikliteraal).
- ▶ I esineb mingis klauslis, aga \bar{I} mitte üheski - eemalda kõik klauslid, kus I esineb (puhas literaal).
- ▶ Kui $W = (A \vee I) \wedge (B \vee \bar{I}) \wedge R$, A , B ja R literaali I ega \bar{I} ei sisalda, kirjuta W kujule $W' = (A \vee B) \wedge R$ (muutujate elimineerimine).

DP algoritm

- ▶ Reegleid sammus 4 rakendati kuni saadi tühi klausel (klausel on tõene parajasti siis, kui vähemalt üks tema literaalidest on tõene)
- ▶ Sarnaneb väga resolutsiooniga (Robinson, 1965).
- ▶ DP algoritm oli korrektne ja täielik (F tõene - algoritm tuvastas selle).

DPLL algorithm

- ▶ M.Davis, G.Logemann, D.Loveland, *A Machine Program for Theorem-Proving*, 1962
- ▶ Asendas elimineerimise jaotamisega:
- ▶ Kui W on kujul $W = (A \vee I) \wedge (B \vee \bar{I}) \wedge R$, A , B ja R literaali I ega \bar{I} ei sisalda, jaota W valemiteks $W_1 = A \wedge R$ ja $W_2 = B \wedge R$.
- ▶ W on mittekehtestatav parajasti siis kui W_1 ja W_2 seda on.

DPLL algoritm

- ▶ Valem tõene, kui "kadusid ära" kõik klauslid.
- ▶ Otseselt muutujate väärtustust ei anna.
- ▶ Ei paku mugavat viisi lahendite loendamiseks.
- ▶ PL teoreemitõestamiseks ebaefektiivne võrreldes resolutsiooni ja unifitseerimisega.

DPLL SAT

- ▶ Kasutatav lausearvutusloogika valemite kehtestatavuse jaoks.
- ▶ Annab kehtestatava väärtuse kui see leidub.
- ▶ Jaotamine asendatud väärtustamisega.
- ▶ Kasutatab Boole-Shannoni dekompositsiooni.
- ▶ Töötab muutujate osalise väärtustusega.

Boole-Shannoni dekompositsioon

- ▶ Universaalne vahend n muutujaga ($n > 0$) valemite jagamiseks kaheks $n - 1$ valemiks.
- ▶ Valida valemist F muutuja x , saadakse kaks valemit F_x ja $F_{\bar{x}}$, esimeses võta $x = 1$, teises $x = 0$.
- ▶ Võimaldab ära kasutada DPLL lihtsustusreegleid.
 - ▶ F_x - eemalda kõik x sisaldavad klauslid, klauslitest eemalda $\neg x$.
 - ▶ $F_{\bar{x}}$ - eemalda kõik $\neg x$ sisaldavad klauslid, klauslitest eemalda x .
- ▶ Vali F_x või $F_{\bar{x}}$ ja jätk dekompositsiooni rakendamist.

Boole-Shannoni dekompositsioon

- ▶ Kui valem sisaldab ühikklauslit $C = x$ ($C = \neg x$), siis teha dekompositsioon x järgi ja ignoreerida $F_{\bar{x}}$ (F_x).
- ▶ Esimesel juhul on samaselt väär $F_{\bar{x}}$, teisel F_x .

Boole-Shannoni dekompositsioon

- ▶ Dekompositsiooni saab rakendada ainult lõplik arv kordi, sest muutujad saavad otsa.
- ▶ Võimalik kaks olukorda vahetult pärast lihtsustamist:
 - * a F ei sisalda ühtegi klauslit - leitud kehtestatav väärtustus.
 - * b F mingi klausel muutus tühjaks - F on väär.
- ▶ Juhul (* a) on annavad muutujad, mille järgi dekompositsiooni rakendati, kehtestatava väärtustuse.

Boole-Shannoni dekompositsioon

DPLLSAT(F):

1. **if** F tühi, tagasta **true**.
2. **else if** F sisaldab tühiklauslit, tagasta **false**.
3. **else if** F sisaldab ühikklauslit $C = x$, tagasta DPLLSAT(F_x).
4. **else** Vali muutuja x , tagasta $F_x \vee F_{\bar{x}}$.

Lahendite loendamine

- ▶ E.Birnbaum, E.L.Loizinskii, *The Good Old Davis-Putnam Procedure Helps Counting Models*, 1999
- ▶ DPLL protseduuri kasutamine loendamiseks.
- ▶ Kasutab ära, et valem muutub tõeseks enne kõikide muutujate väärtustamist.