매쓰플랫

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

공통수학2

46문제 / 김태훈선생님

이름

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 집합의 연산과 벤 다이어그램

| x축(y축) 위의 있는 점에서 같은 거리에 있는 점 구하기 | 정답률 89%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 17번

01 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

| x축(y축) 위의 있는 점에서 같은 거리에 있는 점 구하기 | 정답률 78%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 17번

02 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 $\mathrm{P}(0,\ a)$라 할 때, a의 값을 구하시오.

| 삼각형의 무게중심 | 정답률 85%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 20번

03 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(5,\ 3)$, $\mathrm{B}(a,\ -10)$, $\mathrm{C}(3,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2,\ -1)$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

| 삼각형의 무게중심 | 정답률 86%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 20번

04 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(2,\ -1)$, $\mathrm{C}(5,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(4,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

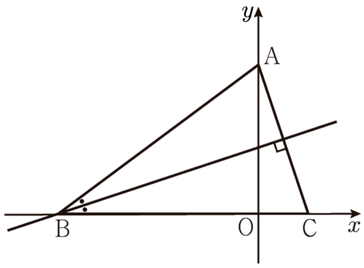
| 삼각형의 내각의 이등분선 | 정답률 72%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 10번

05 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(8,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D는 변 BC의 중점이다. 상수 a의 값을 구하시오.

| 삼각형의 내각의 이등분선 | 정답률 76%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 10번

06 [2020년 9월 고1 12번 변형]
다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$, $\mathrm{B}(-4,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{ABC}$의 이등분선이 선분 AC와 수직일 때, 양수 a의 값은?



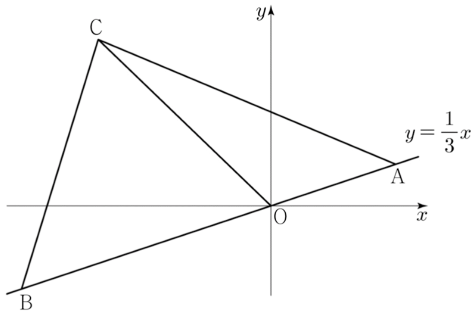
① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

| 선분의 내분점의 활용(1) | 정답률 65%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 22번

07 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 4)$를 잇는 선분 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 3배일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

| 선분의 내분점의 활용(1) | 정답률 77%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 9번

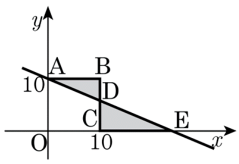
08 [2019년 9월 고1 12번/3점]
직선 $y=\dfrac{1}{3}x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$가 있다. 제2사분면 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비가 $2:1$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a<0$이고, O는 원점이다.)



① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

| x절편 · y절편과 삼각형의 넓이 | 정답률 64%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 11번

09 좌표평면 위에 원점 O와 세 점 $A(0, 10)$, $B(10, 10)$, $C(10, 0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 다음 그림과 같이 변 BC 위의 점 B, C가 아닌 한 점 D에 대하여 두 삼각형 ABD와 CDE의 넓이의 합이 사다리꼴 OADC의 넓이와 같다고 할 때, 직선 AD의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

| 두 직선 y=mx+n, y=m'x+n'의 위치 관계 | 정답률 49%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 21번

10 [2020년 9월 고1 29번/4점]
제1사분면 위의 점 A와 제3사분면 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있다.
> (나) $\overline{OB}=2\overline{OA}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AL과 직선 BH가 만나는 점을 P, 직선 OP가 직선 LH와 만나는 점을 Q라 하자. 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 넓이가 $\frac{81}{2}\pi$일 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

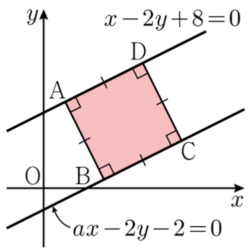
| 점과 직선 사이의 거리 | 정답률 85%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 15번

11 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(2, 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 할 때, 점 G와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

| 평행한 두 직선 사이의 거리 | 정답률 71%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 24번

12 다음 그림과 같이 평행한 두 직선 $x-2y+8=0$, $ax-2y-2=0$ 위에 사각형 ABCD가 정사각형이 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡을 때, 이 정사각형의 넓이를 구하시오.



| 평행한 두 직선 사이의 거리 | 정답률 74%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 24번

13 평행한 두 직선 $x+7y+8=0$, $3x+ay+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $b<0$)

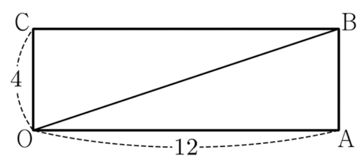
① 11　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 19

| 점과 직선 사이의 거리의 활용 | 정답률 37%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 16번

14 [2024년 9월 고1 28번 변형]
최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ 0)$ $(a>3)$에서 만나고 y축과 점 C에서 만난다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 P, 두 점 A, P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하자. 사각형 APRQ가 정사각형일 때, $f(18)$의 값을 구하시오.

| 점과 직선 사이의 거리의 활용 | 정답률 54%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 8번

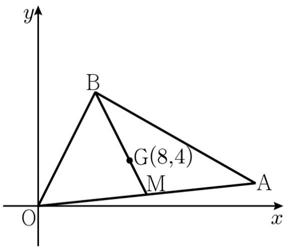
15 다음 그림과 같이 가로의 길이가 12, 세로의 길이가 4인 직사각형 OABC가 있다. 점 D는 선분 OB를 $3:1$로 내분하는 점이고, 점 E는 선분 OD를 점 O방향으로 연장한 반직선 위의 점이다. $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OD}}$일 때, 점 E와 직선 CD 사이의 거리를 $\dfrac{q}{\sqrt{p}}$라 하자. $2p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 100 이하의 자연수이다.)



| 점과 직선 사이의 거리의 활용 | 정답률 64%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 8번

16 [2020년 3월 고2 18번/4점]
좌표평면의 제1사분면에 있는 두 점 A, B와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는 $(8,\ 4)$이고, 점 B와 직선 OA 사이의 거리는 $6\sqrt{2}$이다.
다음은 직선 OB의 기울기가 직선 OA의 기울기보다 클 때, 직선 OA의 기울기를 구하는 과정이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하자.



점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로
$\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$이고,
점 B와 직선 OA 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$이므로
점 G와 직선 OA 사이의 거리는 $\boxed{(가)}$이다.
직선 OA의 기울기를 m이라 하면
점 G와 직선 OA 사이의 거리는
$\dfrac{\boxed{(나)}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$이고 $\boxed{(가)}$와 같다.
즉, $\boxed{(나)}=\boxed{(가)}\cdot\sqrt{m^2+1}$이다.
양변을 제곱하여 m의 값을 구하면
$m=\boxed{}$ 또는 $m=\boxed{}$이다.
이때 직선 OG의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로
직선 OA의 기울기는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\dfrac{f(q)}{p^2}$의 값은?

① $\dfrac{2}{7}$ ② $\dfrac{5}{14}$ ③ $\dfrac{3}{7}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{4}{7}$

| 원의 방정식이 되기 위한 조건 | 정답률 73%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 3번

17 방정식 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$이 원의 방정식이 되도록 하는 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| 원의 방정식이 되기 위한 조건 | 정답률 80%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 3번

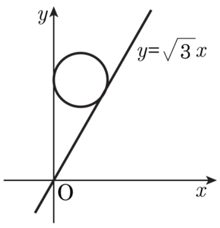
18 방정식 $x^2+y^2-4ax+2ay+10a+15=0$이 원을 나타내도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<-3$ 또는 $a>1$ ② $a<-1$ 또는 $a>3$
③ $-3<a<-1$ ④ $-3<a<1$
⑤ $-1<a<3$

| 원과 직선의 위치 관계 | 정답률 74%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 13번

19 다음 그림과 같이 좌표평면 위에서 중심이 1 사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 1 인 원이 y 축과 직선 $y=\sqrt{3}x$ 에 동시에 접한다. 이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?



① 2　② $2+\sqrt{2}$　③ $3+\sqrt{3}$　④ 5　⑤ $5+\sqrt{5}$

| 원과 직선의 위치 관계 | 정답률 65%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 13번

20 직선 $ax+by+2=0$ 이 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π　② 2π　③ 3π　④ 4π　⑤ 5π

| 현의 길이 | 정답률 67%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 18번

21 중심이 직선 $x+y-4=0$ 위에 있고, y축에 접하는 원 C가 있다. 원 C가 x축에 의하여 잘린 현의 길이가 2일 때, 원 C의 반지름의 길이는?
(단, 원 C의 중심은 제1사분면 위에 있다.)

① $\frac{13}{8}$　② $\frac{15}{8}$　③ $\frac{17}{8}$　④ $\frac{19}{8}$　⑤ $\frac{21}{8}$

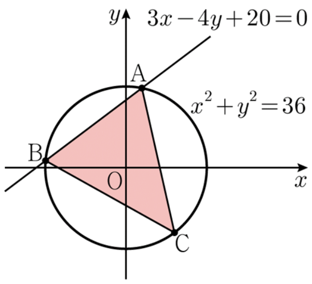
| 현의 길이 | 정답률 64%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 18번

22 원 $x^2+y^2-14x-10y+58=0$과 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이가 최대가 되도록 하는 상수 m의 값을 구하시오.

| 원의 접선의 방정식(2) 기울기가 주어질 때 | 정답률 65%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 6번

23 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=36$과 직선 $3x-4y+20=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되도록 원 위에 점 C를 잡을 때, 점 C를 지나고 원에 접하는 직선의 방정식은 $ax-4y+b=0$이다. $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

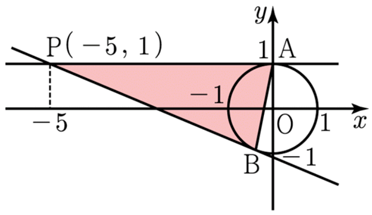
| 원의 접선의 방정식(2) 기울기가 주어질 때 | 정답률 62%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 6번

24 원 $x^2+y^2=36$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $5\overline{\mathrm{OA}}=12\overline{\mathrm{OB}}$일 때, 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $\frac{6}{13}ab^2$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{33}{4}$ ② $-\frac{65}{8}$ ③ -8
④ $-\frac{63}{8}$ ⑤ $-\frac{31}{4}$

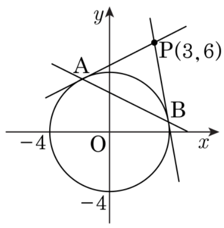
| 원의 접선의 방정식(3) 원 밖의 한 점이 주어질 때 | 정답률 49%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 2번

25 다음 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(-5,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, B라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 구하시오.



| 원의 접선의 방정식(3) 원 밖의 한 점이 주어질 때 | 정답률 63%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 2번

26 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 의 외부에 있는 점 $\mathrm{P}(3, 6)$ 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



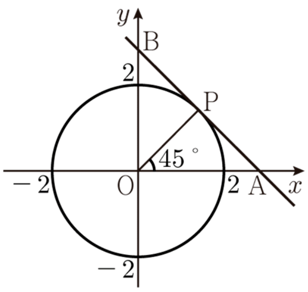
① $3x+6y-16=0$
② $3x-6y+16=0$
③ $3x+6y-14=0$
④ $3x-6y+14=0$
⑤ $x+2y-5=0$

| 원의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 52%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 19번

27 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$ 일 때, 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB 위를 움직이는 임의의 점 $(a,\ b)$에 대하여 a^2+b^2+4b+4의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\dfrac{m}{M}$의 값은?

(단, 점 P는 제1사분면 위에 있고, O는 원점이다.)



① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{9}{16}$　③ $\dfrac{5}{8}$

④ $\dfrac{11}{16}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

| 직선의 평행이동 | 정답률 77%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 4번

28 [2024년 3월 고2 25번/3점]

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점을 B라 하자. 직선 AB를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 y절편을 구하시오.

| 점의 평행이동과 대칭이동 | 정답률 86%

[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 1번

29 점 $(-1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y축에 대하여 대칭이동하였다. 이것을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 다시 원점에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(1,\ 2)$가 되었다. 이때 $a+b$의 값은?

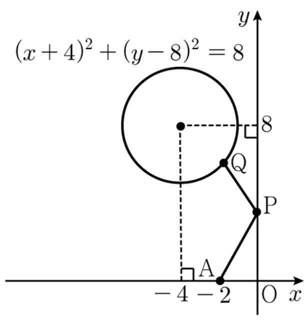
① -3　② -2　③ -1

④ 0　⑤ 1

| 대칭이동의 활용(1) 거리의 최솟값 | 정답률 67%

[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 14번

30 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$과 원 $C : (x+4)^2+(y-8)^2=8$ 이 있다. y축 위의 점 P와 원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 k라 할 때, $k+2\sqrt{2}$ 의 값을 구하시오.



| 대칭이동의 활용(1) 거리의 최솟값 | 정답률 52%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 1학기 공통수학1 기말 14번

31 점 $(8,\ 6)$을 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대인 직선을 l이라 하자. 원 $(x-1)^2+(y-7)^2=4$ 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

| 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수 | 정답률 61%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 12번

32 [2016년 9월 고2 이과 13번/3점]
집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는?

(가) $n(X)\geq 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

| 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수 | 정답률 58%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 12번

33 자연수 전체의 집합의 부분집합 A에 대하여 다음을 만족하는 집합 A의 개수를 구하시오. (단, $A\neq\varnothing$)

$x\in A$이면 $\dfrac{16}{x}\in A$

| 합집합과 교집합 | 정답률 94%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 17번

34 두 집합 $A,\ B$에 대하여 $A=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 20의 약수$\}$일 때, $A\cap B$는?

① $\{1,\ 2,\ 3,\ 10\}$ ② $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
③ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ④ $\{1,\ 2\}$
⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 20\}$

| 합집합과 교집합 | 정답률 87%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 17번

35 두 집합 $A=\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 14\}$, $B=\{x\,|\,x$는 24의 양의 약수$\}$에 대하여 $A\cup B$는?

① $\{1,\ 3,\ 6,\ 8\}$
② $\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$
③ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 14,\ 24\}$
④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 24\}$
⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

| 합집합과 교집합 | 정답률 92%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 2번

36 집합 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$일 때, $A\cap B$는?

① $\{2\}$ ② $\{2,\ 6\}$
③ $\{2,\ 4,\ 6\}$ ④ $\{5,\ 6\}$
⑤ $\{2,\ 4\}$

| 합집합과 교집합 | 정답률 89%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 2번

37 [2019년 3월 고2 이과 2번 변형]
두 집합 $A=\{1, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$에 대하여
집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

| 집합의 연산의 성질 | 정답률 35%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 21번

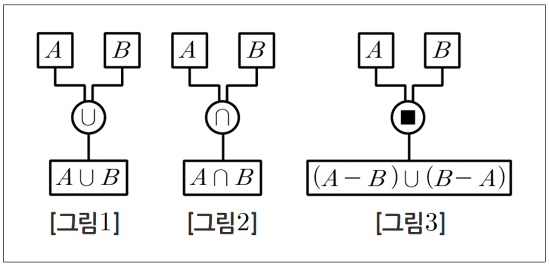
38 [2020년 11월 고1 29번/4점]
전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의
두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A)=n(B)=8$, $n(A\cap B)=1$
(나) 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 9의 배수가 아니다.
(다) 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합은 10의 배수가 아니다.

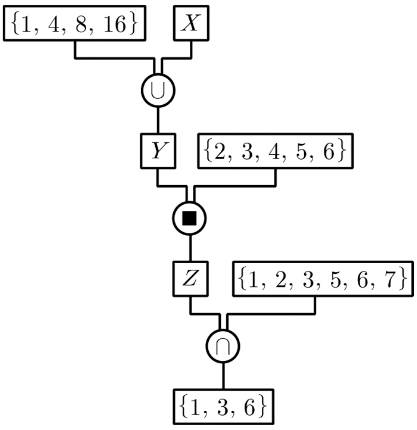
집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$, 집합 B의 모든 원소의 합을 $S(B)$라 할 때, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구하시오.

| 집합의 연산의 성질 | 정답률 57%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 21번

39 두 집합 A, B에 대한 세 연산 $\cup$, $\cap$, ■를 다음과 같이 정의한다.



X, Y, Z가 자연수를 원소로 갖는 집합일 때,
다음 그림에서 집합 X의 모든 원소의 합을 s라 하자.
s의 최솟값을 구하시오.



| 집합의 연산의 성질 | 정답률 59%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 23번

40 [2022년 11월 고1 28번/4점]
전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$의
두 부분집합 $A,\ B$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 6배이다.
> (나) $n(A\cup B)=5$

집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오.
(단, $2\leq n(B-A)\leq 4$)

| 집합의 연산의 성질 | 정답률 63%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 23번

41 [2019년 4월 고3 문과 15번/4점]
전체집합 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 두 부분집합 $A,\ B$가
$$A^C\subset B,\ n(A\cap B)=2$$
를 만족시킨다. 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의
모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때,
$M+m$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

| 집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기 | 정답률 84%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 6번

42 두 집합
$$A=\{2,\ a-2,\ a^2-3\},\ B=\{-1,\ 2,\ -a+3\}$$
에 대하여 $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

| 드모르간의 법칙 | 정답률 58%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 15번

43 [2022년 3월 고2 19번/4점]
두 자연수 $k,\ m\ (k\geq m)$에 대하여
전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 k 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합
$A=\{x\,|\,x$는 m의 약수$\}$, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $B-A=\{4,\ 7\},\ n(A\cup B^C)=7$
> (나) 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합은 서로 같다.

집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

| 드모르간의 법칙 | 정답률 70%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 15번

44 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의
두 부분집합 $A,\ B$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $A\cap B=\{1,\ 3,\ 4\}$
> (나) $A^C\cap B^C=\{2,\ 5,\ 6\}$

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 할 때,
$S(A)=4S(B)$가 되도록 하는 두 집합 $A,\ B$에 대하여
$\dfrac{S(A)S(B)}{16}$의 값을 구하시오.

| 유한집합의 원소의 개수의 활용(2) 최댓값과 최솟값 | 정답률 83%
[쌍둥이] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 8번

45 어느 화장품 가게에서 60명의 고객을 대상으로 A 화장품과 B 화장품을 구입해 본 경험을 조사하였더니 A 화장품과 B 화장품을 구입해 본 고객이 각각 42명, 36명이었다. B 화장품만 구입해 본 고객 수의 최댓값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

| 유한집합의 원소의 개수의 활용(2) 최댓값과 최솟값 | 정답률 71%
[유사] 숙명여자고등학교 1학년 2023년 2학기 공통수학2 중간 8번

46 어느 병원에서 인플루엔자 예방 접종을 받은 사람 80명 중 60세 이상이 56명, A동 주민이 42명이다. 이때 인플루엔자 예방 접종을 받은 60세 이상 A동 주민 수의 최댓값을 구하시오.

숙명여자고등학교 - 고등학교 공통수학2

선분의 내분, 내분점의 좌표 ~ 집합의 연산과 벤 다이어그램

01 정답 ③

해설 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ 0)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(x+3)^2+(0-2)^2=(x-4)^2+(0-5)^2$

$14x=28$ $\quad\therefore x=2$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ 0)$

02 정답 $-\dfrac{17}{4}$

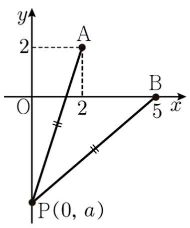
해설 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\sqrt{(2-0)^2+(2-a)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(0-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+8=a^2+25,\ -4a=17$

$\therefore a=-\dfrac{17}{4}$



03 정답 20

해설 세 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(5,\ 3),\ \mathrm{B}(a,\ -10),\ \mathrm{C}(3,\ b)$인 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표는

$\mathrm{G}\left(\dfrac{5+a+3}{3},\ \dfrac{3+(-10)+b}{3}\right)$이다.

$\mathrm{G}(2,\ -1)$이므로

$\dfrac{5+a+3}{3}=2,\ \dfrac{3+(-10)+b}{3}=-1$

$a+8=6,\ (-7)+b=-3$

$\therefore a=-2,\ b=4$

$\therefore a^2+b^2=20$

04 정답 7

해설 $\mathrm{A}(a,\ 3),\ \mathrm{B}(2,\ -1),\ \mathrm{C}(5,\ 4)$의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{a+2+5}{3},\ \dfrac{3-1+4}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{a+7}{3},\ 2\right)$

이때 $\mathrm{G}(4,\ b)$이므로

$\dfrac{a+7}{3}=4,\ b=2$

$\therefore a=5,\ b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$

05 정답 5

해설 $\overline{\mathrm{AD}}$는 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:1$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(1-a)^2+(1-4)^2$

$=a^2-2a+10 \quad \cdots ㉠$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(8-a)^2+(-4)^2$

$=a^2-16a+80 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a^2-2a+10=a^2-16a+80$,

$14a=70$

$\therefore a=5$

06 정답 ④

해설 $\angle\mathrm{ABC}$의 이등분선이 선분 AC와 수직이므로

삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\sqrt{16+a^2}=25$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-3$

이때 $a>0$이므로

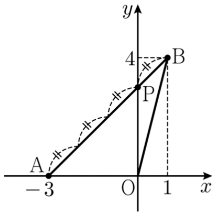
$a=3$

07 정답 3

해설 $\triangle OAP = 3\triangle OBP$

$\triangle OAP : \triangle OBP = 3:1$

즉, $\overline{AP} : \overline{PB} = 3:1$이므로 다음 그림과 같이 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이다.



따라서

$a = \dfrac{3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)}{3+1} = 0$

$b = \dfrac{3 \cdot 4 + 1 \cdot 0}{3+1} = 3$

이므로 $a+b=3$

08 정답 ①

해설 삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비는 $2:1$이므로

$\overline{BO} : \overline{OA} = 2:1$

점 O는 선분 BA를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$0 = \dfrac{a+6}{6}$, $a=-6$

$0 = \dfrac{b+2}{3}$, $b=-2$

따라서 $a+b = (-6)+(-2) = -8$

09 정답 ②

해설 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\triangle ABD \equiv \triangle AFD$ (SSS 합동)

$\square OCDF = \triangle AFD + \square OCDF$ 이므로

$\triangle AFD + \square OCDF = \triangle ABD + \triangle CDE$

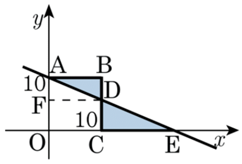
$\therefore\ \square OCDF = \triangle CDE$

즉, $\overline{OC} \cdot \overline{CD} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{CD}$에서

$10 = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CE}$ $\qquad \therefore\ \overline{CE} = 20$

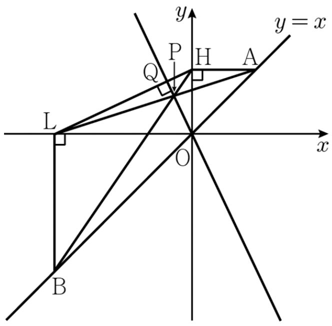
따라서 $\overline{OE} = \overline{OC} + \overline{CE} = 30$이고, 직선 AD의 기울기는 직선 AE의 기울기와 같으므로

$\dfrac{0-10}{30-0} = -\dfrac{1}{3}$



10 정답 162

해설 직선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기



양수 a에 대하여
$A(a,\ a)$, $B(-2a,\ -2a)$라 하면
$H(0,\ a)$, $L(-2a,\ 0)$

따라서 직선 AL의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}a$이고,

직선 BH의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x+a$이므로

점 P의 좌표는 $P\left(-\frac{2}{7}a,\ \frac{4}{7}a\right)$

이때 직선 OP의 방정식은 $y=-2x$이고,

직선 LH의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+a$이다.

즉, 두 직선 LH와 OP의 기울기의 곱이 -1이므로
두 직선은 서로 수직이다.
선분 OL은 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 지름이고
$\overline{OL}=2a$

주어진 원의 넓이 $\pi a^2=\frac{81}{2}\pi$에서 $a=\frac{9}{\sqrt{2}}$

따라서 $\overline{OA}=\sqrt{2}a=9$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}a=18$이므로
$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=162$

11 정답 ③

해설 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는 $G(2,\ 3)$

직선 OA의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$이다.

따라서 점 G와 직선 OA 사이의 거리는
$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot 3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{6}{5}$$

12 정답 20

해설 두 직선 $x-2y+8=0$, $ax-2y-2=0$이 평행하므로
$\frac{1}{a}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{8}{-2}$에서 $a=1$
정사각형의 한 변의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같고
직선 $x-2y+8=0$ 위의 한 점 $(0,\ 4)$와
직선 $x-2y-2=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|0-8-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로
넓이는 $(2\sqrt{5})^2=20$

13 정답 ③

해설 주어진 두 직선이 평행하므로
$\frac{1}{3}=\frac{7}{a}\neq\frac{8}{b}$
$\therefore a=21,\ b\neq 24$
직선 $x+7y+8=0$ 위의 한 점 $(-1,\ -1)$과
직선 $3x+21y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로
$$\frac{|3\cdot(-1)+21\cdot(-1)+b|}{\sqrt{3^2+21^2}}=\sqrt{2}$$
$|-24+b|=30$
$-24+b=-30$ 또는 $-24+b=30$
$\therefore b=-6$ 또는 $b=54$
그런데 $b<0$이므로 $b=-6$
$\therefore a+b=15$

14 정답 45

해설 $f(x)=k(x-3)(x-a)$ $(k>0)$이라 하면

$$f(x)=k\left(x-\frac{a+3}{2}\right)^2-\frac{k(a-3)^2}{4}$$

$$P\left(\frac{a+3}{2},\ -\frac{k(a-3)^2}{4}\right),\ C(0,\ 3ak)$$

사각형 APRQ가 정사각형이므로 두 직선 AP, BC가 서로 평행하다.

$$\frac{-\frac{k(a-3)^2}{4}}{\frac{a+3}{2}-3}=\frac{-3ak}{a}$$

$$\frac{-k(a-3)}{2}=-3k,\ a=9$$

$P(6,\ -9k)$, $C(0,\ 27k)$

직선 BC의 방정식은 $3kx+y-27k=0$

사각형 APRQ가 정사각형이므로

$\overline{AP}=\overline{AQ}$

$$\sqrt{3^2+(-9k)^2}=\frac{|9k-27k|}{\sqrt{(3k)^2+1^2}}$$

$$\sqrt{9(9k^2+1)}=\frac{18k}{\sqrt{9k^2+1}}$$

$9k^2+1=6k$, $(3k-1)^2=0$

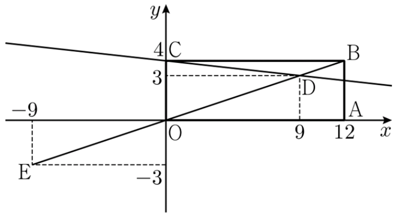
$$\therefore\ k=\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)(x-9)$이므로

$f(18)=45$

15 정답 92

해설 다음 그림과 같이 직사각형 OABC를 점 O가 원점에, 변 OA가 x축에 오도록 좌표평면에 놓으면 $A(12,\ 0)$, $B(12,\ 4)$, $C(0,\ 4)$



선분 OB를 $3:1$로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 12+1\cdot 0}{3+1},\ \frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1}\right),\ \text{즉 } (9,\ 3)$$

$\overline{OE}=\overline{OD}$이고 점 E는 선분 OD를 점 O방향으로 연장한 반직선 위의 점이므로 점 E의 좌표는 $(-9,\ -3)$

이때 직선 CD의 방정식은

$$y-4=\frac{3-4}{9-0}x$$

$$y=-\frac{1}{9}x+4$$

$\therefore\ x+9y-36=0$

따라서 점 E와 직선 CD 사이의 거리는

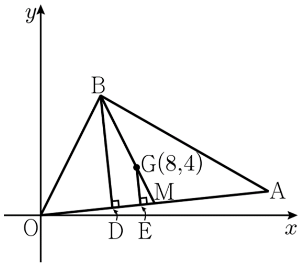
$$\frac{|1\cdot(-9)+9\cdot(-3)-36|}{\sqrt{1^2+9^2}}=\frac{72}{\sqrt{82}}$$

따라서 $p=82$, $q=72$이므로

$2p-q=92$

16 정답 ②

해설 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기를 추론한다.
선분 OA의 중점을 M, 두 점 B, G에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.



점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로
$\overline{BG}:\overline{GM}=2:1$이고, 삼각형 MBD와 삼각형 MGE는 서로 닮음이므로 $\overline{BD}:\overline{GE}=3:1$이다.
점 B와 직선 OA 사이의 거리 $\overline{BD}$가 $6\sqrt{2}$이므로
$\overline{GE}=\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$
직선 OA의 기울기를 m이라 하면 직선 OA의 방정식은
$y=mx$, 즉 $mx-y=0$이므로
점 G와 직선 OA 사이의 거리는 $\dfrac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$이고
$\boxed{2\sqrt{2}}$와 같다.
즉, $\dfrac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\boxed{2\sqrt{2}}$
$\boxed{|8m-4|}=\boxed{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{m^2+1}$이다.
양변을 제곱하면 $(8m-4)^2=8(m^2+1)$
$7m^2-8m+1=0,\ (7m-1)(m-1)=0$
$\therefore\ m=\dfrac{1}{7}$ 또는 $m=1$
이때 직선 OG의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 $m<\dfrac{1}{2}$을
만족시키는 직선 OA의 기울기는 $\boxed{\dfrac{1}{7}}$이다.
따라서 $p=2\sqrt{2},\ q=\dfrac{1}{7},\ f(m)=|8m-4|$이므로
$$\frac{f(q)}{p^2}=\frac{\left|8\cdot\frac{1}{7}-4\right|}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{\frac{20}{7}}{8}=\frac{5}{14}$$

17 정답 ③

해설 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$에서
$(x+m-1)^2+(y-m)^2=(m-1)^2+m^2-3m^2+2$
$(x+m-1)^2+(y-m)^2=3-2m-m^2$ $\cdots$ ㉠
㉠이 원의 방정식이므로
$3-2m-m^2>0$
$m^2+2m-3<0,\ (m+3)(m-1)<0$
$\therefore\ -3<m<1$
따라서 정수 m은 $-2,\ -1,\ 0$의 3개다.

18 정답 ②

해설 $x^2+y^2-4ax+2ay+10a+15=0$에서
$(x-2a)^2+(y+a)^2=5(a^2-2a-3)$
이 방정식이 원을 나타내려면
$a^2-2a-3>0,\ (a+1)(a-3)>0$
$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>3$

19 정답 ③

해설 y 축에 접하고 반지름이 1 이므로
주어진 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-b)^2=1$ 이라 하면
$y=\sqrt{3}\,x$ 가 이원에 접하므로
$(x-1)^2+(\sqrt{3}\,x-b)^2=1$
$x^2-2x+1+3x^2-2\sqrt{3}\,bx+b^2=1$
$4x^2-2(1+\sqrt{3}\,b)x+b^2=0$
이 방정식이 중근을 가지므로
$(1+\sqrt{3}\,b)^2-4b^2=0$
$3b^2+2\sqrt{3}\,b+1-4b^2=0,\ b^2-2\sqrt{3}\,b-1=0$
$\therefore b=\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=\sqrt{3}\pm 2$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\sqrt{3}+2$
$\therefore a=1,\ b=2+\sqrt{3}$ 이므로 $a+b=3+\sqrt{3}$

20 정답 ④

해설 직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이 거리는 원의 반지름과 같다.

$\therefore \dfrac{|a\times0+b\times0+2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

$\longrightarrow\ a^2+b^2=4$

∴ 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$2\times2\times\pi=4\pi$

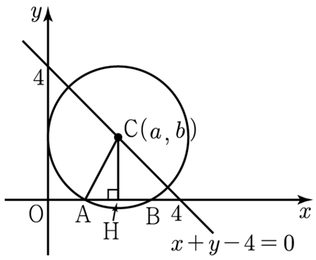
21 정답 ③

해설 원 C가 y축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2\ (a>0,\ b>0)$이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원 C와 x축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\cdot2=1$



직각삼각형 ACH에서 $a^2=1^2+b^2$ $\cdots$㉠

또 점 $\mathrm{C}(a, b)$가 직선 $x+y-4=0$ 위에 있으므로

$a+b-4=0$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{17}{8}$, $b=\dfrac{15}{8}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{17}{8}$이다.

22 정답 $\dfrac{5}{7}$

해설 $x^2+y^2-14x-10y+58=0$에서

$(x-7)^2+(y-5)^2=16$

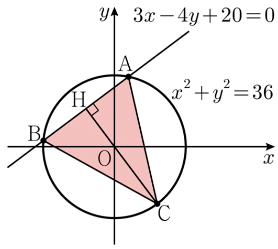
이때 직선 $y=mx$가 원의 중심 $(7, 5)$를 지날 때, 선분 AB의 길이는 지름으로 최대가 된다.

$\therefore m=\dfrac{5}{7}$

23 정답 ①

해설 다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{CH}}$



S가 최대가 되려면 $\overline{\mathrm{CH}}$가 최대가 되어야 하므로

점 C는 직선 AB와 평행하면서 원에 접하는 직선 위의 점이다.

그 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$ (k는 상수)라 하자.

원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6$

$\therefore k=\pm30$

이때 직선의 y절편이 음수이므로 직선의 방정식은

$3x-4y-30=0$이고

$a=3,\ b=-30$이므로

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{-30}{3}=-10$

24 정답 ②

해설 점 P가 제1사분면 위의 점이고, $\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\dfrac{5}{12}$이므로

접선의 기울기는 $-\dfrac{5}{12}$이다.

원의 중심 O와 직선 $y=-\dfrac{5}{12}x+b$, 즉

$5x+12y-12b=0$ 사이의 거리가 6이어야 하므로

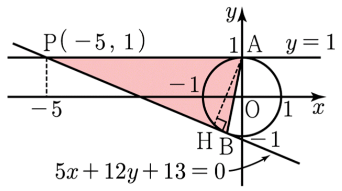
$\dfrac{|-12b|}{\sqrt{25+144}}=6,\ |b|=\dfrac{13}{2}$

$\therefore \dfrac{6}{13}ab^2=\dfrac{6}{13}\cdot\left(-\dfrac{5}{12}\right)\cdot\left(\dfrac{13}{2}\right)^2$

$=-\dfrac{65}{8}$

25 정답 $\frac{125}{26}$

해설 점 P를 지나는 원 $x^2+y^2=1$의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x+5)+1$,
즉 $mx-y+5m+1=0$



원과 직선이 접하려면

$\frac{|5m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|5m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $25m^2+10m+1=m^2+1$

$24m^2+10m=0$, $2m(12m+5)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=-\frac{5}{12}$

따라서 접선의 방정식은
$y=1$ 또는 $5x+12y+13=0$이다.
점 $A(0,\ 1)$에서 직선 $5x+12y+13=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{|12+13|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{25}{13}$

이때 $\overline{BP}=\overline{AP}=5$이므로

$$\therefore\ \triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{25}{13}$$
$$=\frac{125}{26}$$

26 정답 ①

해설 다음 그림에서 $\overline{PO}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

이고, $\triangle PAO$가 직각삼각형이므로,

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{29}$

이 때, 점 P를 중심으로 하고,
선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 이므로,

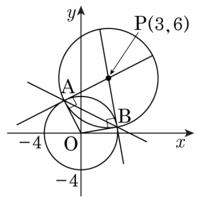
선분 AB 는 원 $x^2+y^2=16$ 과
새로운 원 $(x-3)^2+(y-6)^2=29$의 공통현이다.
따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-\{(x-3)^2+(y-6)^2-29\}=0$

$x^2+y^2-16-x^2+6x-9-y^2+12y-36+29=0$

$6x+12y-32=0$

$\therefore\ 3x+6y-16=0$



27 정답 ①

해설 직선 OP의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$이므로 직선 OP의 방정식은 $y=x$

$\mathrm{P}(p, p)$ $(p>0)$이라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$p^2+p^2=4$, $p^2=2$

$\therefore p=\sqrt{2}$ $(\because p>0)$

$\therefore \mathrm{P}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

점 $\mathrm{P}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=4$

$\therefore x+y=2\sqrt{2}$

$a^2+b^2+4b+4=k$라 하면

$a^2+(b+2)^2=k$

따라서 $\sqrt{k}$는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점 (a, b)와 점 $(0, -2)$ 사이의 거리와 같다.

k의 최솟값은 점 $(0, -2)$와 직선 $x+y=2\sqrt{2}$, 즉 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$m=\left(\frac{|-2-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2=6+4\sqrt{2}$$

또 k의 최댓값은 점 $(0, -2)$와 점 B 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$M=(2\sqrt{2}+2)^2=12+8\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{m}{M}=\frac{6+4\sqrt{2}}{12+8\sqrt{2}}=\frac{2(3+2\sqrt{2})}{4(3+2\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$$

28 정답 24

해설 도형의 평행이동을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

점 $\mathrm{A}(3, -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(3+1, -1-4)$, 즉 $(4, -5)$

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{-5-(-1)}{4-3}=-4$이므로

직선 AB의 방정식은

$y-(-5)=-4(x-4)$, 즉 $y=-4x+11$

이 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=-4(x-3)+11$, 즉 $y=-4x+24$

$y=-4x+24$에 $x=0$을 대입하면 $y=24$이므로

y절편은 24이다.

29 정답 ②

해설 점 $(-1, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(-1, -2)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$

이 점을 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(1+a, -2+b)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a, 2-b)$

이 점이 점 $(1, 2)$가 되려면 $a=-2$, $b=0$

$\therefore a+b=-2$

30 정답 10

해설 주어진 원의 중심을 C라 하면

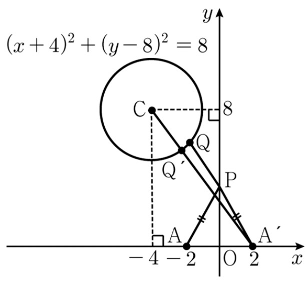
$\mathrm{C}(-4, 8)$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A}'(2, 0)$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ge\overline{\mathrm{A'Q}}$ $\cdots$ ㉠



한편, 직선 A′C가 원과 만나는 점 중에서 점 A′에 가까운 점을 Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{A'Q}}\ge\overline{\mathrm{A'Q'}}$

$=\overline{\mathrm{CA'}}-\overline{\mathrm{CQ'}}$

$=\sqrt{(-4-2)^2+(8-0)^2}-2\sqrt{2}$

$=10-2\sqrt{2}$

따라서 ㉠에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ge\overline{\mathrm{A'Q}}\ge 10-2\sqrt{2}$이므로

$k=10-2\sqrt{2}$

$\therefore k+2\sqrt{2}=10$

31 정답 3

해설 점 $(8,\ 6)$을 지나면서 원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(8,\ 6)$을 지나는 직선과 수직으로 만나야 한다.
원점과 점 $(8,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{6-0}{8-0}=\frac{3}{4}$이므로
직선 l의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.
기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 $(8,\ 6)$을 지나는 직선 l의 방정식은
$y-6=-\frac{4}{3}(x-8)$, 즉 $4x+3y-50=0$
원 $(x-1)^2+(y-7)^2=4$의 중심 $(1,\ 7)$과
직선 l사이의 거리는
$\frac{|4\cdot1+3\cdot7-50|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-25|}{5}=5$
점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 원의 중심과 직선 사이의 거리에서 반지름의 길이를 뺀 값이다.
따라서 구하는 최솟값은
$5-2=3$

32 정답 ②

해설 부분집합의 개수 추론하기
(ⅰ) $6\in X$인 경우 집합 X의 개수는
$2^4-1=15$
(ⅱ) $6\notin X$인 경우 집합 X는 3, 4를 반드시 포함해야 하므로 집합 X의 개수는
$2^{4-2}=4$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 19이다.

33 정답 7

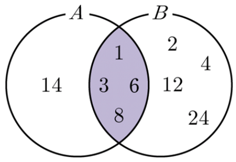
해설 집합 A의 원소는 자연수이므로 A의 원소는 16의 약수인 1, 2, 4, 8, 16으로 이루어져야 한다.
따라서 $x\in A$이면 $\frac{16}{x}\in A$를 만족시키는 집합 A는
$\{1,\ 16\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{4\}$, $\{1,\ 4,\ 16\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$,
$\{1,\ 2,\ 8,\ 16\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 의 7개다.
[다른 풀이]
$\{1,\ 16\}=a$, $\{2,\ 8\}=b$, $\{4\}=c$라 하면
a, b, c를 원소로 하는 부분집합 중 공집합을 제외한 것이다.
$\therefore\ 2^3-1=7$

34 정답 ④

해설 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$,
$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$이므로 두 집합의 공통부분은 $\{1,\ 2\}$이다.

35 정답 ④

해설 $A=\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 14\}$,
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 24\}$



36 정답 ⑤

해설 $A\cap B$는 A에도 속하고 B에도 속하는 공통부분이므로 $\{2,\ 4\}$이다.

37 정답 ⑤

해설 두 집합 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에서
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은
$1+3+4+5=13$

38 정답 63

해설 집합의 성질을 이용하여 추론하기
조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 두 집합 A, B에 대하여 $S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고 $S(B)$의 값이 최소이어야 한다.
9로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 10, 19\}$	8	$\{8, 17\}$
2	$\{2, 11, 20\}$	7	$\{7, 16\}$
3	$\{3, 12\}$	6	$\{6, 15\}$
4	$\{4, 13\}$	5	$\{5, 14\}$
0	$\{9\}$	0	$\{18\}$

나머지의 합이 0 또는 9가 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 A에 속할 수 있다.
따라서 $S(A)$가 최대가 되려면 집합 U의 부분집합 $\{1, 10, 19\}$, $\{2, 11, 20\}$, $\{6, 15\}$, $\{5, 14\}$, $\{18\}$의 원소 중 큰 수부터 차례대로 집합 A의 원소가 되어야 한다.
조건 (가)에서 $n(A)=8$이므로 $S(A)$가 최대가 되기 위하여 가능한 집합 A는
$\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$ ⋯ ㉠
10으로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	$\{1, 11\}$	9	$\{9, 19\}$
2	$\{2, 12\}$	8	$\{8, 18\}$
3	$\{3, 13\}$	7	$\{7, 17\}$
4	$\{4, 14\}$	6	$\{6, 16\}$
5	$\{5\}$	5	$\{15\}$
0	$\{10\}$	0	$\{20\}$

나머지의 합이 0 또는 10이 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 B에 속할 수 있다.
따라서 $S(B)$가 최소가 되려면 집합 U의 부분집합 $\{1, 11\}$, $\{2, 12\}$, $\{3, 13\}$, $\{4, 14\}$, $\{5\}$, $\{10\}$의 원소 중 작은 수부터 차례대로 집합 B의 원소가 되어야 한다.
조건 (가)에서 $n(B)=8$이므로 $S(B)$가 최소가 되기 위하여 가능한 집합 B는
$\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 조건 (가)의 $n(A\cap B)=1$을 만족시키려면 10, 11은 동시에 집합 $A\cap B$에 속할 수 없다.
$10\in B$, $11\in B$이면 $10\notin A$ 또는 $11\notin A$이다.
이때 1, 2, 5 중 적어도 하나가 집합 A에 속해야 하므로 $n(A\cap B)\neq 1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
$S(B)$가 최소가 되려면 $10\in B$, $11\notin B$이어야 한다.
따라서 $A=\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 13\}$일 때
$S(A)-S(B)$의 최댓값은 63이다.

39 정답 7

해설 집합 Z에 대하여 $Z\cap\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}=\{1, 3, 6\}$이므로 Z는 1, 3, 6을 원소로 갖고 2, 5, 7을 원소로 갖지 않는다.
$(Y\cup\{2, 3, 4, 5, 6\})-(Y\cap\{2, 3, 4, 5, 6\})=Z$
이때 집합 Z가 1, 3, 6을 원소로 갖고 2, 5, 7을 원소로 갖지 않으므로
Y는 1, 2, 5를 원소로 갖고 3, 6, 7을 원소로 갖지 않는다.
$X\cup\{1, 4, 8, 16\}=Y$이므로 집합 X는 최소한 2, 5를 원소로 갖고 3, 6, 7을 원소로 갖지 않아야 한다.
따라서 $X=\{2, 5\}$일 때, 모든 원소의 합 s가 최소가 되므로 s의 최솟값은 $2+5=7$

40 정답 22

해설 집합의 연산을 이용하여 추론하기
집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 k라 하자.
$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이고
조건 (가)에서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로 전체집합 U의 모든 원소의 합은 $7k$이다.
$7k=1+2+4+8+16+32=63$
$\therefore\ k=9$
집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로
$B-A=\{1, 8\}$
$A\cap(B-A)=\varnothing$이므로
$A\subset(B-A)^C=\{2, 4, 16, 32\}$
$A\cup B=A\cup(B-A)$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$이고
조건 (나)에서 $n(A\cup B)=5$이므로
$n(A)=3$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은
$A=\{2, 4, 16\}$일 때
$2+4+16=22$

41 정답 ⑤

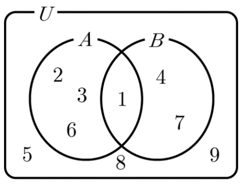
해설 $A^C\subset B$에서 $U=(A\cup A^C)\subset(A\cup B)$이고
$A\cup B\subset U$이므로 $A\cup B=U$
$n(A\cap B)=2$이므로
집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 원소의 합은
$A\cap B=\{1, 3\}$일 때, 최대이고
$A\cap B=\{7, 9\}$일 때, 최소이다.
$\therefore\ M=5+7+9=21$, $m=1+3+5=9$
따라서 $M+m=30$

42 정답 3

해설 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$이고
$B = \{-1, 2, -a+3\}$이므로
$-a+3=0$ 또는 $-a+3=1$
$\therefore a=3$ 또는 $a=2$
(i) $a=3$일 때
$A=\{1, 2, 6\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로
$A \cup B=\{-1, 0, 1, 2, 6\}$에서
주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$일 때
$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 1, 2\}$이므로
$A \cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$
(i), (ii)에 의하여 $A=\{0, 1, 2\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$0+1+2=3$

43 정답 ⑤

해설 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.
드모르간의 법칙에 의하여
$A \cup B^C = (A^C \cap B)^C = (B-A)^C$ 이므로
조건 (가)에서
$n(A \cup B^C) = n((B-A)^C) = 7$
$B-A=\{4, 7\}$에서 $n(B-A)=2$
$(B-A) \cup (B-A)^C = U$,
$(B-A) \cap (B-A)^C = \varnothing$ 이므로
$n(U) = n(B-A) + n((B-A)^C)$
$= n(B-A) + n(A \cup B^C)$
$= 2+7=9$
그러므로 $k=9$이고 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
조건 (가)에서 $B-A=\{4, 7\}$이고 조건 (나)에서
집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이
서로 같으므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은
집합 $B-A=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11이다.
따라서 m은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않고,
모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로
m이 될 수 있는 수는 6 또는 9이다.
(i) $m=6$일 때
집합 A는 $\{1, 2, 3, 6\}$이다.
이때 $A-B=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $A-B$의
원소의 합이 11이므로 조건을 만족시킨다.
(ii) $m=9$일 때
집합 A는 $\{1, 3, 9\}$이다.
이때 집합 $A-B$의 원소의 합이 11인 경우는
존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $m=6$이고 이때 $B=\{1, 4, 7\}$이다.
$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 4, 7\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$



$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5, 8, 9\}$이므로
집합 $A^C \cap B^C$의 모든 원소의 합은
$5+8+9=22$

44 정답 16

해설 조건 (가)에서 $S(A\cap B)=8$

조건 (나)에서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{2, 5, 6\}$이므로

$A\cup B=\{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$

$\therefore S(A\cup B)=32$

$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=32+8=40$

이때 $S(A)=4S(B)$이므로

$S(A)+S(B)=4S(B)+S(B)=5S(B)$

따라서 $5S(B)=40$이므로

$S(B)=8$, $S(A)=4S(B)=32$

$\therefore \dfrac{S(A)S(B)}{16}=\dfrac{32\cdot 8}{16}=16$

45 정답 ②

해설 고객 전체의 집합을 U, A 화장품을 구입해 본 고객의 집합을 A, B 화장품을 구입해 본 고객의 집합을 B라 하면

$n(U)=60$, $n(A)=42$, $n(B)=36$

B 화장품만 구입해 본 고객의 집합은 $B-A$이고

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$ $\cdots$ ㉠

$n(A\cap B)$가 최소일 때 $n(B-A)$는 최대가 된다.

$A\cup B=U$일 때 $n(A\cap B)$가 최소이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$60=42+36-m$

$\therefore m=18$

따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 18이므로

㉠에서 구하는 최댓값은 $36-18=18$

46 정답 42

해설 예방 접종을 받은 사람의 집합을 U, 예방 접종을 받은 사람 중 60세 이상의 집합을 P, A동 주민의 집합을 Q라고 하면 $n(U)=80$, $n(P)=56$, $n(Q)=42$이고

$n(P\cap Q)$가 최대인 경우는 $Q\subset P$일 때이므로

$n(P\cap Q)=n(Q)=42$