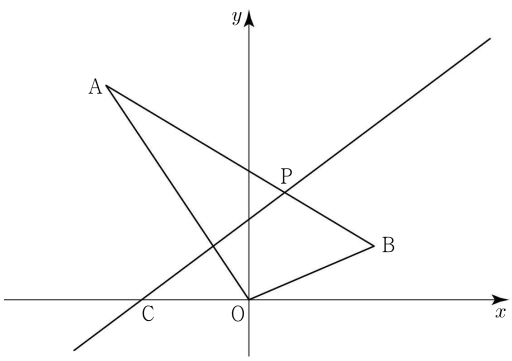
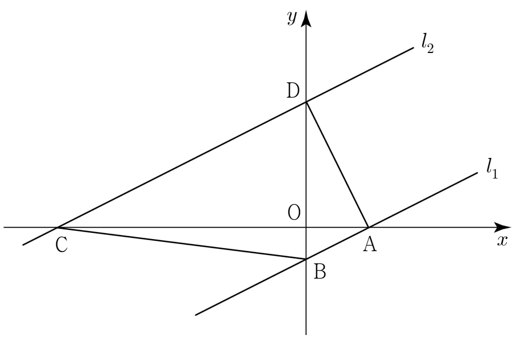
2학기 중간 2025 1학년 공통수학2 보충프린트

1. 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-8,\ a)$, $\mathrm{B}(7,\ 3)$, $\mathrm{C}(-6,\ 0)$이 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 직선 PC가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분한다. 양수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

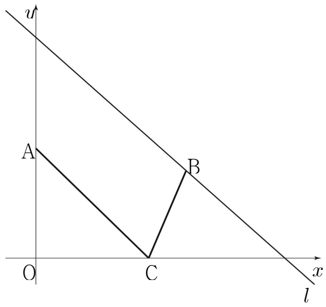


① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2. 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 $l_1 : x-2y-2=0$과 평행하고 y절편이 양수인 직선 l_2가 있다. 직선 l_1이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 직선 l_2가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ADCB의 넓이가 25이다. 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오.



3. 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$과 직선 $l : y=-x+2$가 있다. 직선 l 위의 제1사분면 위의 점 $\mathrm{B}(a,\ b)$와 x축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값이 최소일 때, a^2+b^2의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 원 $C : x^2+y^2-2x-ay-b=0$에 대하여 좌표평면에서 원 C의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있다. 원 C와 직선 $y=2x-1$이 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 4일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 좌표평면에서 두 양수 a, b에 대하여 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원을 C라 하자. 원 C가 x축과 y축에 동시에 접할 때, $a+b$의 값은?

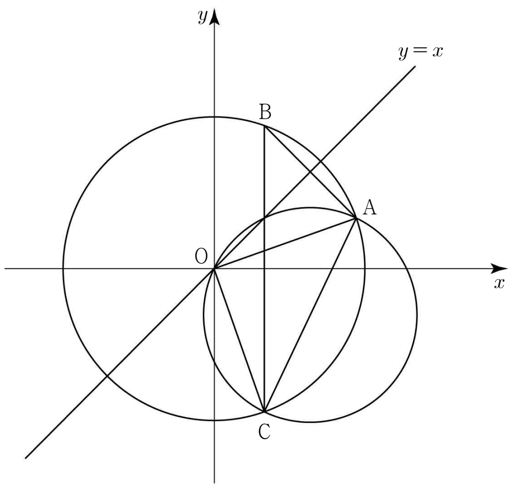
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 두 자연수 m, n에 대하여 원 $C: (x-2)^2+(y-3)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원을 C_1, 원 C_1을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C_2 라 하자. 두 원 C_1, C_2와 직선 $l: 4x-3y=0$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원 C_1은 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만난다.
(나) 원 C_2은 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만난다.

$m+n$의 최댓값을 구하시오.

7 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)\ (a>2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자. 두 삼각형 ABC, AOC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 할 때, $r_1 \times r_2 = 18\sqrt{2}$이다. 상수 a에 대하여 a^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



8. 좌표평면에서 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하고 점 $(2, 0)$을 지나는 서로 다른 두 원의 중심을 각각 O_1, O_2라 할 때, 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 길이를 구하시오.

9. 두 실수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2$이 있다. 중심이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있고 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 x축에 동시에 접하는 서로 다른 원의 개수는 3이다. 이 세 원의 중심의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 세 실수 x_1, x_2, x_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 \times x_2 \times x_3 > 0$
(나) 세 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표는 $-\frac{7}{3}$이다.

$f(4)\times f(6)$의 값을 구하시오.

10. 두 자연수 a, $b(b \le 20)$에 대하여
전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 a의 배수, $x \in U\}$,
$B=\{x|x$는 b의 약수, $x \in U\}$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{3, 6\} \subset A \cap B$
(나) $n(B-A)=2$

집합 $A-B$의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.

11. 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 부분집합
$A=\{x|x$는 10의 약수$\}$에 대하여
$X-A \subset A-X$를 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

12. 전체집합 $U=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 $A \cup B^C$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 6배이다.
(나) $n(A \cup B)=5$

집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.
(단, $2 \le n(B-A) \le 4$)

13. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$

에 대하여 집합 U의 부분집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은?

(가) $n(X)=6$
(나) $A-X=B-X$
(다) $(X-A) \cap (X-B) \ne \varnothing$

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

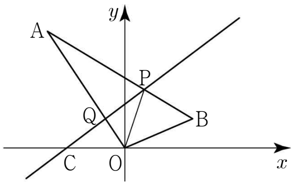
14. 전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A)=n(B)=8$, $n(A \cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 9의 배수가 아니다.
(다) 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 10의 배수가 아니다.

집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$, 집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구하시오.

<해설>

1. 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기



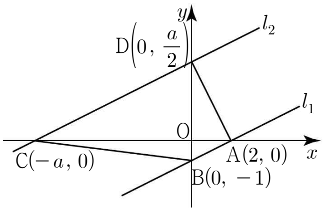
직선 PC와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하고 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하자.

두 삼각형 AOP, AQP의 넓이가 각각 $\frac{2}{3}S$,

$\frac{1}{2}S$이므로 삼각형 QOP의 넓이는 $\frac{1}{6}S$이다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비는
선분 AQ와 선분 QO의 길이의 비와 같다.
두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비가 $3:1$이므로
$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QO}}=3:1$ 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{3\times0+1\times(-8)}{3+1},\ \frac{3\times0+1\times a}{3+1}\right)=\left(-2,\ \frac{a}{4}\right)$
점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\times7+1\times(-8)}{2+1},\ \frac{2\times3+1\times a}{2+1}\right)=\left(2,\ \frac{a+6}{3}\right)$
직선 PC의 방정식은
$y=\frac{\frac{a+6}{3}}{2-(-6)}(x+6)=\frac{a+6}{24}(x+6)$
점 Q가 직선 PC 위의 점이므로
$\frac{a}{4}=\frac{a+6}{24}\times(-2+6)$. 따라서 $a=12$

2. 직선의 방정식 이해하기



두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하므로
$l_2 : x-2y+a=0\ (a>0)$
(사각형 ADCB의 넓이)
=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times(a+2)\times\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\times(a+2)\times1$
$=\frac{1}{2}(a+2)\left(\frac{a}{2}+1\right)=\frac{a^2}{4}+a+1=25$
$a^2+4a-96=0$. $(a+12)(a-8)=0$
$a=-12$ 또는 $a=8$, $a>0$이므로 $a=8$
두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리는 직선 l_1 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$과 직선 $l_2 : x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$. 따라서 $d^2=20$

3. 대칭이동을 이용하여 추론하기

점 B가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 점 B의 좌표는 $(a,\ -a+2)$이다. 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{BC}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$이고 $\overline{\mathrm{A'B}}$가 최소일 때
$\overline{\mathrm{A'B}}^2$도 최소이므로
$\overline{\mathrm{A'B}}^2=a^2+(-a+3)^2=2a^2-6a+9=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$,
$0<a<2$이므로 $a=\frac{3}{2}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값은 최소이다.
$b=-a+2=\frac{1}{2}$ 따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

4. 원의 방정식을 활용하여 문제해결하기

$x^2+y^2-2x-ay-b=0$에서
$(x-1)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+1$이므로
원 C의 중심의 좌표는 $\left(1,\ \frac{a}{2}\right)$,
반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+1}$
원 C의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$\frac{a}{2}=2\times1-1$에서 $a=2$,
원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{b+2}$
삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 하면
선분 AB는 원 C의 지름이므로 삼각형 ABP의 높이의 최댓값은 원 C의 반지름의 길이와 같다.
그러므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{b+2}\times\sqrt{b+2}=4$
$b+2=4$, $b=2$
따라서 $a+b=4$

5. 평행이동 이해하기

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$은 중심의 좌표가 (a,b)이고 반지름의 길이가 b이므로 원 C는 중심의 좌표가 $(a+3,\ b-8)$이고 반지름의 길이가 b이다.
원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로 $a+3=|b-8|=b$
$b-8\neq b$이므로 $-b+8=b$,
$b=4$이고 $a+3=4$, $a=1$이므로 $a+b=5$

6. 평행이동 이해하기

원 C_1이 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 C_1의 중심 $(2+m, 3)$과 직선 $4x-3y=0$과의 거리가 원의 반지름의 길이인 3보다 작아야 하므로

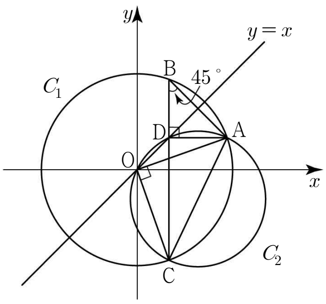
$$\frac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3 \text{ 에서 } -\frac{7}{2}<m<4$$

따라서 자연수 m의 값은 $1, 2, 3$이다.
원 C_2가 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원 C_2의 중심 $(2+m, 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$과의 거리가 원의 반지름의 길이인 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|4(2+m)-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3 \text{ 에서 } -14<4m-3n<16$$

(i) $m=1$일 때, $-4<n<6$ $(n=1, 2, \cdots, 5)$
(ii) $m=2$일 때, $-\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}$ $(n=1, 2, \cdots, 7)$
(iii) $m=3$일 때, $-\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}$ $(n=1, 2, \cdots, 8)$
$m+n$의 최댓값은 $3+8=11$이다.

7. 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 $A(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $B(2, a)$이고,
점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $C(2, -a)$
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{a^2+4}$ 이므로 점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이고 $r_1=\overline{OA}$
선분 BC와 직선 $y=x$가 만나는 점을 D라 하면 삼각형 BDA는 직각이등변삼각형이므로 $\angle ABD=\angle ABC=45^\circ$
두 삼각형 ABC, AOC의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하자.
$\angle ABC$는 원 C_1의 호 AC에 대한 원주각이고, $\angle AOC$는 원 C_1의 호 AC에 대한 중심각이므로 $\angle AOC=2\times\angle ABC=90^\circ$
$\angle AOC=90^\circ$이므로 선분 AC는 원 C_2의 지름이다.

$$r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_1$$

$$r_1\times r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}{r_1}^2=18\sqrt{2}, \ r_1=6$$

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+4}=6$. 따라서 $a^2=32$

[참고]
$A(a, 2)$, $C(2, -a)$이므로
직선 OA의 기울기 $\frac{2}{a}$, 직선 OC의 기울기 $-\frac{a}{2}$
두 직선 OA, OC의 기울기의 곱이
$\frac{2}{a}\times\left(-\frac{a}{2}\right)=-1$이므로 두 직선 OA, OC가 서로 수직이다.
$\angle AOC=90^\circ$

8 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 원의 중심을 $C(a, b)$, 반지름의 길이를 r이라 하자.
점 C와 직선 $2x-y+6=0$ 사이의 거리는 r이고
점 C와 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리도 r이므로

$$r=\frac{|2a-b+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+b-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} \ \cdots \ ㉠$$

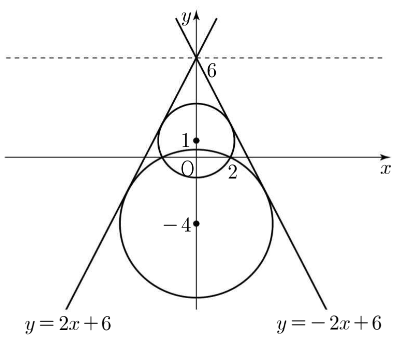
에서 $|2a-b+6|=|2a+b-6|$이고,
$2a-b+6=2a+b-6$이면 $b=6$,
$2a-b+6=-(2a+b-6)$이면 $a=0$이다.
중심이 $C(a, 6)$이고 두 직선 $y=2x+6$,
$y=-2x+6$에 모두 접하는 원은 $(2, 0)$을 지날 수 없으므로 $b\neq 6$
그러므로 $a=0$이고, 원의 중심 C의 좌표는 $C(0, b)$
점 $C(0, b)$에서 점 $(2, 0)$까지의 거리가 r이므로
㉠에 의하여

$$\sqrt{(2-0)^2+(0-b)^2}=\frac{|b-6|}{\sqrt{5}}$$

$$b^2+4=\frac{(b-6)^2}{5}$$

$$4b^2+12b-16=4(b+4)(b-1)=0$$

에서 $b=-4$ 또는 $b=1$
그러므로 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 두 원의 중심 O_1, O_2의 좌표는
$(0, -4)$, $(0, 1)$
따라서 선분 O_1O_2의 길이는 5



9. 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

$x_1 < x_2 < x_3$이라 하면 조건 (가)에 의하여 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ 또는 $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$

조건 (나)에 의하여 세 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표가 음수이므로 $a<0$

원의 중심을 $\mathrm{P}(p, q)$라 하면 $q<0$

점 P와 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

점 P와 x축 사이의 거리 $-q$와 같다.

$$\frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4p-3q|}{5} = -q$$

(i) $4p-3q=-5q$인 경우

$q=-2p$이므로 점 P는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x$가 만나는 점이다.

(ii) $-(4p-3q)=-5q$인 경우

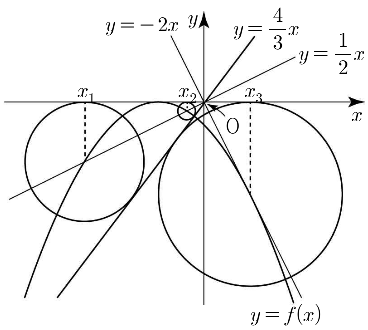
$q=\frac{1}{2}p$이므로 점 P는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점이다.

조건 (가)와 (i), (ii)에 의하여

$x_1<0$, $x_2<0$, $x_3>0$이고 $b<0$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-2x$에 접하고, 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t, a(t-b)^2)$이라 하자.

① 점 P가 직선 $y=-2x$ 위의 점인 경우

t에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2=-2t$가 중근 x_3을 갖는다.

$at^2-2(ab-1)t+ab^2=0$ ⋯ ㉠

이차방정식 $at^2-2(ab-1)t+ab^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(ab-1)^2-a^2b^2=0$$

$$a^2b^2-2ab+1-a^2b^2=0$$

$$b=\frac{1}{2a} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $at^2+t+\frac{1}{4a}=0$

$$a\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2=0,\ x_3=-\frac{1}{2a}$$

② 점 P가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점인 경우

t에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2=\frac{1}{2}t$가 서로 다른 두 근 x_1, x_2를 갖는다.

$2at^2-(4ab+1)t+2ab^2=0$

㉡에서 $b=\frac{1}{2a}$이므로 $2at^2-3t+\frac{1}{2a}=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $x_1+x_2=\frac{3}{2a}$

조건 (나)와 ①, ②에 의하여

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}=-\frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) &= \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}-2x_3 \\ &= \frac{1}{2}(x_1+x_2)-2x_3=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2a}-2\times\left(-\frac{1}{2a}\right) \\ &= \frac{3}{4a}+\frac{1}{a}=\frac{7}{4a}=-7 \end{aligned}$$

$a=-\frac{1}{4}$

㉡에서 $b=\frac{1}{2a}$이므로 $b=-2$

$f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2$

따라서 $f(4)\times f(6)=144$

10. 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$A\cap B\subset A$이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\}\subset A$

3, 6이 모두 a의 배수이므로 $a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$이면 $A=U$가 되어 $B-A=\varnothing$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a=3$이고, $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

또한 $A\cap B\subset B$이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\}\subset B$

3, 6이 모두 b의 약수이므로

$b=6$ 또는 $b=12$ 또는 $b=18$

(i) $b=6$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $B-A=\{1, 2\}$가 되어

조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B=\{9, 12, 15, 18\}$이므로

집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$9+12+15+18=54$

(ii) $b=12$일 때

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$B-A=\{1, 2, 4\}$가 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $b=18$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$B-A=\{1, 2\}$가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B=\{12, 15\}$이므로

집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 $12+15=27$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

집합 $A-B$의 모든 원소의 합의 최솟값은 27

11. 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$X-A \subset A-X$에서 $(X-A)\cap(A-X)=X-A$이고

$(X-A)\cap(A-X)=(X\cap A^c)\cap(A\cap X^c)$

$=(X\cap X^c)\cap(A\cap A^c)=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

즉 $X-A=\varnothing$이므로 $X\subset A=\{1,2,5,10\}$이므로

구하는 부분집합 X의 개수는 $2^4=16$

12. 집합의 연산을 이용하여 추론하기

집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하자.

$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이고 조건 (가)에서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로 전체집합 U의 모든 원소의 합은 $7k$이다.

$7k=1+2+4+8+16+32=63$, $k=9$

집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로 $B-A=\{1,8\}$

$A\cap(B-A)=\varnothing$이므로 $A\subset(B-A)^C=\{2,4,16,32\}$,

$A\cup B=A\cup(B-A)$,$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$이고 조건 (나)에서

$n(A\cup B)=5$이므로 $n(A)=3$. 따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은 $A=\{2,4,16\}$일 때 $2+4+16=22$

13. 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$A-X\subset A$, $B-X\subset B$이고 조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로

$A-X=B-X\subset A\cap B=\{3,4,5\}$

$A-X\subset\{3,4,5\}$에서 $\{1,2\}\subset X$이고

$B-X\subset\{3,4,5\}$에서 $\{6,7\}\subset X$이므로 $\{1,2,6,7\}\subset X$ ⋯ ㉠

조건 (다)에서

$(X-A)\cap(X-B)=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)=X\cap(A^C\cap B^C)$

$=X\cap(A\cup B)^C=X\cap\{8,9,10\}\neq\varnothing$ ⋯ ㉡

조건 (가)에서 $n(X)=6$이고

㉠에 의하여 $n(X\cap\{3,4,5,8,9,10\})=2$ ⋯ ㉢

㉡에 의하여 세 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나의 원소는 집합 X에 속해야 한다.

집합 X의 모든 원소의 합이 최소이려면 $8\in X$이고

㉢에 의하여 다섯 원소 3, 4, 5, 9, 10 중 가장 작은 원소는 집합 X에 속해야 하므로 $3\in X$ 따라서 $X=\{1,2,3,6,7,8\}$일 때 모든 원소의 합이 최소이고 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은 $1+2+3+6+7+8=27$

14. 집합의 성질을 이용하여 추론하기

조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고 $S(B)$의 값이 최소이어야 한다. 9로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	{1, 10, 19	8	{8, 17}
2	{2, 11, 20	7	{7, 16}
3	{3, 12}	6	{6, 15}
4	{4, 13}	5	{5, 14}
0	{9}	0	{18}

나머지의 합이 0 또는 9가 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 A에 속할 수 있다. 따라서 $S(A)$가 최대가 되려면

집합 U의 부분집합 $\{1,10,19\}$, $\{2,11,20\}$, $\{6,15\}$, $\{5,14\}$, $\{18\}$의 원소 중 큰 수부터 차례대로 집합 A의 원소가 되어야 한다. 조건 (가)에서 $n(A)=8$이므로 $S(A)$가 최대가 되기 위해 가능한 집합 A는

$\{6,10,11,14,15,18,19,20\}$ ⋯⋯ ㉠ 10으로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	{1, 11}	9	{9, 19}
2	{2, 12}	8	{8, 18}
3	{3, 13}	7	{7, 17}
4	{4, 14}	6	{6, 16}
5	{5}	5	{15}
0	{10}	0	{20}

나머지의 합이 0 또는 10이 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 B에 속할 수 있다. 따라서 $S(B)$가 최소가 되려면

집합 U의 부분집합

$\{1,11\}$, $\{2,12\}$, $\{3,13\}$, $\{4,14\}$, $\{5\}$, $\{10\}$의 원소 중 작은 수부터 차례대로 집합 B의 원소가 되어야 한다.

조건 (가)에서 $n(B)=8$이므로 $S(B)$가 최소가 되기 위해 가능한 집합 B는 $\{1,2,3,4,5,10,11,12\}$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 조건 (가)의 $n(A\cap B)=1$을 만족시키려면 10, 11은 동시에 집합 $A\cap B$에 속할 수 없다.

$10\in B$, $11\in B$이면 $10\notin A$ 또는 $11\notin A$이다. 이때 1, 2, 5 중 적어도 하나가 집합 A에 속해야 하므로 $n(A\cap B)\neq 1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$S(B)$가 최소가 되려면 $10\in B$, $11\notin B$이어야 한다. 따라서

$A=\{6,10,11,14,15,18,19,20\}$, $B=\{1,2,3,4,5,10,12,13\}$일 때 $S(A)-S(B)$의 최댓값은 63이다.