

JD고등학교

1. 부등식 $3x+2 \leq x+6 \leq 2x+10$ 의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은? [4.7점]

- ① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-1 < 9 \\ x^2-ax < 0 \end{cases}$ 의 해를 $\alpha < x < \beta$ 라 하자.

$\beta-\alpha$ 의 값이 최대일 때, a 의 최댓값은? [4.9점]

- ① -8 ② -5 ③ -2
④ 1 ⑤ 4

3. 삼각형의 세 변 중 두 변의 길이가 각각 4, x 이고 둘레의 길이가 10인 삼각형이 예각삼각형이 되도록 하는 x 의 범위가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\beta-\alpha$ 의 값은? [5.0점]

- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

4. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$2|x+1|+|x-1| \leq x^2+k$ 가 성립할 때, k 의 최솟값은? [5.1점]

- ① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

5. 양수 a, b 에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 - ax + b < 0 \end{cases}$ 의 해가 없고, 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ bx^2 - ax + 1 \geq 0 \end{cases}$ 의 해가 $x > 3$ 또는 $x \leq \frac{1}{4}$ 일 때, $a+b$ 의 최솟값은? [5.2점]

- ① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$
 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

6. 두 학생 A, B를 포함한 4명의 학생이 줄을 설 때, A와 B가 서로 이웃하도록 줄을 서는 경우의 수는? [4.8점]

- ① 12 ② 15 ③ 18
 ④ 21 ⑤ 24

7. 서로 다른 종류의 국어 참고서 4권과 서로 다른 종류의 수학 참고서 3권이 있다. 두 과목의 참고서 7권 중에서 각 과목별로 적어도 한 권씩 총 3권을 구매하는 경우의 수는? [4.9점]

- ① 28 ② 30 ③ 32
 ④ 34 ⑤ 36

8. 그림과 같은 8개의 빈칸에 $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ 을 하나씩 써넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열, 4열의 수의 합을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 라 할 때, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 이 되도록 빈칸을 채우는 경우의 수는? [5.2점]

1열	2열	3열	4열

- ① 1320 ② 1440 ③ 1560
 ④ 1680 ⑤ 1800

9. 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 4개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 8개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는? [5.3점]

- (가) 검은 바둑돌끼리는 적힌 숫자가 클수록 오른쪽에 나열한다.
 (나) 검은 바둑돌 사이에는 적어도 하나의 흰 바둑돌이 존재한다.
 (다) 검은 바둑돌 중 왼쪽에서 n 번째 검은 바둑돌과 $(n+1)$ 번째 검은 바둑돌 사이에 있는 흰 바둑돌에 적힌 수의 합은 $2n+1$ 보다 작다.
 ($n = 1, 2, 3$)

- ① 32 ② 34 ③ 36
 ④ 38 ⑤ 40

10. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- (단, a_{ij} 는 행렬 A 의 (i, j) 성분이다.)
 ① 3×3 행렬이다.
 ② $a_{12} = a_{23}$ 이다.
 ③ $i > j$ 이면 $a_{ij} > a_{ji}$ 이다.
 ④ 제2열의 성분의 합은 3이다.
 ⑤ $i = j$ 이면 $a_{ij} = 1$ 이다.

11. $\begin{pmatrix} x+2y & 0 \\ 3xy+5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 & 0 \\ -7 & 2x+y \end{pmatrix}$ 일 때,

- 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 값은?
 ① 15 ② 16 ③ 17
 ④ 18 ⑤ 19

12. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ 을 $xA + yB$ 의 꼴로 나타낼 때, 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ 2
 ④ 3 ⑤ 4

13. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 A^3 은?

- ① $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

14. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $(A+E)(A^2-A+E)$ 는?

- ① $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

15. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $(A+B)^2 - (A-B)^2 = 2(AB+BA)$
 ② $(AB)^2 = ABAB$
 ③ $(A+E)(A-E) = A^2 - E$
 ④ $(A-2E)^2 = A^2 - 4A + 4$
 ⑤ $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

16. 이차정사각행렬 A 가 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 를

만족시킬 때, $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 과 같은 행렬은?

- ① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

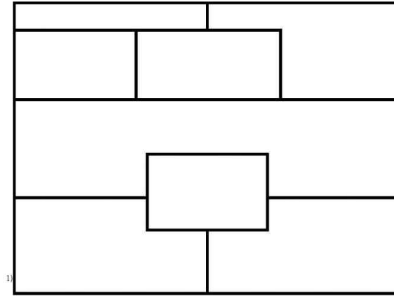
17. 두 이차정사각행렬 A, B 가 $A+B=2E, AB=O$ 를 만족시킬 때, A^2+B^2 을 간단히 한것은?

- ① E ② $2E$ ③ $4E$
 ④ $6E$ ⑤ $8E$

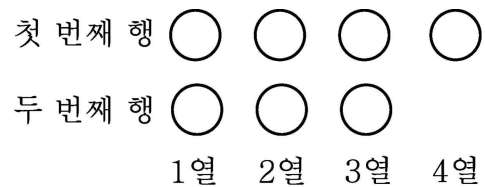
서술형

18. 이차부등식 $x^2+ax+4 \geq -x^2+6x+a-k$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하게 하는 정수 a 의 개수가 19일 때, 가능한 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오. [5점]

19. 그림과 같이 8개의 영역으로 나뉜 그림을 서로 다른 5가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 8개의 영역에 같은 색을 중복하여 이용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 색을 칠하는 경우의 수는 $n \times 5!$ 이다. n 의 값을 구하시오. [4점]

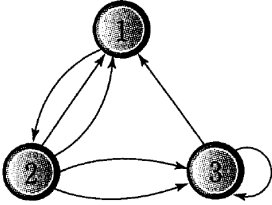


20. 그림과 같은 7개의 좌석에 3쌍의 커플이 모두 앉으려고 한다. 커플끼리는 같은 행의 이웃한 자리에 앉거나 같은 열에 앉아야 한다고 할 때, 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. [5점]



NGE

21. 그림은 각 지점사이의 일방 통행로를 화살표로 나타낸 것이다. 행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를 i 지점에서 j 지점으로 가는 길의 개수로 정의할 때, 행렬 $A = (a_{ij})$ 를 구하여라. (단, $i, j = 1, 2, 3$)



22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ 의 모든 성분의 합을 구하시오.

빠른정답

- | | | |
|--------|-----------|---|
| 1) ⑤ | 2) ② | 3) ④ |
| 4) ③ | 5) ① | 6) ① |
| 7) ② | 8) ④ | 9) ② |
| 10) ③ | 11) ③ | 12) ② |
| 13) ① | 14) ④ | 15) ④ |
| 16) ③ | 17) ③ | 18) 23 |
| 19) 84 | 20) 336가지 | 21) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 22) -2 | | |

정답 및 풀이

1) ⑤

$$1) 3x+2 \leq x+6$$

$$x \leq 2$$

$$2) x+6 \leq 2x+10$$

$$x \geq -4$$

$$-4 \leq x \leq 2$$

$$\alpha + \beta = -4 + 2 = -2$$

2) ②

$$1) x^2 + 3x - 1 < 9$$

$$(x+5)(x-2) < 0, -5 < x < 2$$

$$2) x^2 - ax < 0$$

$$x(x-a) < 0$$

① $a < 0$ 일 때

$$a < x < 0$$

$\beta - \alpha$ 의 값이 최대일 때,

$$\beta - \alpha = 0 - (-5) = 5$$

a 의 최댓값은 -5

② $a = 0$ 일 때 해가 없다

③ $a > 0$

$$0 < x < a$$

$\beta - \alpha$ 의 값이 최대일 때,

$$\beta - \alpha = 1 - 0 = 1$$

3) ④

세 변의 길이가 각각 4, x , y

$$\text{둘레의 길이가 } 10 = 4 + x + y$$

$$y = 6 - x$$

1) 모든 변의 길이는 0보다 크므로

$$x > 0, 6 - x > 0$$

$$0 < x < 6$$

2) 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다

$$4 < x + 6 - x$$

$$x < 6 - x + 4$$

$$6 - x < x + 4$$

$$1 < x < 5$$

$$3) ① 4^2 < x^2 + (6-x)^2$$

$$x^2 - 6x + 10 > 0 \text{ 모든 실수}$$

$$② x^2 < (6-x)^2 + 4^2$$

$$x < \frac{13}{3}$$

③ $(6-x)^2 < x^2 + 4^2$

$x > \frac{5}{3}$

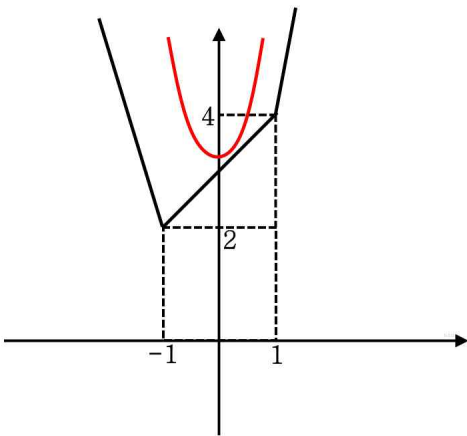
공통 범위는 $\frac{5}{3} < x < \frac{13}{3}$

$\beta - \alpha = \frac{13}{3} - \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

4) ③

$y = 2|x+1| + |x-1|$

$y = \begin{cases} -3x-1 & (x < -1) \\ x+3 & (-1 \leq x < 1) \\ 3x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$



그림과 같이 $y = x^2 + k$ 가 $y = x + 3$ 보다 위에 있거나 접하면 된다

$x^2 + k = x + 3$

$x^2 - x + k - 3 = 0$

$D = (-1)^2 - 4(k-3) \leq 0$

$k \geq \frac{13}{4}$

최솟값은 $\frac{13}{4}$

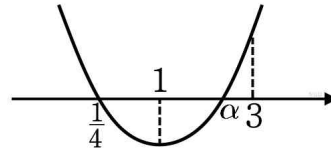
5) ①

1) 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ bx^2 - ax + 1 \geq 0 \end{cases}$ 의 해가

$x > 3$ 또는 $x \leq \frac{1}{4}$ 이므로

$(x-1)(x-3) > 0$, $x < 1$ 또는 $x > 3$

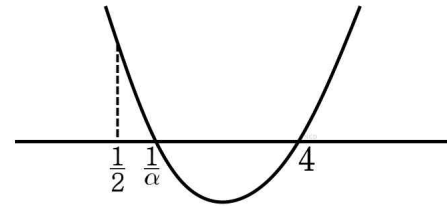
$bx^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근을 $\frac{1}{4}$, α 라 하자.



2) 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 - ax + b < 0 \end{cases}$ 의 해가 없으므로

$(2x-1)(x+3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, 4이다.



$\frac{1}{\alpha} + 4 = a$, $\frac{1}{\alpha} \times 4 = b$ 이므로

$a+b$ 가 최소인 경우는 $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}$

$a = \frac{9}{2}$, $b = 2$, $a+b = \frac{13}{2}$

6) ①

A와 B가 서로 이웃하도록 줄을 서는 경우의 수는 $3! \times 2 = 12$

7) ②

두 과목의 참고서 7권 중에서 각 과목별로 적어도 한 권씩 총 3권을 구매하는 경우의 수는 전체 7권 중 3권을 고른 후 국어 참고서만 3권 고르는 경우, 수학 참고서만 3권 고르는 경우를 빼면 된다.

${}_7C_3 - {}_4C_3 - {}_3C_3 = 35 - 4 - 1 = 30$ 가지이다.

8) ④

$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ 중 어느 두 수의 합은 모두 다르므로 구하는 경우의 수는 8개의 수를 2개, 2개, 2개, 2개의 네 조로 나눈 다음 크기순대로 1열, 2열, 3열, 4열에 배치 후 2개의 수의 자리를 바꾼 경우의 수와 같다.

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} \times 2^4 = 1680$ 가지

9) ②

1, 2, 3, 4가 적힌 검은 바둑돌을 각각 B_1, B_2, B_3, B_4 라 하고

1, 2, 3, 4가 적힌 흰 바둑돌을 각각 W_1, W_2, W_3, W_4 라 하자.

(다) 조건에 의해

B_1 과 B_2 사이에 흰 바둑돌의 합은 2이하,

B_2 과 B_3 사이에 흰 바둑돌의 합은 4이하,

B_3 과 B_4 사이에 흰 바둑돌의 합은 6이하여야 한다.

(가), (나) 조건에 의해 바둑돌은 다음과 같이 나열될 수 있다.



NGD

주어진 ①, ②, ③ 자리에 들어갈 흰 바둑돌의 배열은 아래와 같다.

(i) 검은 바둑돌 사이 ①, ②, ③에 한 개씩 들어갈 경우 ②자리는 4이하, ③자리는 6이하이므로 어떠한 수가 들어 가더라도 가능하다. ①에 들어갈 경우 2가지, ②, ③자리에 3가지 숫자 중 2가지를 뽑아 자리를 배열하므로 ${}_3P_2$ 가지, 나머지 하나 남은 숫자를 ④, ⑤에 배열 할 경우 2가지이므로 $2 \times 2 \times {}_3P_2 = 24$ 가지

(ii) 검은 바둑돌 사이 ①, ②, ③에 흰 바둑돌이 모두 들어갈 경우

주어진 조건에 맞게 표로 정리하면 다음과 같다.

①	②	③
W_1	W_3	W_2, W_4
W_1	W_4	W_2, W_3
W_2	W_1, W_3	W_4
W_2	W_3	W_1, W_4
W_2	W_4	W_1, W_3

따라서 $5 \times 2 = 10$ 가지

(i), (ii)에 의하여 $24 + 10 = 34$ 가지이다.

step 2 - 기본 유형 마스터

P. 4-1

0014 ③

0015 (1) 4 (2) 5 (3) 6

0016 (1) $a=2, b=-1$ (2) 5 0017 ⑤

0018 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

0019 ⑤

0020 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0021 ⑤

0022 4

0023 ③

0024 ①

0025 ④

0026 -8

0027 ②

0028 ④

0029 7

0030 ④

0031 $X = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

0032 ②

0033 ①

0034 1

0035 ③

0036 ④

0037 ①

0038 ②

0039 ③

0040 ④

0041 ③

0042 ②

0043 ④

0044 $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

0045 ④

0046 -18

0047 3

0048 2

0049 ⑤

0050 ④

0051 ④

0052 0

0053 6

0054 ①

0055 ④

0056 ①

0057 ⑤

0058 ④

0059 ①

0060 -13

0061 ⑤

0062 ⑤

0063 ④

0064 ④

0065 ④

10) ③

③ $i=3, j=2$ 일 때, $a_{32}=0, a_{23}=2$ 이므로 $a_{32} < a_{23}$ 이다.

11) ③

$x+2y=y+3, 3xy+5=-7, 2=2x+y$ 에서

$x+2y=y+3, 2=2x+y$ 를 연립하여 풀면 $x=-1, y=4$

$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$

[다른풀이]

$x+2y=y+3, 3xy+5=-7$ 에서 $x+y=3, xy=-4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2 \times (-4)=17$

12) ②

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & 2x \\ 3x+2y & -x+y \end{pmatrix}$

즉, $3=x-y, 4=2x, 4=3x+2y, -3=-x+y$ 이므로

$x=2, y=-1, \therefore x+y=1$

13) ①

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

14) ④

$AE=EA=A0$ 이므로

$$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E^3=A^3+E$$

이 때, $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A^3+E=\begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

15) ④

$$\textcircled{1} (A+B)^2-(A-B)^2$$

$$=(A+B)(A+B)-(A-B)(A-B)$$

$$=(A^2+AB+BA+B^2)-(A^2-AB-BA+B^2)$$

$$=2(AB+BA) \text{ (참)}$$

$$\textcircled{2} (AB)^2=(AB)(AB)=ABAB \text{ (참)}$$

$$\textcircled{3} (A+E)(A-E)=A^2-E^2=A^2-E \text{ (참)}$$

$$\textcircled{4} (A-2E)^2=A^2-4A+4E \text{ (거짓)}$$

$$\textcircled{5} (A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \text{ (참)}$$

16) ③

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 이라 하면}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \therefore a=2, b=3$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

17) ③

$A+B=2E$ 에서 $B=2E-A$, $A=2E-B$ 이고, $AB=O$ 이므로

$$A(2E-A)=2A-A^2=O \therefore A^2=2A$$

$$(2E-B)B=2B-B^2=O \therefore B^2=2B$$

$$\therefore A^2+B^2=2(A+B)=4E$$

18) 23

이차부등식 $2x^2+(a-6)x+k-a+4 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$D=(a-6)^2-8(k-a+4) \leq 0$$

$$\text{정리하면 } g(a)=(a-2)^2-8k \leq 0$$

만족하는 정수 a 의 개수가 19개 이므로

-7 에서 11 까지 이다.

$$\text{따라서 } g(11)=81-8k \leq 0, k \geq \frac{81}{8}$$

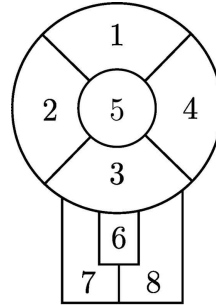
$$g(12)=100-8k > 0, k < \frac{25}{2}$$

$$\frac{81}{8} \leq k < \frac{25}{2}$$

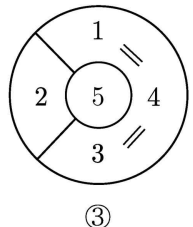
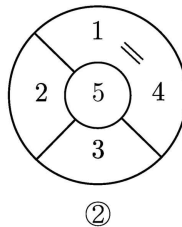
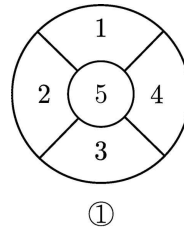
만족하는 정수의 합은 $11+12=23$

19) 84

주어진 그림을 색칠하는 경우의 수는 다음 그림을 색칠하는 경우의 수와 같다.



이때 1에서 5까지의 그림에서의 경우의 수는 다음과 같다.



①의 그림의 경우의 수에서 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 순으로 칠한 후

②의 그림의 경우의 수에서 1과 4가 같아지는 경우를 제외하고

③의 그림의 경우의 수에서 1과 3과 4가 같아지는 경우를 제외하면

$$\therefore 5 \times 4 \times 3^3 - 5 \times 4 \times 3^2 + 5 \times 4 \times 3 = 420 \text{ 가지}$$

6에서 8까지의 영역에서 3에서 칠한 색을 제외한 4가지의 색을 이용하여 색칠할 수 있으므로 $4 \times 3 \times 2 = 4!$

따라서 색을 칠하는 경우의 수는 $420 \times 4! = 84 \times 5!$ 가지이다.

$$\therefore n=84$$

20) 336가지

첫 번째 행 ① ② ③ ④

두 번째 행 ⑤ ⑥ ⑦

1열 2열 3열 4열

주어진 자리에 번호를 매겨 커플들이 앉을 수 있는 경우의

수를 뽑으면

첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 커플없이 앉는 경우는

(1, 5), (2, 6), (3, 7)

첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 한 커플만 앉는 경우는

(1, 2)일 때 (3, 7), (5, 6)

(2, 3)일 때 (1, 5), (6, 7)

(3, 4)일 때 (1, 5), (2, 6) 또는 (1, 5), (6, 7)

첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 두 커플이 앉는 경우는

(1, 2), (3, 4)일 때 (5, 6) 또는 (6, 7)

총 7가지이다.

따라서 세 커플을 각각의 세 묶음으로 된 자리에 배열한 후 커플끼리 자리를 바꾸는 것까지 고려하여 구하고자 하는 경우의 수는 $3! \times 2^3 \times 7 = 336$ 가지이다.

$$21) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = (\text{1지점에서 1지점으로 직접 가는 길의 개수}) = 0$

$a_{12} = (\text{1지점에서 2지점으로 직접 가는 길의 개수}) = 1$

$a_{13} = (\text{1지점에서 3지점으로 직접 가는 길의 개수}) = 0$

마찬가지 방법으로

$a_{21} = 2, a_{22} = 0, a_{23} = 2, a_{31} = 1, a_{32} = 0, a_{33} = 1$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22) -2

케일리-해밀턴 정리에 의해

$$A^2 - A + E = O \text{ 이므로 } A^3 = -E$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = A + A^2 - E - A - A^2 = -E$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 -2 이다.