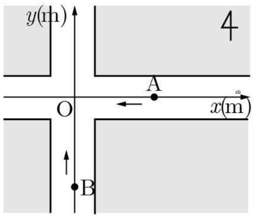
숙명여자고 기출변형문제

1. 두 점 $A(-2,-1)$, $B(a,3)$ 사이의 거리가 $\sqrt{41}$이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① -24 ② -21
③ -18 ④ 18
⑤ 21

2. 그림과 같이 지점 O에서 수직으로 만나는 두 직선 도로가 있다. 사람 A는 O지점으로부터 동쪽으로 $30\,\mathrm{m}$ 떨어진 지점에서 출발하여 서쪽으로 $4\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 움직이고, 사람 B는 O지점으로부터 남쪽으로 $40\,\mathrm{m}$떨어진 지점에서 출발하여 북쪽으로 $2\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 움직인다. 두 사람이 동시에 출발할 때, 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 몇 초 후인가?



① 5초 ② 10초
③ 15초 ④ 20초
⑤ 25초

3. 세 점 $A(4,5)$, $B(0,1)$, $C(2,6)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는?

① $(1,3)$ ② $(2,4)$
③ $(3,5)$ ④ $(4,6)$
⑤ $(5,7)$

4. 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하고 $\overline{AP}$와 $\overline{PB}$의 길이에 대하여 $(m+n):m=m:n$을 만족한다. 이때, $\frac{m}{n}$의 값은? (단, $m>0$, $n>0$)

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
③ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
⑤ $\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$

5. 직선 $ax+by+c=0$와 직선 $acx-aby+bc=0$가 모두 동일한 3개의 사분면을 지날 때, 직선 $cx+by-a=0$가 지나는 사분면을 모두 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 제 1 사분면, 제 3 사분면, 제 4 사분면
② 제 2 사분면, 제 3 사분면, 제 4 사분면
③ 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 3 사분면
④ 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면
⑤ 제 1 사분면, 제 4 사분면

6. 두 점 $A(-4,3)$, $B(-4,-2)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $x=-4$　② $y=-2$　③ $y=3$　④ $y=x+2$　⑤ $12y=-x+7$

7. 점 $A(2,0)$에서 직선 $3x-y+5=0$에 내린 수선의 발의 좌표를 구하시오.

8. 제 1사분면 위의 점 A와 제 3사분면 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있다.
(나) $2\overline{OB}=3\overline{OA}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AL과 직선 BH가 만나는 점을 P, 직선 OP가 직선 LH와 만나는 점을 Q라 하자. 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 넓이가 $\frac{729}{8}\pi$일 때, $\overline{OA}\times\overline{OB}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 243　② 324　③ 405　④ 486　⑤ 567

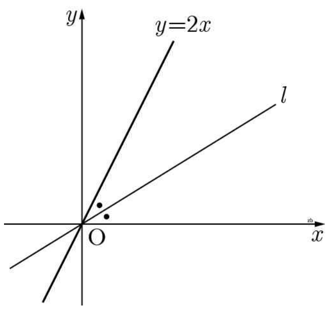
9. 두 직선 $2x+y-6=0$, $mx-y-m-2=0$이 제 1사분면에서 만날 때, 실수 m의 범위는?

① $m<1$ 또는 $m>8$　② $1\le m\le 8$　③ $1<m<8$　④ $m\le -8$ 또는 $m\ge 1$　⑤ $m<-8$ 또는 $m>1$

10. 세 직선 $x-y=1$, $2x+y=5$, $mx+y=2$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 상수 m의 값을 모두 더한 값은?

① -2　② $-\frac{3}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

11. 아래 그림과 같이 직선 $y=2x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 이등분하는 직선 l의 기울기를 a라 할 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값은? (단, 직선 l은 제 $1, 3$ 사분면을 지난다.)



① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

12. **좌표평면에 원점 O와 세 점 $A(2, 2)$, $B(2+2\sqrt{3}, 0)$, $C(2+2\sqrt{3}, 4)$가 있다. 함수 $f(x)=2x^2$이라 하자. 이때 시각 t에서 점 P의 위치는 다음과 같은 규칙에 따라 결정된다.**

(가) 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 점 A이다. (나) 점 P는 $\triangle ABC$의 변을 따라 시계 반대 방향으로 움직인다. (다) 시각 $t=0$에서 시각 $t=t_0$까지 점 P가 $\triangle ABC$의 변을 따라 움직인 거리는 $f(t_0)$이다. (단, $t_0 \geq 0$)

(1) $\overline{AP}=\frac{4}{3}$인 점 P의 좌표를 모두 구하시오.

(2) $\overline{AP}=\frac{4}{3}$인 시각 t를 구하시오. (단, $\sqrt{3}<t<\sqrt{6}$)

(3) $f(t_0)=5$일 때 $t_0=a$라고 하자. $\overline{AP}=\frac{4}{3}$인 점 P와 원점 O, 점 $D(a, 0)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle POD$의 넓이를 구하시오. (단, $\sqrt{3}<t<\sqrt{6}$, $0<a\leq 2$)

13. **$-2<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 세 점 $P(-2, 6)$, $Q(a, -2a+2)$, $R(b, -2b+2)$가 일직선 위에 있다. 선분 PQ를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 QR을 지름으로 하는 원을 C_2라고 할 때, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 비는 $1:3$이다. 삼각형 OPR의 넓이가 $2\sqrt{5}$일 때, $4(a+2)^2+(b+2)^2$의 값은? (단, O는 원점이다.)**

① 22　② 23　③ 24　④ 25　⑤ 26

14. **중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있는 원이 y축에 접하고 점 $(3, 2)$를 지날 때, 이 원의 반지름의 길이는?**

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

15. **두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$, $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2(r>0)$가 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 r의 값의 합은?**

① $10+2\sqrt{3}$　② $10+2\sqrt{5}$　③ $12+2\sqrt{3}$　④ $12+2\sqrt{5}$　⑤ $14+4\sqrt{5}$

16. **점 $A(8, 5)$에서 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=a$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 기울기의 합은? (단, $a>0$인 상수이다.)**

① $\frac{21}{5}$　② $\frac{22}{5}$　③ $\frac{23}{5}$　④ $\frac{24}{5}$　⑤ 5

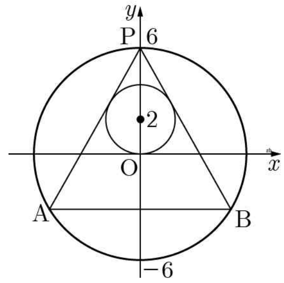
17. x축, y축 및 직선 $x-y+1=0$에 동시에 접하고 중심이 제 2 사분면 위에 있는 두 원의 반지름의 길이의 합은?

① $\sqrt{2}$ ② 2
③ $2\sqrt{2}$ ④ 3
⑤ $3\sqrt{2}$

18. 좌표평면에서 네 개의 원
$C_1:(x-3)^2+(y-1)^2=1$,
$C_2:(x-3)^2+(y-2)^2=4$,
$C_3:(x+1)^2+(y-3)^2=1$, $C_4:(x+2)^2+(y-3)^2=4$
와 함수 $y=m|x|$의 그래프가 서로 다른 다섯 개의 점에서 만나도록 하는 모든 m의 값의 합은 $\dfrac{b}{a}$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소이고, m은 상수이다.)

① 56 ② 57
③ 58 ④ 59
⑤ 60

19. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=36$ 위의 한 점 $P(0,6)$에서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 그은 두 접선이 원 $x^2+y^2=36$과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이는?



① $\dfrac{9}{2}$ ② 9
③ $27\sqrt{3}$ ④ $54\sqrt{3}$
⑤ 108

20. 직선 $3x+4y=5$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선이 원 $(x-a)^2+(y+6)^2=10$의 넓이를 이등분할 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

21. 두 자연수 m, n에 대하여 원 $C: x^2+(y-2)^2=4$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원을 C_1, 원 C_1을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자.
두 원 C_1, C_2와 직선 $l: 5x-12y=0$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원 C_1은 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만난다.
(나) 원 C_2는 직선 l과 서로 다른 두 점에서 만난다.

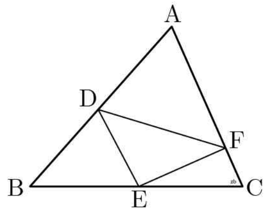
$m+n$의 최댓값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

22. 직선 $y=2x-1$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=\frac{1}{2}x-1$ ③ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ④ $y=-2x+1$ ⑤ $y=-2x-1$

23. 그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CA}=\sqrt{5}$인 삼각형 ABC에 대하여 세 선분 AB, BC, CA 위의 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값이 $\frac{q}{p}\sqrt{10}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

24. 두 점 $A(3,4)$, $B(7,9)$와 직선 $y=x$위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

25. 다음 중 원소나열법은 조건제시법으로, 조건제시법은 원소나열법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은?

① $\{x|x$는 15의 양의 약수$\}=\{1, 3, 5, 7\}$
② $\{2, 4, 6, 8\}=\{x|x$는 8 이하의 짝수$\}$
③ $\{x|x$는 $x^2=3$을 만족하는 자연수$\}=\varnothing$
④ $\{x|x$는 6의 양의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$
⑤ $\{x|x$는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 자연수$\}$
$=\{1, 4, 7, \cdots\}$

26. 집합 $A=\{x|2 \le x<4\}$,
$B=\{x|x^2-2ax+a^2-4<0\}$에 대하여 $A \subset B$일 때, a의 범위는?

① $2<a<4$ ② $2<a \le 4$
③ $2 \le a<4$ ④ $2 \le a \le 4$
⑤ $2<a<4$

27. 두 집합 A, B가

$$A=\{1, 2, a^2-1\},\ B=\{1, a+1, 4-a^2\}$$

일 때,

$$(A \cup B)-(A \cap B)=\{0, 2\}$$

이다. 이때 상수 a의 값과 $A \cap B$를 구하시오.

28. 어느 반 25명의 학생에게 세 개의 수학 문제 A, B, C를 풀게 하였더니 A문제를 맞힌 학생은 8명이었고, B문제만 맞힌 학생은 6명, C문제만 맞힌 학생은 4명이었다. B문제와 C문제는 맞히고 A문제는 틀린 학생 수는? (단, 세 문제를 모두 틀린 학생은 2명이다.)

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

29. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 $A=\{1, 2\}$에 대하여 $n(A-X) \le 1$을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수는?

① 8 ② 16
③ 17 ④ 24
⑤ 32

30. 두 집합 $A=\{1,2,3\}, B=\{2,4,5\}$에 대하여 $(A \cup B)$의 모든 원소의 합을 m, $(A \cap B)$의 모든 원소의 합을 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① 11 ② 13
③ 15 ④ 17
⑤ 19

31. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 15, 16\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=\{x \mid x\text{는 짝수}\}$, $(A \cup B) \cap A^C=\{x \mid x\text{는 홀수인 소수}\}$가 성립한다. 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 집합 B의 모든 원소의 합은?

① 39 ② 48
③ 54 ④ 64
⑤ 72

정답 및 해설

1)[정답] ②

[해설] $\overline{AB}=\sqrt{41}$ 이므로

$\sqrt{(a+2)^2+16}=\sqrt{41}$

$(a+2)^2=25$

$a+2=\pm 5$

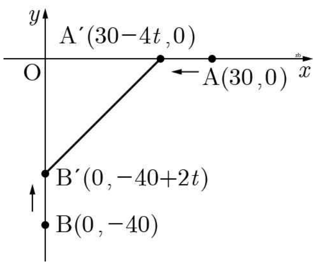
$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-7$

따라서 조건을 만족하는 모든 실수 a의 곱은 -21이다.

2)[정답] ②

[해설] 두 사람이 이동하는 시간을 t라 하자.

이를 좌표평면으로 나타내면 다음과 같다.



이때 t초 후 두 사람의 위치는

각각 $A'(30-4t, 0)$, $B'(0, -40+2t)$

두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(30-4t)^2+(40-2t)^2}$

$=\sqrt{20t^2-400t+2500}$

$=\sqrt{20(t-10)^2+500}$

따라서 $t=10$초일 때, 두 점 사이의 거리가 최소이므로 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 시간은 10초 후이다.

3)[정답] ②

[해설] 무게중심 G의 좌표는

$G\left(\dfrac{4+0+2}{3}, \dfrac{5+1+6}{3}\right)$, 즉 $G(2,4)$이다.

4)[정답] ③

[해설] $(m+n):m=m:n$에서

$m^2=mn+n^2$이므로

양변을 n^2으로 나누면

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=\dfrac{m}{n}+1$

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2-\dfrac{m}{n}-1=0$

이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$\dfrac{m}{n}=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 m과 n은 양수이므로

따라서 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

5)[정답] ②

[해설] $\begin{cases} ax+by+c=0 \cdots ㉠ \\ acx-aby+bc=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

두 직선이 동일한 3개의 사분면을 지나려면 기울기의 부호와 y절편의 부호가 같아야 한다.

㉠의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$, ㉡의 기울기는 $\dfrac{c}{b}$

부호가 같으므로 $ac<0$

㉠의 y절편은 $-\dfrac{c}{b}$, ㉡의 y절편은 $\dfrac{c}{a}$

부호가 같으므로 $ab<0$

$ac<0$, $ab<0$이므로 $bc>0$

$cx+by-a=0$에서 $y=-\dfrac{c}{b}x+\dfrac{a}{b}$

기울기: $-\dfrac{c}{b}<0$, y절편: $\dfrac{a}{b}<0$이므로 그래프는 제 2, 3, 4사분면을 지난다.

6)[정답] ①

[해설] 두 점 $A(-4,3)$, $B(-4,-2)$의 x좌표가 -4로 같으므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은 $x=-4$이다.

7)[정답] $\left(-\dfrac{13}{10}, \dfrac{11}{10}\right)$

[해설] 점 $A(2,0)$에서 직선 $3x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 AH는 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이고 점 $(2,0)$을 지나는 직선이므로

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ 이다.

따라서 점 H는 두 직선

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ 와 $y=3x+5$ 의 교점이므로

이 두 식을 연립하면 $\left(-\dfrac{13}{10}, \dfrac{11}{10}\right)$이다.

8)[정답] ④

[해설] $\overline{OA}:\overline{OB}=2:3$이므로

$A(2a,2a)$, $B(-3a,-3a)$이다. (단, $a>0$)

따라서 점 H, L의 좌표는 $H(0,2a)$, $L(-3a,0)$이고 직선 AL의 방정식은 $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{6}{5}a$이고

직선 BH의 방정식은 $y=\dfrac{5}{3}x+2a$이다.

그러므로 점 P의 좌표는 $P\left(-\dfrac{12}{19}a, \dfrac{18}{19}a\right)$이고 직

선 OP의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x$이다.

또한 직선 LH의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x+2a$이므로 점 Q의 좌표는 $Q\left(-\frac{12}{13}a, \frac{18}{13}a\right)$이다.

$\overline{OQ}=\frac{6}{\sqrt{13}}a$, $\overline{OL}=3a$, $\overline{QL}=\frac{9}{\sqrt{13}}a$이므로

$\overline{OQ}^2+\overline{QL}^2=\overline{OL}^2$이고 따라서 삼각형 OQL은 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 OQL의 외접원의 반지름은 $\frac{1}{2}\overline{OL}=\frac{3}{2}a$이고 넓이는 $\frac{9}{4}a^2\pi=\frac{729}{8}\pi$이다.

그러므로 $a^2=\frac{81}{2}$이고 $a=\frac{9}{\sqrt{2}}$이다.

$\overline{OA}=2a\sqrt{2}$, $\overline{OB}=3a\sqrt{2}$이므로

$\overline{OA}\times\overline{OB}=12a^2=486$이다.

9)[정답] ⑤

[해설] 직선 $2x+y-6=0$은 점 $(0,6)$과 점 $(3,0)$을 지나는 직선이다.

직선 $mx-y-m-2=0$은 m에 관계없이 항상 점 $(1,-2)$를 지나는 직선이다.

두 직선이 제 1 사분면에서 만나려면

직선 $mx-y-m-2=0$의 기울기 m이

두 점 $(1,-2)$, $(3,0)$을 지나는 직선의 기울기보다 커야 하고,

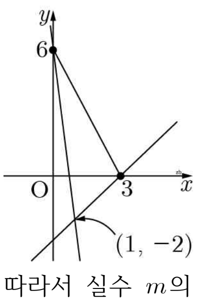
두 점 $(1,-2)$, $(0,6)$을 지나는 직선의 기울기보다 작아야 한다.

$(1,-2)$, $(3,0)$을 지나는

직선의 기울기는 $\frac{0-(-2)}{3-1}=1$,

두 점 $(1,-2)$, $(0,6)$을 지나는

직선의 기울기는 $\frac{6-(-2)}{0-1}=-8$



따라서 실수 m의 범위는

$m<-8$ 또는 $m>1$

10)[정답] ④

[해설] 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 두 직선이 평행이거나 세 직선의 교점이 같을 때이다.

(i)두 직선 $x-y=1$과 $mx+y=2$가 서로 평행할 때, $m=-1$이다.

(ii)두 직선 $2x+y=5$와 $mx+y=2$가 서로 평행할 때, $m=2$이다.

(iii)세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선 $x-y=1$와 $2x+y=5$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$이므로 두 직선의 교점은 $(2,1)$이다.

직선 $mx+y=2$가 이 점을 지나므로

$2m+1=2$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

따라서 모든 m의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

11)[정답] ②

[해설] 직선 l 위의 점에서 주어진 직선과 x축까지의 거리는 같다.

직선 l 위의 점을 (x,y)라 하면

$\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}=|y|$

$2x-y=\pm\sqrt{5}y$

$y=\frac{2}{1\pm\sqrt{5}}x$

이때 직선 l은 제 1, 3 사분면을 지나므로

$a=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$

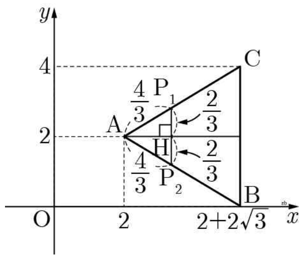
$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{9+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=3$

12)[정답] (1) $\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (3) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

[해설] (1) 삼각형 ABC는 높이가 $2\sqrt{3}$이므로 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$\overline{AP}=\frac{4}{3}$가 되는 점은 다음 그림과 같이 2개가 존재한다.



$\overline{AP}=\frac{4}{3}$가 되는 두 점을 각각 P_1, P_2라고 하면

삼각형 AP_1P_2는 한 변의 길이가 $\frac{4}{3}$인 정삼각형이므로 높이가 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 $\overline{AP}=\frac{4}{3}$인 점 P는

$\left(2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$이다.

(2) $\overline{AP}=\dfrac{4}{3}$인 경우는 점 P가 움직인 거리가

$\dfrac{4}{3}$, $12\pm\dfrac{4}{3}$, $24\pm\dfrac{4}{3}$, $\cdots$이고

$\sqrt{3}<t<\sqrt{6}$에서 $6<f(t)<12$이므로

움직인 거리가 $12-\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{3}$인 경우이다.

따라서 시각 t는 $2t^2=\dfrac{32}{3}$이므로 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

(3) $f(a)=2a^2=5$를 만족하는 a는 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이므로

점 $D\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$이고 점 $P\left(2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$이므로

삼각형 POD는 밑변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이고

높이가 $\dfrac{8}{3}$인 삼각형이다.

따라서 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$이다.

13)[정답] ④

[해설] 세 점 P, Q, R은 직선 $2x+y-2=0$ 위의 점이다.

삼각형 OPR의 넓이가 $2\sqrt{5}$이고 높이인 원점에서 직선 $2x+y-2=0$까지의 거리는 $\dfrac{|-2|}{\sqrt{5}}$이므로 $\dfrac{1}{2}\times\overline{PR}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$이다.

따라서 $\overline{PR}=10$이다.

$\overline{PR}=\sqrt{(b+2)^2+(-2b-4)^2}$이므로

$(b+2)^2=20$이다.

원 C_1과 원 C_2의 반지름의 길이의 비가 $1:3$이므로 $\overline{PQ}:\overline{QR}=1:3$이다. 즉, 점 Q는 $\overline{PR}$을 $1:3$으로 내분하는 점이다.

$\overline{PR}=10$이므로 $\overline{PQ}=\dfrac{5}{2}$이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{(a+2)^2+(-2a-4)^2}=\sqrt{5(a+2)^2}=\dfrac{5}{2}$

이므로 $(a+2)^2=\dfrac{5}{4}$이다.

$\therefore 4(a+2)^2+(b+2)^2=25$

14)[정답] ③

[해설] 원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+2)$라 하면, 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 a이다.

따라서 이 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=a^2$

이 원이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(-a)^2=a^2$

$(3-a)^2=0 \quad \therefore a=3$

따라서 원의 반지름의 길이는 3이다.

15)[정답] ②

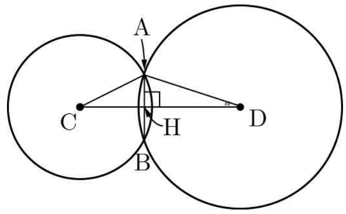
[해설] 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$의 중심의 좌표를 C라 하면 $C(-1, 2)$

원 $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$의 중심의 좌표를 D라 하면 $D(4, -3)$

이때 $\overline{CD}=\sqrt{(4+1)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$이다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표를 H라 하자.

(i)점 C가 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$의 외부에 있는 경우



그림으로부터 $\overline{CA}=\sqrt{10}$, $\overline{AD}=r$

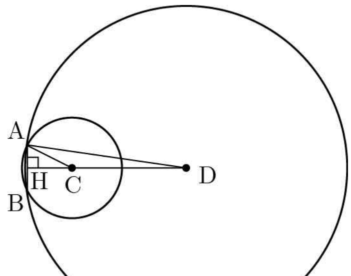
$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 피타고라스의 정리로부터 $\overline{CH}=2\sqrt{2}$

한편, $\overline{DH}=\overline{CD}-\overline{CH}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{HD}^2=2+18=20$

따라서 이때 $r=2\sqrt{5}$이다.

(ii)점 C가 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$의 내부에 있는 경우



그림으로부터 $\overline{CA}=\sqrt{10}$, $\overline{AD}=r$

위와 마찬가지로 $\overline{AH}=\sqrt{2}$에서 $\overline{CH}=2\sqrt{2}$

한편, $\overline{DH}=\overline{CH}+\overline{CD}=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{HD}^2=2+98=100$

따라서 이때 $r=10$이다.

(i), (ii)로부터 모든 r의 값의 합은 $10+2\sqrt{5}$이다.

16)[정답] ④

[해설] 원에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은 $y=m(x-8)+5$이다.

원의 중심 $(2,1)$에서 직선 $mx-y-8m+5=0$
까지의 거리가 $\sqrt{a}$이므로

$$\frac{|2m-1-8m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{a}$$

$|-6m+4|=\sqrt{a}\sqrt{m^2+1}$

$36m^2-48m+16=am^2+a$

$(36-a)m^2-48m+16-a=0$

두 접선이 수직이므로 기울기의 곱이 -1이다.

$$\frac{16-a}{36-a}=-1$$

$a=26$

두 기울기의 합은 $\frac{48}{36-a}=\frac{48}{36-26}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$

17)[정답] ②

[해설] 중심이 제 2 사분면에 있고 x축, y축에 동시에 접하므로 반지름을 r이라고 하면
원의 중심의 좌표는 $(-r,r)$이고
원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$이다.
이 원이 직선 $x-y+1=0$에 접하므로

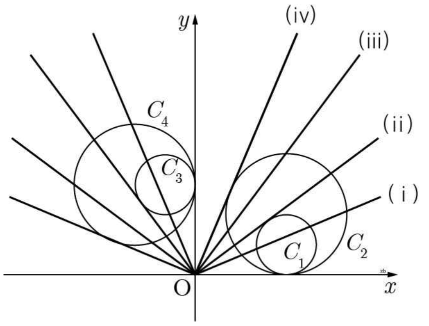
$$\frac{|-r-r+1|}{\sqrt{1+1}}=r$$

$2r^2-4r+1=0$

따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은 2이다.

18)[정답] ④

[해설] 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4와
함수 $y=m|x|$의 그래프가
서로 다른 다섯 개의 점에서 만나는 경우는
다음 그림과 같다.



(i) $y=-mx$가 원 C_4에 접할 때

$$\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$12m=5$

$\therefore m=\frac{5}{12}$

(ii) $y=mx$가 원 C_1에 접할 때

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$8m^2-6m=0$

$\therefore m=\frac{3}{4}$

(iii) $y=-mx$가 원 C_3에 접할 때

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$6m=8$

$\therefore m=\frac{4}{3}$

(iv) $y=mx$가 원 C_2에 접할 때

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$5m^2-12m=0$

$\therefore m=\frac{12}{5}$

(i)~(iv)에서 모든 m의 값의 합은

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{4}+\frac{4}{3}+\frac{12}{5}=\frac{49}{10}$$

따라서 $a=10$, $b=49$이고 $a+b=59$이다.

19)[정답] ③

[해설] 두 원 중 작은 원의 중심을 $C(0,2)$라 하자.
두 직선 AP와 BP의 y절편은 6으로 같으므로
두 직선의 방정식을 $y=kx+6$으로 놓으면 k의 값은 두 개 존재하고 그 값이 두 직선의 기울기이다.
이때, 직선 $kx-y+6=0$에서 원의 중심 $C(0,2)$까지의 거리는 작은 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-2+6|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2=3$

$\therefore k=\pm\sqrt{3}$

따라서 두 직선 AP, BP의 방정식은 각각
$y=\sqrt{3}x+6$, $y=-\sqrt{3}x+6$이다.
직선 AP와 원 $x^2+y^2=36$을 연립하면

$x^2+(\sqrt{3}x+6)^2=36$

$4x^2+12\sqrt{3}x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3\sqrt{3}$

따라서 점 A의 x좌표는 $-3\sqrt{3}$이고, y좌표는
$\sqrt{3}\times(-3\sqrt{3})+6=-3$이다.
그러므로 $A(-3\sqrt{3},\ -3)$이고, 점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로 $B(3\sqrt{3},\ -3)$이다.
따라서 $\overline{AB}=6\sqrt{3}$이므로 이 값을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}\text{이다.}$$

20)[정답] ⑤

[해설] 직선 $3x+4y=5$를 x축의 방향으로 3만큼, y

축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$3(x-3)+4(y+2)=5$, $3x+4y-6=0$
이 직선이 원 $(x-a)^2+(y+6)^2=10$의 중심
$(a,\ -6)$을 지날 때 원의 넓이를 이등분하므로
$3a-24-6=0$, $3a=30$
$\therefore\ a=10$

21)[정답] ③
[해설] 주어진 조건으로부터
원 C_1의 중심은 $(m,\ 2)$이고
원 C_2의 중심은 $(m,\ n+2)$이다.
조건 (가)로부터
$\dfrac{|5m-24|}{\sqrt{25+144}}<2$에서 $|5m-24|<26$
$\therefore -\dfrac{2}{5}<m<10$
따라서 자연수 m으로 가능한 값은
$1,\ 2,\ \cdots,\ 9$이다.
조건 (나)로부터
$\dfrac{|5m-12(n+2)|}{\sqrt{25+144}}<2$에서 $|5m-12n-24|<26$
$\therefore\ \dfrac{5m-50}{12}<n<\dfrac{5m+2}{12}$
이때 조건 (가)를 만족시키는 모든 m에 대하여
$\dfrac{5m-50}{12}$는 음수이므로 고려하지 않아도 된다.
또한 부등식의 오른쪽 끝 값이라고 할 수 있는
$\dfrac{5m+2}{12}$는 m이 커질수록 그 값이 증가하므로
$m=9$일 때, n도 최대가 된다.
$m=9$를 대입하면 $-\dfrac{5}{12}<n<\dfrac{47}{12}$
따라서 자연수 n의 최댓값은 3이다.
그러므로 $m+n$의 최댓값은 $9+3=12$

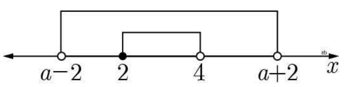
22)[정답] ①
[해설] 직선 $y=2x-1$을 원점에 대하여 대칭이동한
도형의 방정식은 $-y=2\times(-x)-1$이다.
$\therefore y=2x+1$

23)[정답] ①
[해설] 점 B를 원점으로 하고, 점 C를 $(3,0)$으로
놓으면, 점 A는 $(2,2)$가 된다.
직선 AB를 나타내는 방정식은 $y=x$이고,
직선 AC를 나타내는 방정식은 $y=-2x+6$이다.
점 F의 좌표를 $(a,\ -2a+6)$이라고 하자.
(단, $2<a<3$)
점 F를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을
M_1이라고 하면, M_1의 좌표는 $(-2a+6,a)$이다.
점 F를 직선 BC에 대하여 대칭이동한 점을
M_2라고 하면, M_2의 좌표는 $(a,2a-6)$이다.
삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은
선분 M_1M_2이므로, 선분 M_1M_2의 길이는
$\sqrt{(3a-6)^2+(a-6)^2}=\sqrt{10a^2-48a+72}$ 이다.
이때 $10a^2-48a+72=10\left(a-\dfrac{12}{5}\right)^2+\dfrac{72}{5}$이므로
선분 M_1M_2의 길이는 $a=\dfrac{12}{5}$일 때
최솟값 $\sqrt{\dfrac{72}{5}}=\dfrac{6}{5}\sqrt{10}$을 갖는다.
그러므로 $p=5$, $q=6$, $p+q=11$이다.

24)[정답] $3\sqrt{5}$
[해설] 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을
A'라고 하면 $A'(4,3)$이고 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다.
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$이다.

25)[정답] ①
[해설] ① $\{x|x$는 15의 양의 약수$\}=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$
② $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}=\{x|x$는 8 이하의 짝수$\}$
③ $\{x|x$는 $x^2=3$을 만족하는 자연수$\}=\varnothing$
④ $\{x|x$는 6의 양의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
⑤ $\{x|x$는 3으로 나누었을 때 나머지가 1인
1인 자연수$\}=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots\}$
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

26)[정답] ③
[해설] $x^2-2ax+a^2-4<0$,
$x^2-2ax+(a+2)(a-2)<0$,
$(x-a-2)(x-a+2)<0$,
$a-2<x<a+2$ 이다.
$A\subset B$ 이려면 아래의 그림과 같으므로



$a-2<2$ 이고 $a+2\geq 4$ 이어야 한다.
따라서 $2\leq a<4$ 이다.

27)[정답] $a=2$, $A\cap B=\{1,3\}$
[해설] $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)=\{0,2\}$
이고 $2\in(A-B)$이므로 $0\in(B-A)\subset B$이다.
따라서 $a+1=0$이면 $a=-1$이고
$A=\{1,2,0\}$, $B=\{1,0,3\}$이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
$4-a^2=0$이면 $a=\pm2$이다.
$a=-2$이면 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,-1,0\}$이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.

$a=2$이면 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,0\}$이므로
주어진 조건을 만족한다.
따라서 $a=2$이고 $A\cap B=\{1,3\}$이다.

28)[정답] ③
[해설] 전체 25명의 학생들의 집합을 U라 하면
$n(U)=25$이고
$n(A)=8$ … ㉠
$n\{B-(C\cup A)\}=6$ … ㉡
$n\{C-(A\cup B)\}=4$ … ㉢
세 문제를 모두 틀린 학생이 2명이므로
$n(A\cup B\cup C)=23$
한편, 구하는 값은 $n\{(B\cap C)-A\}$이다. … ㉣
이때, ㉠+㉡+㉢+㉣의 값은 $n(A\cup B\cup C)$의 값과 일치해야 하므로
$8+6+4+n\{(B\cap C)-A\}=23$
$\therefore n\{(B\cap C)-A\}=5$

29)[정답] ④
[해설] 조건에서 $n(A-X)\le 1$이므로
집합 $A=\{1,2\}$에 대하여
다음의 세 가지 경우가 존재한다.
(i) $A\cap X=\{1\}$일 때, $A-X=\{2\}$이고
$1\in X$, $2\notin X$이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-1-1}=8$
(ii) $A\cap X=\{2\}$일 때, $A-X=\{1\}$이고
$1\notin X$, $2\in X$이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-1-1}=8$
(iii) $A\cap X=\{1,2\}$일 때, $A-X=\varnothing$이고
$1\in X$, $2\in X$이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{5-1-1}=8$
(i)~(iii)에서 집합 X의 개수는
$8+8+8=24$이다.

30)[정답] ④
[해설] $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
$m=1+2+3+4+5=15$
$A\cap B=\{2\}$이므로 $n=2$
$\therefore\ m+n=15+2=17$

31)[정답] ④
[해설] 집합의 연산법칙으로부터
$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap A^C&=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)\\&=\varnothing\cup(B\cap A^C)\\&=B-A\end{aligned}$$
따라서
$A-B=\{2,4,6,\cdots,16\}$이고
$B-A=\{3,5,7,11,13\}$이다.
집합 A의 원소의 개수가 최대이므로
$A\cup B=U$여야 한다.
따라서 $A\cap B=\{1,9,15\}$이면 되므로
$B=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$16\times 4=64$이다.