EN LOS MEJORES CINES 15 DE ABRIL DE 2019

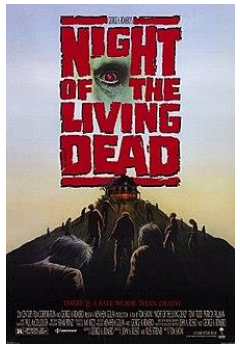
LA NOCHE DE LOS GRAFOS VIVIENTES

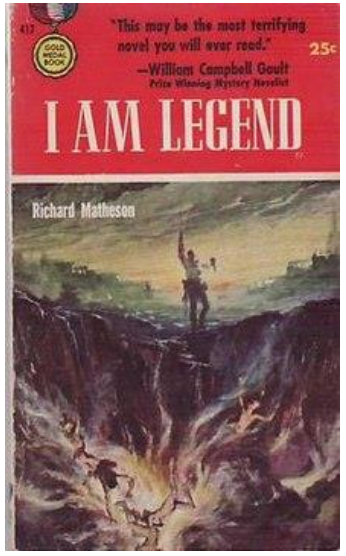
Directed by Beatriz Pérez

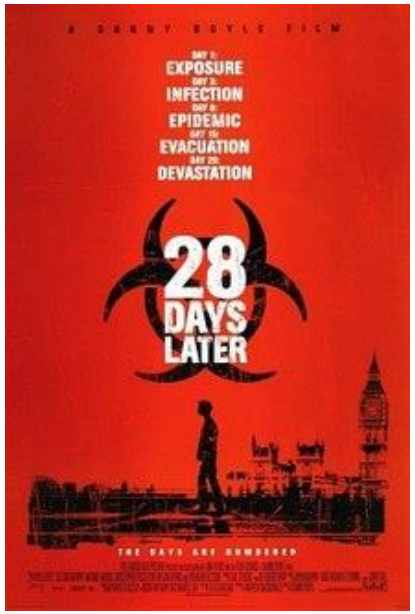
In collaboration with Antonio Martín-Pérez, Víctor Martínez Nouvillas

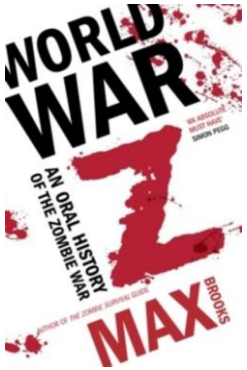
Starring Teoría de Grafos

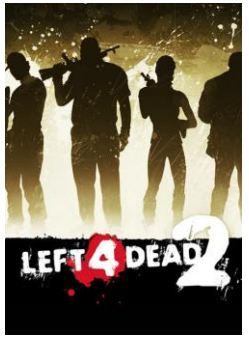
ZOMBIES EN LA CULTURA POP

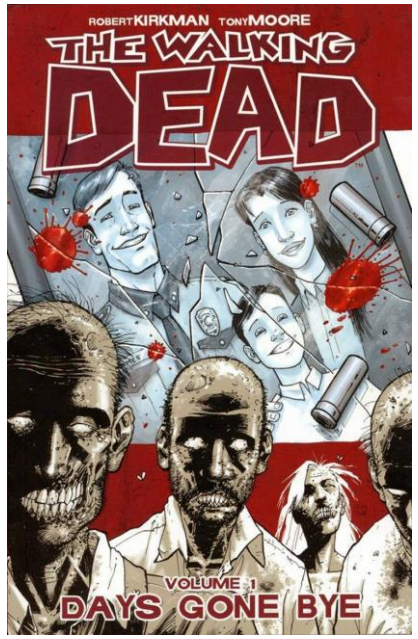






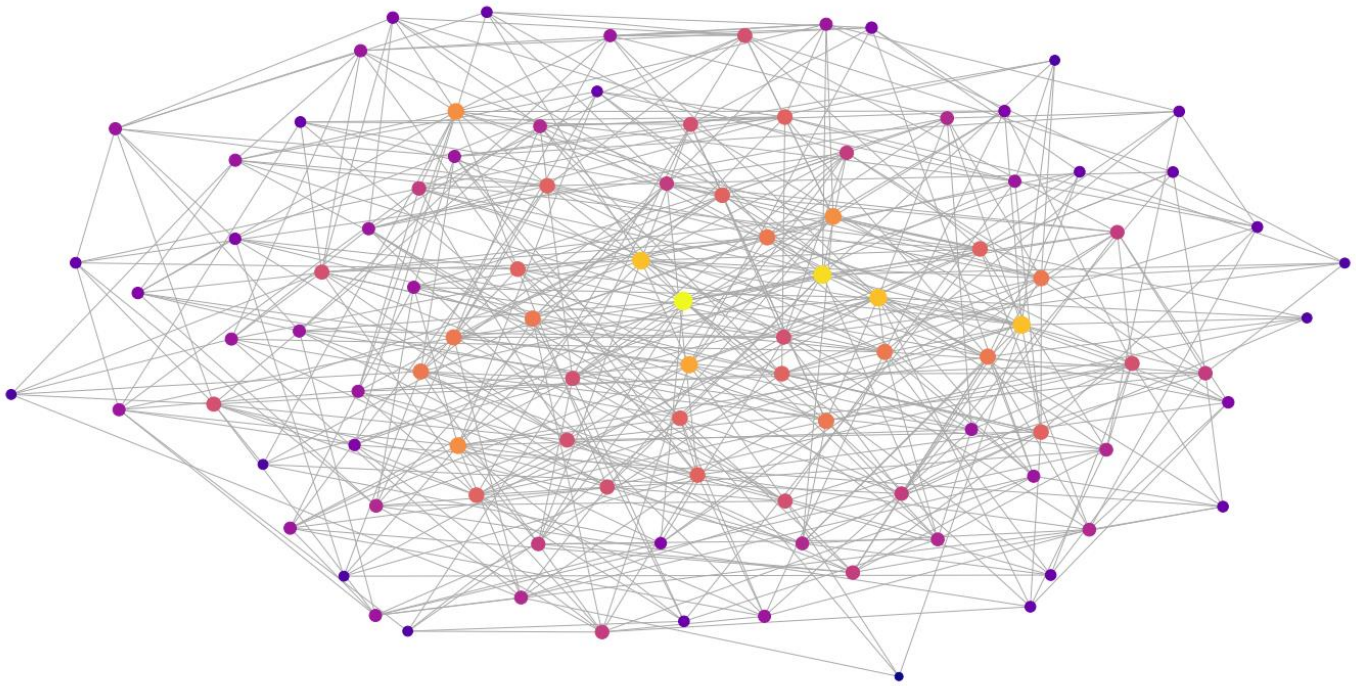






LAS MATEMÁTICAS DE LA REALIDAD

Una sociedad, con sus individuos y las relaciones que se establecen entre ellos, es una red compleja que puede representarse como un grafo



Red aleatoria

Cada nodo de la red tiene un número similar de enlaces

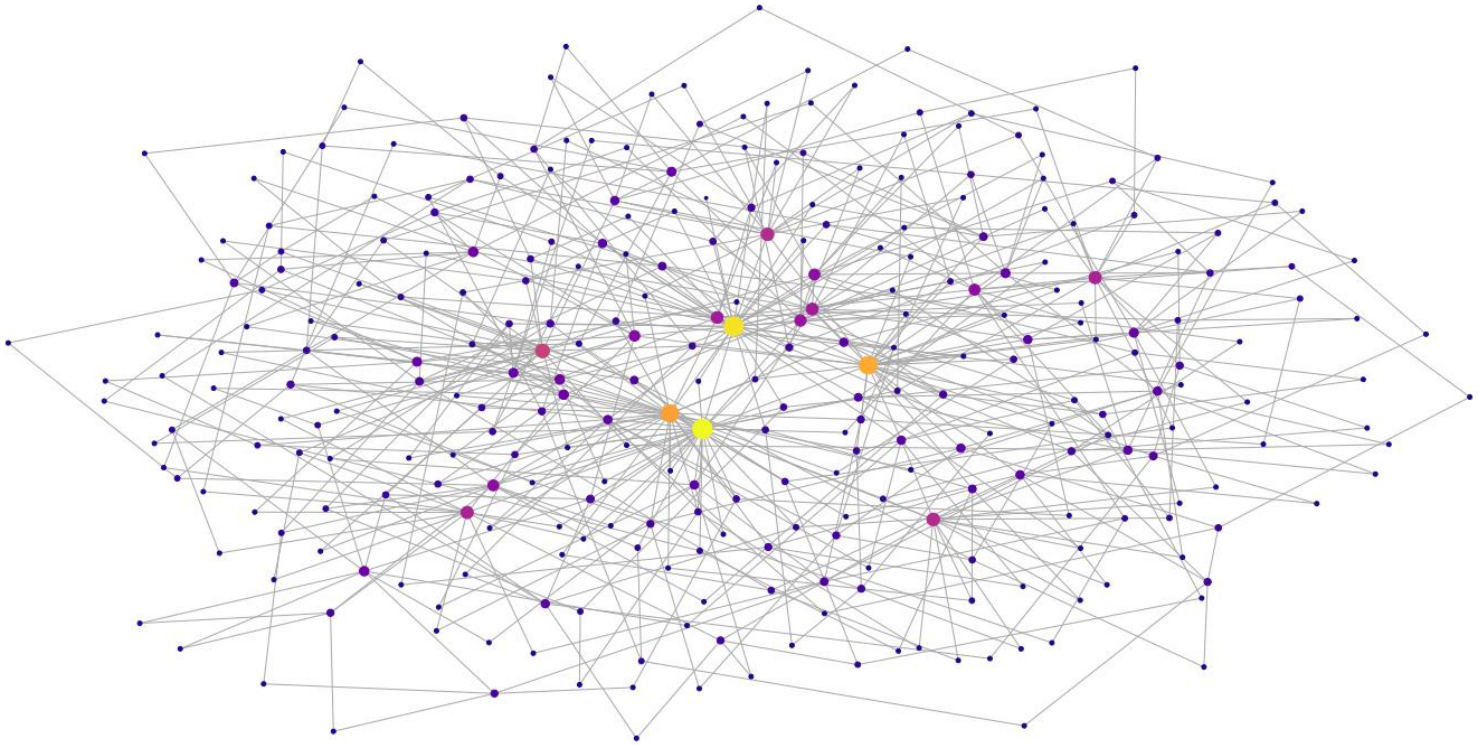
Grado medio: $\langle k \rangle$

LAS MATEMÁTICAS DE LA REALIDAD

Una sociedad, con sus individuos y las relaciones que se establecen entre ellos, es una red compleja que puede representarse como un grafo

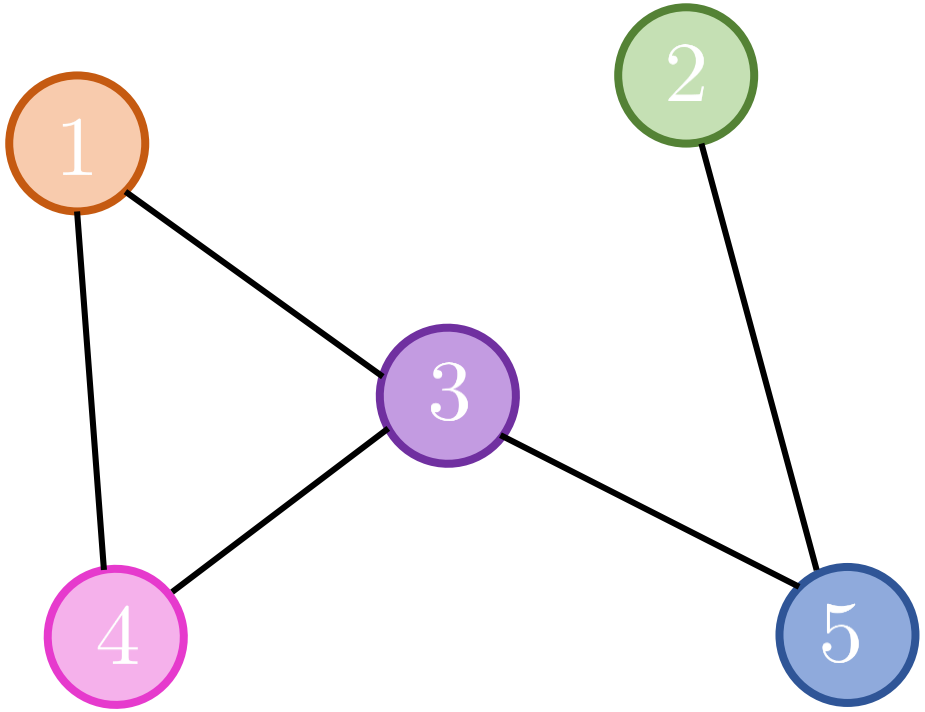
Red libre de escala

Aparecen los *hubs,* nodos con un número muy alto de conexiones



LAS MATEMÁTICAS DE LA REALIDAD

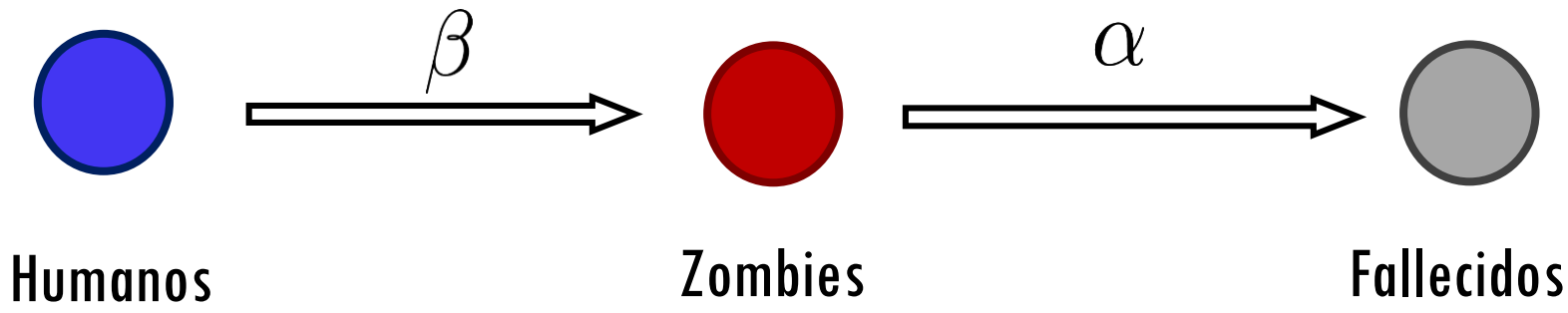
La información de un grafo se puede organizar
en una matriz de adyacencia



$$\mathrm{Adj} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

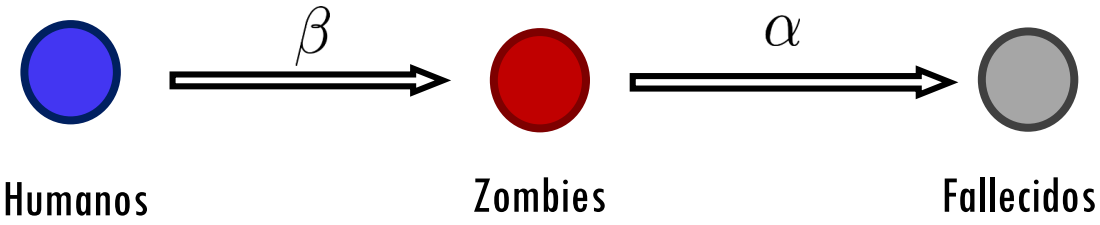
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR

Definimos unos parámetros que marcan el paso de los nodos de un estado a otro



UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR

La dinámica de cada población viene definida por un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas



$$\frac{dh(t)}{dt} = -\beta\langle k\rangle\, z(t)\, h(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\alpha\, z(t) + \beta\langle k\rangle z(t)\, h(t)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \alpha\, z(t)$$

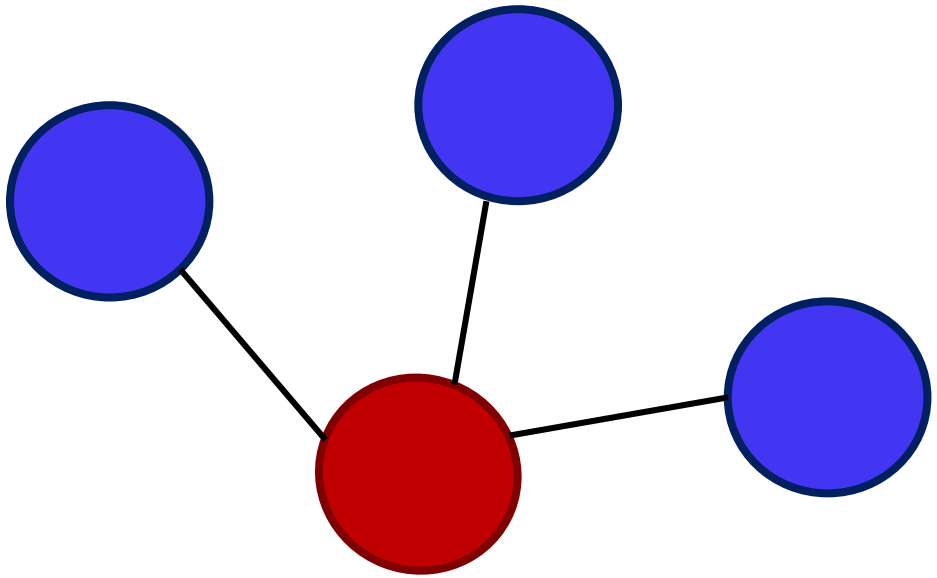
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE MODELO SIR

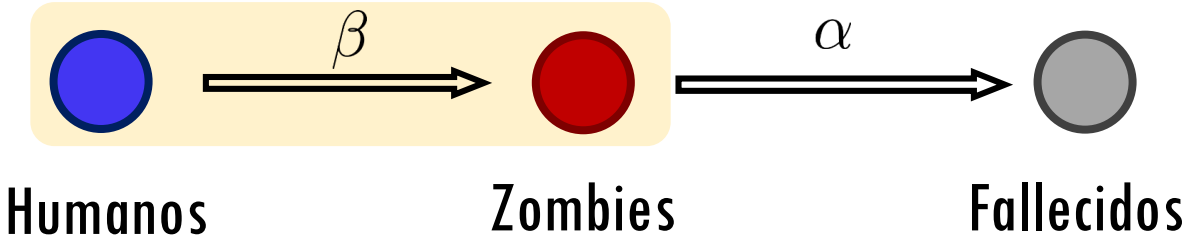
Objetivo: obtener el número de humanos, zombies y fallecidos en función del tiempo para distintos valores de los parámetros

- Comportamiento temprano de la infección
- Número de nodos en cada estado al finalizar la epidemia
- Número máximo de zombies

EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

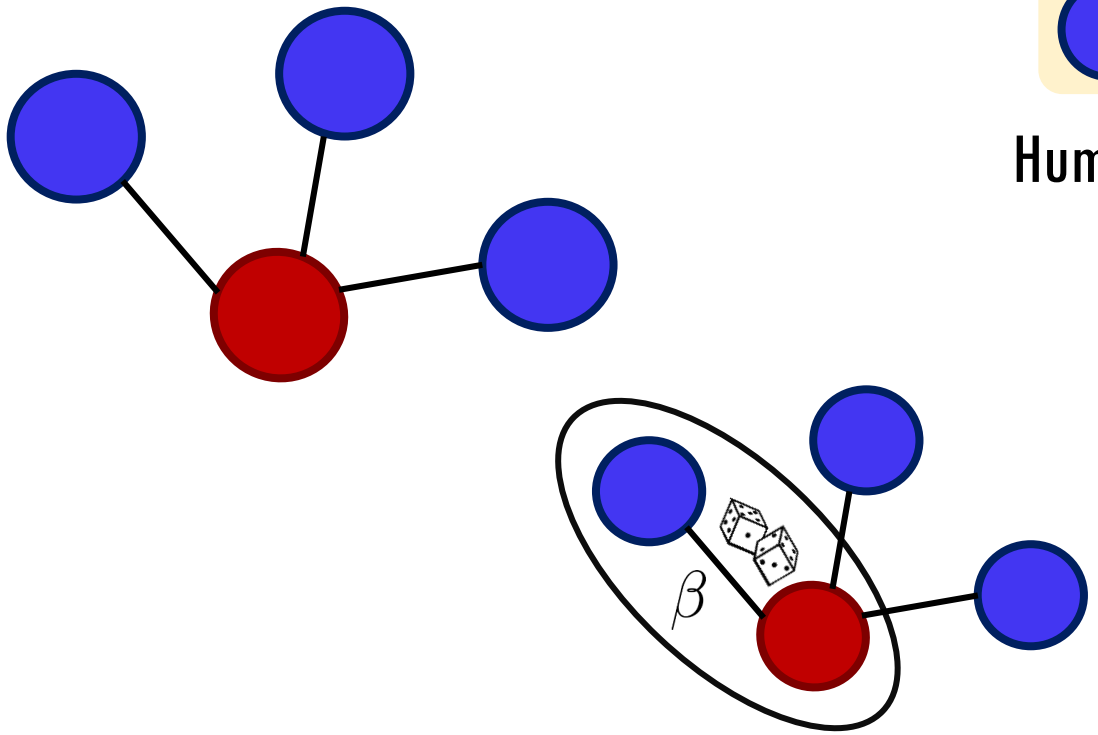
El contagio

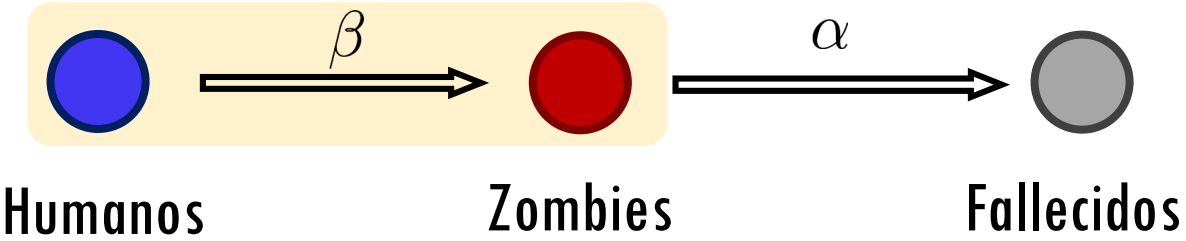




EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

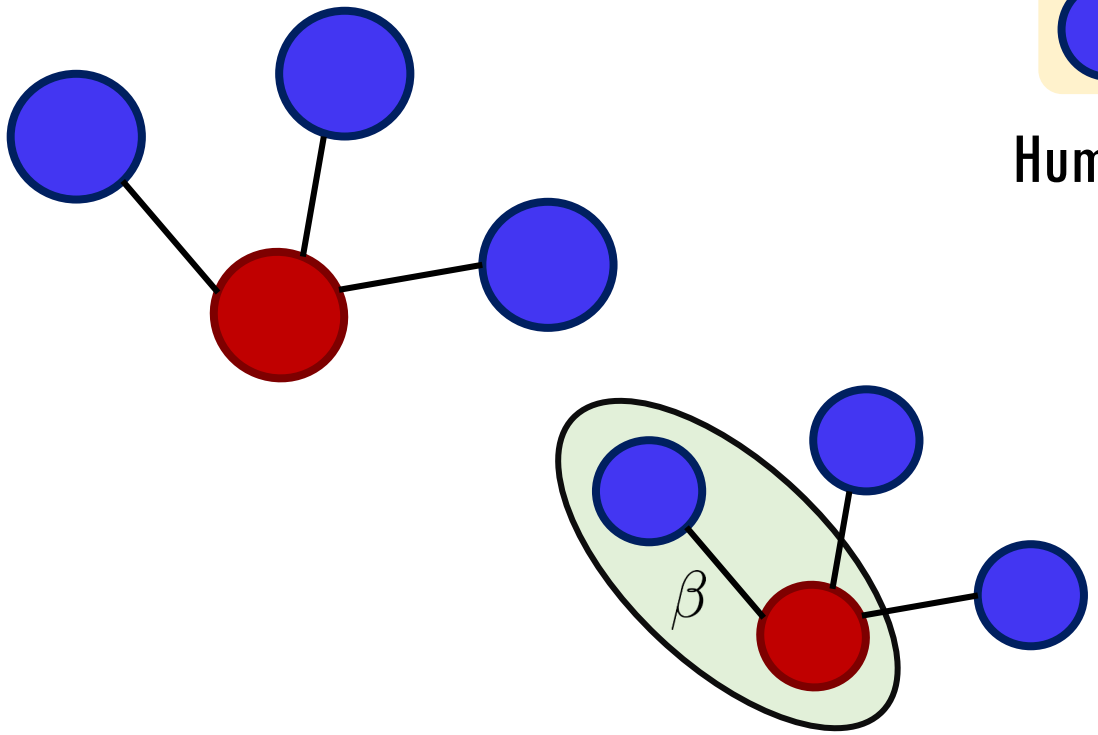
El contagio

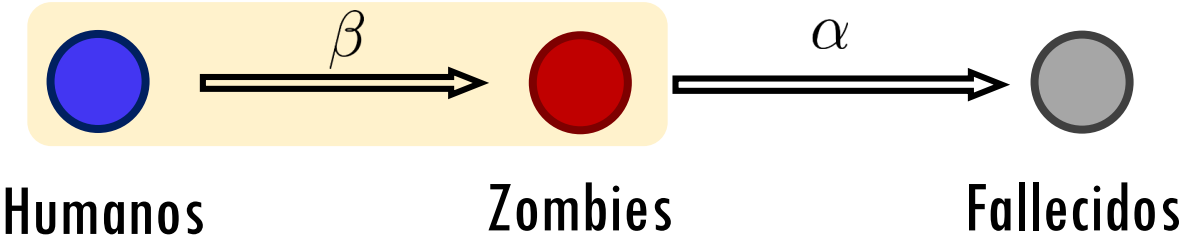




EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

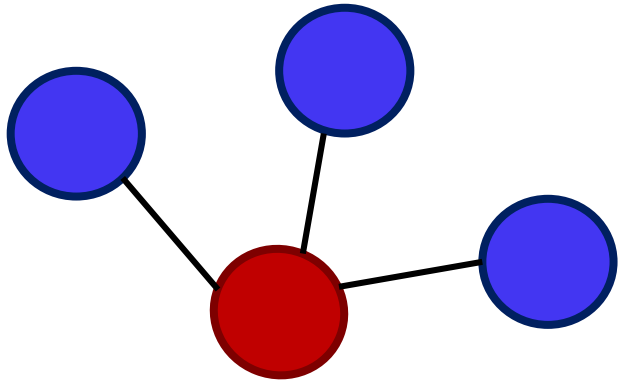
El contagio

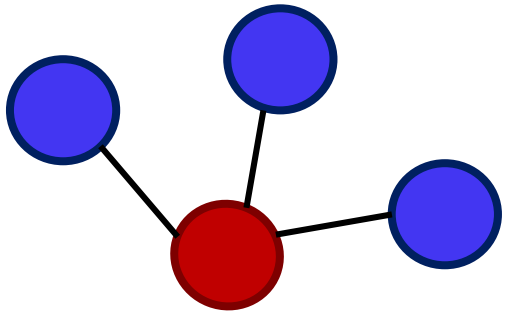


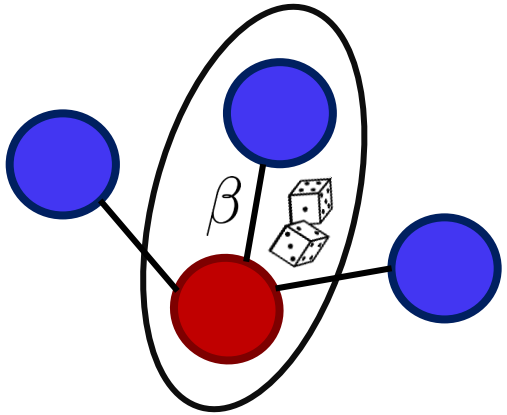


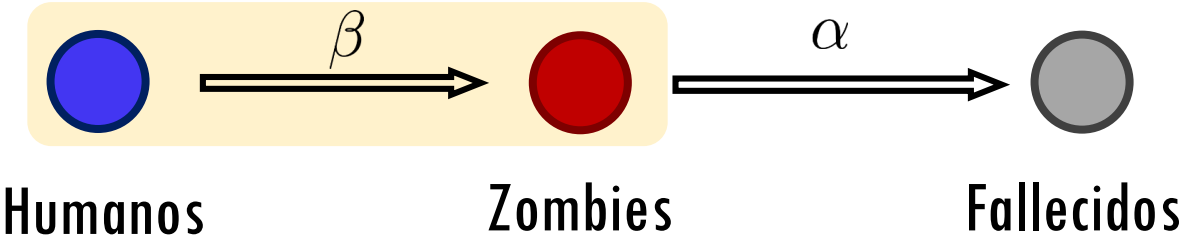
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

El contagio



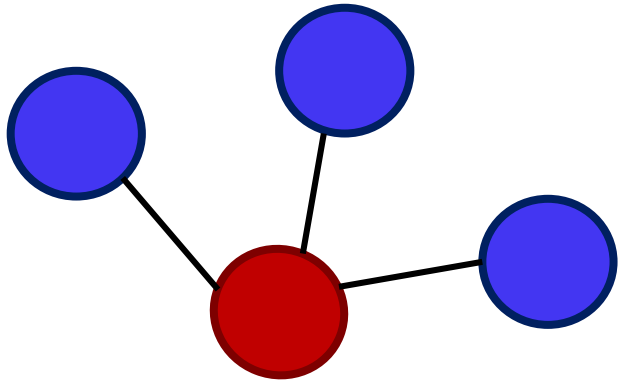


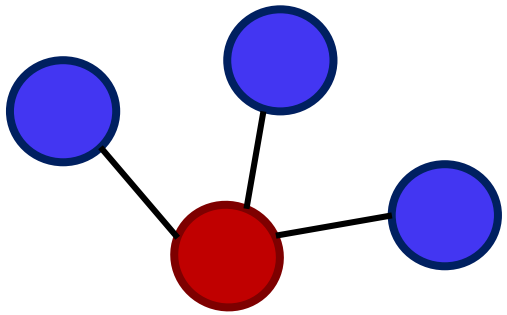


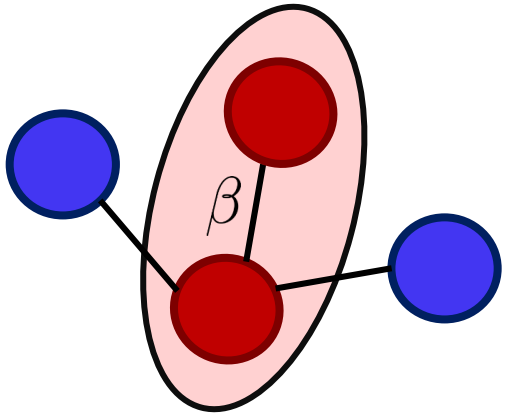


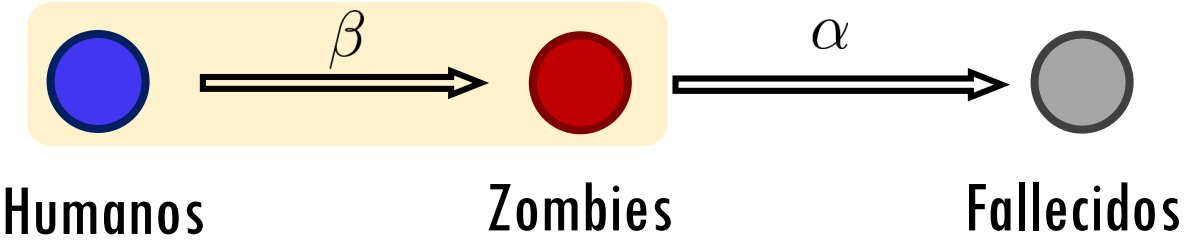
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

El contagio



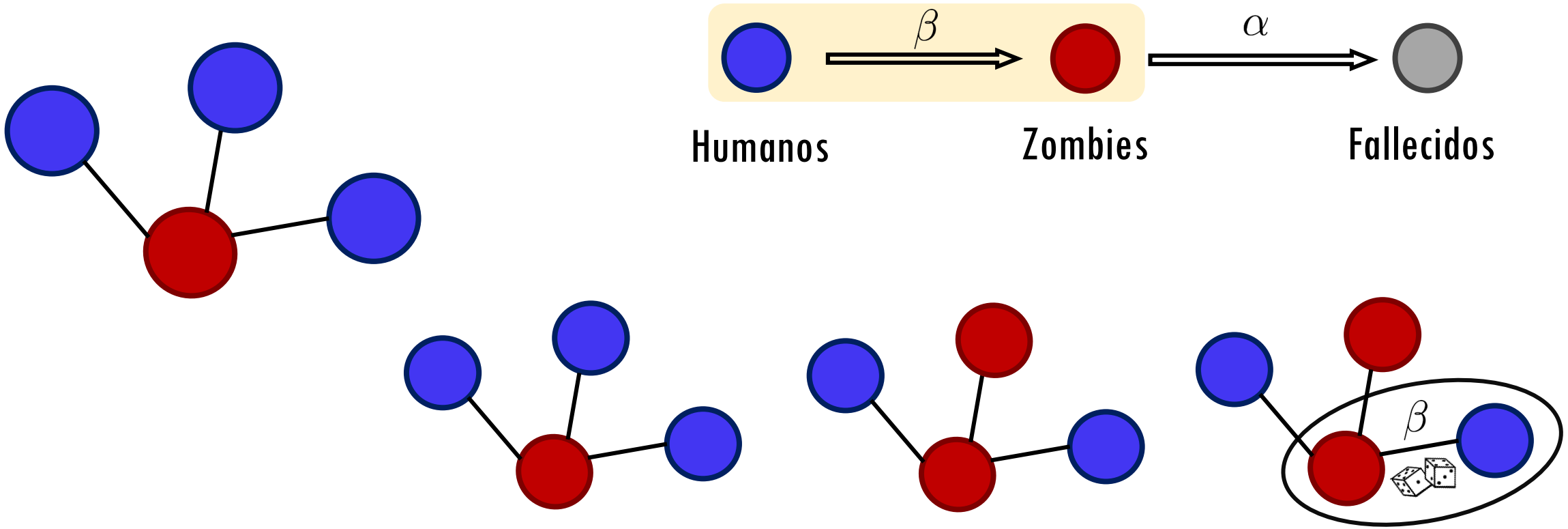






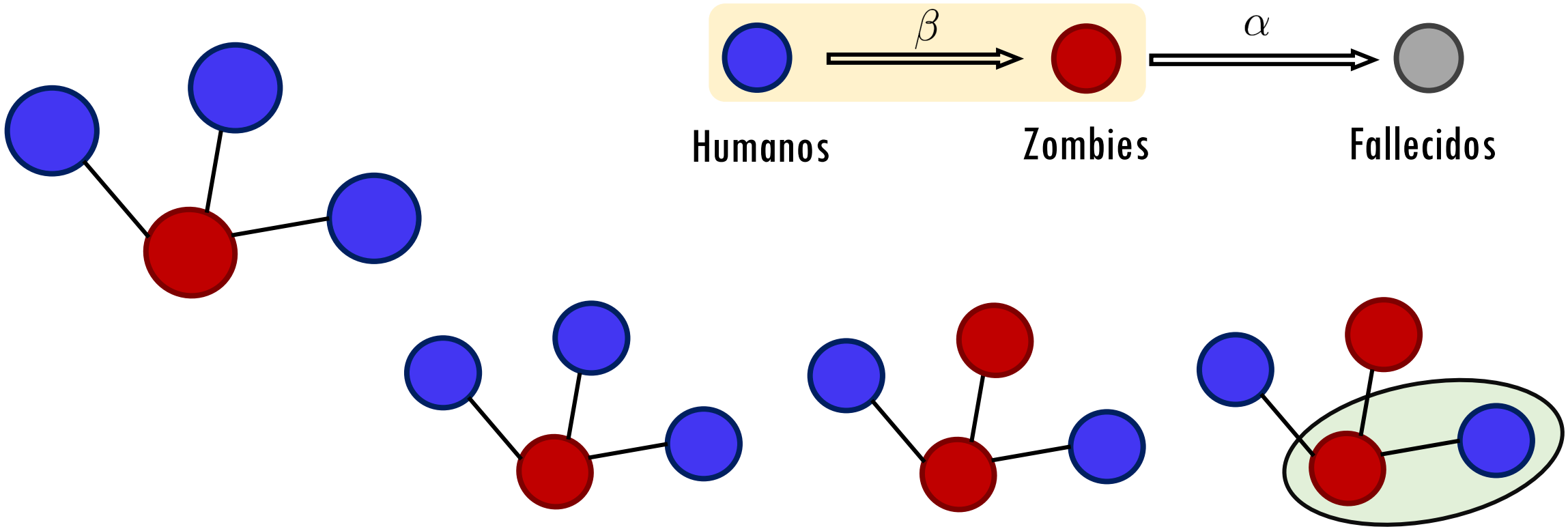
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

El contagio



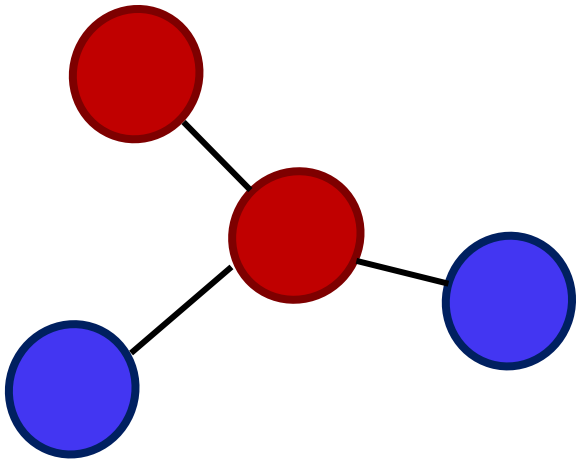
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

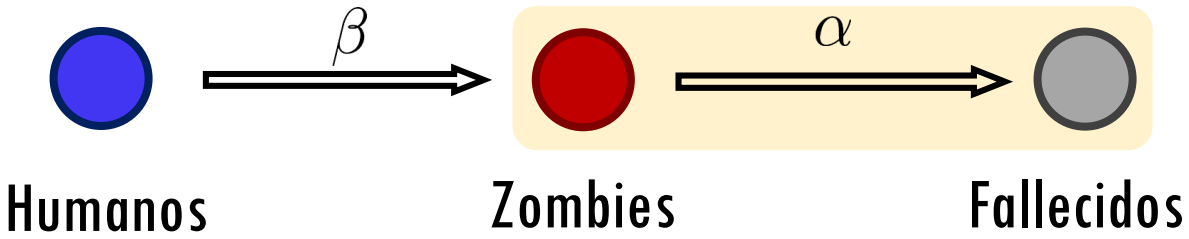
El contagio



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

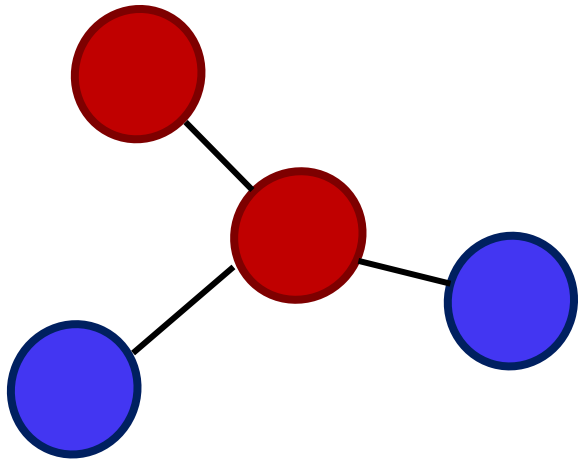
La prevalencia del patógeno

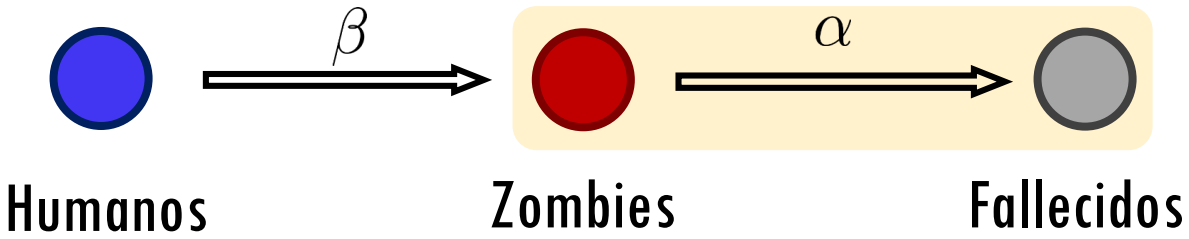


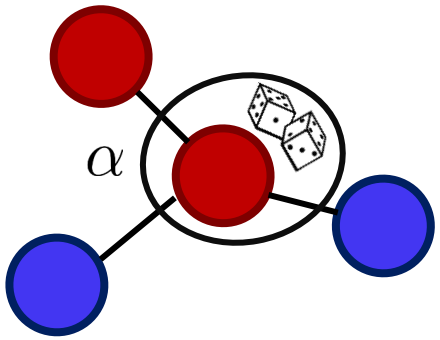


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

La prevalencia del patógeno

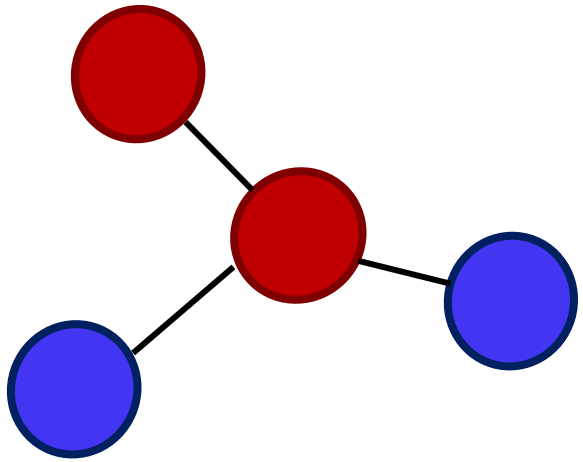


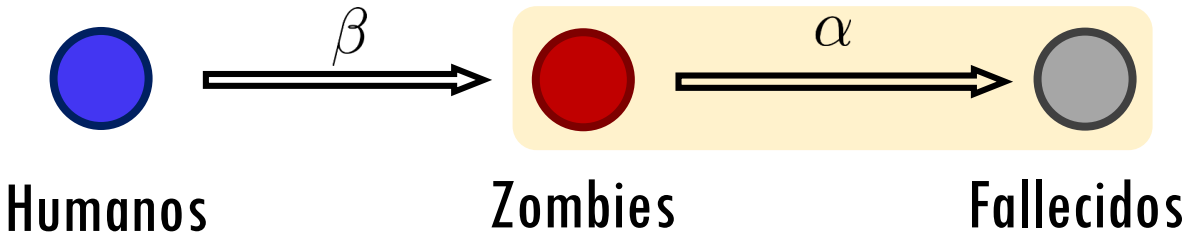


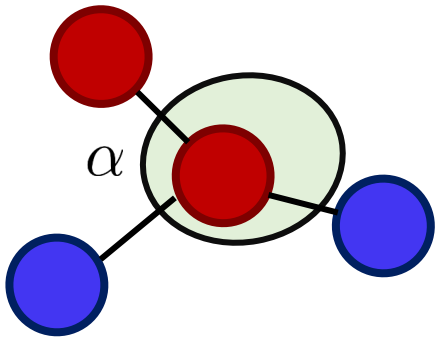


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

La prevalencia del patógeno

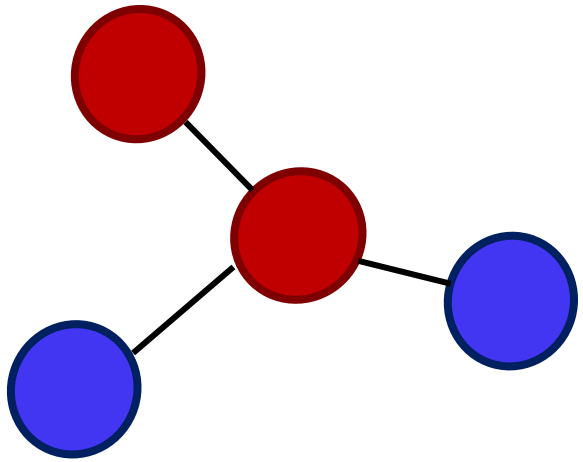


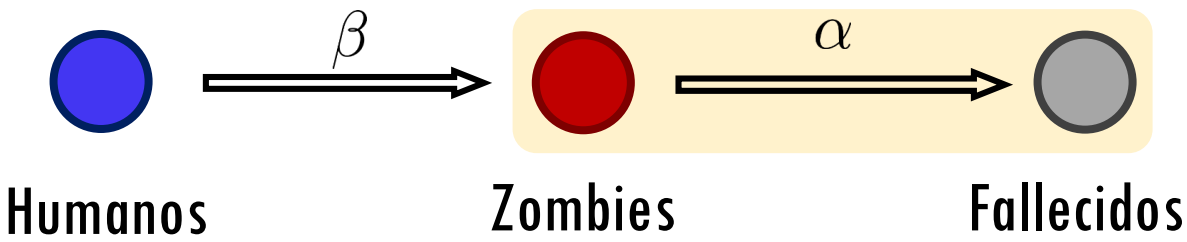


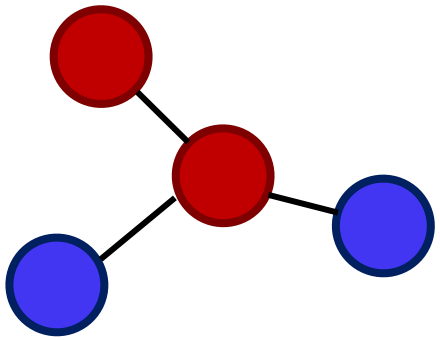


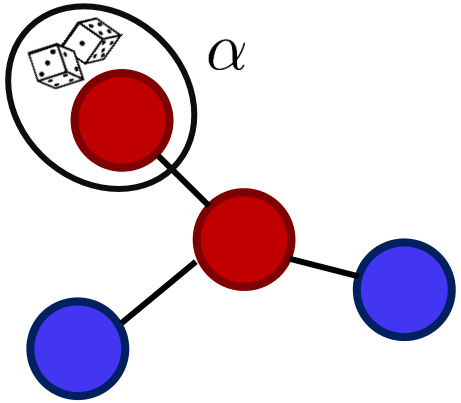
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

La prevalencia del patógeno



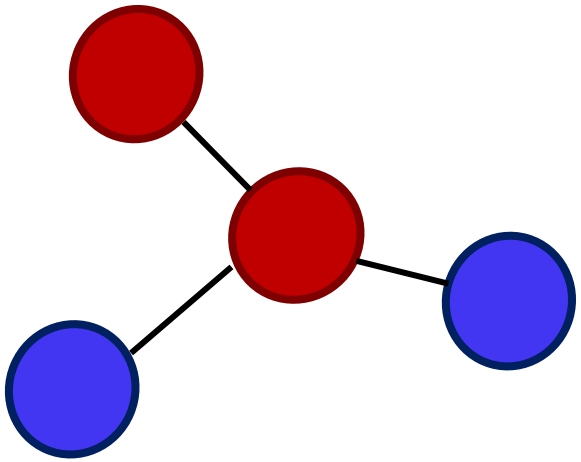


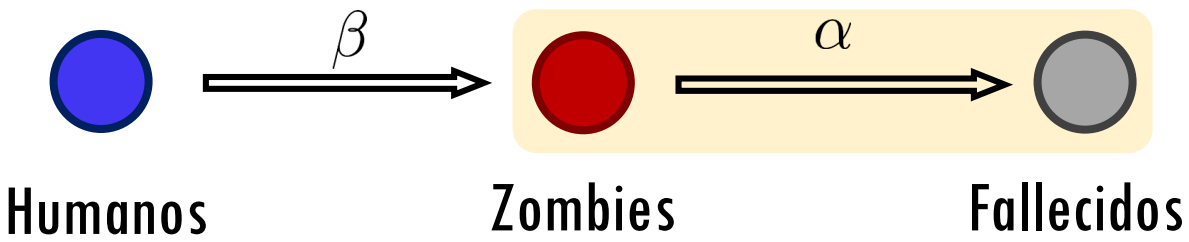


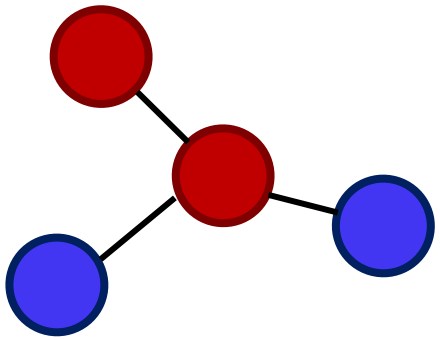


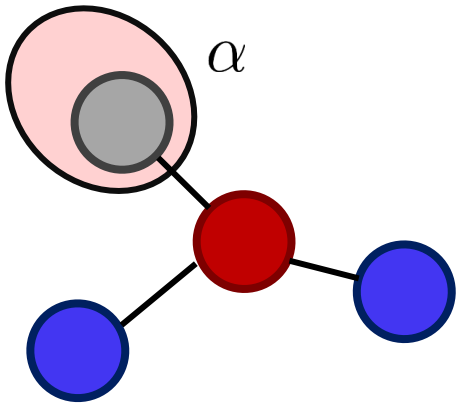
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR

La prevalencia del patógeno









DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

Programación en Python

```
import networkx as nx
```

```
net = nx.fast_gnp_random_graph(N, p, directed = False)
adj = nx.adjacency_matrix(net) # adj is a Sparse Matrix of CSR (compressed sparse row) format.
                               # this means that row slicing is fast
```

```
net = nx.barabasi_albert_graph(N, n)
adj = nx.adjacency_matrix(net) # adj is a Sparse Matrix of CSR (compressed sparse row) format.
                               # this means that row slicing is fast
```

DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

Programación en Python

```
import networkx as nx
```

```
N = 50 # tamaño de la red
p = 0.1 # probabilidad de que un nodo esté conectado con otro

random = nx.fast_gnp_random_graph(N, p, seed=None, directed = False)
```

```
print('¿Es una red directa?')
print(nx.is_directed(random))
print('Información de la red')
print(nx.info(random))
```

DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR

Elementos básicos del modelo SIR

1 ¿Cuándo surge la epidemia?

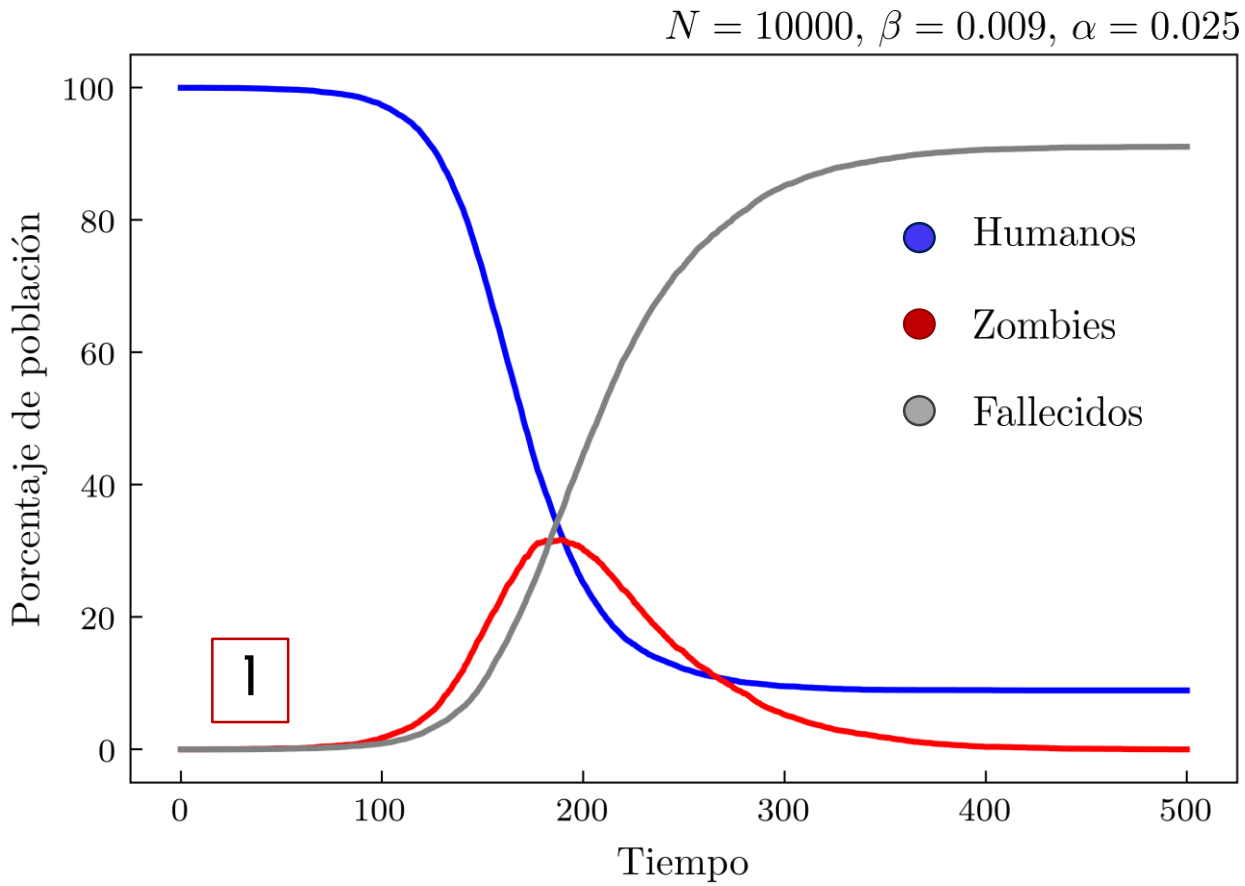
¡La infección no siempre se propaga!
Tiene que cumplirse que

$$R_0 = \frac{\beta \langle k \rangle}{\alpha} > 1$$

Tasa de contagio

Tasa de fallecimiento

Ritmo reproductivo básico



DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

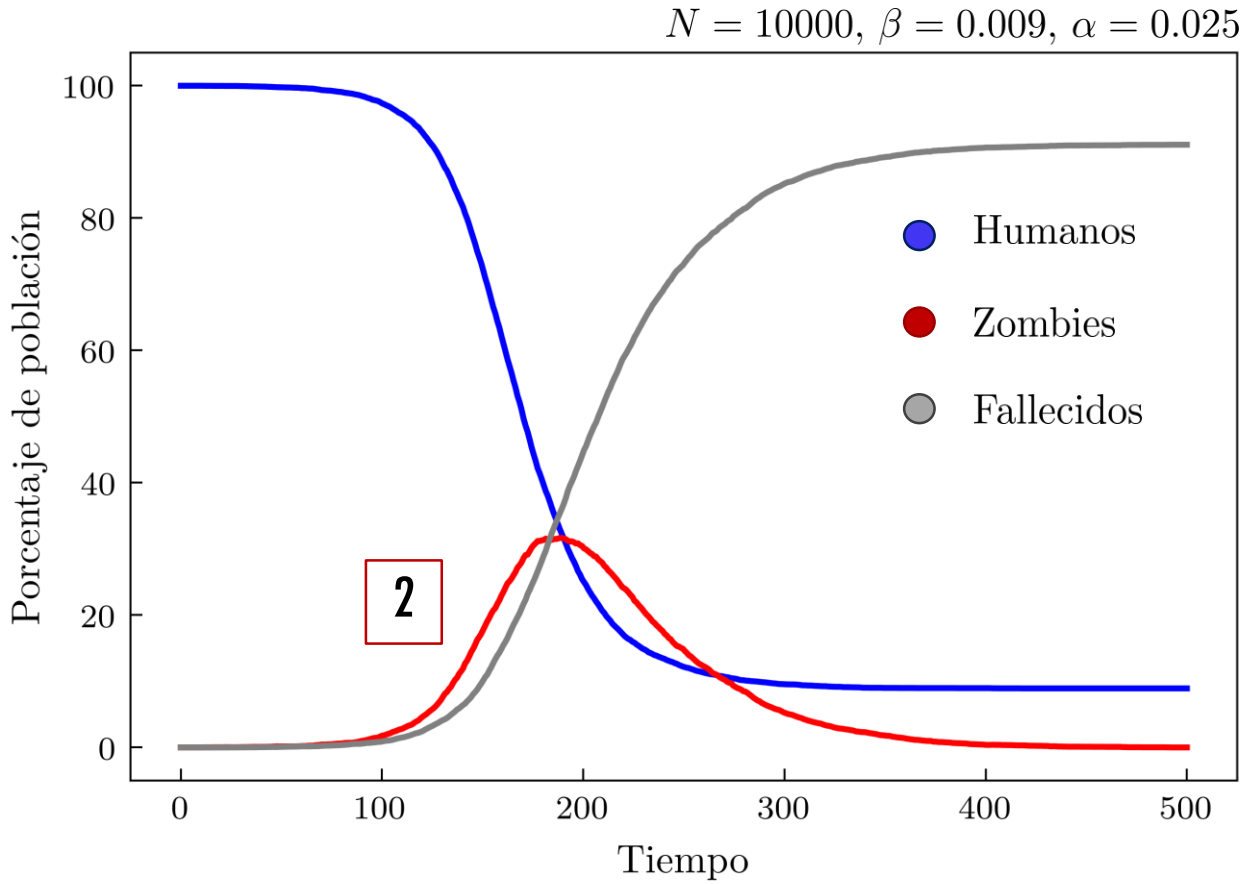
Elementos básicos del modelo SIR

2 Comportamiento temprano de la infección

Al comienzo la infección se propaga exponencialmente

$$R_e = \frac{\beta N s(0)}{\alpha}$$

Fuerza del patógeno



DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

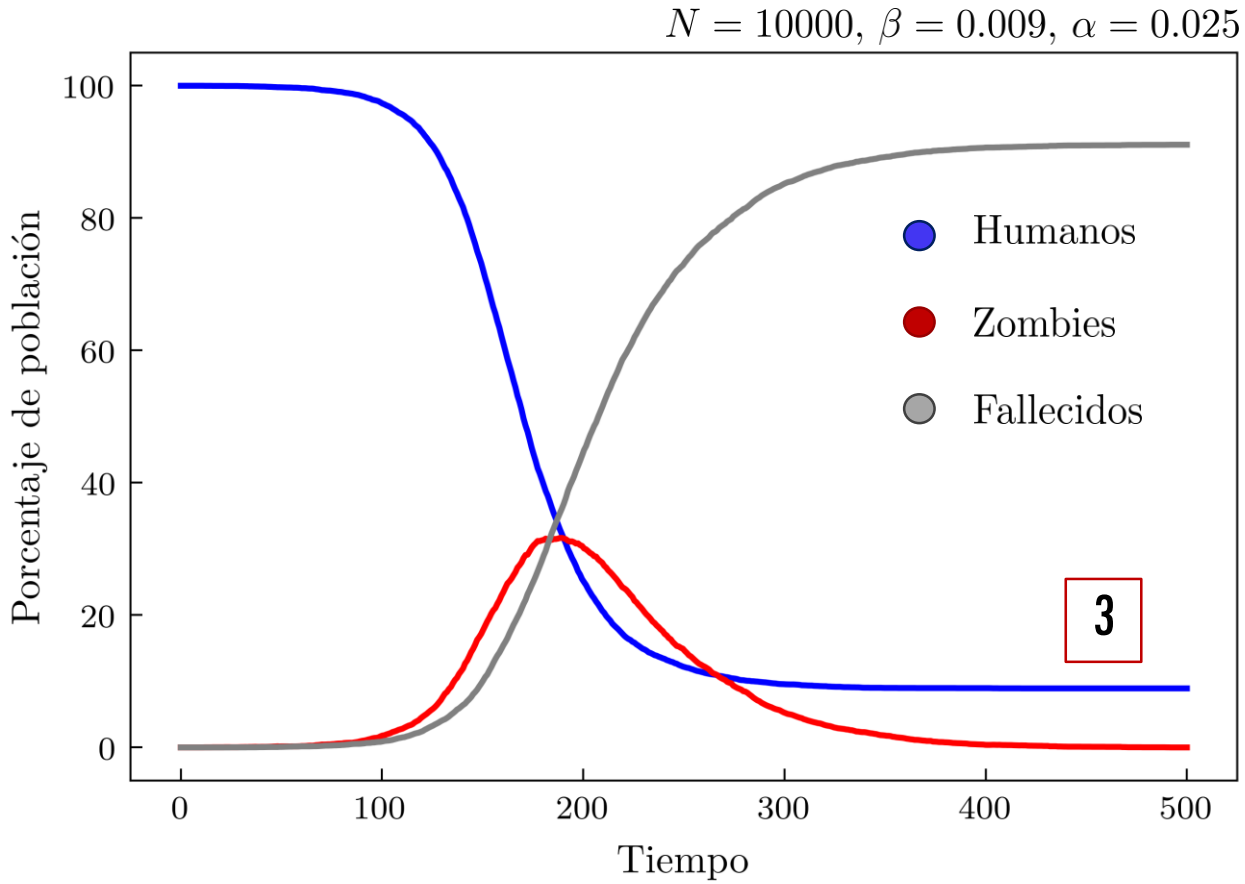
Elementos básicos del modelo SIR

3 El final de la epidemia

El número de zombies siempre tiende a cero para tiempos suficientemente largos

El número de humanos vivos viene dado por la solución de

$$0 = \frac{\alpha}{\beta\langle k\rangle}\ln[s(\infty)] - [s(\infty) - 1]$$



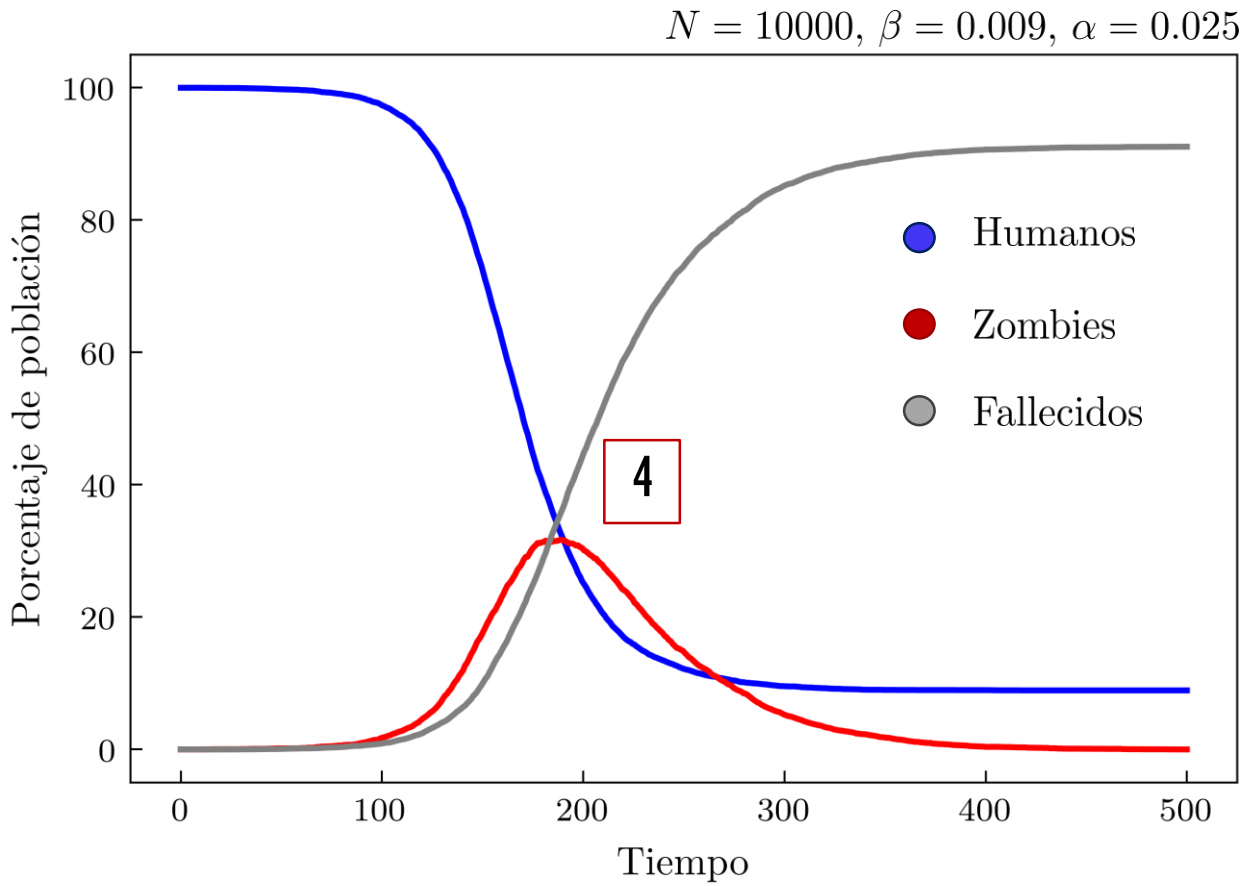
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

Elementos básicos del modelo SIR

4 Pico de máxima infección

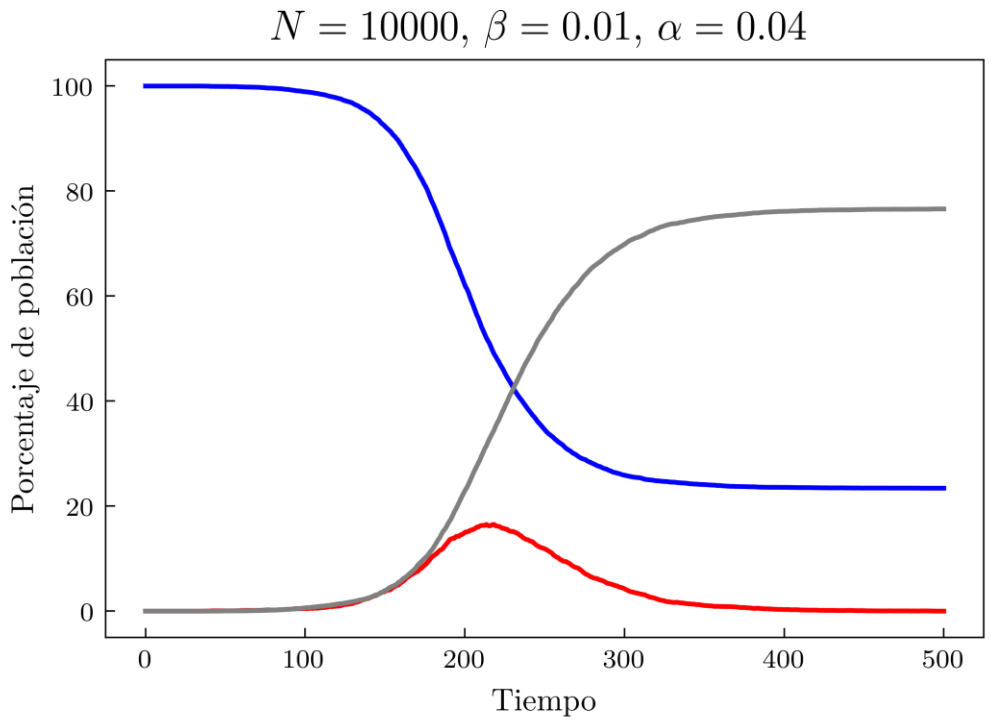
Siempre existe un pico de máxima infección

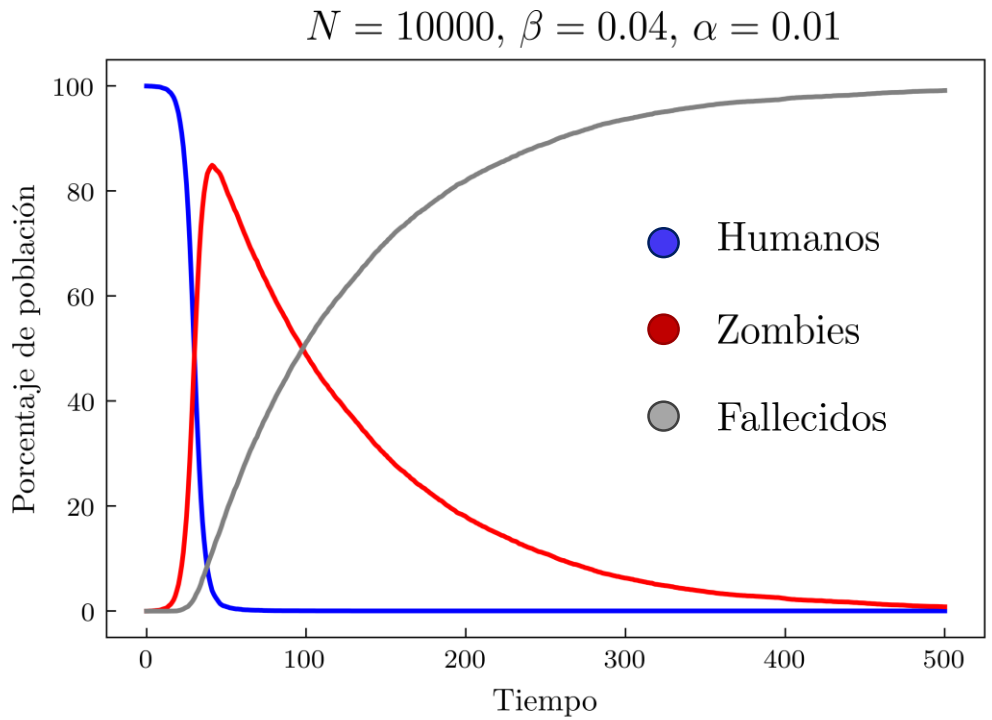
$$i_{\max} = 1 - \frac{1}{R_0}(1 + \log R_0)$$



DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA MODELO SIR

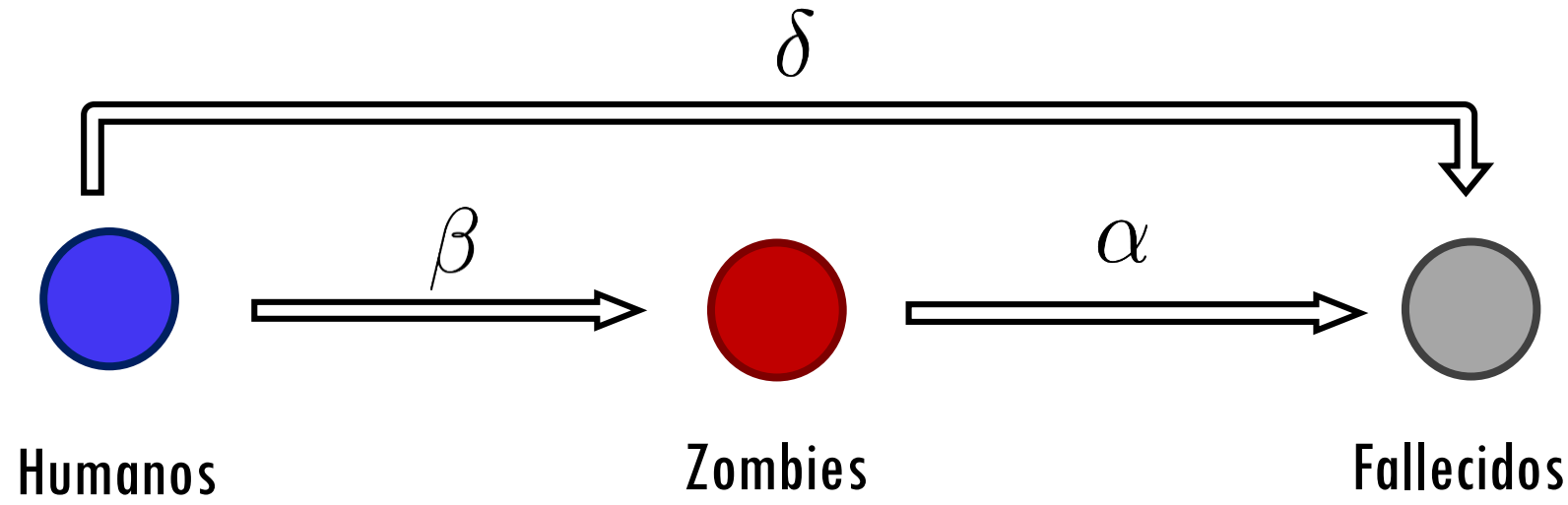
Dos ejemplos de propagación de epidemia





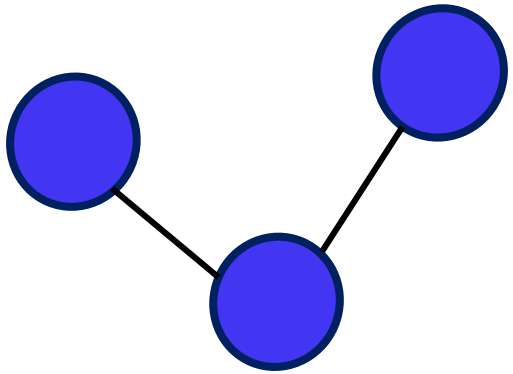
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

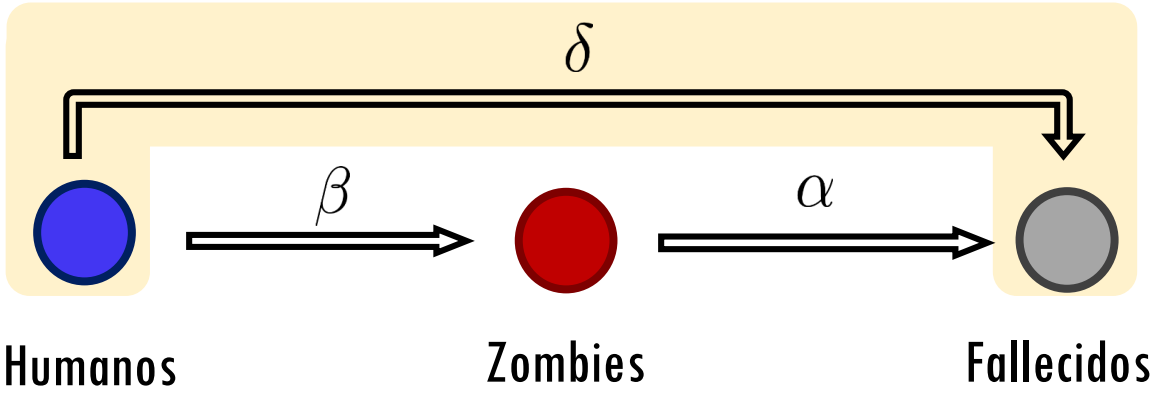
Añadimos la dificultad de sobrevivir en un entorno hostil



UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

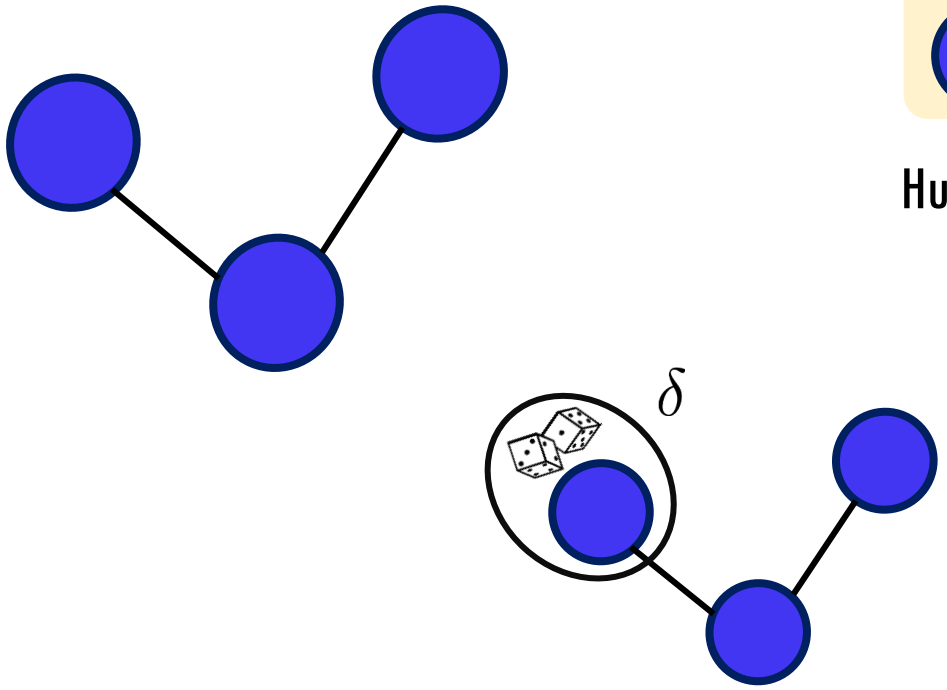
Supervivencia

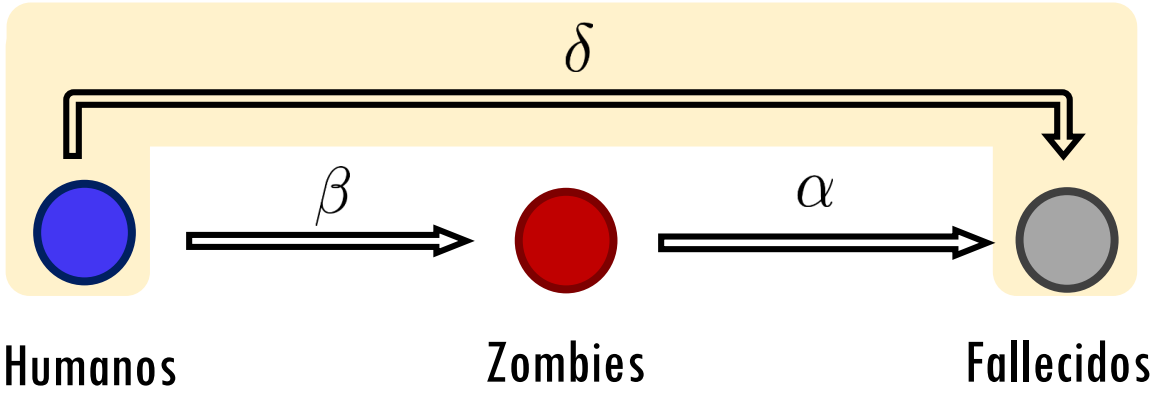




UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

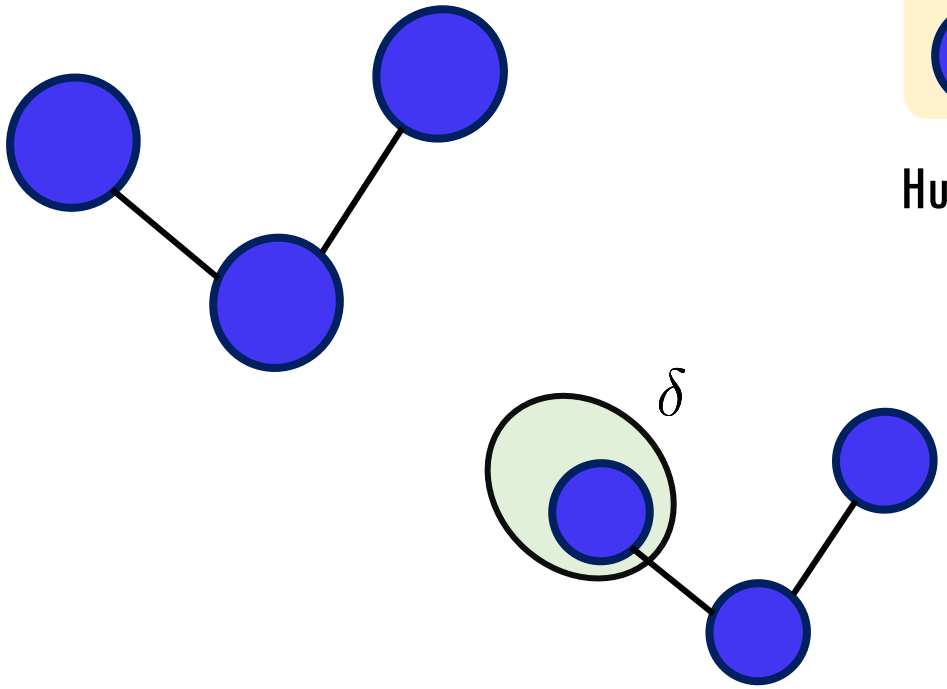
Supervivencia

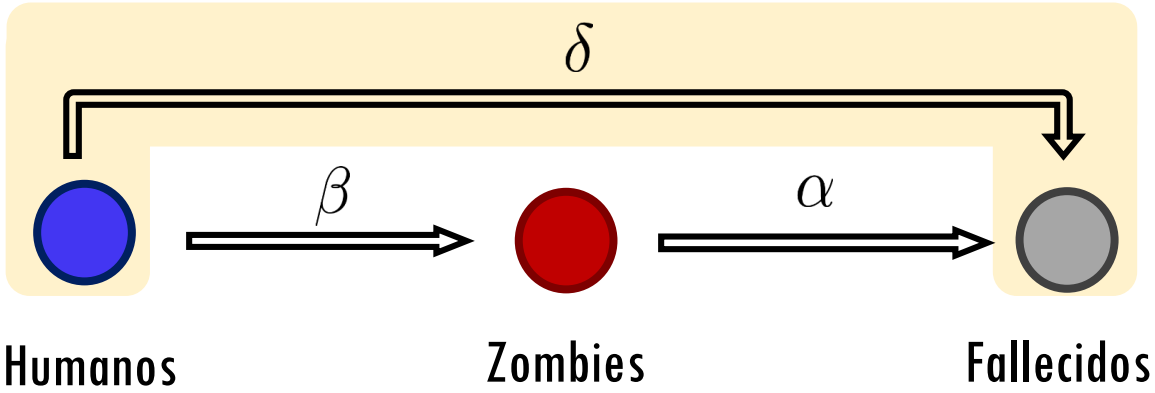




UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

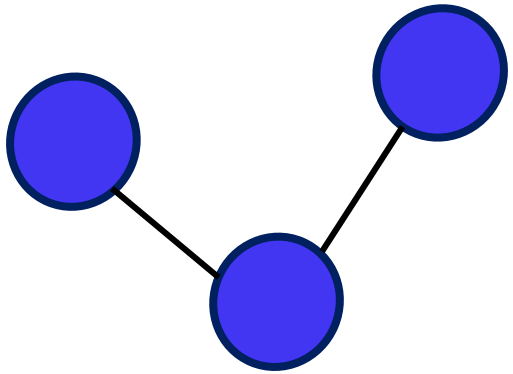
Supervivencia

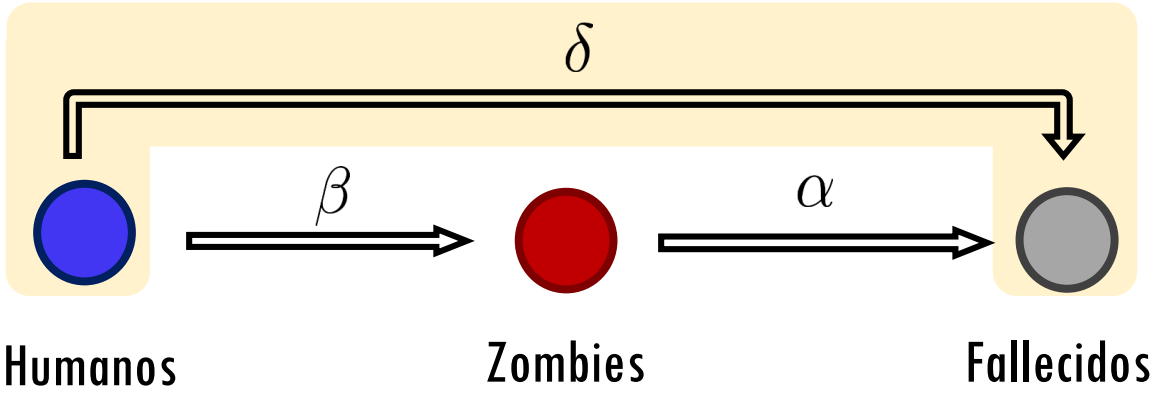


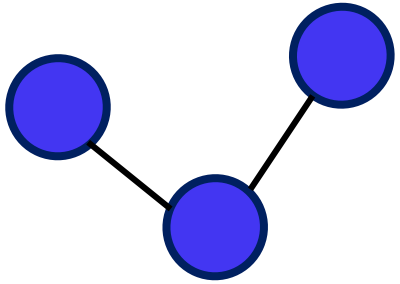


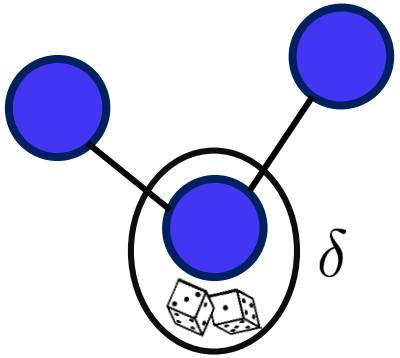
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

Supervivencia



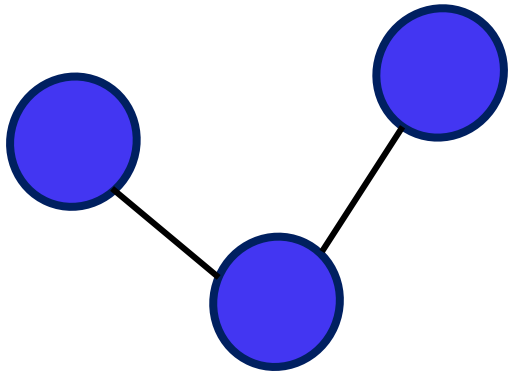


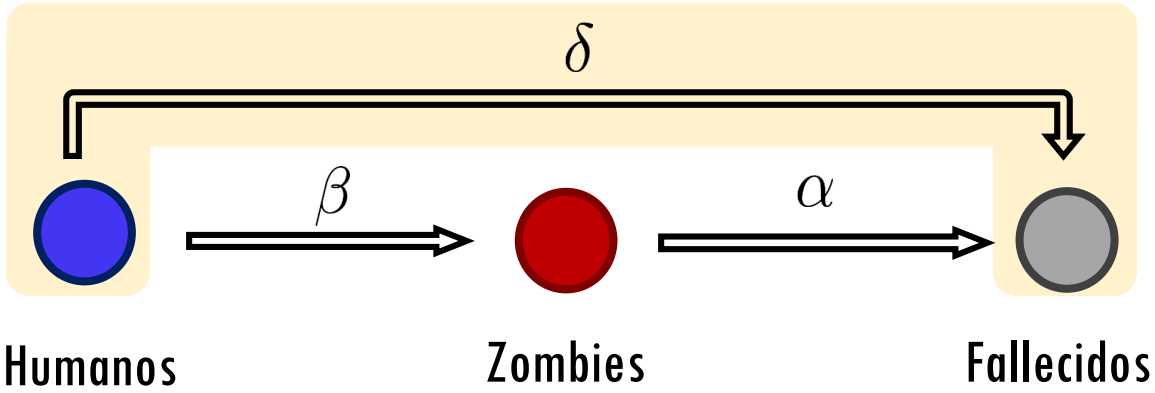


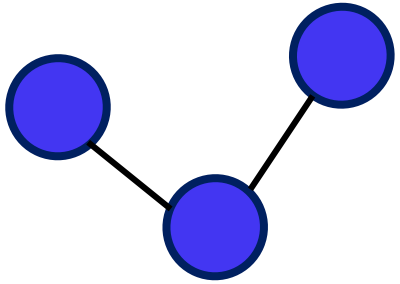


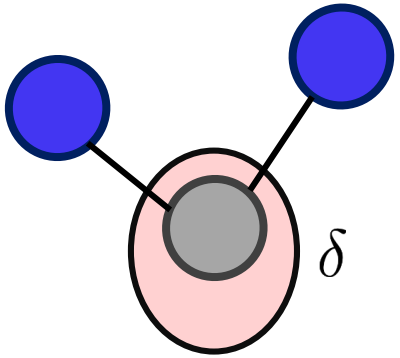
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

Supervivencia



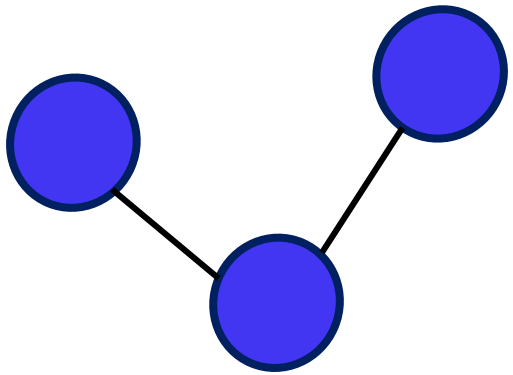


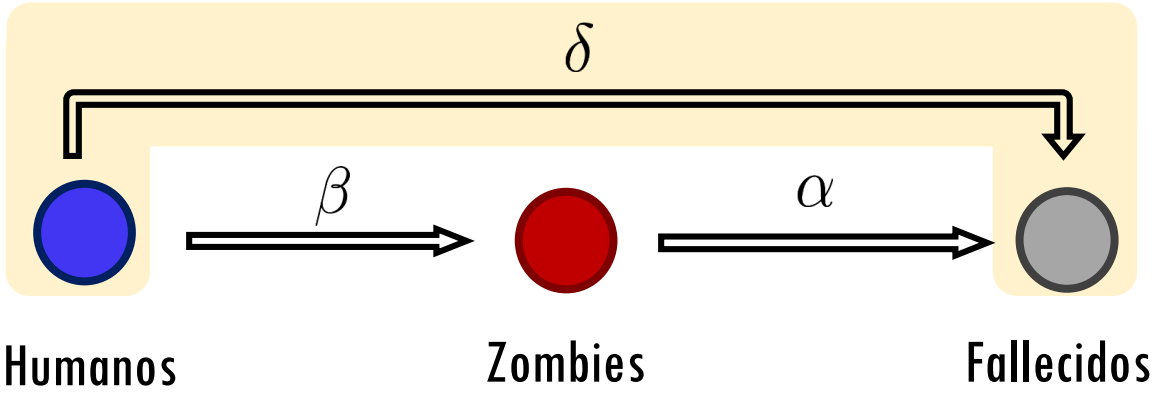


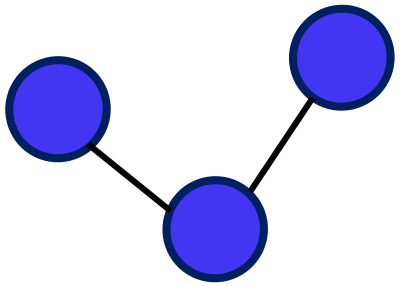


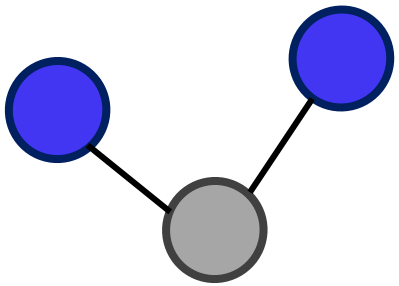
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

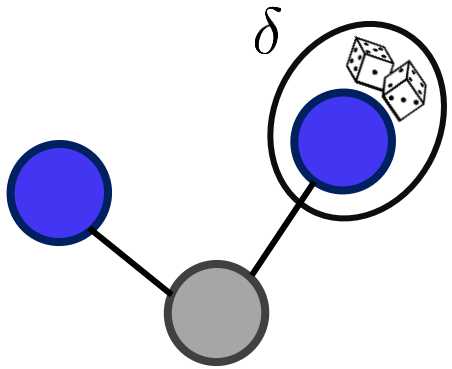
Supervivencia





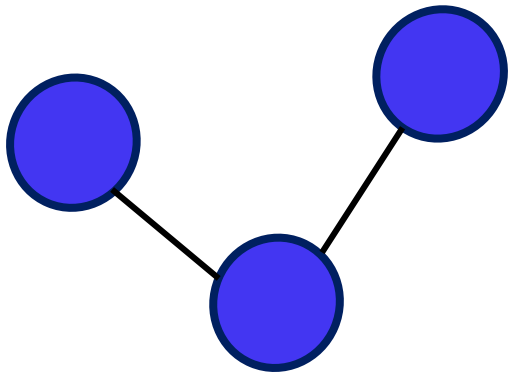


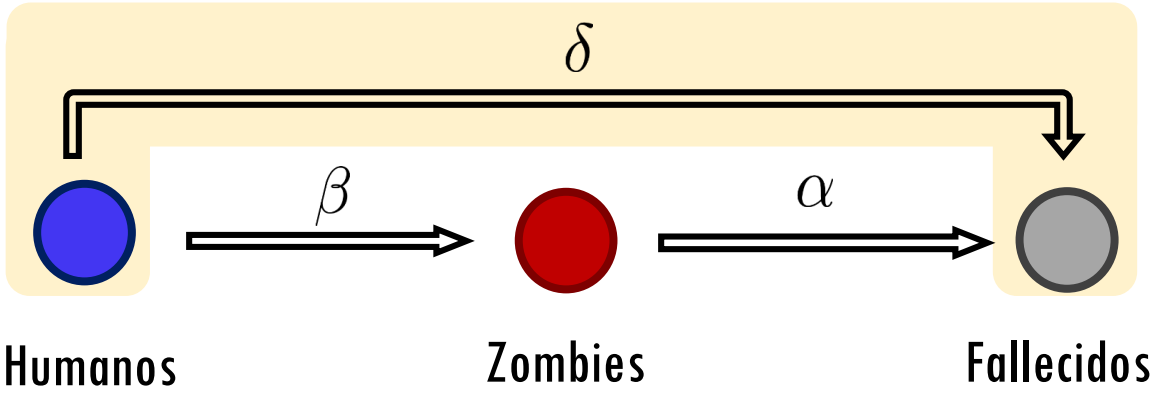


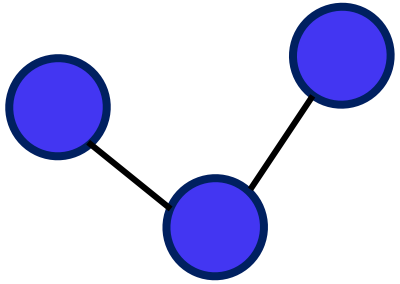


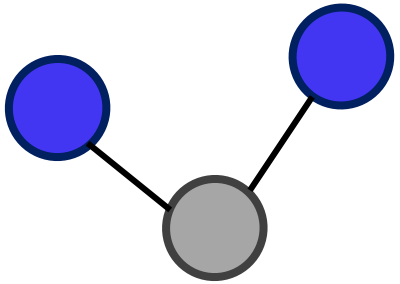
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

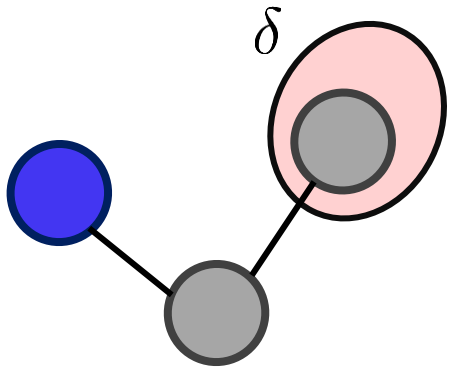
Supervivencia





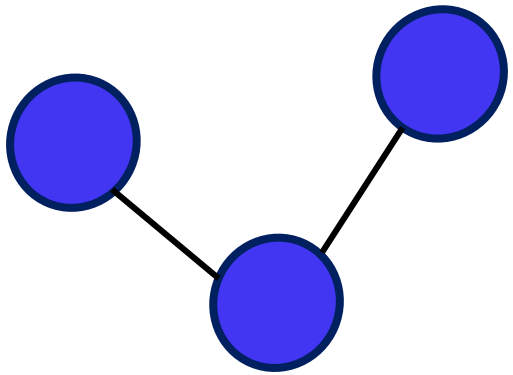


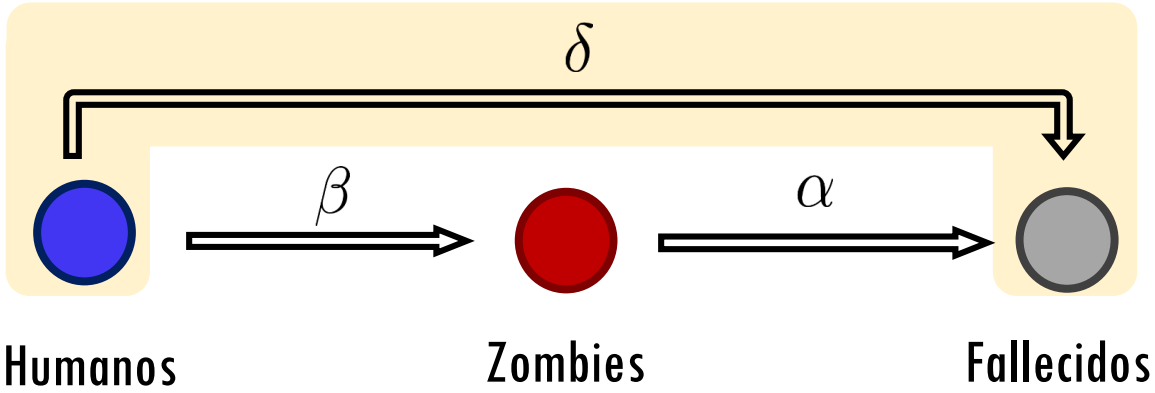


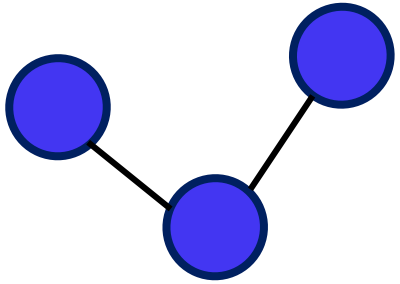


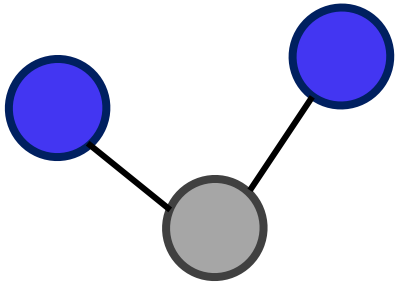
UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL APOCALIPSIS ZOMBIE
MODELO SIR + supervivencia

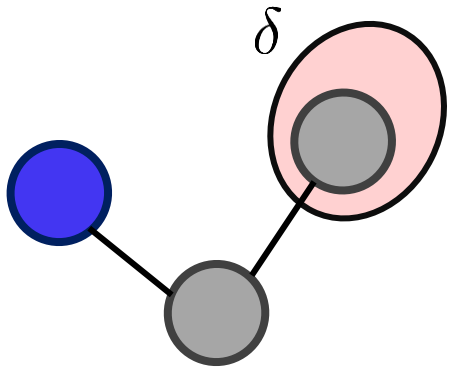
Supervivencia



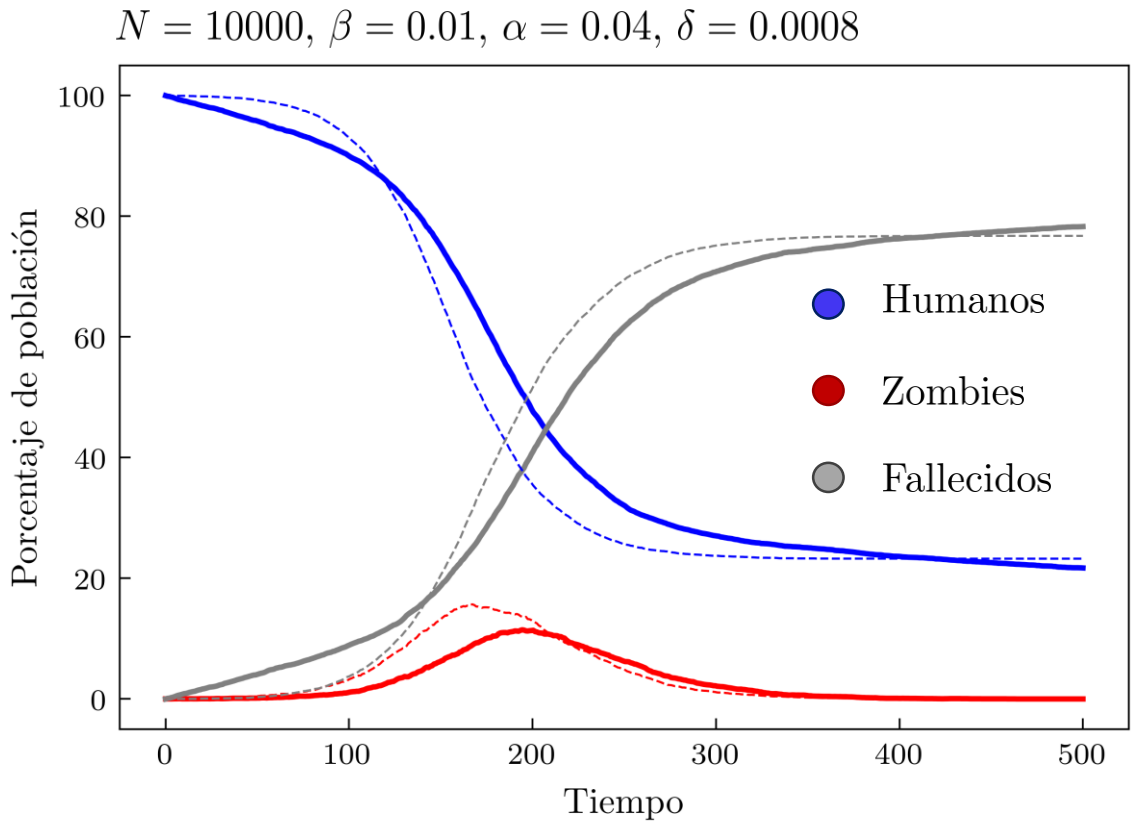


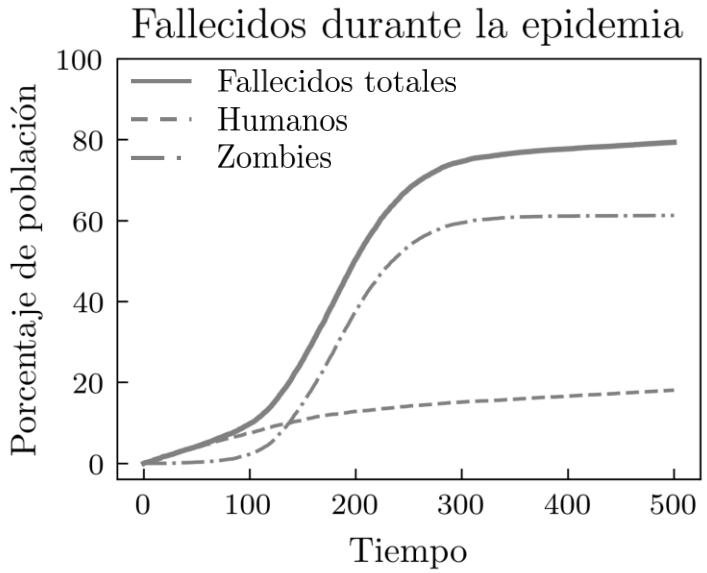




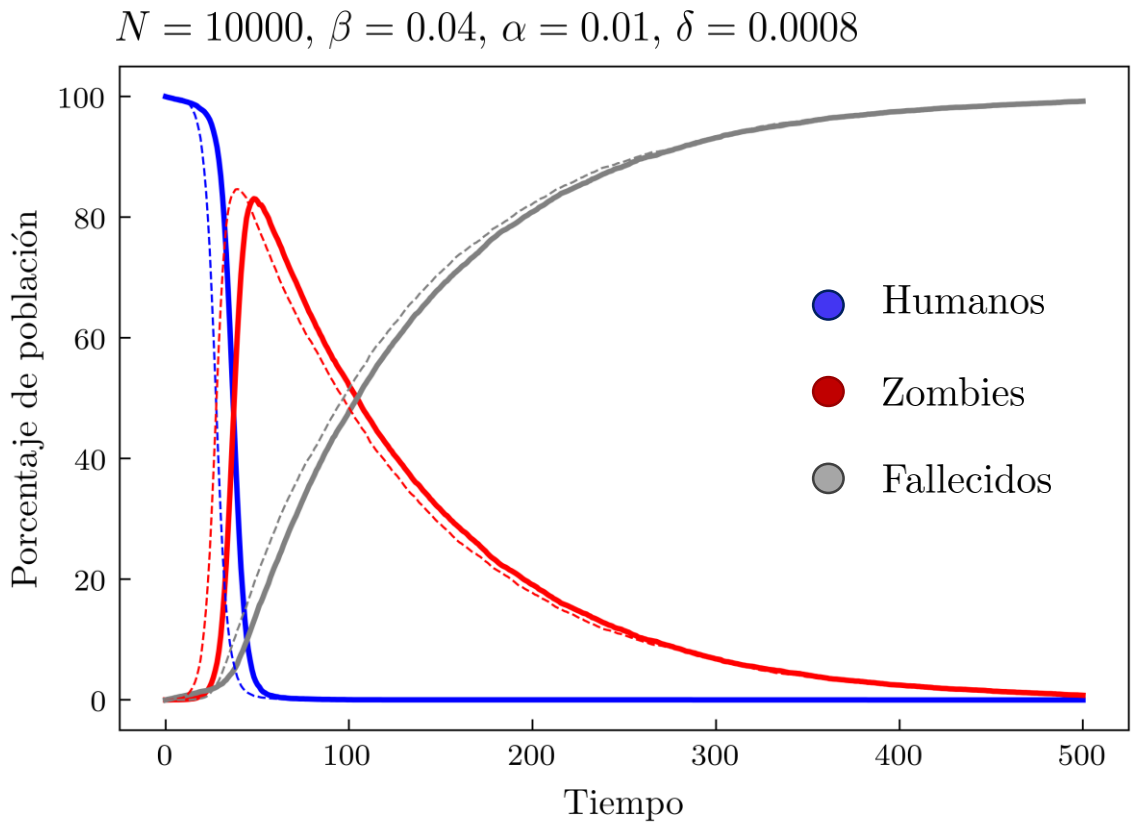


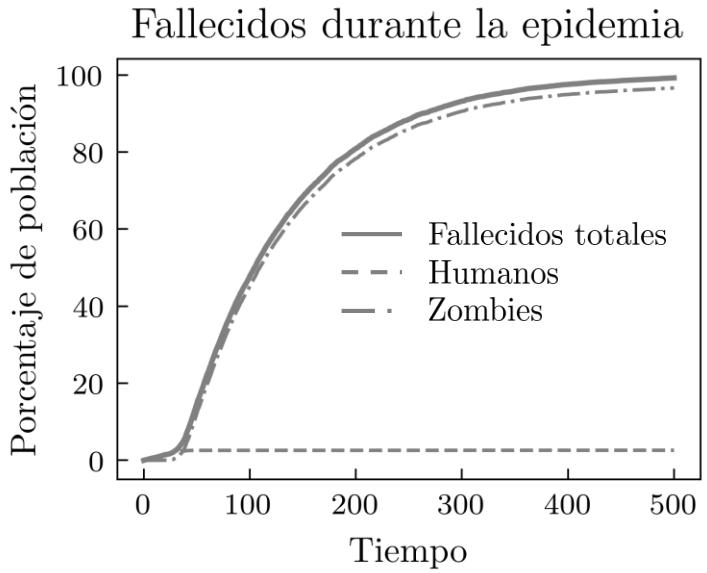
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia





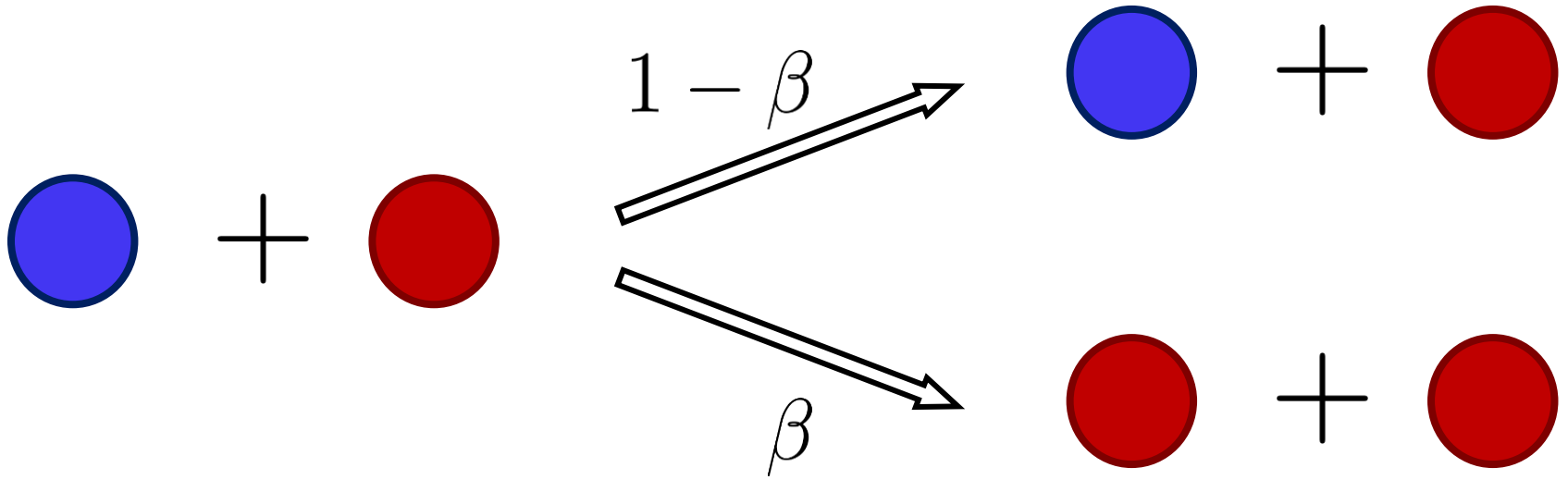
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia





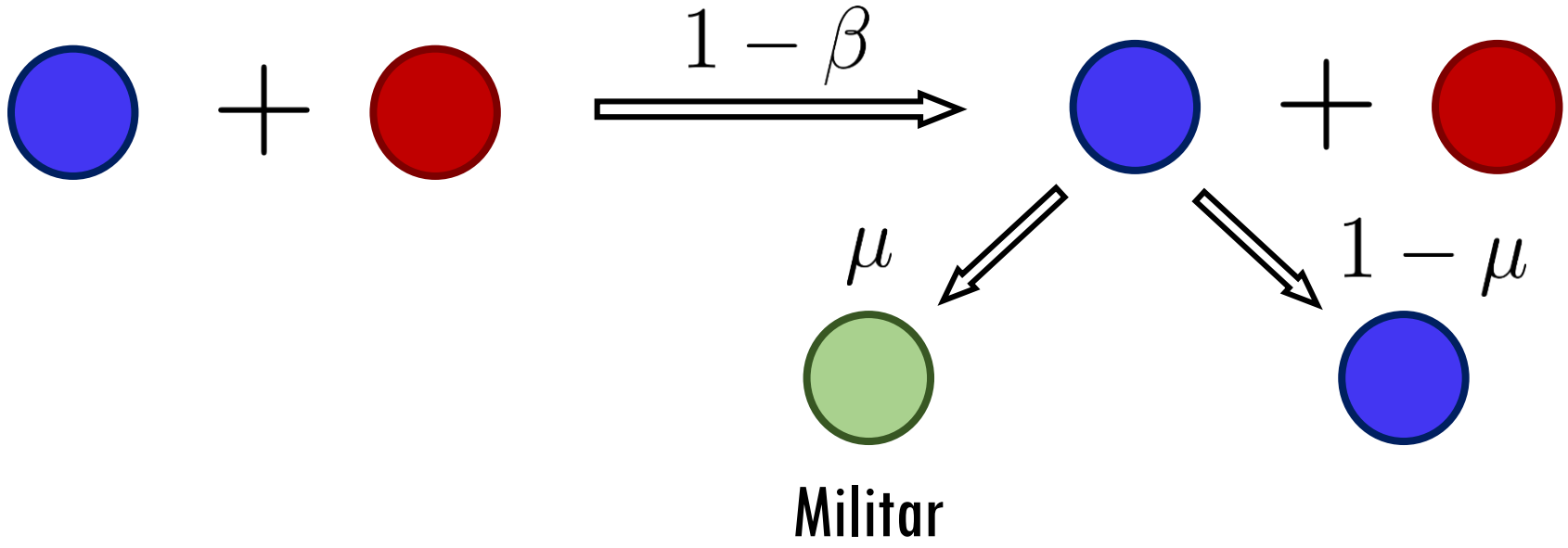
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

¿Y si tras sobrevivir al encuentro de un zombie pudiéramos aprender a defendernos?



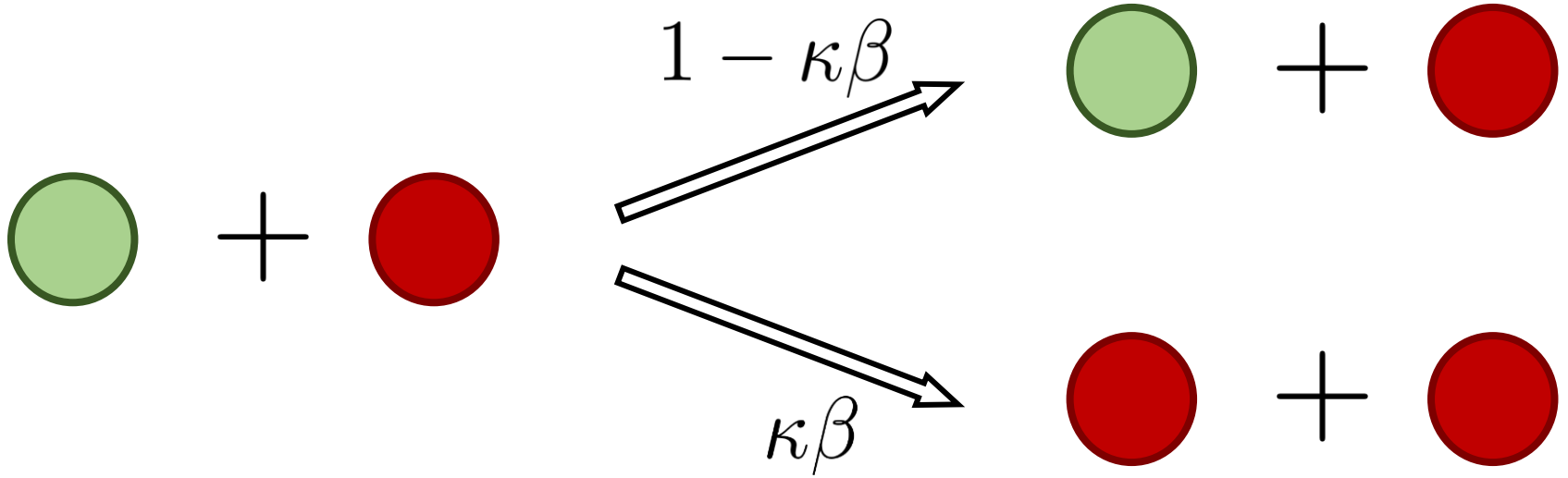
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

¿Y si tras sobrevivir al encuentro de un zombie pudiéramos aprender a defendernos?



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

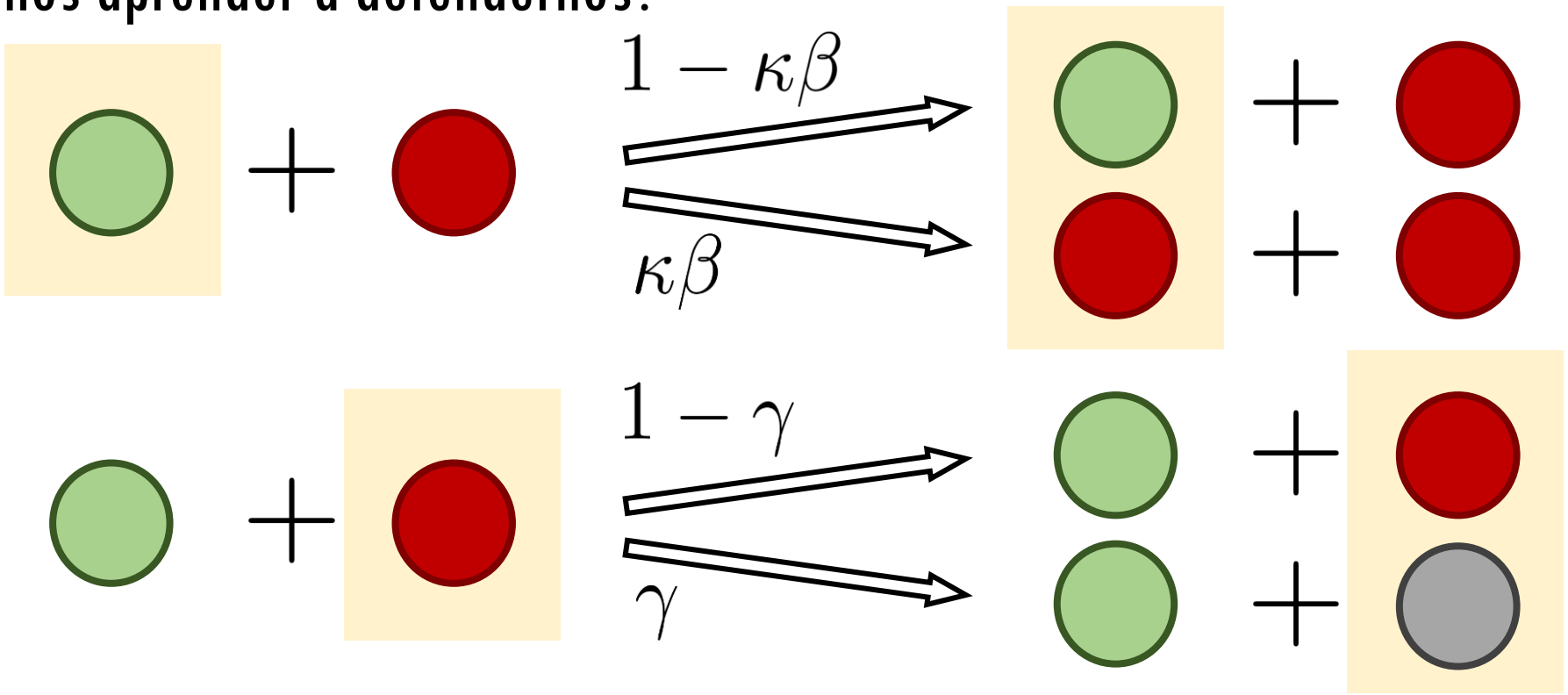
¿Y si tras sobrevivir al encuentro de un zombie pudiéramos aprender a defendernos?



$$0 \leq \kappa \leq 1$$

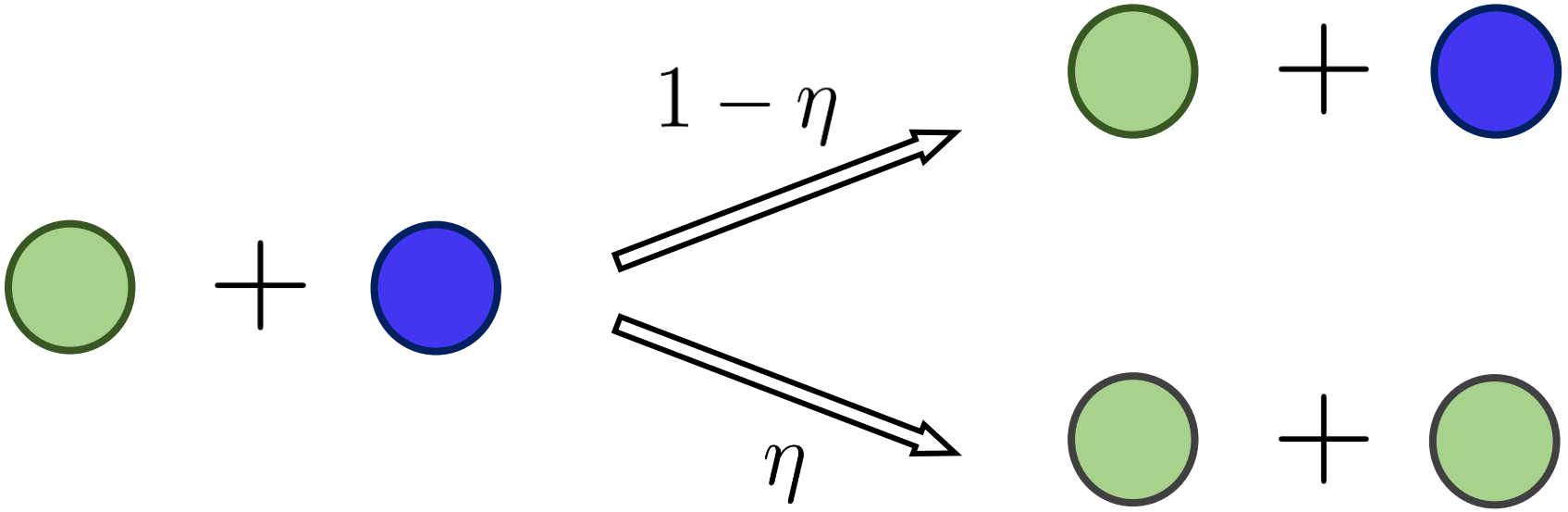
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

¿Y si tras sobrevivir al encuentro de un zombie pudiéramos aprender a defendernos?

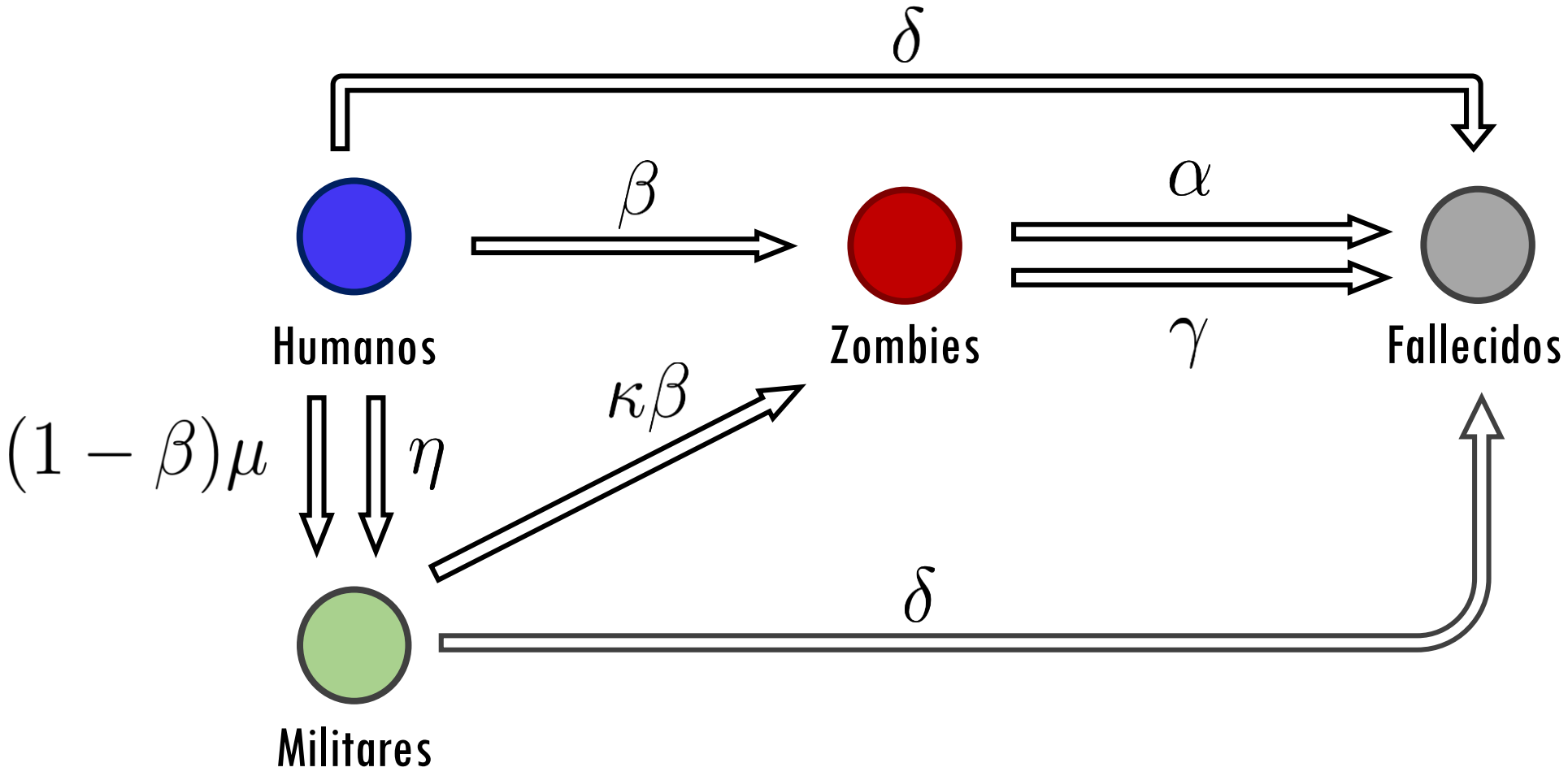


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

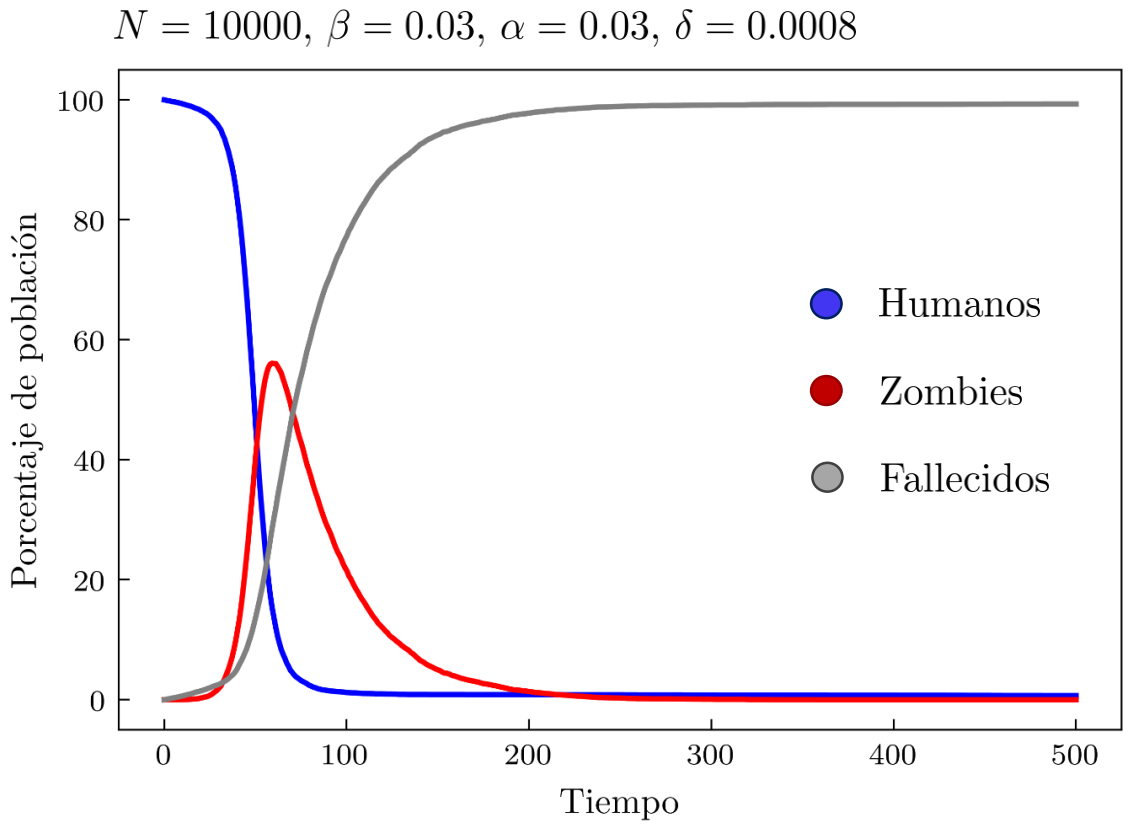
¿Y si tras sobrevivir al encuentro de un zombie pudiéramos aprender a defendernos?

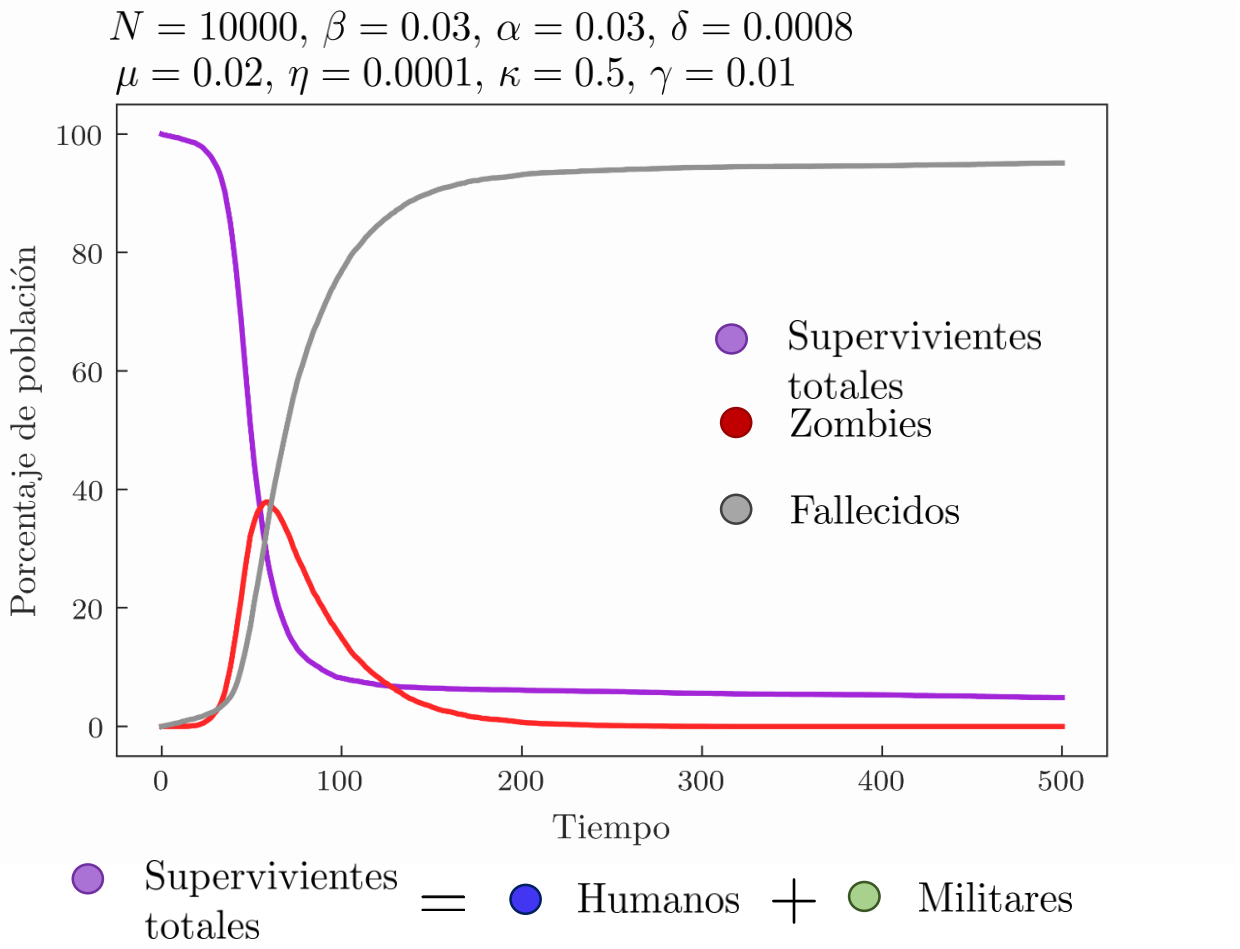


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + militares

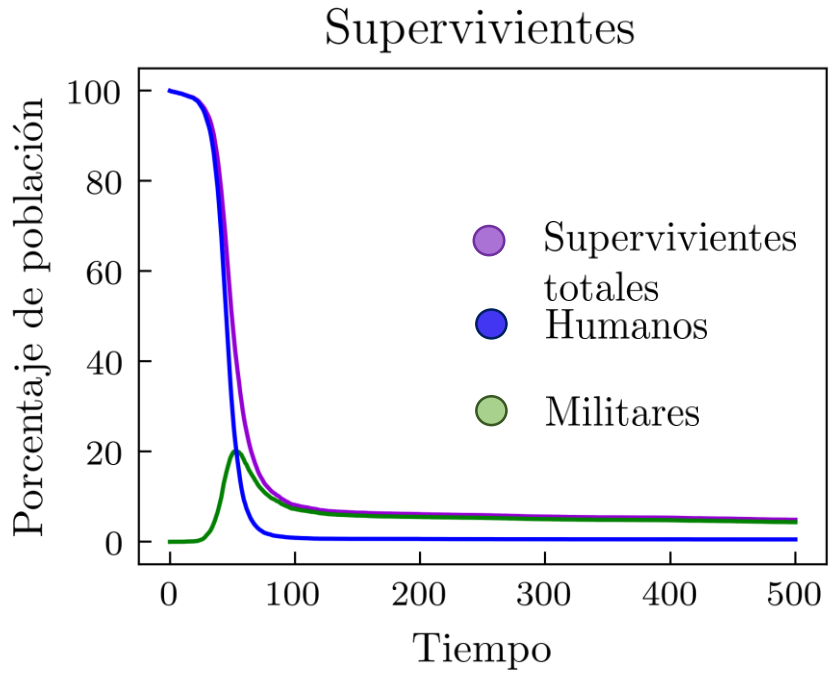


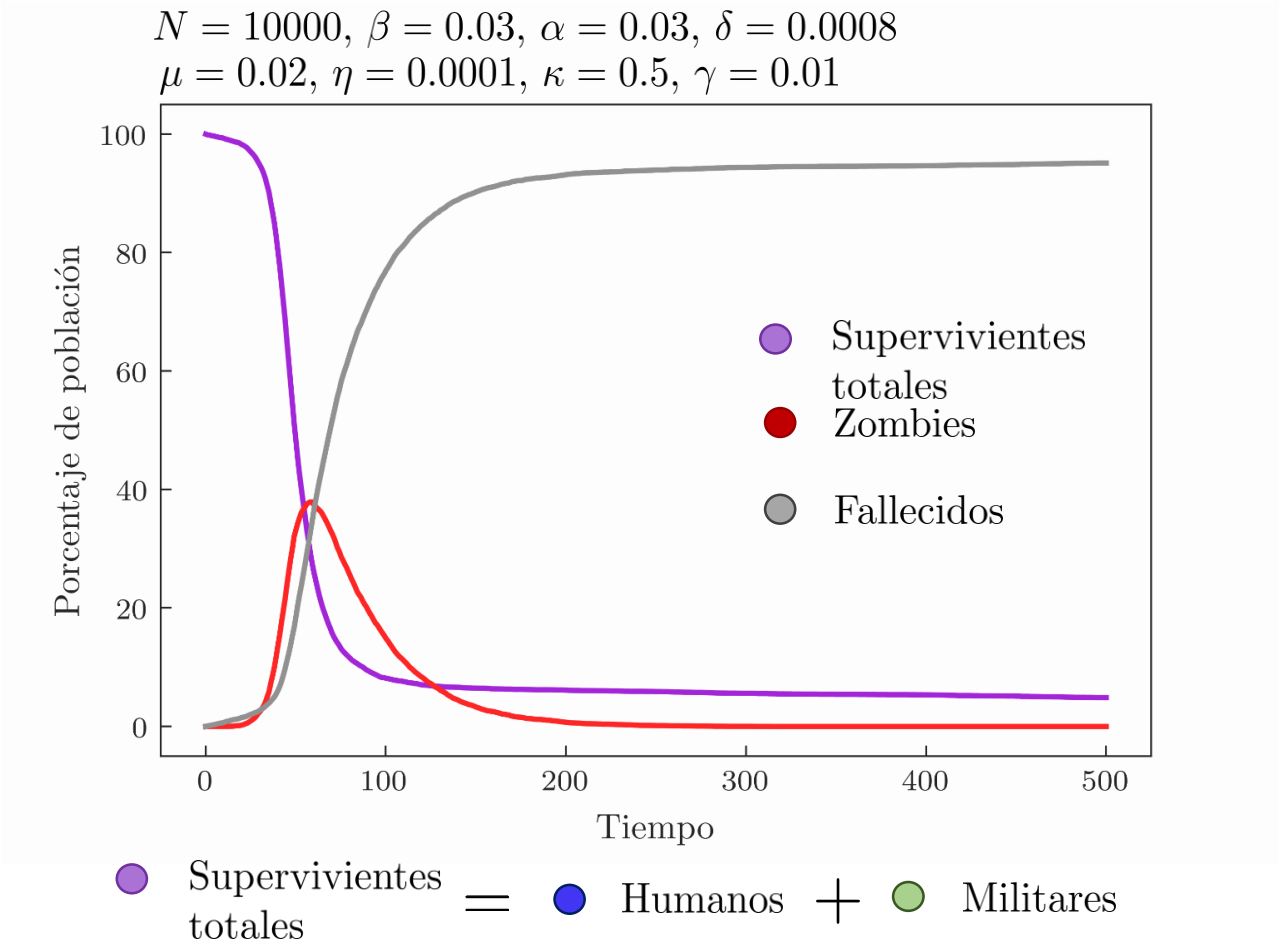
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + militares



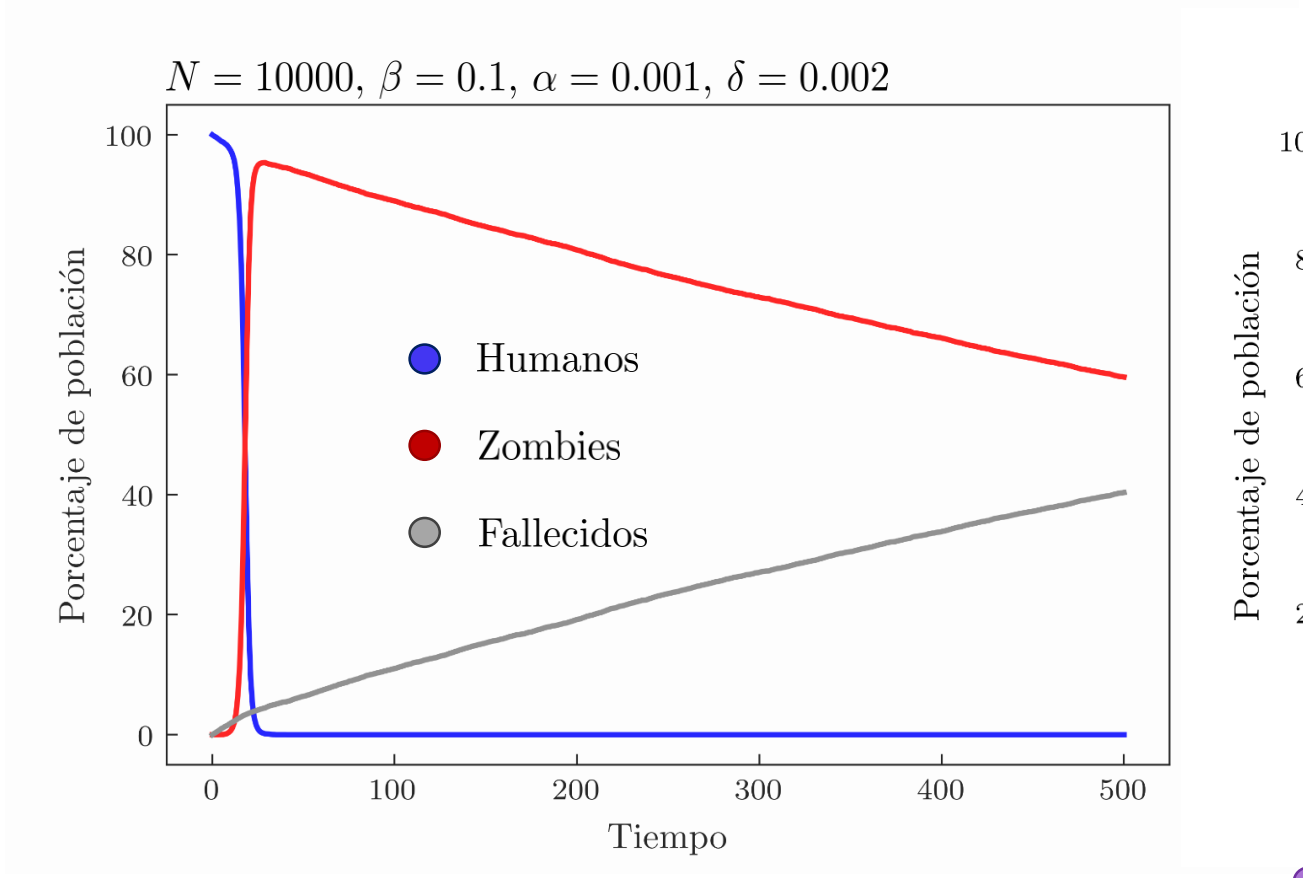


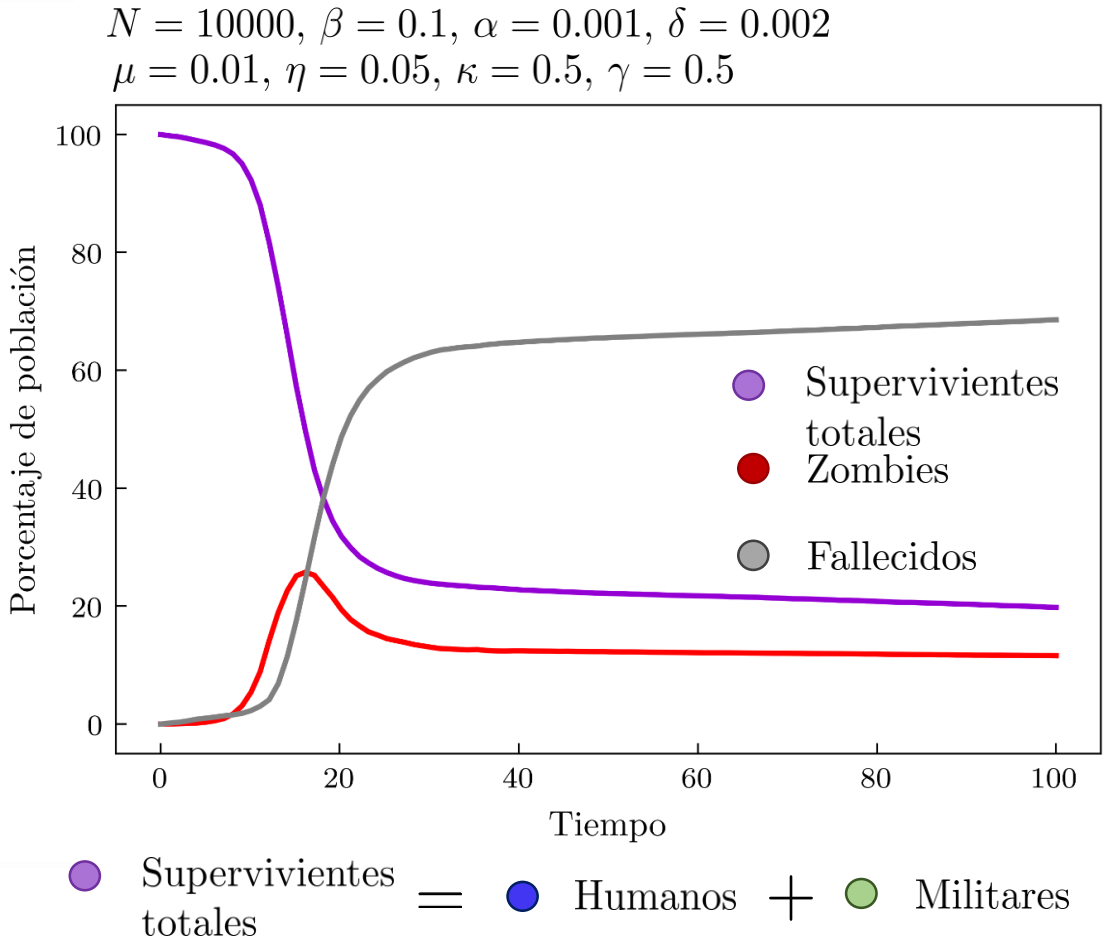
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + militares



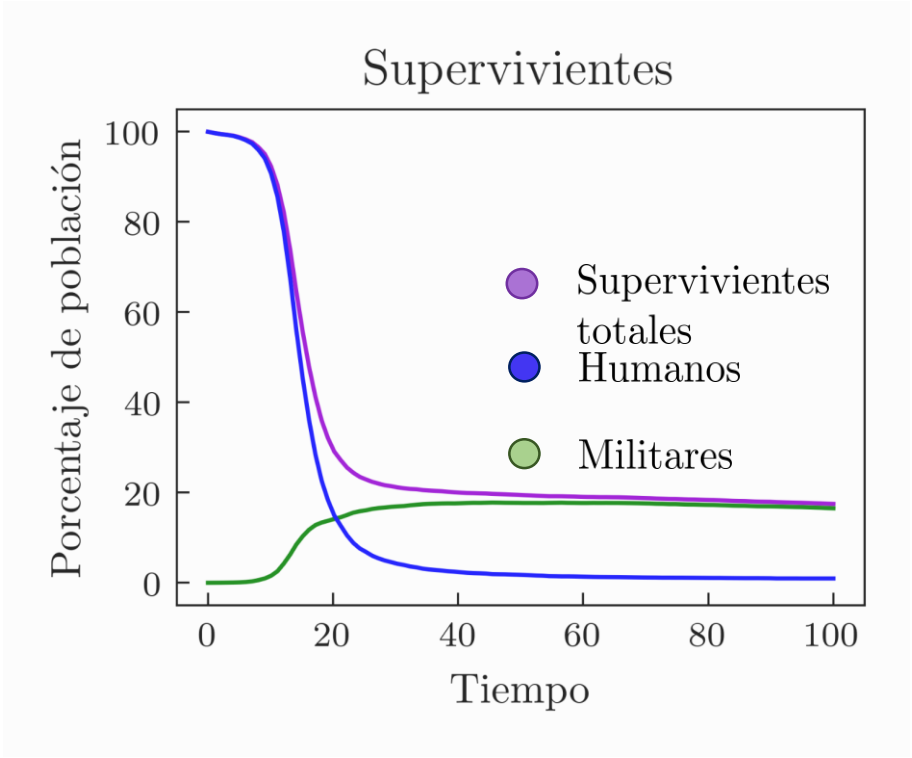


DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + militares

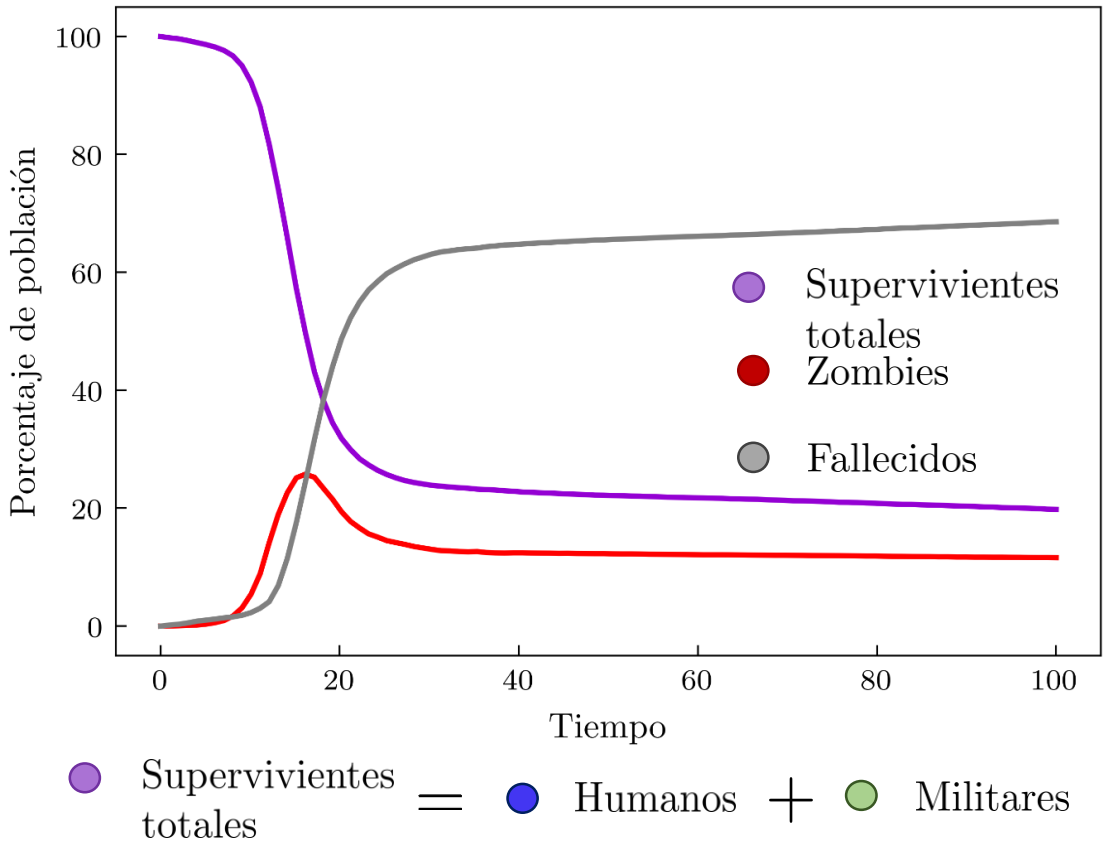




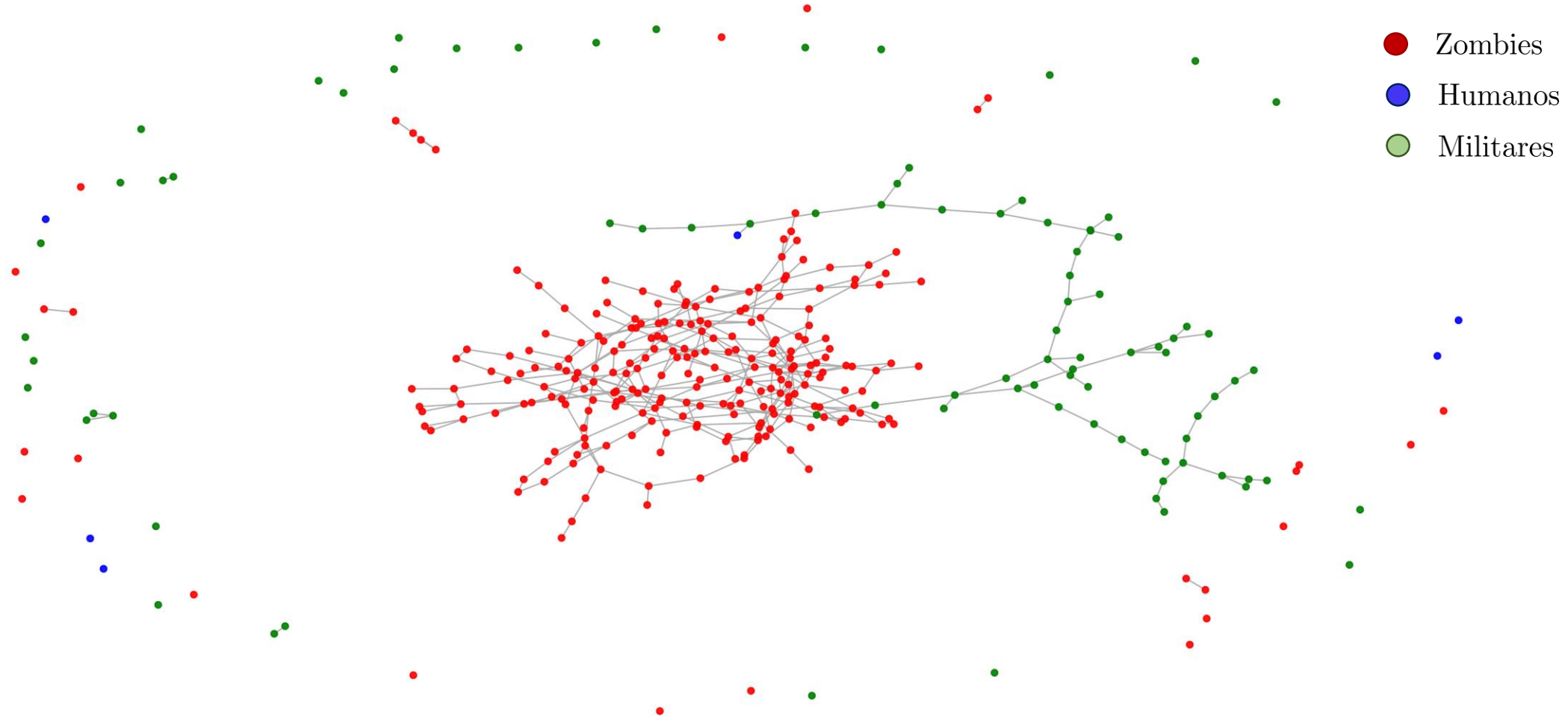
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + militares



$N = 10000,\ \beta = 0.1,\ \alpha = 0.001,\ \delta = 0.002$
$\mu = 0.01,\ \eta = 0.05,\ \kappa = 0.5,\ \gamma = 0.5$



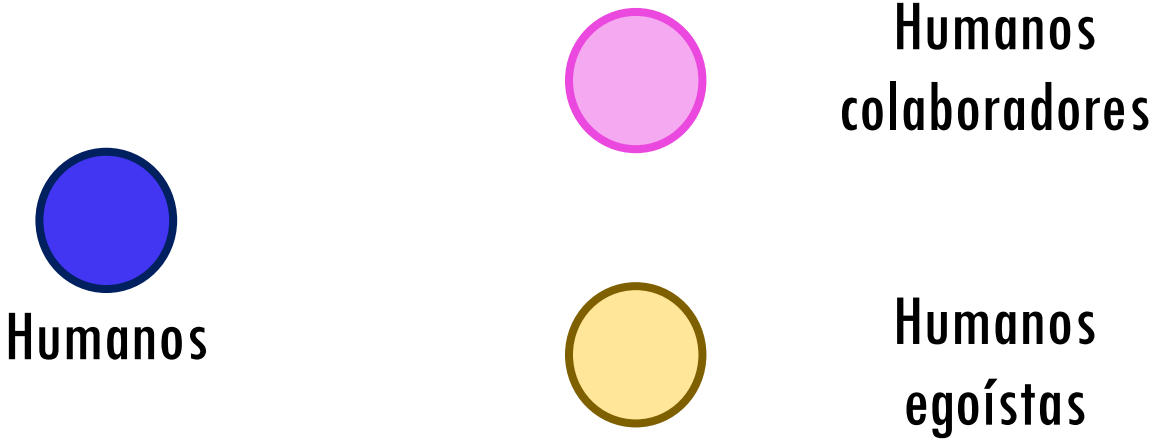
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + militares



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

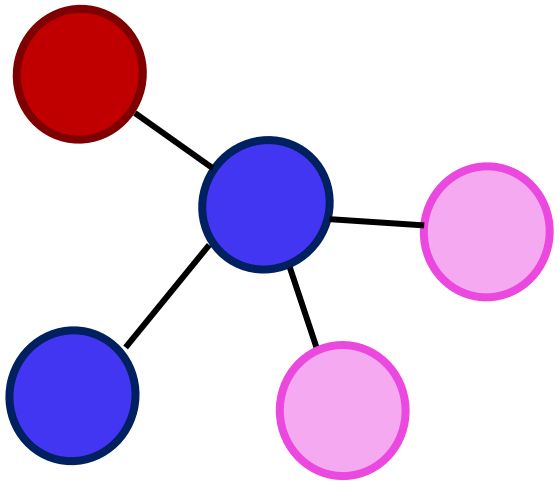
El escenario de un apocalipsis zombie es perfecto para introducir los conceptos de cooperación y egoísmo.

¿Cómo afecta el comportamiento de los individuos a la dinámica de la epidemia?



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

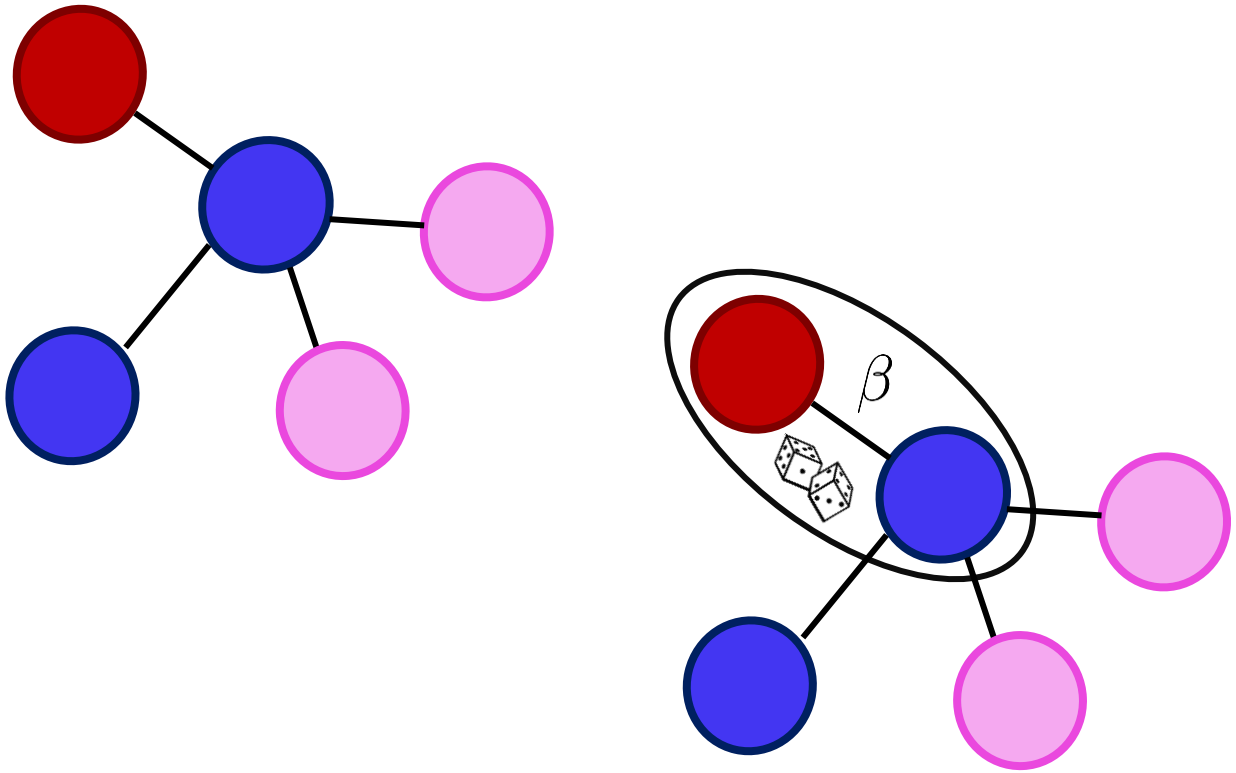


Humanos egoístas

EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

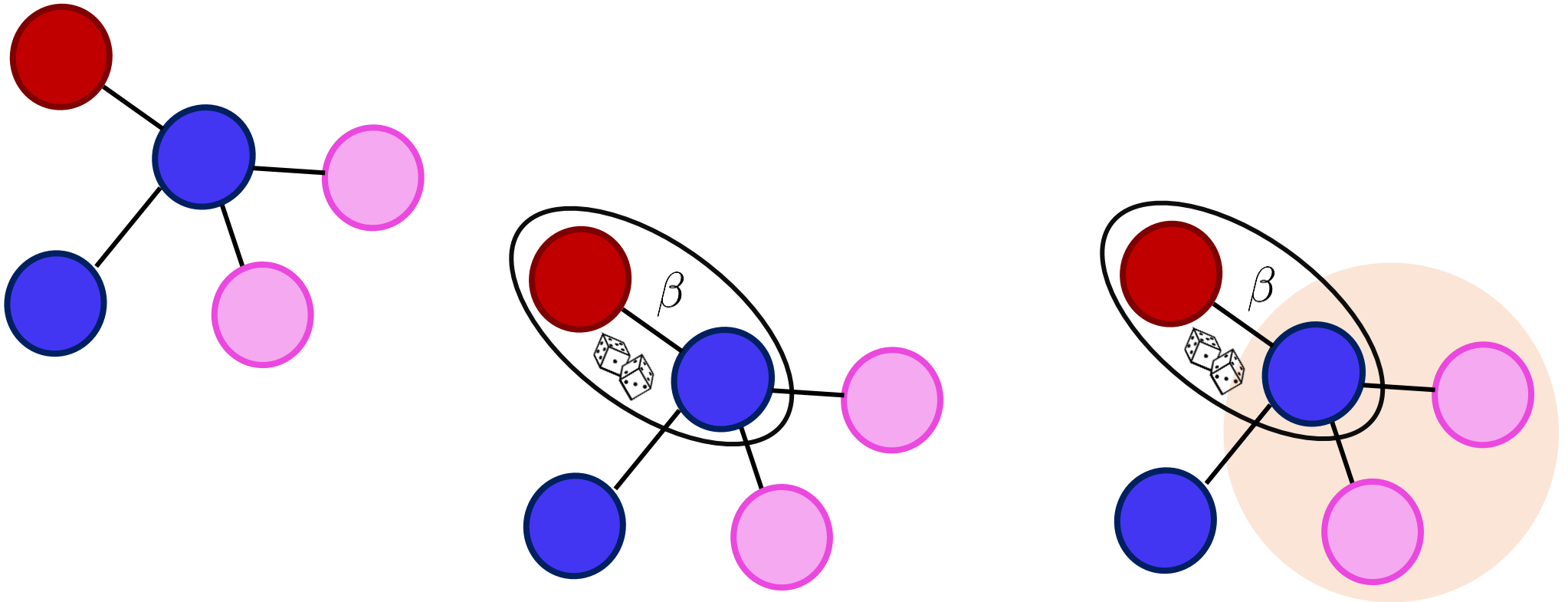
Humanos egoístas



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

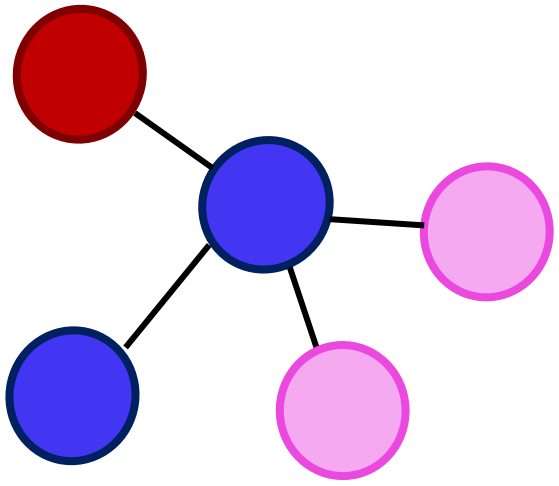
Humanos egoístas

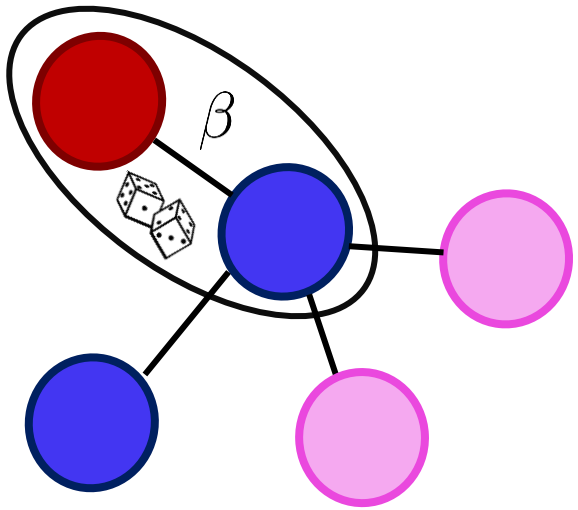


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

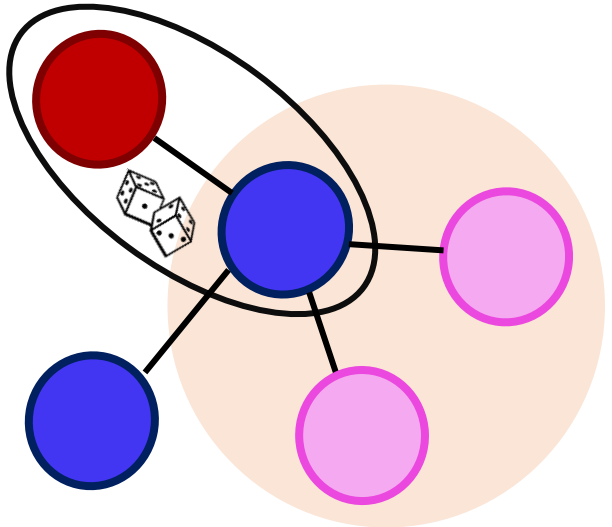
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





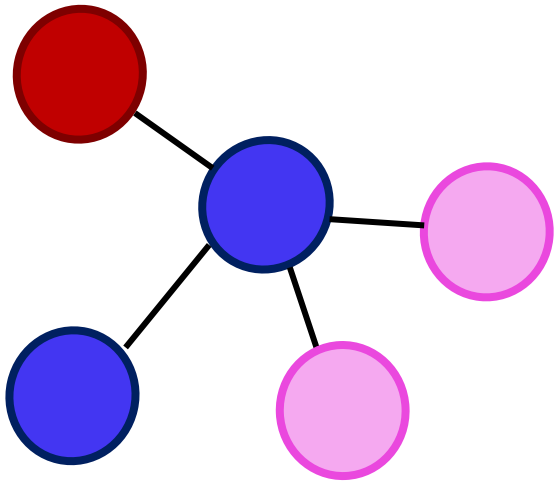
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$

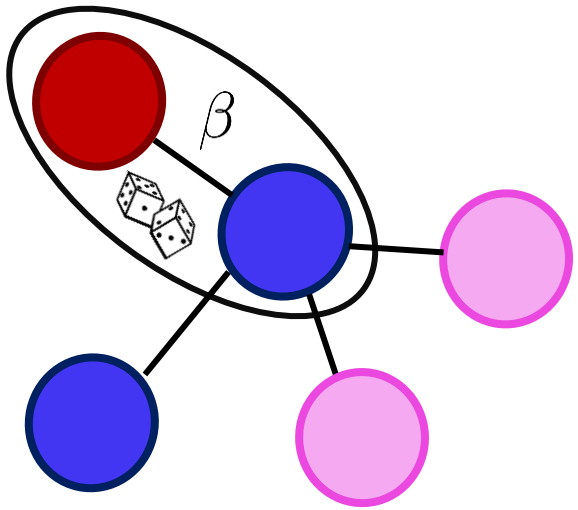


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

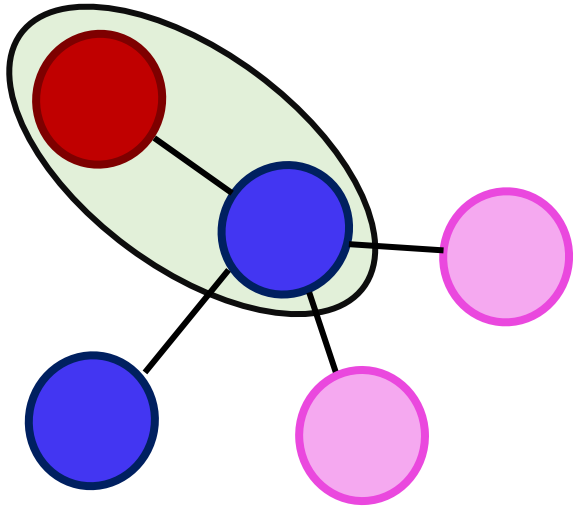
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





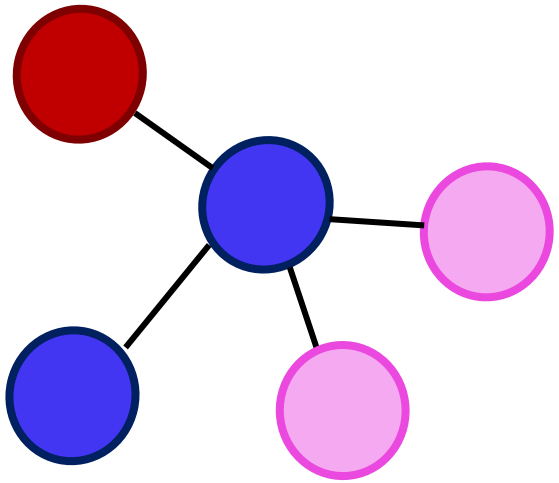
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$

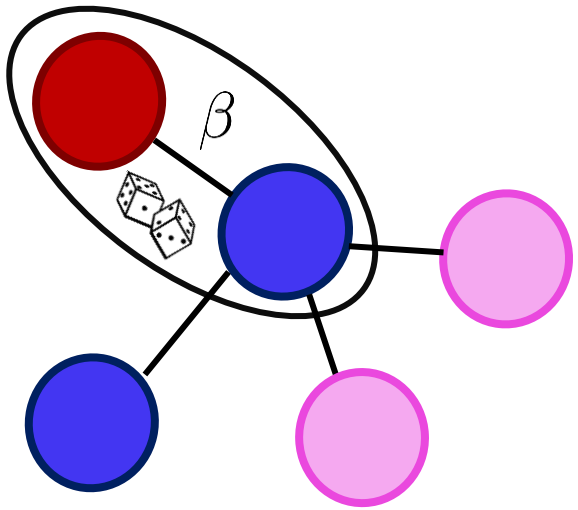


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

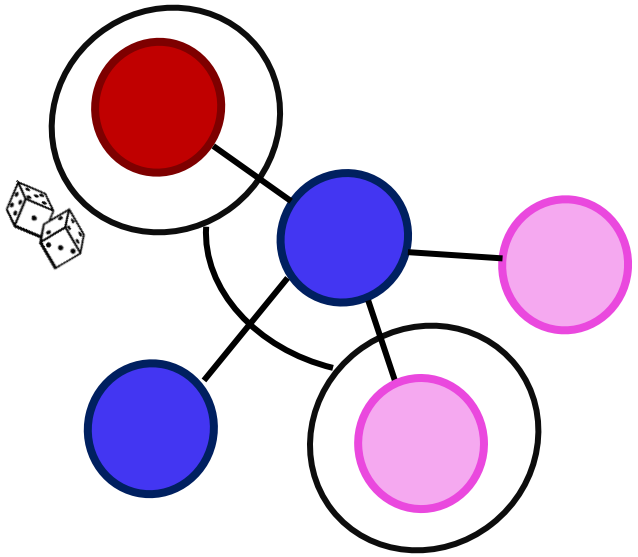
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





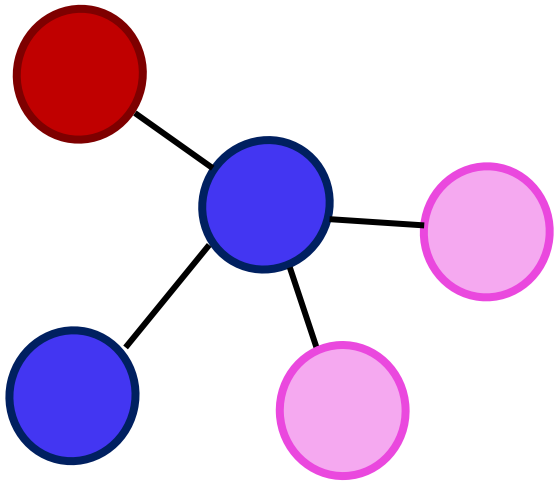
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$

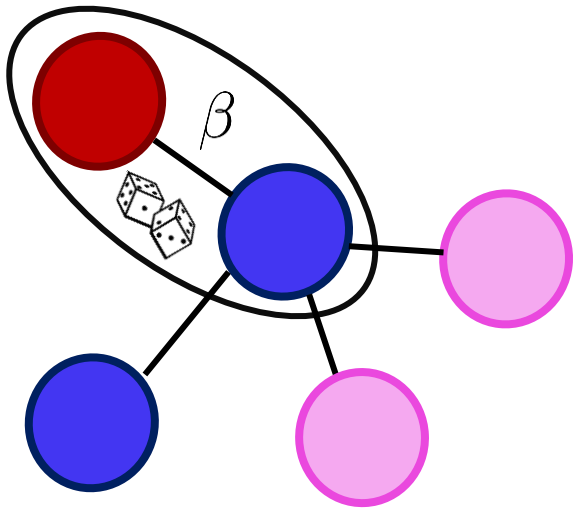


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

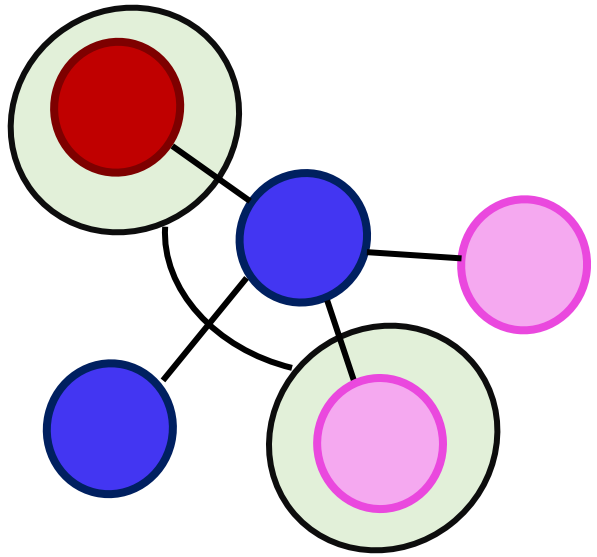
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





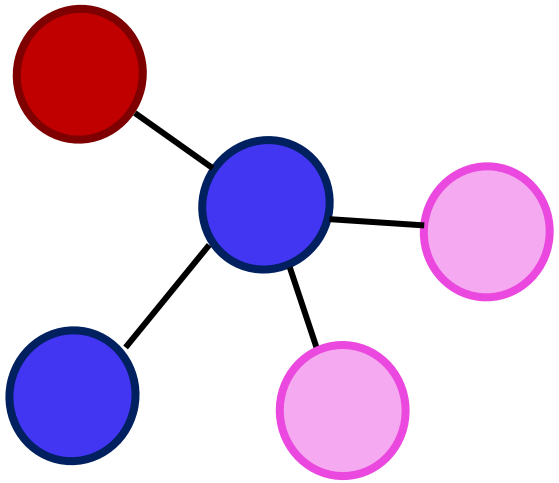
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$

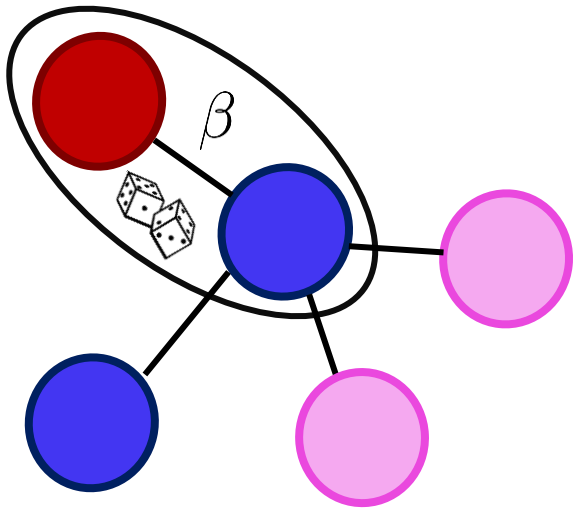


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

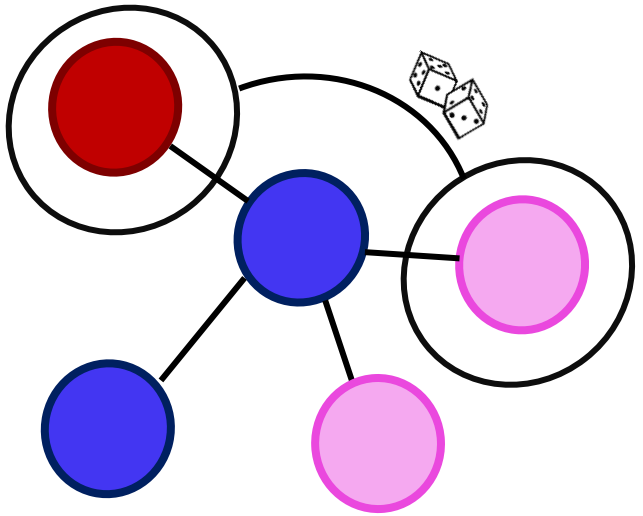
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





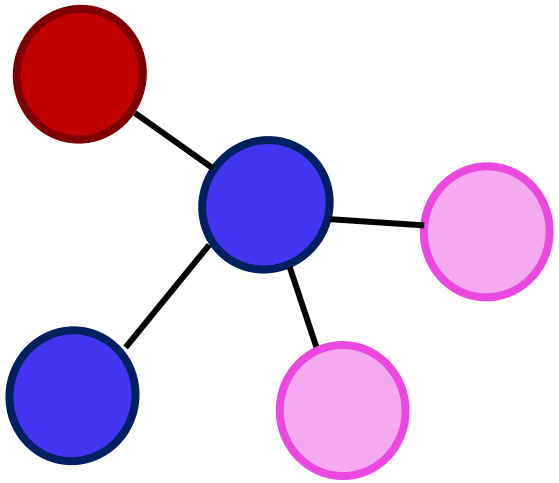
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$

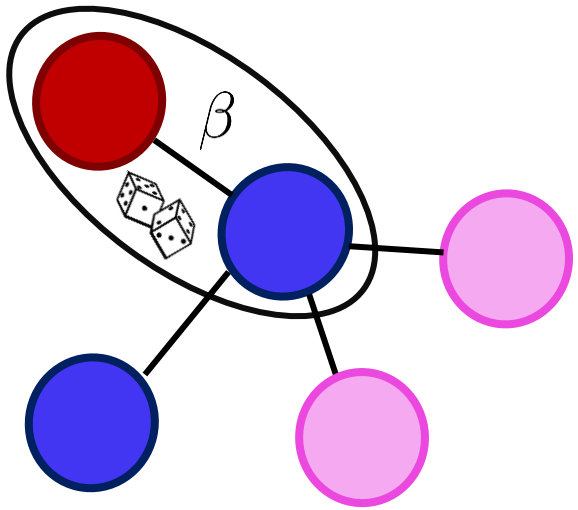


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

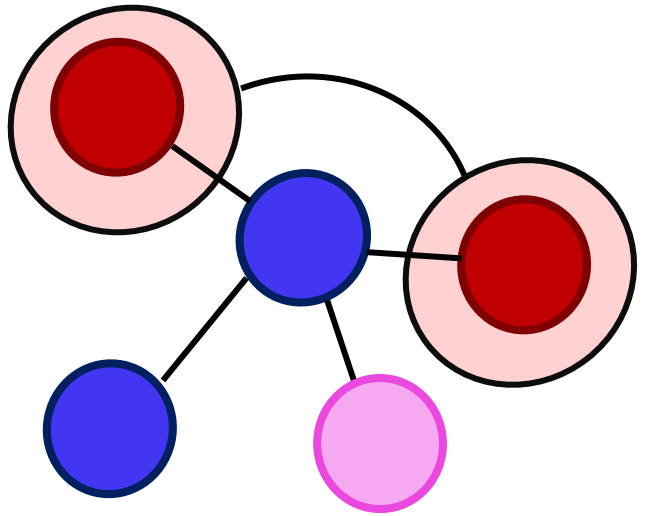
Humanos colaboradores

Humanos egoístas





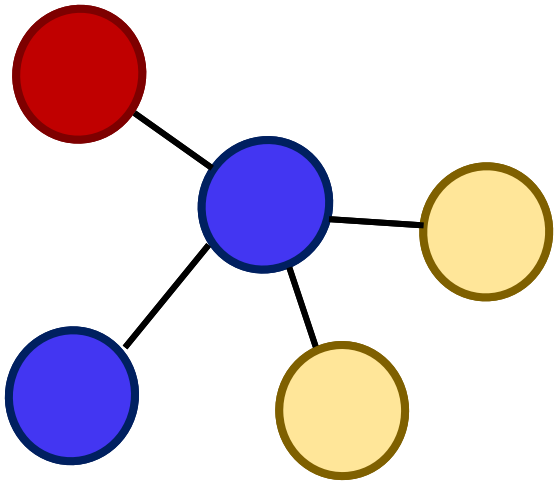
$$\beta \Rightarrow \beta e^{-(\#\text{cols.})}$$



EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

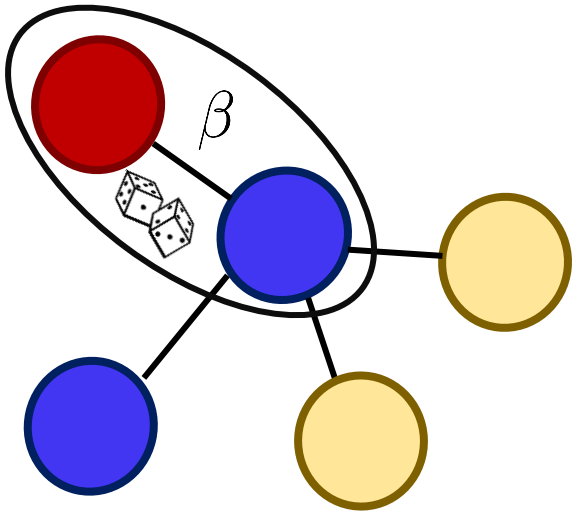
Humanos egoístas

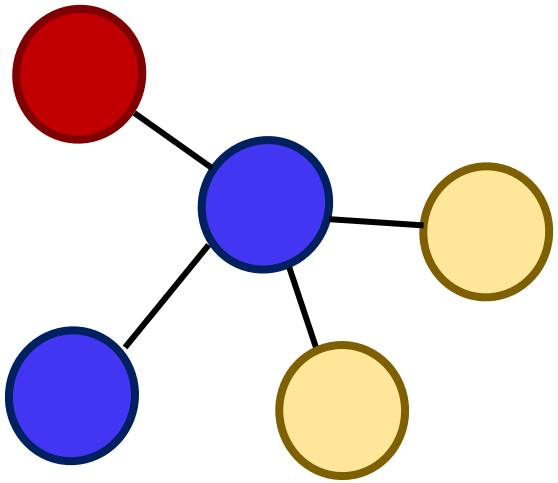


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

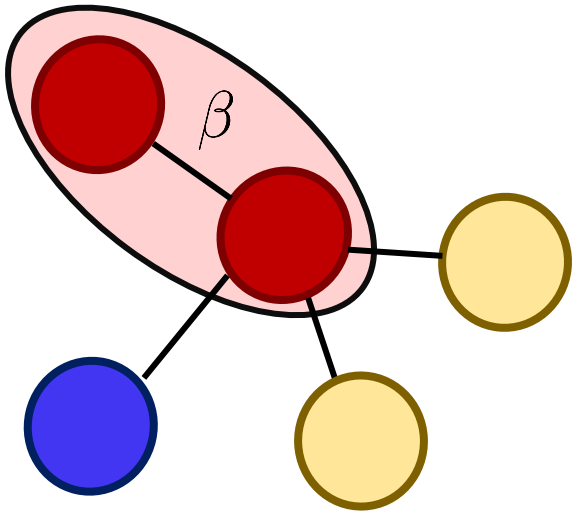
Humanos egoístas



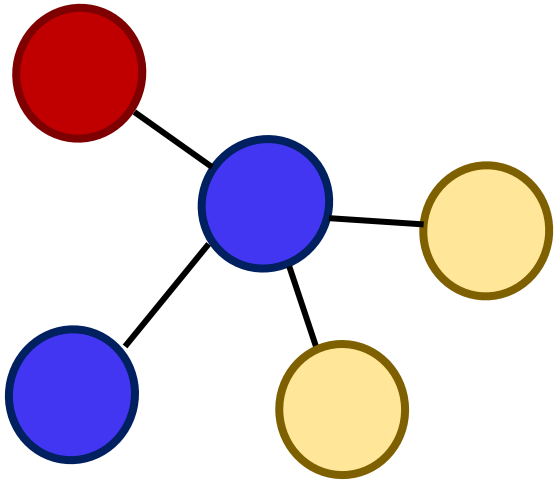


EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores



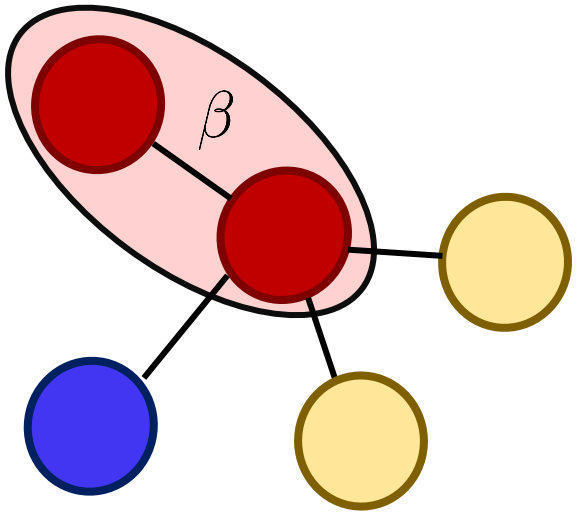
Humanos egoístas

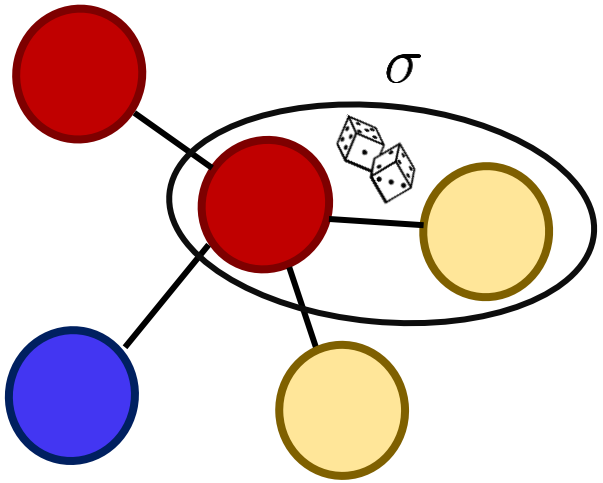


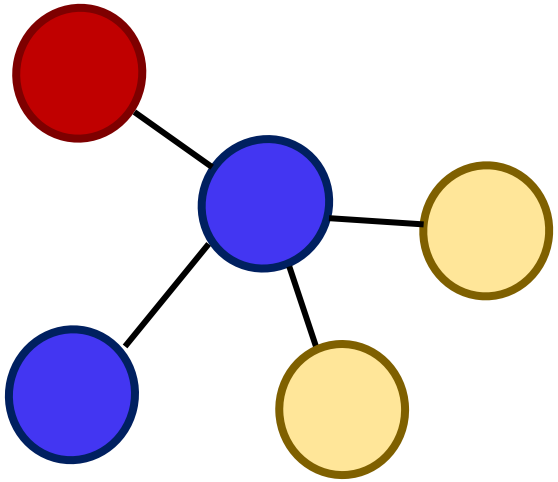
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

Humanos egoístas



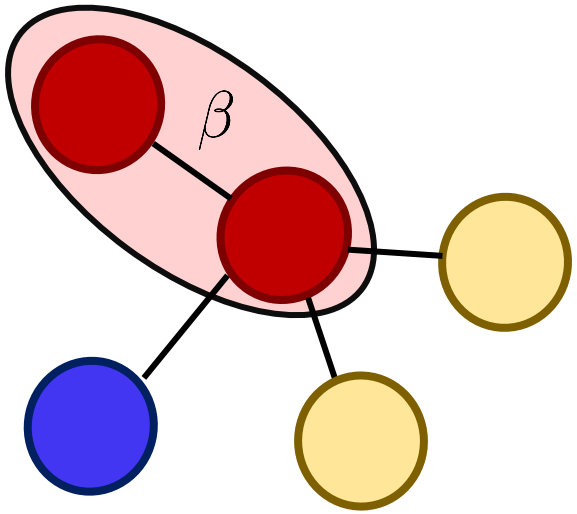


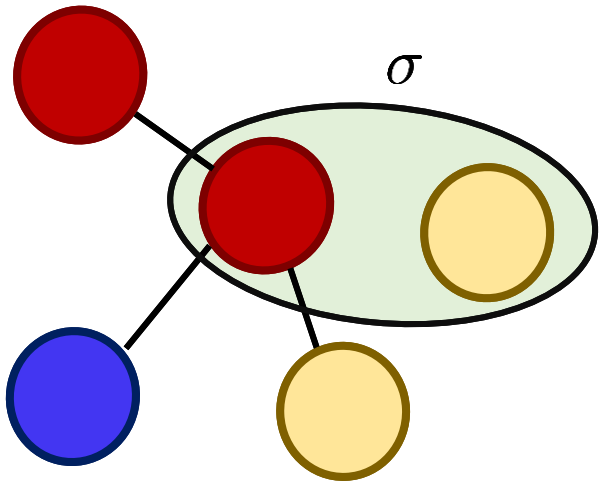


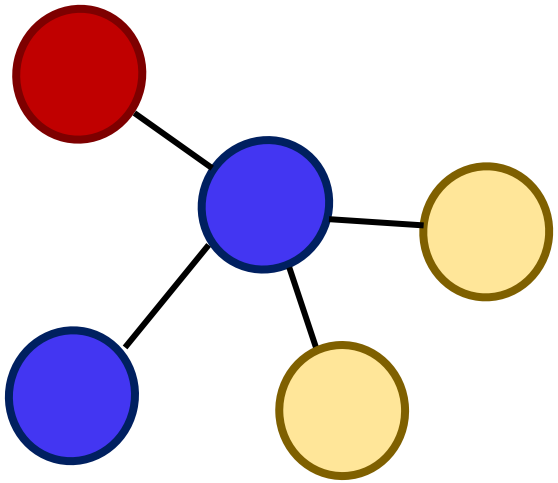
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

Humanos egoístas



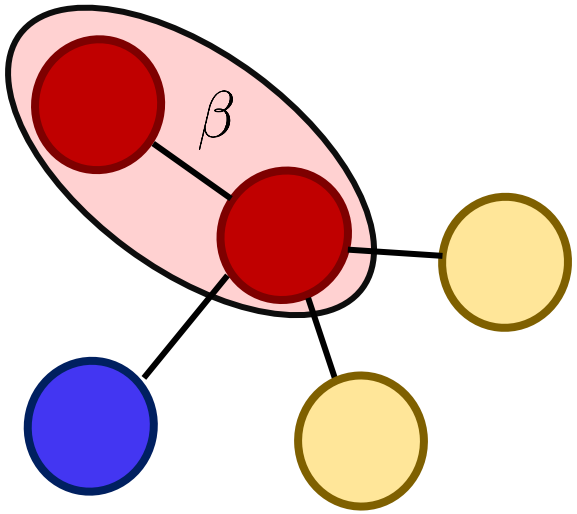


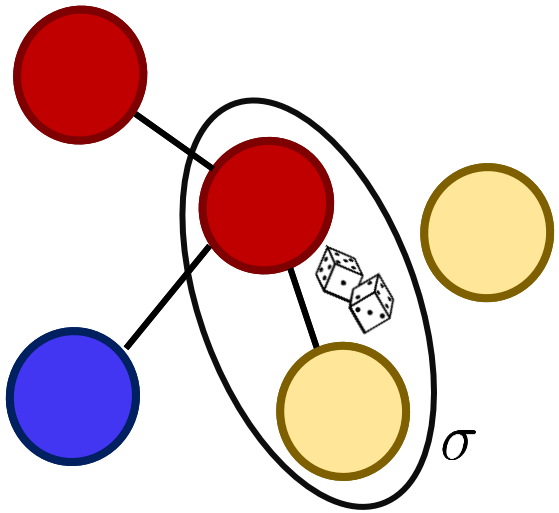


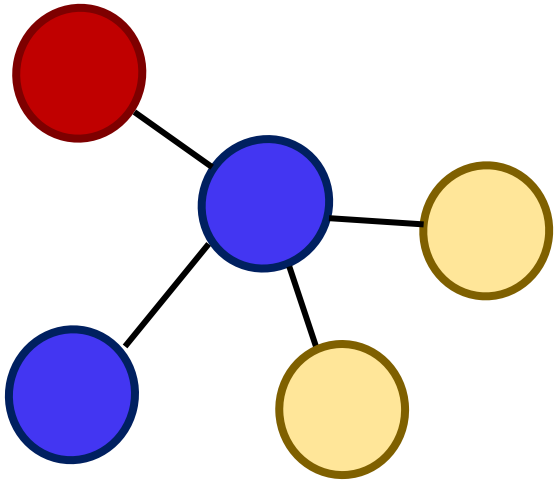
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

Humanos egoístas



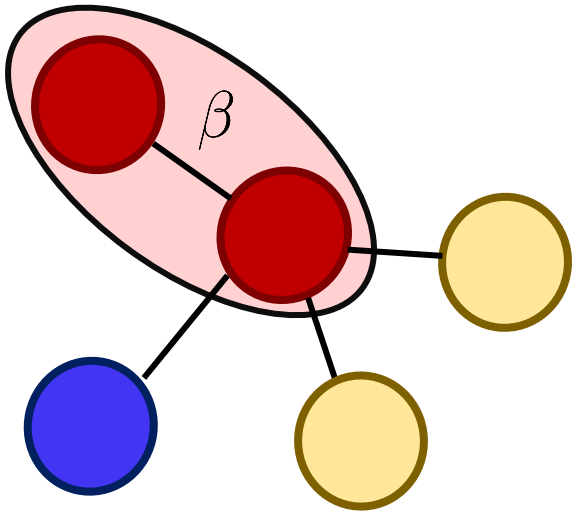


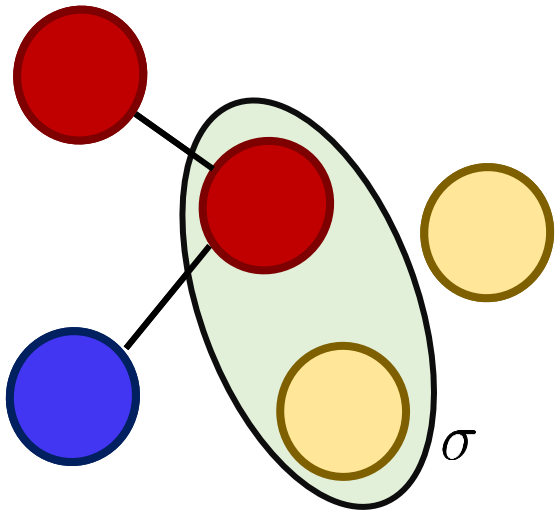


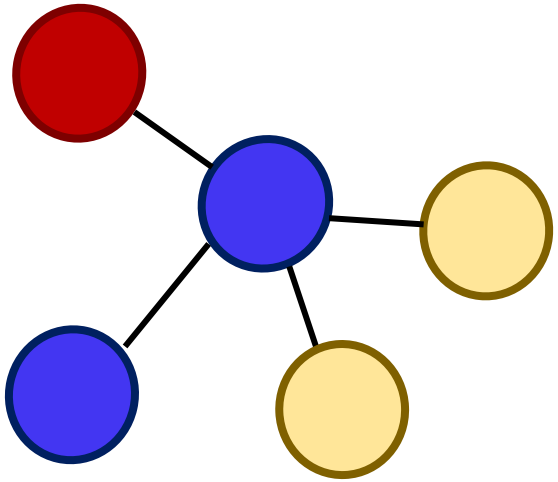
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

Humanos egoístas



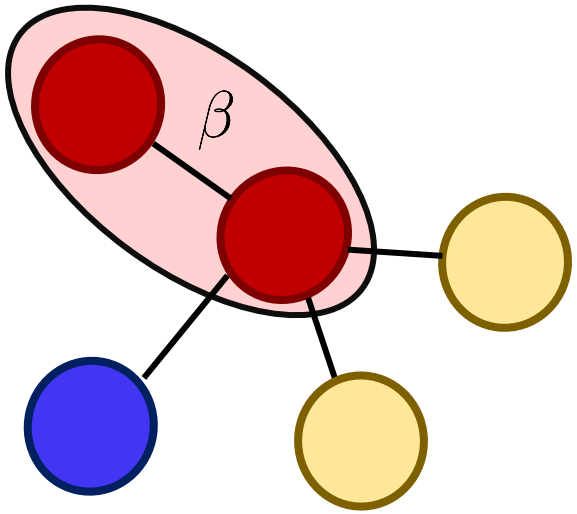


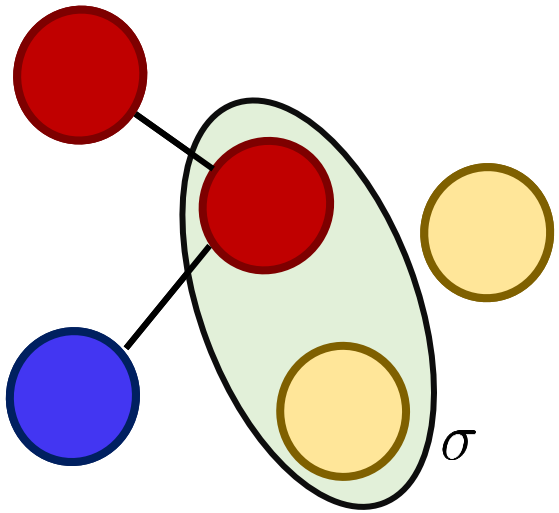


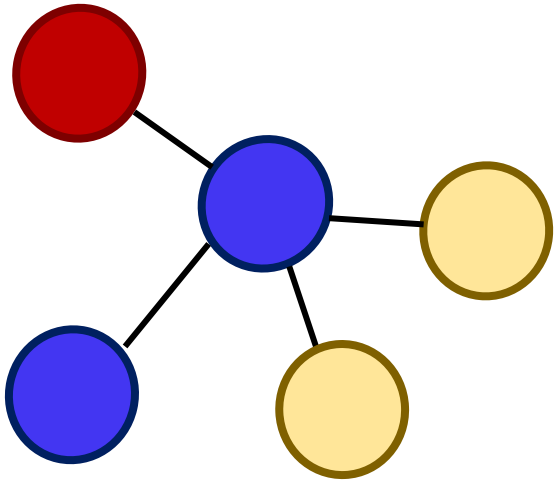
EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL GRAFO
MODELO SIR + supervivencia + cooperación

Humanos colaboradores

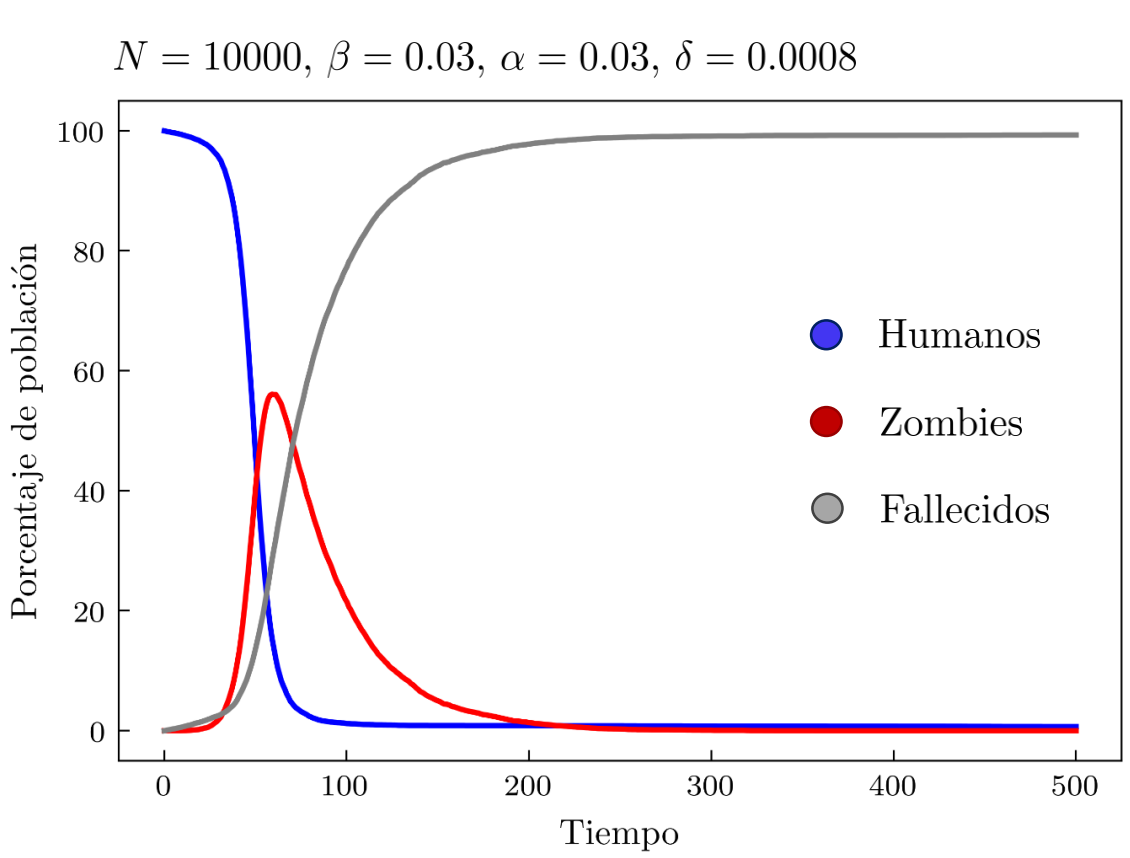
Humanos egoístas

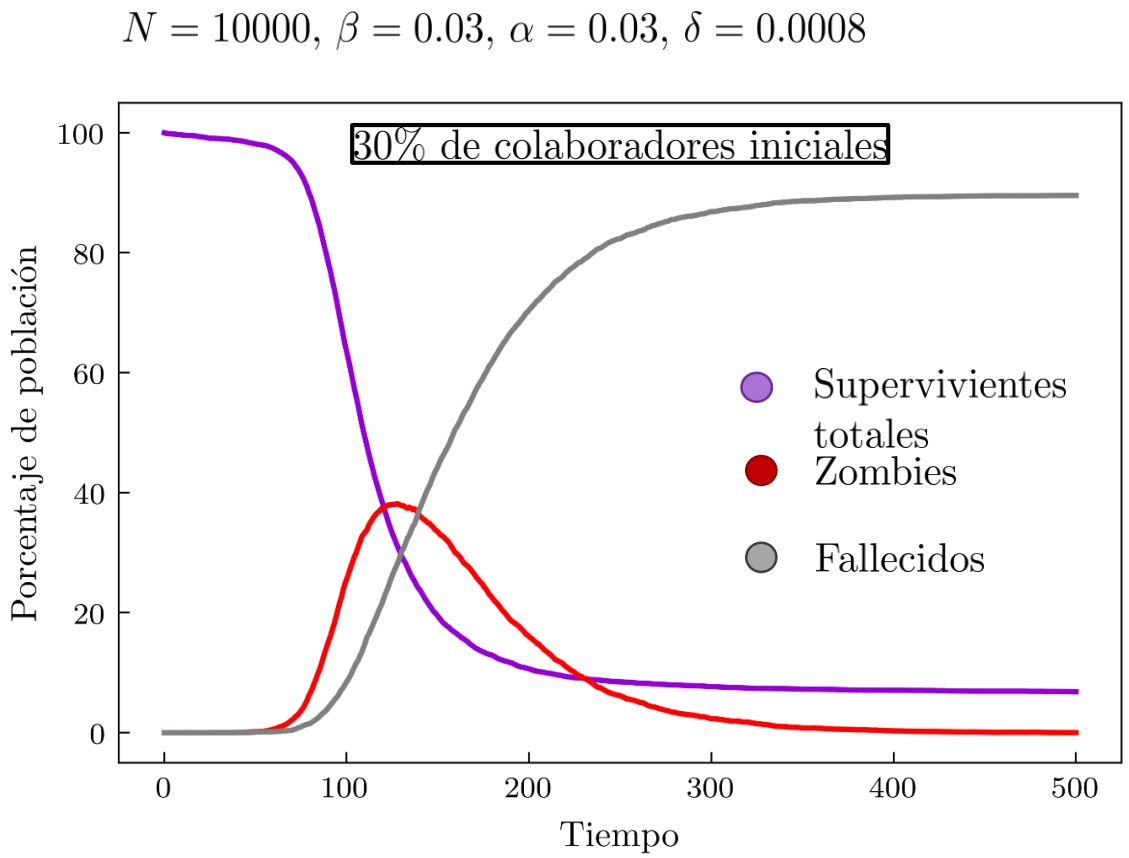




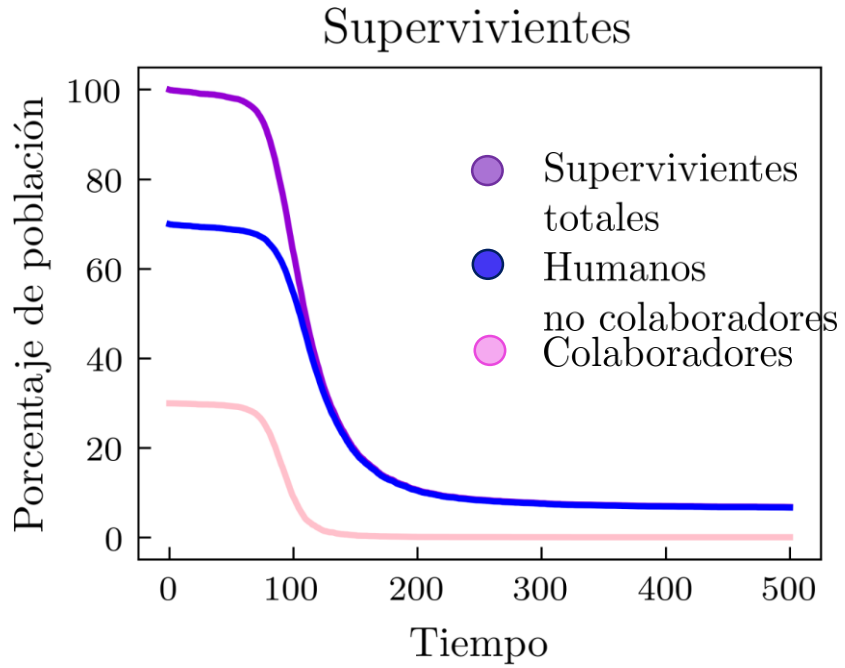


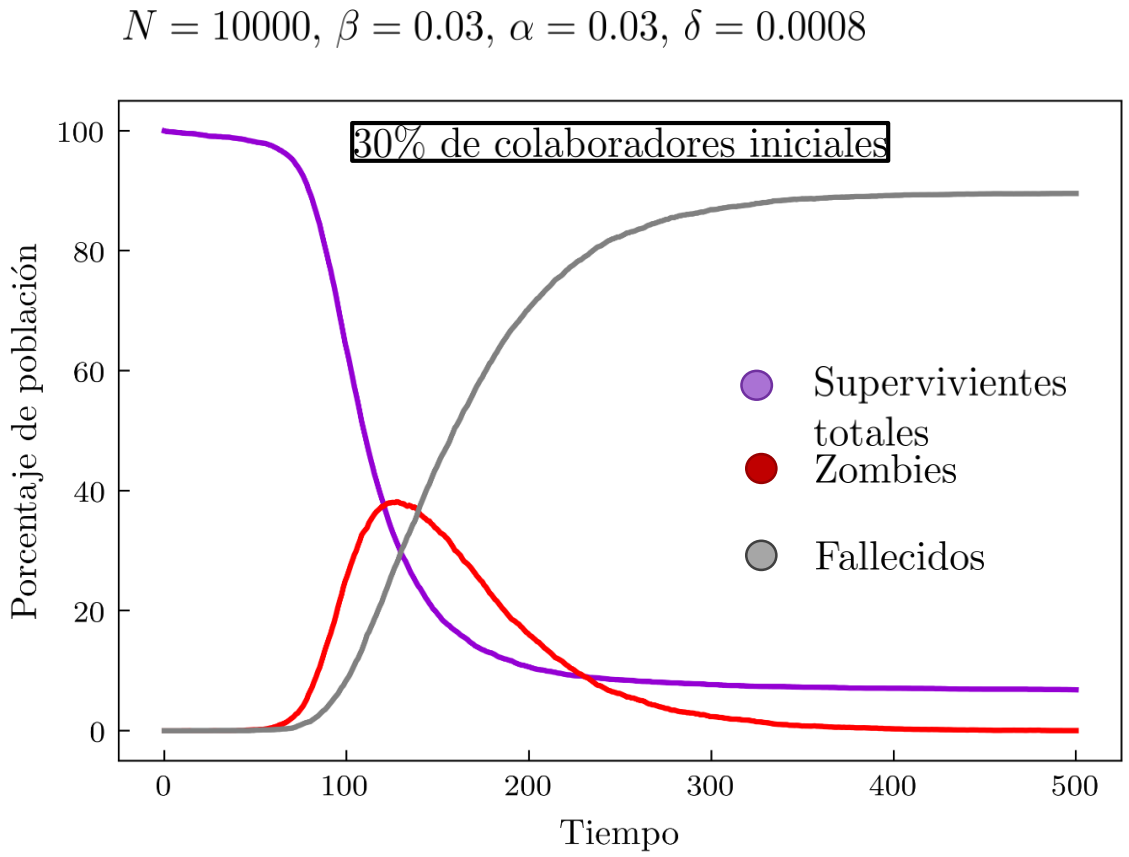
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores



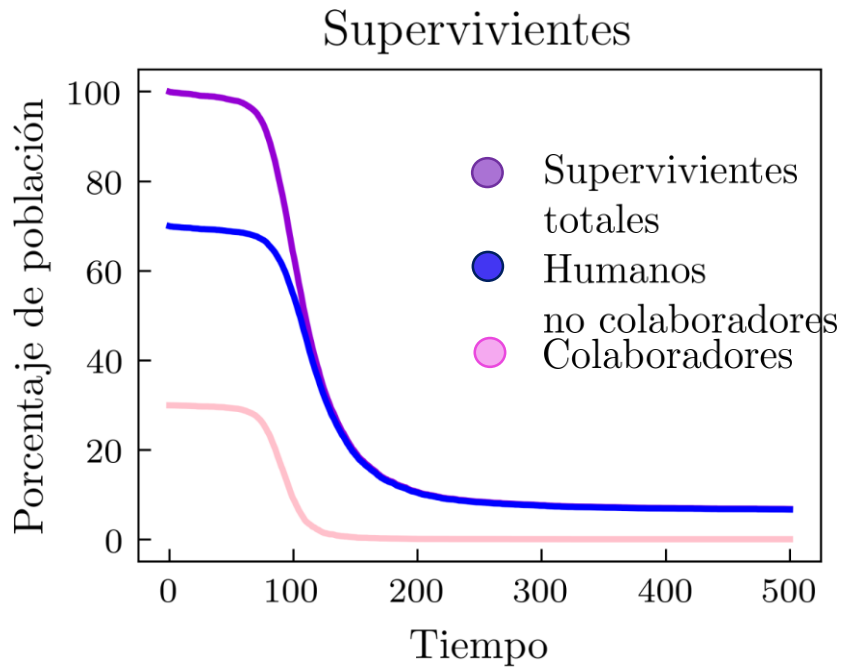


DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores





DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores

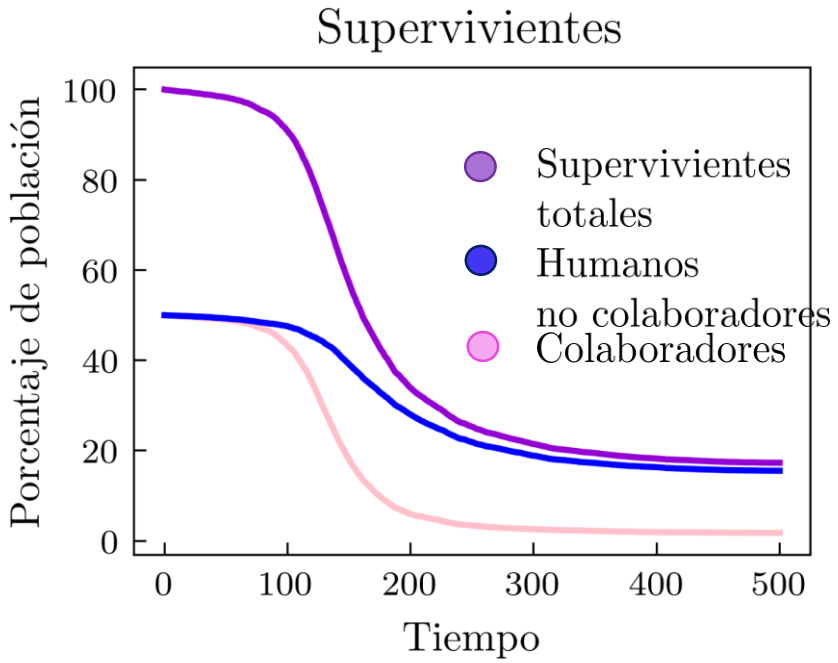


Ha muerto el 93% de la población

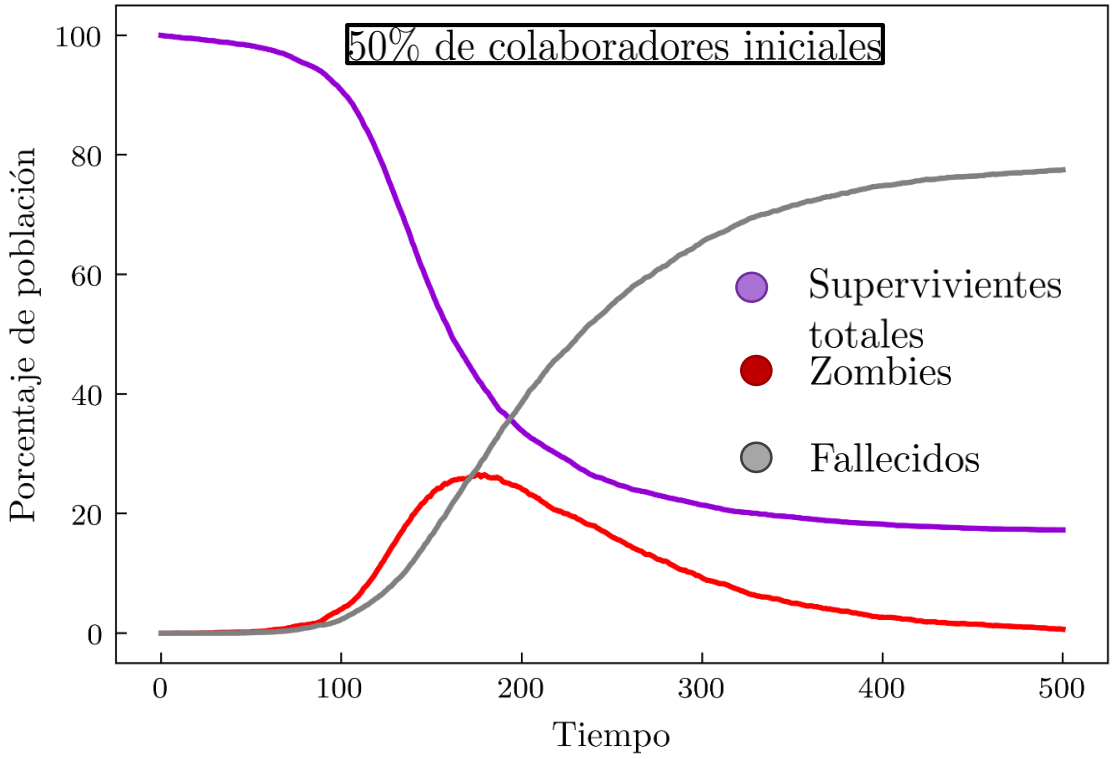
- Ha muerto el 99% de los colaboradores
- Ha muerto el 90% de los humanos no colaboradores

El sacrificio del 30% de la población ha permitido que sobreviva un 7%

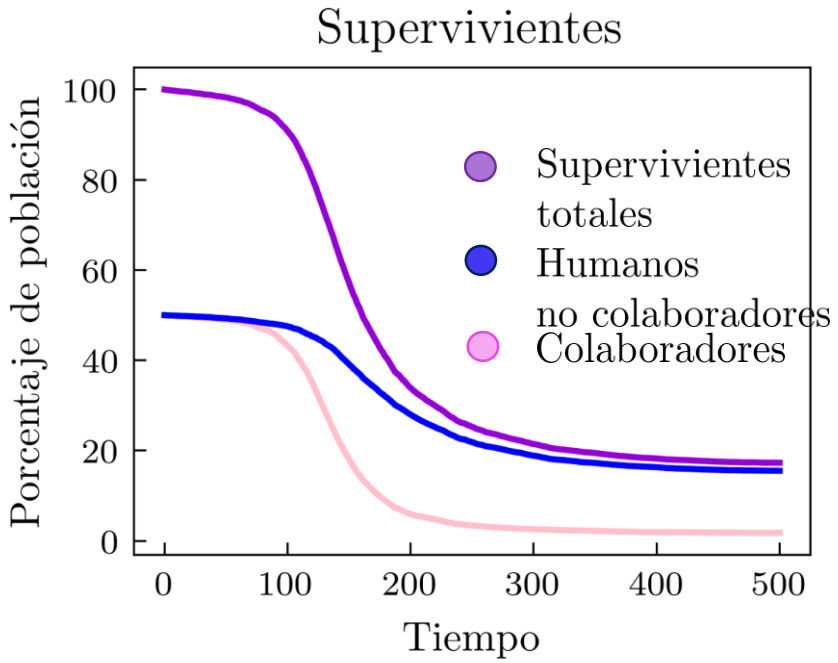
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores



$N = 10000,\ \beta = 0.03,\ \alpha = 0.03,\ \delta = 0.0008$



DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores

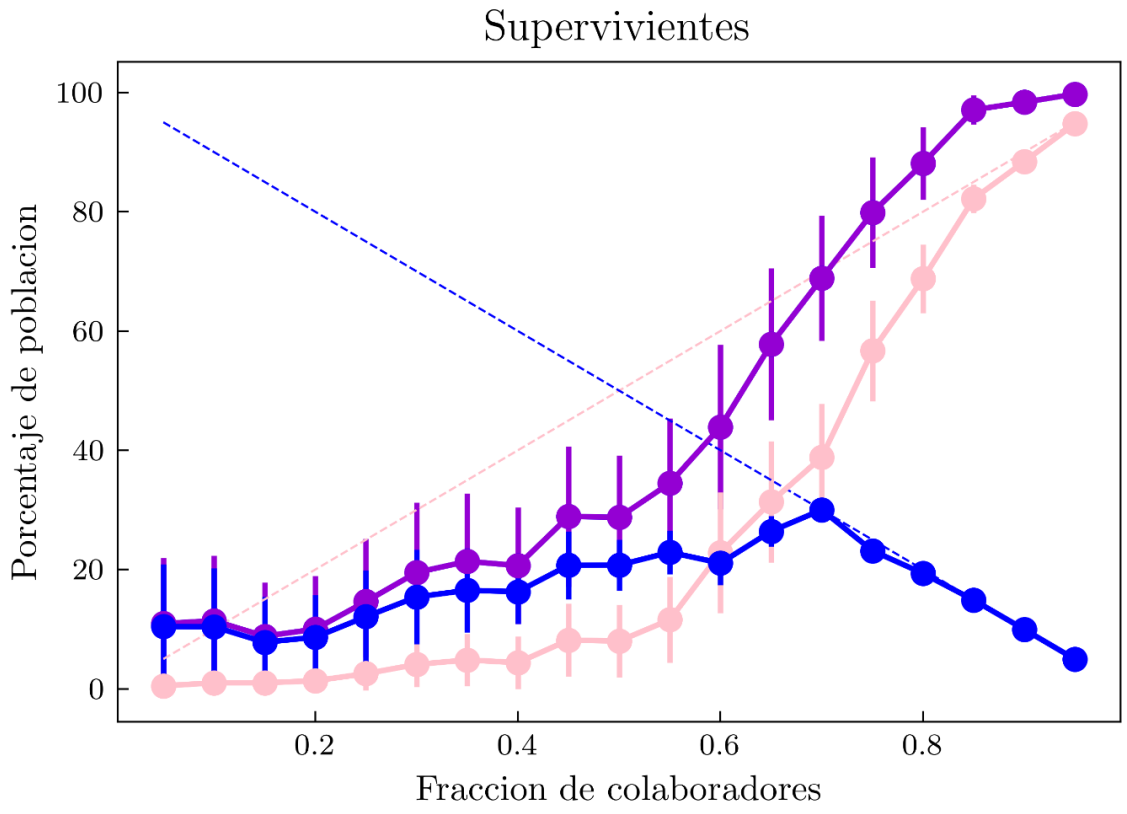


Ha muerto el 82% de la población

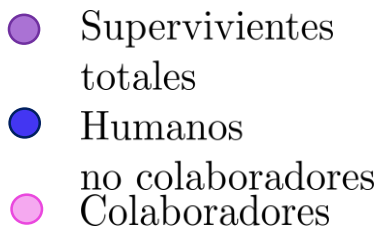
- Ha muerto el 96% de los colaboradores
- Ha muerto el 68% de los humanos no colaboradores

El sacrificio de ~50% de la población ha permitido que sobreviva un 18%

DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + colaboradores

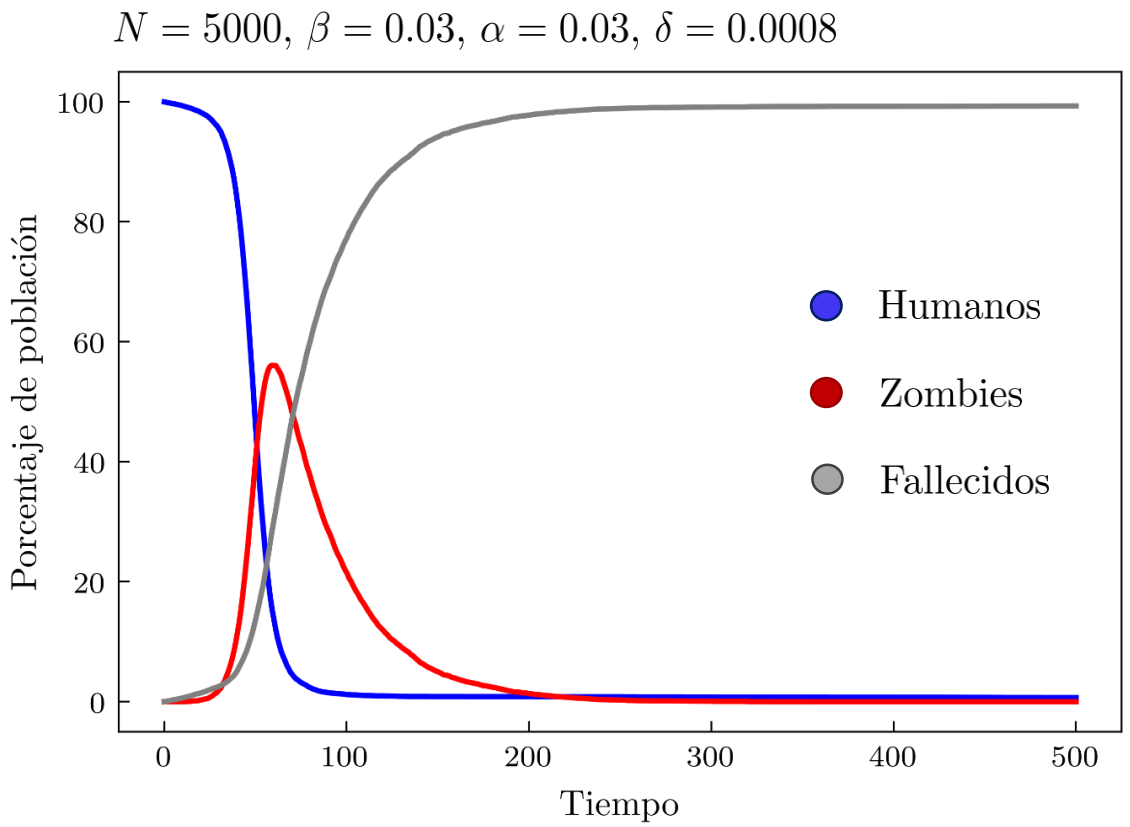


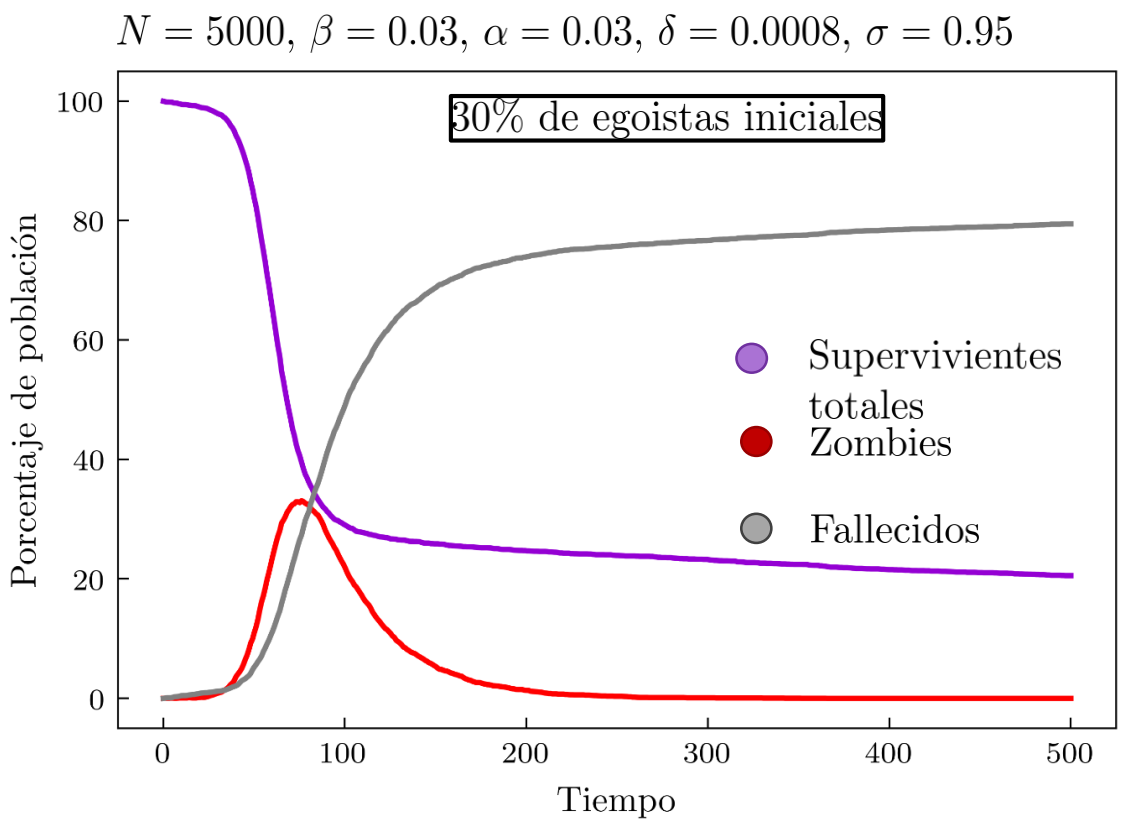
$N = 5000$, $\beta = 0.03$, $\alpha = 0.03$, $\delta = 0.0008$
Valores medios sobre 30 repeticiones



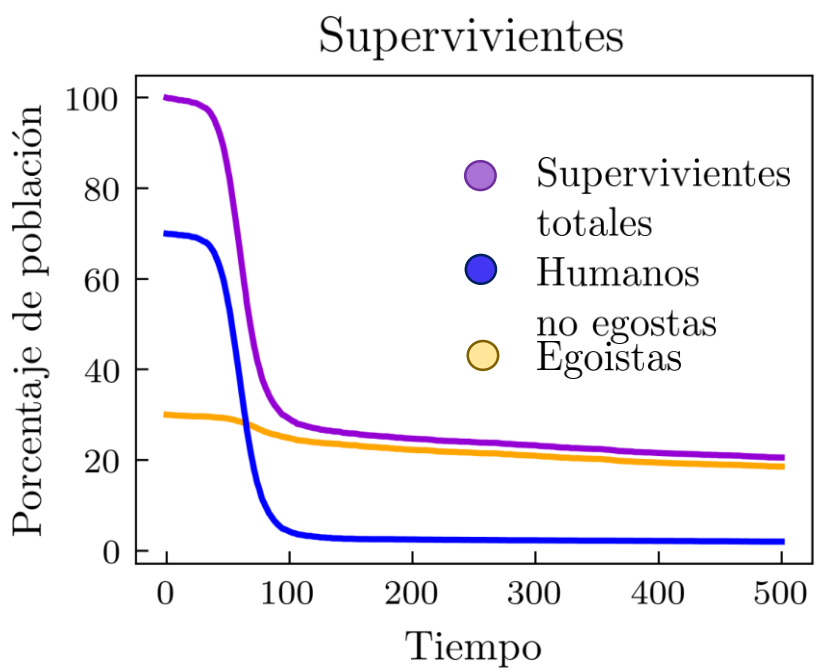
Es necesario que el porcentaje de colaboradores inicial sea alto para que sobrevivan

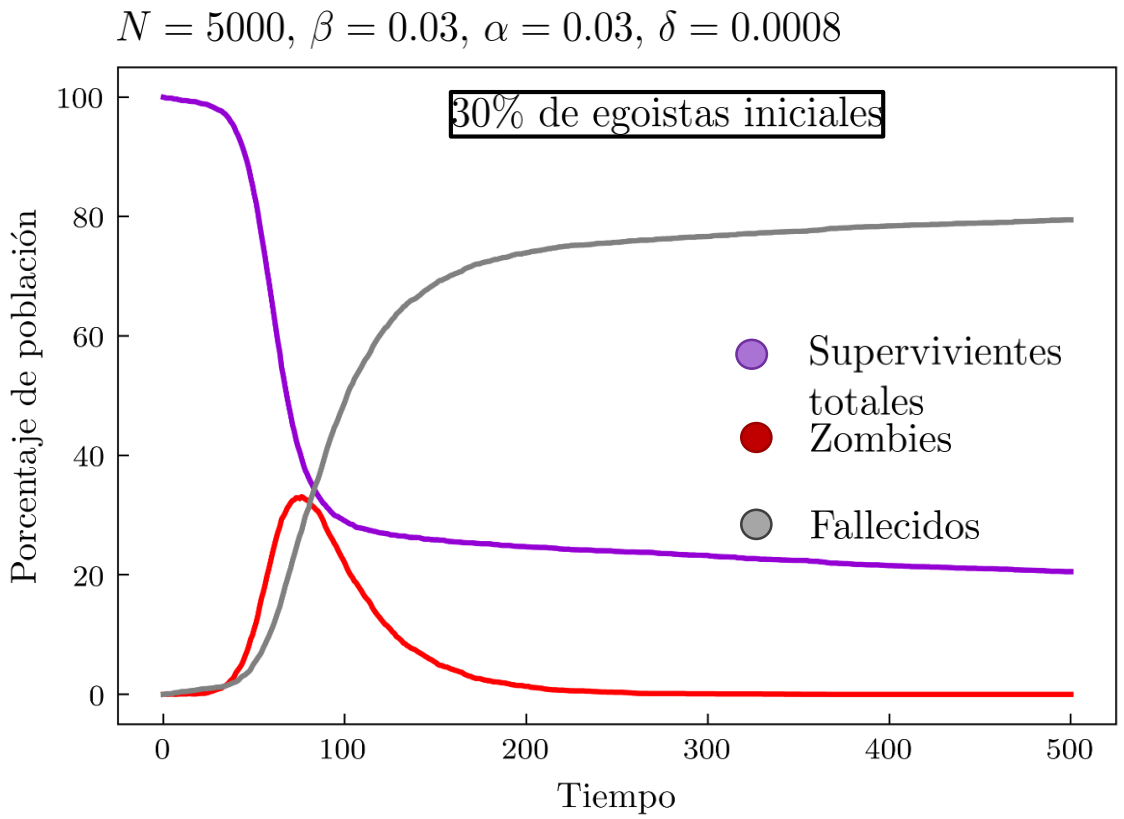
DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + egoístas



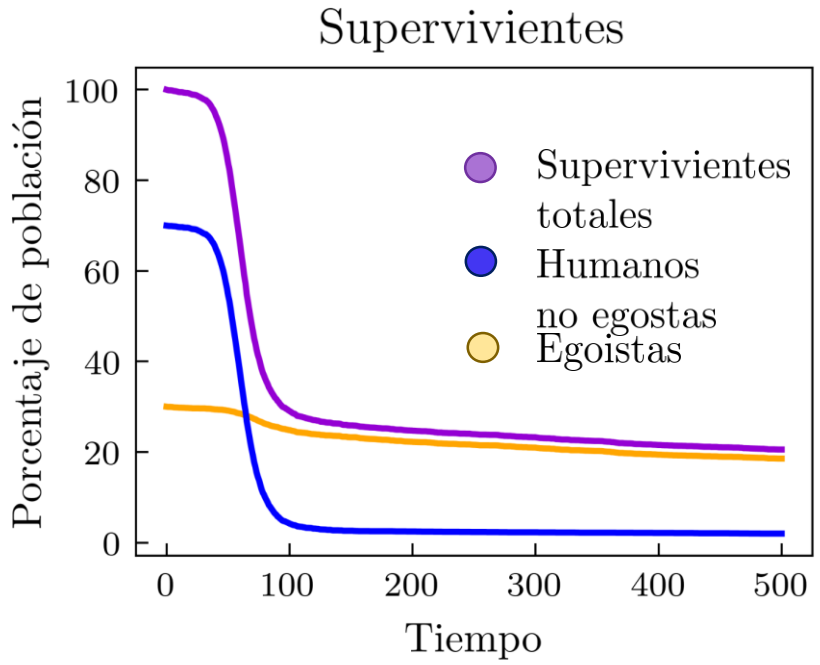


DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + egoístas





DINÁMICA DE PROPAGACIÓN DE LA EPIDEMIA
MODELO SIR + supervivencia + egoístas



Ha muerto el 79% de la población

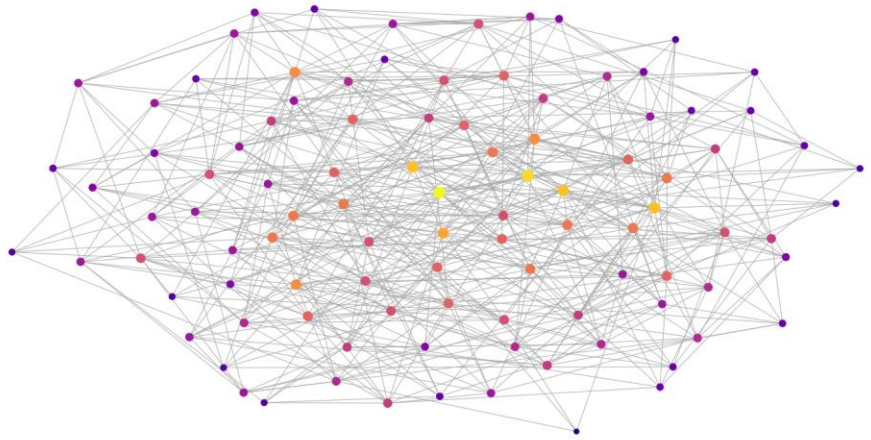
- Ha muerto el 97% de los humanos
- Ha muerto el 38% de los humanos egoístas

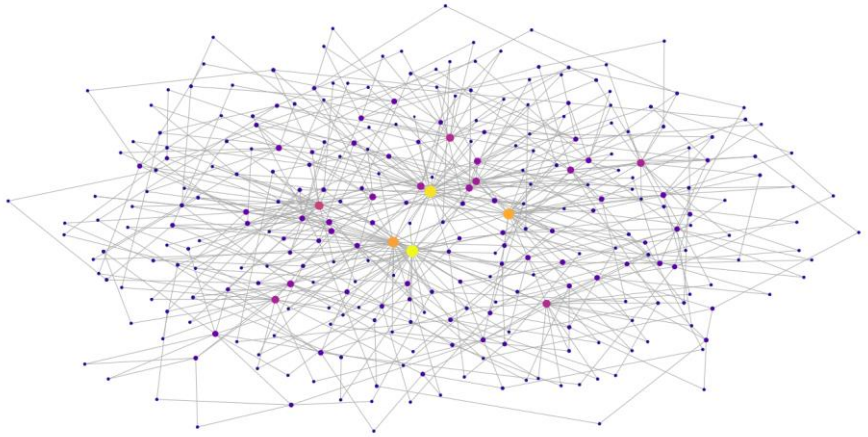
Sólo han sobrevivido los egoístas

CONCLUSIONES

- La teoría de grafos nos aporta las herramientas matemáticas necesarias para modelizar redes complejas, como por ejemplo, la que representa a una sociedad

- Una epidemia puede entenderse como un proceso dinámico sobre el grafo/red compleja





REFERENCIAS

- *Mathematical Modelling of Zombies*, Robert Smith. University of Ottawa Press.
- *When zombies attack!: mathematical modelling of an outbreak of zombie infection,* P. Munz, I. Hudea, J. Imad, R. Smith
- *Network Science,* Albert-László Barabási. Libro online: *networksciencebook.com*
- *Graph Theory and Complex Networks,* Maarten van Steen
- *The SIR model and the Foundations of Public Health,* Howard Weiss, Univ. Autónoma de Barcelona
- *SIR Epidemic model for influenza A (H1N1): Modelling the outbreak of the pandemic in Kolkata, West Bengal, India, 2010,* Sandipan Dey


JUST STAY CALM... DON'T FREAK OUT. WE'RE GOING TO BE FINE...
¡Gracias por la atención!
THE END