JD고등학교

1. 부등식 $3x+2 \le x+6 \le 2x+10$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? [4.7점]

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-1<9 \\ x^2-ax<0 \end{cases}$ 의 해를 $\alpha<x<\beta$라 하자. $\beta-\alpha$의 값이 최대일 때, a의 최댓값은? [4.9점]

① -8 ② -5 ③ -2
④ 1 ⑤ 4

3. 삼각형의 세 변 중 두 변의 길이가 각각 4, x이고 둘레의 길이가 10인 삼각형이 예각삼각형이 되도록 하는 x의 범위가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은? [5.0점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

4. 모든 실수 x에 대하여 부등식
$2|x+1|+|x-1| \le x^2+k$가 성립할 때, k의 최솟값은? [5.1점]

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

5. 양수 a, b에 대하여 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+5x-3 \le 0 \\ x^2-ax+b<0 \end{cases}$ 의 해가 없고, 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ bx^2-ax+1 \ge 0 \end{cases}$ 의 해가 $x>3$ 또는 $x \le \frac{1}{4}$일 때, $a+b$의 최솟값은? [5.2점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$
④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

6. 두 학생 A, B를 포함한 4명의 학생이 줄을 설 때, A와 B가 서로 이웃하도록 줄을 서는 경우의 수는? [4.8점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

7. 서로 다른 종류의 국어 참고서 4권과 서로 다른 종류의 수학 참고서 3권이 있다. 두 과목의 참고서 7권 중에서 각 과목별로 적어도 한 권씩 총 3권을 구매하는 경우의 수는? [4.9점]

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

8. 그림과 같은 8개의 빈칸에 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8을 하나씩 써넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열, 4열의 수의 합을 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 할 때, $a_1<a_2<a_3<a_4$이 되도록 빈칸을 채우는 경우의 수는? [5.2점]

1열	2열	3열	4열

① 1320 ② 1440 ③ 1560
④ 1680 ⑤ 1800

9. 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 각각 하나씩 적힌 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 4개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 8개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는? [5.3점]

> (가) 검은 바둑돌끼리는 적힌 숫자가 클수록 오른쪽에 나열한다.
> (나) 검은 바둑돌 사이에는 적어도 하나의 흰 바둑돌이 존재한다.
> (다) 검은 바둑돌 중 왼쪽에서 n번째 검은 바둑돌과 $(n+1)$번째 검은 바둑돌 사이에 있는 흰 바둑돌에 적힌 수의 합은 $2n+1$보다 작다.
> $(n=1,\ 2,\ 3)$

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

10. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

(단, a_{ij}는 행렬 A의 $(i,\ j)$성분이다.)
① 3×3행렬이다.
② $a_{12}=a_{23}$이다.
③ $i>j$이면 $a_{ij}>a_{ji}$이다.
④ 제2열의 성분의 합은 3이다.
⑤ $i=j$이면 $a_{ij}=1$이다.

11. $\begin{pmatrix}x+2y&0\\3xy+5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+3&0\\-7&2x+y\end{pmatrix}$일 때,

실수 $x,\ y$에 대하여 x^2+y^2의 값은?
① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

12. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}$에 대하여

행렬$\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$을 $xA+yB$의 꼴로 나타낼 때, 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?
① -1 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

13. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^3은?

① $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

14. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+E)(A^2-A+E)$는?

① $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

15. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(A+B)^2-(A-B)^2=2(AB+BA)$
② $(AB)^2=ABAB$
③ $(A+E)(A-E)=A^2-E$
④ $(A-2E)^2=A^2-4A+4$
⑤ $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

16. 이차정사각행렬 A가 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$과 같은 행렬은?

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

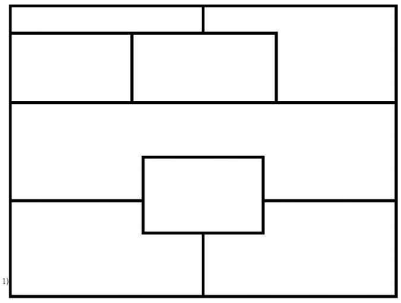
17. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A+B=2E$, $AB=O$를 만족시킬 때, A^2+B^2을 간단히 한것은?

① E ② $2E$ ③ $4E$
④ $6E$ ⑤ $8E$

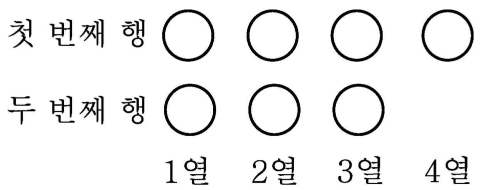
서술형

18. 이차부등식 $x^2+ax+4 \geq -x^2+6x+a-k$가 모든 실수 x에 대하여 성립하게 하는 정수 a의 개수가 19일 때, 가능한 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [5점]

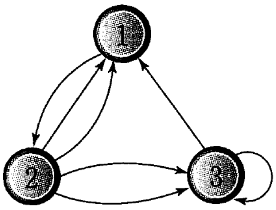
19. 그림과 같이 8개의 영역으로 나뉜 그림을 서로 다른 5가지 색을 이용하여 칠하려고 한다. 8개의 영역에 같은 색을 중복하여 이용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 색을 칠하는 경우의 수는 $n \times 5!$이다. n의 값을 구하시오. [4점]



20. 그림과 같은 7개의 좌석에 3쌍의 커플이 모두 앉으려고 한다. 커플끼리는 같은 행의 이웃한 자리에 앉거나 같은 열에 앉아야 한다고 할 때, 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. [5점]



21. 그림은 각 지점사이의 일방 통행로를 화살표로 나타낸 것이다. 행렬A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 i지점에서 j지점으로 가는 길의 개수로 정의할 때, 행렬 $A=(a_{ij})$를 구하여라. (단, $i,\ j=1,\ 2,\ 3$)



22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, $A+A^2+A^3+A^4+A^5$의 모든 성분의 합을 구하시오.

빠른정답

1) ⑤	2) ②	3) ④
4) ③	5) ①	6) ①
7) ②	8) ④	9) ②
10) ③	11) ③	12) ②
13) ①	14) ④	15) ④
16) ③	17) ③	18) 23
19) 84	20) 336가지	21) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
22) -2		

정답 및 풀이

1) ⑤

1) $3x+2 \le x+6$

$x \le 2$

2) $x+6 \le 2x+10$

$x \ge -4$

$-4 \le x \le 2$

$\alpha+\beta=-4+2=-2$

2) ②

1) $x^2+3x-1<9$

$(x+5)(x-2)<0$, $-5<x<2$

2) $x^2-ax<0$

$x(x-a)<0$

① $a<0$일 때

$a<x<0$

$\beta-\alpha$의 값이 최대일 때,

$\beta-\alpha=0-(-5)=5$

a의 최댓값은 -5

② $a=0$일 때 해가 없다

③ $a>0$

$0<x<a$

$\beta-\alpha$의 값이 최대일 때,

$\beta-\alpha=1-0=1$

3) ④

세 변의 길이가 각각 4, x, y

둘레의 길이가 $10=4+x+y$

$y=6-x$

1) 모든 변의 길이는 0보다 크므로

$x>0$, $6-x>0$

$0<x<6$

2) 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다

$4<x+6-x$

$x<6-x+4$

$6-x<x+4$

$1<x<5$

3) ① $4^2<x^2+(6-x)^2$

$x^2-6x+10>0$ 모든 실수

② $x^2<(6-x)^2+4^2$

$x<\dfrac{13}{3}$

③ $(6-x)^2 < x^2+4^2$

$x > \frac{5}{3}$

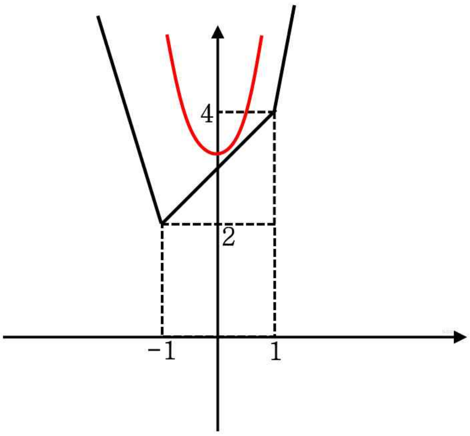
공통 범위는 $\frac{5}{3} < x < \frac{13}{3}$

$\beta - \alpha = \frac{13}{3} - \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

4) ③

$y = 2|x+1| + |x-1|$

$$y = \begin{cases} -3x-1 & (x < -1) \\ x+3 & (-1 \le x < 1) \\ 3x+1 & (x \ge 1) \end{cases}$$



그림과 같이 $y = x^2+k$가 $y = x+3$보다 위에 있거나 접하면 된다

$x^2+k = x+3$

$x^2 - x + k - 3 = 0$

$D = (-1)^2 - 4(k-3) \le 0$

$k \ge \frac{13}{4}$

최솟값은 $\frac{13}{4}$

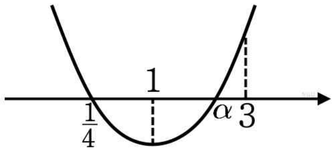
5) ①

1) 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ bx^2-ax+1 \ge 0 \end{cases}$ 의 해가

$x > 3$ 또는 $x \le \frac{1}{4}$이므로

$(x-1)(x-3) > 0$, $x < 1$ 또는 $x > 3$

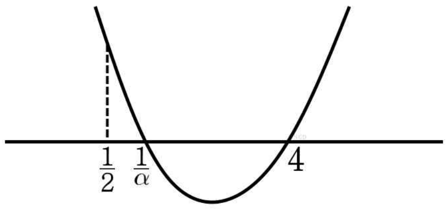
$bx^2 - ax + 1 = 0$의 두 근을 $\frac{1}{4}$, α라 하자.



2) 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+5x-3 \le 0 \\ x^2-ax+b < 0 \end{cases}$ 의 해가 없으므로

$(2x-1)(x+3) \le 0$, $-3 \le x \le \frac{1}{2}$

$x^2 - ax + b = 0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, 4이다.



$\frac{1}{\alpha} + 4 = a$, $\frac{1}{\alpha} \times 4 = b$이므로

$a+b$가 최소인 경우는 $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}$

$a = \frac{9}{2}$, $b = 2$, $a+b = \frac{13}{2}$

6) ①

A와 B가 서로 이웃하도록 줄을 서는 경우의 수는 $3! \times 2 = 12$

7) ②

두 과목의 참고서 7권 중에서 각 과목별로 적어도 한 권씩 총 3권을 구매하는 경우의 수는 전체 7권 중 3권을 고른 후 국어 참고서만 3권 고르는 경우, 수학 참고서만 3권 고르는 경우를 빼면 된다.

${}_7C_3 - {}_4C_3 - {}_3C_3 = 35 - 4 - 1 = 30$가지이다.

8) ④

2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8중 어느 두 수의 합은 모두 다르므로 구하는 경우의 수는 8개의 수를 2개, 2개, 2개, 2개의 네 조로 나눈 다음 크기순대로 1열, 2열, 3열, 4열에 배치 후 2개의 수의 자리를 바꾼 경우의 수와 같다.

${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} \times 2^4 = 1680$가지

9) ②

1, 2, 3, 4가 적힌 검은 바둑돌을 각각 B_1, B_2, B_3, B_4라 하고
1, 2, 3, 4가 적힌 흰 바둑돌을 각각 W_1, W_2, W_3, W_4라 하자.
(다) 조건에 의해
B_1과 B_2사이에 흰 바둑돌의 합은 2이하,
B_2과 B_3사이에 흰 바둑돌의 합은 4이하,
B_3과 B_4사이에 흰 바둑돌의 합은 6이하여야 한다.
(가), (나) 조건에 의해 바둑돌은 다음과 같이 나열될 수 있다.

④ B_1 ① B_2 ② B_3 ③ B_4 ⑤

주어진 ①, ②, ③ 자리에 들어갈 흰 바둑돌의 배열은 아래와 같다.
(i) 검은 바둑돌 사이 ①, ②, ③에 한 개씩 들어갈 경우
②자리는 4이하, ③자리는 6이하이므로 어떠한 수가 들어가더라도 가능하다. ①에 들어갈 경우 2가지, ②, ③자리에 3가지 숫자 중 2가지를 뽑아 자리를 배열하므로 $_3P_2$가지, 나머지 하나 남은 숫자를 ④, ⑤에 배열 할 경우 2가지이므로 $2\times2\times{}_3P_2=24$가지
(ii) 검은 바둑돌 사이 ①, ②, ③에 흰 바둑돌이 모두 들어갈 경우
주어진 조건에 맞게 표로 정리하면 다음과 같다.

①	②	③
W_1	W_3	W_2, W_4
W_1	W_4	W_2, W_3
W_2	W_1, W_3	W_4
W_2	W_3	W_1, W_4
W_2	W_4	W_1, W_3

따라서 $5\times2=10$가지
(i), (ii)에 의하여 $24+10=34$가지이다.

step 2 - 기본 유형 마스터 P. 4~11

0014 ③ **0015** (1) 4 (2) 5 (3) 6
0016 (1) $a=2,\ b=-1$ (2) 5 **0017** ⑤ **0018** $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
0019 ⑤ **0020** $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **0021** ⑤
0022 4 **0023** ③ **0024** ① **0025** ④
0026 -8 **0027** ② **0028** ④ **0029** 7
0030 ④ **0031** $X=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$
0032 ② **0033** ① **0034** 1 **0035** ③
0036 ④ **0037** ① **0038** ② **0039** ③
0040 ④ **0041** ③ **0042** ② **0043** ④
0044 $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ **0045** ④ **0046** -18
0047 3 **0048** 2 **0049** ⑤ **0050** ④
0051 ④ **0052** 0 **0053** 6 **0054** ①
0055 ④ **0056** ① **0057** ⑤ **0058** ④
0059 ① **0060** -13 **0061** ⑤ **0062** ⑤
0063 ④ **0064** ④ **0065** ④

10) ③
③ $i=3,\ j=2$일 때, $a_{32}=0,\ a_{23}=2$이므로 $a_{32} < a_{23}$이다.

11) ③
$x+2y=y+3,\ 3xy+5=-7,\ 2=2x+y$에서
$x+2y=y+3,\ 2=2x+y$를 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=4$
$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$
[다른풀이]
$x+2y=y+3,\ 3xy+5=-7$에서 $x+y=3,\ xy=-4$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-4)=17$

12) ②
$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y & 2x\\ 3x+2y & -x+y\end{pmatrix}$
즉, $3=x-y,\ 4=2x,\ 4=3x+2y,\ -3=-x+y$이므로
$x=2,\ y=-1,\ \ \therefore x+y=1$

13) ①
$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\therefore\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

14) ④

$AE=EA=A$이므로

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E^3=A^3+E$

이 때, $A^2=\begin{pmatrix}1 & -6\\0 & 4\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & -14\\0 & 8\end{pmatrix}$이므로

$A^3+E=\begin{pmatrix}1 & -14\\0 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -14\\0 & 9\end{pmatrix}$

15) ④

① $(A+B)^2-(A-B)^2$

$=(A+B)(A+B)-(A-B)(A-B)$

$=(A^2+AB+BA+B^2)-(A^2-AB-BA+B^2)$

$=2(AB+BA)$ (참)

② $(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB$ (참)

③ $(A+E)(A-E)=A^2-E^2=A^2-E$ (참)

④ $(A-2E)^2=A^2-4A+4E$ (거짓)

⑤ $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$ (참)

16) ③

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이라하면

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\therefore$ $a=2,\ b=3$

$\therefore$ $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

17) ③

$A+B=2E$에서 $B=2E-A$, $A=2E-B$이고, $AB=O$이므로

$A(2E-A)=2A-A^2=O$ $\therefore A^2=2A$

$(2E-B)B=2B-B^2=O$ $\therefore B^2=2B$

$\therefore$ $A^2+B^2=2(A+B)=4E$

18) 23

이차부등식 $2x^2+(a-6)x+k-a+4 \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$D=(a-6)^2-8(k-a+4) \leq 0$

정리하면 $g(a)=(a-2)^2-8k \leq 0$

만족하는 정수 a의 개수가 19개 이므로

-7에서 11까지 이다.

따라서 $g(11)=81-8k \leq 0$, $k \geq \frac{81}{8}$

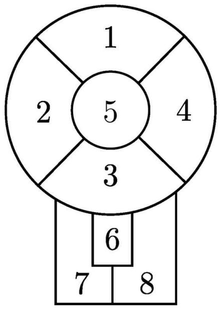
$g(12)=100-8k>0$, $k<\frac{25}{2}$

$\frac{81}{8} \leq k < \frac{25}{2}$

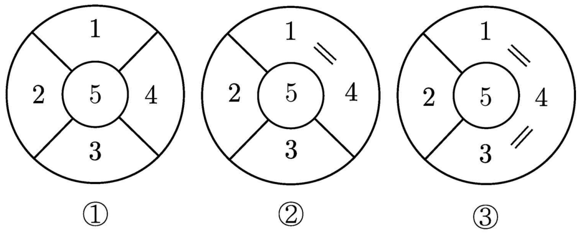
만족하는 정수의 합은 $11+12=23$

19) 84

주어진 그림을 색칠하는 경우의 수는 다음 그림을 색칠하는 경우의 수와 같다.



이때 1에서 5까지의 그림에서의 경우의 수는 다음과 같다.



①의 그림의 경우의 수에서 $5\to1\to2\to3\to4$순으로 칠한 후

②의 그림의 경우의 수에서 1과 4가 같아지는 경우를 제외하고

③의 그림의 경우의 수에서 1과 3과 4가 같아지는 경우를 제외하면

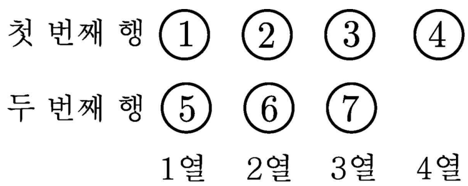
$\therefore$ $5\times4\times3^3-5\times4\times3^2+5\times4\times3=420$가지

6에서 8까지의 영역에서 3에서 칠한 색을 제외한 4가지의 색을 이용하여 색칠할 수 있으므로 $4\times3\times2=4!$

따라서 색을 칠하는 경우의 수는 $420\times4!=84\times5!$가지이다.

$\therefore$ $n=84$

20) 336가지



주어진 자리에 번호를 매겨 커플들이 앉을 수 있는 경우의

수를 뽑으면
첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 커플없이 앉는 경우는
$(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 7)$
첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 한 커플만 앉는 경우는
$(1,\ 2)$일 때 $(3,\ 7)$, $(5,\ 6)$
$(2,\ 3)$일 때 $(1,\ 5)$, $(6,\ 7)$
$(3,\ 4)$일 때 $(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$ 또는 $(1,\ 5)$, $(6,\ 7)$
첫 번째 행에 같은 행의 이웃한 두 커플이 앉는 경우는
$(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$일 때 $(5,\ 6)$ 또는 $(6,\ 7)$
총 7가지이다.
따라서 세 커플을 각각의 세 묶음으로 된 자리에 배열한 후 커플끼지 자리를 바꾸는 것까지 고려하여 구하고자 하는 경우의 수는 $3! \times 2^3 \times 7 = 336$가지이다.

21) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a_{11} = (1$지점에서 1지점으로 직접 가는 길의 개수$) = 0$
$a_{12} = (1$지점에서 2지점으로 직접 가는 길의 개수$) = 1$
$a_{13} = (1$지점에서 3지점으로 직접 가는 길의 개수$) = 0$
마찬가지 방법으로
$a_{21} = 2,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 1,\ a_{32} = 0,\ a_{33} = 1$
$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22) -2
케일리-해밀턴 정리에 의해
$A^2 - A + E = O$이므로 $A^3 = -E$
$\therefore$ (주어진 식) = $A + A^2 - E - A - A^2 = -E$
따라서 구하는 모든 성분의 합은 -2이다.

HM고등학교

1. 3 이상의 자연수 x에 대하여 세 수 $x-2,\ x-1,\ x$가 예각삼각형의 세 변의 길이가 되도록 하는 자연수 x의 최솟값은? [4.1점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

2. 사차방정식 $x^4-4x^3+x-4=0$의 한 허근을 α라고 할 때, $\alpha^{2023}+\alpha^{2022}+\alpha^{2021}$의 값은? [4.8점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3. x에 대한 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-8x+12 \ge 0 \\ |x-k|<3 \end{cases}$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4.9점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

4. 연립이차방정식 $\begin{cases} y+3=2|2x-y| \\ 2x^2-y-4=|2x-y| \end{cases}$의 해가 $\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=x_2 \\ y=y_2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=x_3 \\ y=y_3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=x_4 \\ y=y_4 \end{cases}$ 일 때, $x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4$의 값은? (단, $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$는 모두 서로 다른 실수이다.) [5.0점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\frac{65-3\sqrt{29}}{6}$
④ $\frac{65+3\sqrt{29}}{6}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

5. $4!+0!+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_4\mathrm{P}_0$의 값은? [3.5점]

① 71 ② 72 ③ 73
④ 74 ⑤ 75

6. 같은 공 5개를 같은 상자 5개에 나누어 담는 경우의 수는?(단, 빈 상자가 생기는 경우를 포함한다.) [3.6점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

7. 학생 6명 중에서 청소 반장 1명을 포함하여 청소 당번 3명을 뽑는 경우의 수는? [3.8점]

① 60 ② 66 ③ 72
④ 78 ⑤ 84

8. 가영, 나영이를 포함한 5명의 학생을 한 줄로 세울 때, 가영이와 나영이가 양 끝에 서는 경우의 수는? [3.6점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

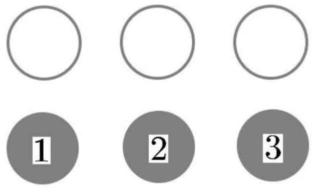
9. 일렬로 나열되어 있는 8개의 의자에 4명의 학생이 앉을 때, 2명만 이웃하여 앉는 경우의 수는? [3.8점]

① 180 ② 360 ③ 540
④ 720 ⑤ 900

10. 남학생 3명, 여학생 8명인 한 반에서 짝피구 선수를 구성하려고 한다. 짝피구 선수는 2명씩 짝이 되어 있는 5쌍 총 10명이 필요하다. 출전하는 남학생은 반드시 여학생과 짝을 해야 할 때, 선수를 구성하는 경우의 수는? [4.0점]

① 7360 ② 7460 ③ 7560
④ 7660 ⑤ 7760

11. 그림과 같이 흰 공 3개와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 검은 공 3개와 문자 A, B, C, D, E, F가 하나씩 적힌 가로 3칸, 세로 2칸짜리 보관함이 있다.



A	B	C
D	E	F

다음 조건을 만족시키도록 6개의 공을 모두 보관함에 넣는 경우의 수는? (단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4.1점]

[보기]

(가) 한 칸에 한 개의 공만 넣는다.
(나) 흰 공을 넣은 칸과 인접한 칸에는 적어도 한 개의 검은 공을 넣는다. (대각 방향의 칸은 인접한 칸이 아니다. 예를 들어 A가 적힌 칸과 인접한 칸은 B, D 뿐이고, E는 인접한 칸이 아니다.)

① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

12. 5명의 학생이 각자의 이름표가 하나씩 담긴 상자에서 이름표를 임의로 1개씩 뽑을 때, 어느 누구도 자신의 이름표를 뽑지 않고 어떤 2명도 서로의 이름표를 선택하지 않는 경우의 수는?
(단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.) [4.1점]

① 8 ② 12 ③ 24
④ 72 ⑤ 96

13. 흰 공 4개, 빨간 공 3개, 검은 공 2개를 세 명의 학생이 각각 3개씩 나누어 가지려고 한다. 흰 공은 1점, 빨간 공은 3점, 검은 공은 4점으로 점수를 계산한다.
예를 들어 한 학생이 흰 공 2개, 빨간 공 1개를 가졌다면 이 학생의 점수는 5점이다.
두 명 이상의 점수가 같으면 무승부라고 할 때, 무승부가 되는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4.3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

14. 행렬 $A=(a_{ij})$의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가 $a_{ij}=i^2-j+1$일 때, 행렬 A는? (단, $i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3$)

① $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

15. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$를 만족시키는 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

16. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $E+A^3+A^5=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 11 ② 30 ③ 33
④ 44 ⑤ 55

17. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^4+2A^3+4A-E는?

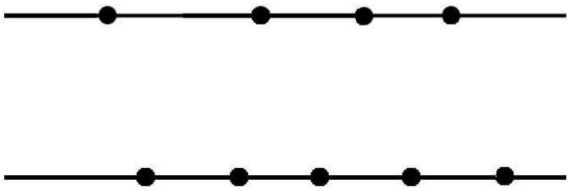
① $\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -20 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 25 & 11 \\ -11 & -8 \end{pmatrix}$

서술형

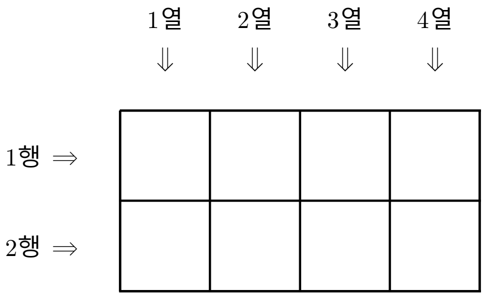
18. x에 대한 연립일차부등식 $7 \le ax-4 \le 6x+2$를 만족시키는 정수 x의 개수가 1 이상 4 이하가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [5.0점]

19. x에 대한 이차부등식 $(2a^2-3a-35)x^2-17x-2>0$을 만족시키는 $|x| \le 30$인 서로 다른 정수 x의 개수가 60이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오. (단, $-300 \le a \le 300$이다.) [5.1점]

20. 다음 그림과 같이 평행한 두 직선 위에 점 9개가 있다. 이 중에 점 4개를 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수를 구하시오.



21. 8개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4를 아래의 그림과 같이 8칸으로 나누어진 직사각형의 각 칸에 한 개씩 써넣으려고 한다. 각 행에 있는 네 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구하시오. [6점]



22. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $2B-X=X-(A+B)$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합을 구하시오.

빠른정답

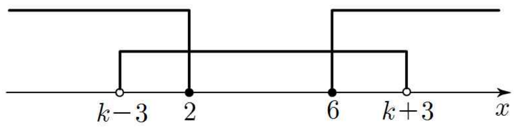
1) ④	2) ⑤	3) ④
4) ⑤	5) ①	6) ②
7) ①	8) ③	9) ④
10) ③	11) ①	12) ③
13) ⑤	14) ⑤	15) ④
16) ④	17) ⑤	18) 40
19) 590	20) 90	21) 648
22) -8		

정답 및 풀이

1) ④
가장 긴 변의 길이는 x이고, 예각삼각형이 되기 위한 조건은
$x^2 < (x-1)^2 + (x-2)^2$
$x^2 - 6x + 5 > 0$, $x < 1$ 또는 $x > 5$ …… ㉠
삼각형의 결정 조건에 의하여
$x < (x-1) + (x-2)$
$x > 3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $x > 5$
$\therefore$ 만족하는 자연수 x의 최솟값은 6

2) ⑤
사차방정식 $x^4 - 4x^3 + x - 4 = 0$에서
$x^4 - 4x^3 + x - 4 = (x+1)(x-4)(x^2 - x + 1) = 0$이므로
$x^2 - x + 1 = 0$의 한 허근이 α이다.
이때 $\alpha^3 = -1$, $\alpha^6 = 1$ 이므로
$\alpha^{2023} + \alpha^{2022} + \alpha^{2021}$
$= \alpha^{6\times 337+1} + \alpha^{6\times 337} + \alpha^{6\times 336+5}$
$= \alpha + 1 + \alpha^5$
$= \alpha + 1 - \alpha^2$
$= -(\alpha^2 - \alpha + 1) + 2$
$= 2$

3) ④
$|x-k| < 3$에서
$-3 < x-k < 3$, $-3+k < x < 3+k$ …… ㉠
$x^2 - 8x + 12 \ge 0$에서
$(x-6)(x-2) \le 0$, $x \le 2$ 또는 $x \ge 6$ …… ㉡
이 연립부등식의 정수인 해의 개수가 2가 되려면 ㉠, ㉡의 공통부분은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $k-3 \ge 2$, $7 < k+3 \le 8$일 때,
$k \ge 5$, $4 < k \le 5$이므로 $k = 5$
(ii) $1 \le k-3 < 2$, $6 < k+3 \le 7$일 때,
$4 \le k < 5$, $3 < k \le 4$이므로 $k = 4$
(iii) $0 \le k-3 < 1$, $k+3 \le 6$일 때,
$3 \le k < 4$, $k \le 3$이므로 $k = 3$
$\therefore$ 조건을 만족시키는 자연수 k는 3, 4, 5이고 합은 12

4) ⑤
연립이차방정식 $\begin{cases} y+3 = 2|2x-y| \\ 2x^2 - y - 4 = |2x-y| \end{cases}$ 에서
(i) $2x > y$일 때,
$y + 3 = 2(2x - y)$에서 $y = \dfrac{4}{3}x - 1$ …… ㉠
$2x^2 - y - 4 = 2x - y$에서
$2(x^2 - x - 2) = 0$, $2(x+1)(x-2) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 2$
㉠에 대입하면
$x = -1$, $y = -\dfrac{7}{3}$ 또는 $x = 2$, $y = \dfrac{5}{3}$
(ii) $2x \le y$일 때,
$y + 3 = 2(y - 2x)$에서 $y = 4x + 3$ …… ㉡
$2x^2 - y - 4 = y - 2x$에서 $y = x^2 + x - 2$ …… ㉢
㉡, ㉢에서
$x^2 + x - 2 = 4x + 3$, $x^2 - 3x - 5 = 0$ …… ㉣
이때 ㉣의 두 근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계에서
$\alpha + \beta = 3$
$x = \alpha$일 때 $y = 4\alpha + 3$, $x = \beta$일 때 $y = 4\beta + 3$이다.
(i), (ii)에서 연립이차방정식의 해가 $(x_k,\ y_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$일 때,
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$
$= (-1) + 2 + \left(-\dfrac{7}{3}\right) + \dfrac{5}{3} + \alpha + (4\alpha + 3) + \beta + (4\beta + 3)$
$= \dfrac{19}{3} + 5(\alpha + \beta)$
$= \dfrac{19}{3} + 15$
$= \dfrac{64}{3}$

5) ①
$0 \ne 1$, ${}_4\mathrm{P}_0 = 1$이므로
$4! + 0! + {}_{10}\mathrm{C}_8 + {}_4\mathrm{P}_0 = 24 + 1 + 45 + 1 = 71$

6) ②
$5=4+1$
$=3+2=3+1+1$
$=2+2+1=2+1+1+1$
$=1+1+1+1+1$
이므로 총 7가지

7) ①
청소 반장을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_1$
나머지 당번을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2$
$\therefore\ 6\times 10=60$

8) ③
가영이와 나영이를 양 끝에 세우는 방법의 수는 $2!$
가운데 나머지 3명의 학생을 세우는 방법의 수는 $3!$
$\therefore\ 2!\times 3\neq 12$

9) ④
빈 의자를 4개 먼저 깔아두면 사이사이에 5자리의 빈 공간이 생긴다.
학생 4명 중 2명을 골라 이웃하게 만들어 주고 ${}_4C_2$
5자리의 사이사이 중 3곳에 사람을 앉히고 ${}_5P_3$
이웃하는 학생끼리 위치를 바꿀 수 있으므로 2
총 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_5P_3\times 2=720$

10) ③
(ⅰ) 남학생 3명 여학생 7명이 선수가 되는 경우
여학생 중 선수가 되지 않는 학생을 고르고 8
남학생 3명의 여학생 짝을 고르고 ${}_7P_3$
나머지 4명의 학생이 짝이 되는 경우의 수는
${}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}$
따라서 $8\times{}_7P_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2}=5040$
(ⅱ) 남학생 2명 여학생 8명이 선수가 되는 경우
남학생 중 선수가 되지 않는 학생을 고르고 3
남학생 2명의 여학생 짝을 고르고 ${}_8P_2$
나머지 6명의 학생이 짝이 되는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}$
따라서 $3\times{}_8P_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=2520$
(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 경우의 수는
$5040+2520=7560$

11) ①
주어진 경우의 수는 6개의 공을 보관함에 넣는 경우의 수에서 주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 빼주면 된다.
6개의 공을 보관함에 넣는 경우의 수는 숫자가 들어간 공만 배열하면 되면 나머지 흰 공은 자동으로 배열되므로
${}_6P_3=120$
(나) 조건에서 흰 공을 ABD, ADE, BCF, CEF에 배치하고 나머지 숫자 공을 배열하는 경우의 수를 빼주면 되므로
$4\times 3!$
$120-4\times 3\neq 120-24=96$

12) ③
5명의 학생을 A, B, C, D, E라 놓으면 주어진 조건을 만족하는 경우의 일부는 다음과 같다.

A	B	C	D	E
B	D	A	E	C
B	E	A	C	D
B	C	E	A	D
B	E	D	A	C
B	C	D	E	A
B	D	E	C	A

A의 위치에 B가 오는 경우의 수가 4이고 나머지 C, D, E가 오는 경우의 수도 같은 정도로 배열되므로
모든 경우의 수는 $6\times 4=24$

13) ⑤
모든 공의 총 점수의 합은
$1\times 4+3\times 3+4\times 2=21$
따라서 무승부가 나오는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 동점인 점수가 9점인 경우
나머지 한 명은 3점이어야 하고 3점인 사람을 정하는 수 3
9점인 경우 검은 공 2개, 흰 공 1개를 갖거나 빨간 공 3개를 가지면 된다. 따라서 두 경우 중 한 가지를 정하는 수 2
따라서 동점인 점수가 9점인 경우의 수는 $3\times 2=6$
(ⅱ) 동점인 점수가 8점인 경우
나머지 한 명은 5점이어야 하고 5점인 사람을 정하는 수 3
8점인 경우 검은 공 1개, 빨간 공 1개, 흰 공 1개를 가져야 하므로 8점인 사람의 경우의 수는 같다.
따라서 동점인 점수가 8점인 경우의 수는 3
(ⅲ) 동점인 점수가 7점인 경우
세 명 모두 7점인 경우는 존재하지 않는다.
(ⅳ) 동점인 점수가 6점인 경우
나머지 한 명은 9점이어야 하고 9점인 사람을 정하는 수 3
6점인 경우 검은 공 1개, 흰 공 2개를 가져야 하므로 6점인 사람의 경우의 수는 같다.
따라서 동점인 점수가 6점인 경우의 수는 3
(ⅴ) 동점인 점수가 5점인 경우
나머지 한 명은 11점이어야 하고 11점인 사람을 정하는 수 3

5점인 경우 빨간 공 1개, 흰 공 2개를 가져야 하므로
5점인 사람의 경우의 수는 같다.
따라서 동점인 점수가 5점인 경우의 수는 3
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 구하는 총 경우의 수는 15

14) 정답 ⑤

$a_{11}=1^2-1+1=1,\ a_{12}=1^2-2+1=0,\ a_{13}=1^2-3+1=-1$

$a_{21}=2^2-1+1=4,\ a_{22}=2^2-2+1=3,\ a_{23}=2^2-3+1=2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\4&3&2\end{pmatrix}$

15) 정답 ④

$AB=\begin{pmatrix}a&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&b\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&b\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\2&3\end{pmatrix}=BA$에서

$\begin{pmatrix}2a-1&ab+1\\7&2b-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b&-2+3b\\a-2&-4\end{pmatrix}$

즉, $2a-1=2a+2b,\ ab+1=-2+3b,\ 7=a-2,\ 2b-3=-4$

$\therefore\ a=9,\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{17}{2}$

16) 정답 ④

$E+A^3+A^5=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^3&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^5&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1+8+32&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41&0\\0&3\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b+c+d=41+0+0+3=44$

17) 정답 ⑤

케일리-해밀턴의 정리에 의해 $A^2-A-E=O$

$\therefore\ A^4+2A^3+4A-E$

$=(A^2-A-E)(A^2+3A+4E)+11A+3E$

$=11A+3E$

$=11\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&11\\-11&-8\end{pmatrix}$

[다른풀이]

$A^2-A-E=O$에서 $A^2=A+E$이므로

A^4+2A^3+4A-E

$=(A^2)^2+2AA^2+2A-E$

$=(A+E)^2+2A(A+E)+4A-E$

$=A^2+2A+E+2A^2+A+4A-E$

$=3A^2+8A=3(A+E)+8A$

$=11A+3E$

18) 40

연립일차부등식 $7\le ax-4\le 6x+2$에서 $ax\ge 11$,

$(a-6)x\le 6$

(ⅰ) $a>6$일 때,

$\frac{11}{a}\le x\le\frac{6}{a-6}$ …… ㉠

(1) $6<a<11$일 때,

$1<\frac{11}{a}<\frac{11}{6}$이고 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 1 이상 4 이하이므로

$2\le\frac{6}{a-6}<6$

$2a-12\le 6<6a-6$

$7<a\le 9$이므로 정수 a는 $8,\ 9$

(2) $a\ge 11$일 때,

$0<\frac{11}{a}\le 1$이고 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 1 이상 4 이하이므로

$1\le\frac{6}{a-6}<5$

$a-6\le 6<5a-30$

$\frac{36}{5}<a\le 12$

$11\le a\le 12$이므로 정수 a는 $11,\ 12$

(ⅱ) $0<a<6$일 때,

$ax\ge 11,\ (a-6)x\le 6$에서

$x\ge\frac{11}{a},\ x\ge\frac{6}{a-6}$

따라서 부등식의 정수해가 무수히 많이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a<0$일 때,

$ax\ge 11,\ (a-6)x\le 6$에서

$x\le\frac{11}{a},\ x\ge\frac{6}{a-6}$

$\frac{6}{a-6}\le x\le\frac{11}{a}$

$-1<\frac{6}{a-6}<0$이므로 정수해가 존재하지 않는다.

(ⅳ) $a=0$일 때,

$ax\ge 11,\ (a-6)x\le 6$에서

$0\ge 11,\ -6x\le 6$

따라서 해가 존재하지 않는다.

(ⅴ) $a=6$일 때,

$ax\ge 11,\ (a-6)x\le 6$에서

$6x\ge 11,\ 0\le 6$

따라서 부등식의 정수해가 무수히 많이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore$ 정수 a는 $8,\ 9,\ 11,\ 12$이므로 모든 정수 a의 값의 합은 40

19) 590

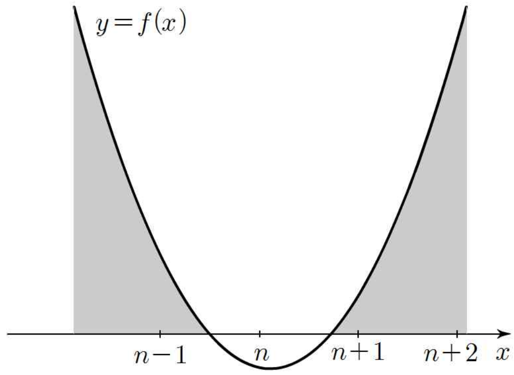
x에 대한 이차부등식이므로 $(2a^2-3a-35) \neq 0$이어야 한다.

따라서 $a \neq -\dfrac{7}{2}$이고 $a \neq 5$

부등식 $(2a^2-3a-35)x^2-17x-2>0$에서

$\{(2a+7)x+2\}\{(a-5)x-1\}>0$

$f(x)=(2a^2-3a-35)x^2-17x-2$라 하면 x에 대한 이차부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 $|x| \leq 30$인 서로 다른 정수 x의 개수가 60이 되도록 하려면 그림과 같아야 한다.



$f(0)=-2<0$이므로 $f(-1)>0$, $f(1)>0$

$f(-1)=(2a+5)(a-4)>0$에서

$a<-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a>4$ …… ㉠

$f(1)=(2a+9)(a-6)>0$에서

$a<-\dfrac{9}{2}$ 또는 $a>6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a<-\dfrac{9}{2}$ 또는 $a>6$

$\therefore$ 정수 a는 $-300,\ -290,\ \cdots,\ -5,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 300$이므로

정수 a의 개수는 590개

20) 90

사각형이 되려면 위쪽에 있는 직선 중에서 2개의 점을 고르고 아래쪽에 있는 직선 중에서 2개의 점을 고르면 되므로

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 90$

21) 648

모든 수의 총 합은 20이므로 각 행에 있는 네 수의 합이 같으려면 각 행의 수의 합이 10이 되어야 한다.

(ⅰ) 각 행에 $(4,\ 4,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 3,\ 3)$이 배열된 경우

1행 또는 2행에 $(4,\ 4,\ 1,\ 1)$이 와야 하고 각 숫자의

배열은 $\dfrac{4!}{2!2!}$과 같으므로

$\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{4!}{2!2!} \times 2 = 72$

(ⅱ) 각 행에 $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$가 배열된 경우

$4! \times 4 \neq 576$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하고자 하는 모든 경우의 수는 648

22) 정답 -8

$2B-X=X-(A+B)$에서 $2X=2B+A+B=A+3B$

$\therefore\ X=\dfrac{1}{2}(A+3B)=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 -8이다.

DI고등학교

1. 부등식 $|x+4|+|x-4| \leq 8$을 만족시키는 정수 x의 개수는?
[3.0점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2. x에 대한 사차방정식

$$x^4+(3a+8)x^3+(4a+9)x^2+(a+2)x=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a의 값은? [3.5점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3-2x^2+kx-10x+2k-4=0$이 1보다 작은 서로 다른 두 실근과 1보다 큰 한 근을 갖도록 하는 자연수 k의 값으로 될 수 없는 것은? [3.7점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 최고차항의 계수가 a인 이차다항식 $P(x)$가 다음 <조건>을 만족시킬 때, $P(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)
[3.9점]

(가) 부등식 $P(x) \geq x$의 해는 $x=2$이다.
(나) 방정식 $P(x)=-5ax-1$은 중근을 갖는다.

① $-\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{5}$
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

5. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $-2,\ 6$이다. 부등식 $f(|k-x|)\le 0$의 해가 $\begin{cases} x \le 2k^2+k-2 \\ x \ge -k^2-k+2 \end{cases}$ 일 때, 부등식 $f\left(\dfrac{k}{2}-x\right)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. $\alpha\times\beta$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4.2점]

① -18 ② -15 ③ -12
④ 15 ⑤ 18

6. x에 대한 사차방정식 $x^4-2qx^3-13px^2-p^2qx-p^3=0$은 중근 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$를 갖는다. $\alpha^2-\beta^2=-12$일 때, 연립부등식 $\begin{cases} pq(x-\alpha)(x-2\beta)\ge 0 \\ x^2-2nx-2x+n^2+2n\ge 0 \end{cases}$을 만족시키는 정수해의 개수가 6이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?
(단, $p,\ q\neq 0$인 실수이다.) [4.5점]

① 20 ② 24 ③ 27
④ 28 ⑤ 36

7. 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는? [3.0점]

① 2 ② 6 ③ 24
④ 120 ⑤ 720

8. 어느 모임에서 둥글게 모여 앉아 놀이를 하는데 이 놀이의 규칙은 다음과 같다.

(규칙1) 한 사람씩 돌아가면서 자연수 1부터 차례로 수를 말한다. (규칙2) 3의 배수 또는 일의 자리의 수가 $3,\ 6,\ 9$인 수가 나오면 수를 말하는 대신 손뼉을 친다.

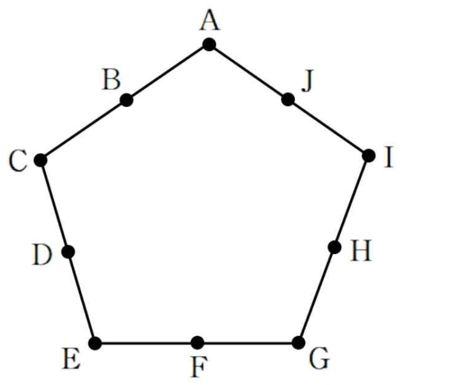
이 놀이를 할 때, 100 미만인 자연수 중에서 손뼉을 쳐야 하는 자연수의 개수는? [3.3점]

① 45 ② 48 ③ 51
④ 54 ⑤ 57

9. 다항식 $(a+b+c)(d+e)(x+y+z)$를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 p, x를 포함한 항의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값은? [3.4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

10. 그림과 같이 정오각형 ACEGI 위에 점 10개가 있다. 이 중에서 점 4개를 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는? [3.6점]



① 100 ② 125 ③ 150
④ 175 ⑤ 200

11. 그림과 같이 크기가 같은 6개의 정사각형에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있다.

1	2	3
4	5	6

서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 다음 조건을 만족시키도록 6개의 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수는? [4.1점]

(가) 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠한다.
(나) 한 정사각형에 한 가지 색만을 칠한다.

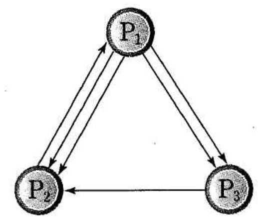
① 378 ② 420 ③ 504
④ 546 ⑤ 588

12. 서로 같은 검은색 모자 5개와 서로 같은 하얀색 모자 7개를 아래 그림과 같이 1부터 12까지의 자연수가 적혀 있는 12개의 칸으로 이루어진 보관함에 빈칸 없이 채우려고 한다. 보관함에서 적어도 하나의 가로줄 또는 하나의 세로줄이 같은 색의 모자로 채워지는 경우의 수는? (단, 보관함 한 칸에는 하나의 모자만 넣을 수 있다.) [4.4점]

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

① 548　② 552　③ 556
④ 560　⑤ 564

13. 그림은 세 나라 P_1, P_2, P_3사이의 국제 통신망을 화살표로 나타낸 것이다.
행렬 A의 $(i,\ j)$성분을 P_i나라에서 P_j나라로 직접 보내는 통신망의 개수로 정의할 때, 행렬 A는? (단, $i=j$일 때, $(i,\ j)$성분은 0이고, 화살표 방향으로만 통신이 가능하다.)



① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 X, Y가 $2X+Y=A$, $X-Y=B$를 만족시킬 때, 행렬 $X+Y$는?

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B^4-A^4의 모든 성분의 합은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

16. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$이 성립할 때, 실수 x, y의 값을 정할 때, $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

17. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A^3=A^5=E$이면 $A=E$이다.
② $AB=O$, $A\neq O$이면 $B=O$이다.
③ $A^2=O$이면 $A=O$이다.
④ $A^2=E$이면 $A=E$ 또는 $A=-E$이다.
⑤ $AB=O$이면 $BA=O$이다.

18. 아래 [표 1]은 알파 상점과 오메가 상점에서의 빵과 우유의 개당 가격을 나타낸 것이고, [표 2]는 이코와 사코가 구입할 빵과 우유의 개수를 나타낸 것이다.

	빵	우유
알파 상점	700원	400원
오메가 상점	500원	450원

[표 1]

	이코	사코
빵	2개	5개
우유	3개	4개

[표 2]

$A=\begin{pmatrix}700&400\\500&450\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&4\end{pmatrix}$라 할 때, 행렬 AB의 $(1,\ 2)$성분이 의미하는 것은?

① 알파 상점에서의 이코의 지불 금액
② 알파 상점에서의 사코의 지불 금액
③ 오메가 상점에서의 이코의 지불 금액
④ 오메가 상점에서의 사코의 지불 금액
⑤ 알파 상점과 오메가 상점에서의 이코의 지불 금액의 총합

서술형

19. 계수가 모두 정수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 근을 $\alpha=p+qi$꼴이라 할 때, $p^2+q^2=1$이고, 실근은 모두 양의 실수로 존재한다. 이때 가능한 $a-b-c$의 값을 풀이 과정과 함께 구하시오.
(단, p, q는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [10.0점]

20. 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 카드를 나열하는 경우의 수를 풀이과정과 함께 서술하시오. [10점, 부분점수 있음]

21. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(1) $(1,\ 3)$성분과 $(3,\ 2)$성분의 합을 구하시오.

(2) $A=(a_{ij})$라 할 대, $a_{12}+a_{21}-a_{33}$의 값을 구하시오.

(3) 행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}에 대하여 $i+j=4$를 만족시키는
모든 성분의 합을 구하시오.

22. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여
$A+B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix}10 & -5\\ -10 & 20\end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^2+B^2을 구하시오.

빠른정답

1) ④	2) ①	3) ⑤
4) ②	5) ②	6) ④
7) ④	8) ③	9) ①
10) ④	11) ③	12) ⑤
13) ⑤	14) ④	15) ④
16) ⑤	17) ①	18) ②
19) $-5,\ -3,\ -1,\ 1$		20) 2640
21) (1) 4 (2) 5 (3) 6		22) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

정답 및 풀이

1) ④

(i) $x<-4$인 경우

$|x+4|+|x-4|\le 8$

$-x-4-x+4\le 8$

$-2x\le 8$

$x\ge -4$

이므로 근이 존재하지 않는다.

(ii) $-4\le x<4$인 경우

$|x+4|+|x-4|\le 8$

$x+4-x+4\le 8$

$8\le 8$

에서 해는 모든 실근이다.

따라서 $-4\le x<4$이다.

(iii) $x\ge 4$인 경우

$|x+4|+|x-4|\le 8$

$x+4+x-4\le 8$

$2x\le 8$

$x\le 4$

이므로 $x=4$이다.

(i) ~ (iii)에 의하여 $-4\le x\le 4$이므로 정수 x의 개수는 9개이다.

2) ①

$x^4+(3a+8)x^3+(4a+9)x^2+(a+2)x=0$

$x\{x^3+(3a+8)x^2+(4a+9)x+(a+2)\}=0$

-1	1	$3a+8$	$4a+9$	$a+2$
		-1	$-3a-7$	$-a-2$
	1	$3a+7$	$a+2$	0

$x\{x^3+(3a+8)x^2+(4a+9)x+(a+2)\}=0$

$x(x+1)\{x^2+(3a+7)x+(a+2)\}=0$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$의 실근이 0과 -1인 경우

이차방정식 $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$의 실근이 0과 -1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합 : $-1=-3a-7$에서 $a=-2$

두 근의 곱 : $0=a+2$에서 $a=-2$

이므로 $a=-2$이다.

(ii) $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$이 허근을 갖는 경우는 이차방정식 $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$의 판별식 D에 대하여 $D<0$을 만족해야 한다.

$D=(3a+7)^2-4(a+2)$

$=9a^2+42a+49-4a-8$

$=9a^2+38a+41$

$=9\left(a^2+\frac{38}{9}a+\frac{361}{81}\right)-\frac{361}{9}+41$

$=9\left(a+\frac{19}{9}\right)^2+\frac{8}{9}>0$

이므로 이차방정식 $x^2+(3a+7)x+(a+2)=0$는 허근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 실수 a의 값은 -2이다.

3) ⑤

-2	1	-2	$k-10$	$2k-4$
		-2	8	$-2k+4$
	1	-4	$k-2$	0

$x^3-2x^2+kx-10x+2k-4=0$

$(x+2)(x^2-4x+k-2)=0$

에서 한 실근은 -2이므로 이차방정식 $x^2-4x+k-2=0$의 한 실근은 1보다 작고 다른 한 실근은 1보다 커야 한다.

$f(x)=x^2-4x+k-2$라 하면 이차방정식 $x^2-4x+k-2=0$의 한 실근은 1보다 작고 다른 한 실근은 1보다 크기 위해서는 $f(1)<0$을 만족해야 한다.

$f(1)=1-4+k-2$

$=k-5<0$

에서 $k<5$이다.

따라서 보기 중 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ 5이다.

4) ②

조건 (가)에 의하면 부등식 $P(x)\ge x$, 즉 $P(x)-x\ge 0$의 해가 $x=2$이므로 $P(x)-x=a(x-2)^2$이다. (단, $a<0$)

따라서 $P(x)=a(x-2)^2+x$이다.

조건 (나)에 의하여

$P(x)=-5ax-1$

$a(x-2)^2+x=-5ax-1$

$ax^2-4ax+4a+x=-5ax-1$

$ax^2+(a+1)x+(4a+1)=0$
이 중근을 갖기 위해서는 이차방정식
$ax^2+(a+1)x+(4a+1)=0$의 판별식 D에 대하여 $D=0$을 만족해야 한다.
$D=(a+1)^2-4\times a\times(4a+1)$
$=a^2+2a+1-16a^2-4a$
$=-15a^2-2a+1$
$=-(5a-1)(3a+1)=0$
에서 $a=\frac{1}{5}$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$이다.
$a<0$이므로 $a=-\frac{1}{3}$이고, $P(x)=-\frac{1}{3}(x-2)^2+x$이다.
$\therefore\ P(1)=-\frac{1}{3}\times(1-2)^2+1$
$=-\frac{1}{3}+1$
$=\frac{2}{3}$

5) ②
이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자. (단, $a>0$)
$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -2, 6이므로 $f(x)=a(x+2)(x-6)$이다.
$f(|k-x|)\le 0$의 해는 다음과 같다.
$a(|k-x|+2)(|k-x|-6)\le 0$
$(|k-x|+2)(|k-x|-6)\le 0$
$-2\le|k-x|\le 6$
$|k-x|\le 6$
$-6\le k-x\le 6$
$k-6\le x\le k+6\quad\cdots$㉠
$\begin{cases}x\le 2k^2+k-2\\x\ge -k^2-k+2\end{cases}$의 해가 ㉠과 같아야 하므로
$2k^2+k-2=k+6$, $-k^2-k+2=k-6$을 만족해야 한다.
$2k^2+k-2=k+6$
$2k^2-8=0$
$(k+2)(k-2)=0$
$k=-2$ 또는 $k=2\ \cdots$㉡
$-k^2-k+2=k-6$
$k^2+2k-8=0$
$(k+4)(k-2)=0$
$k=-4$ 또는 $k=2\ \cdots$㉢
㉡, ㉢을 동시에 만족하는 k의 값은 2이다.
$f\left(\frac{k}{2}-x\right)<0$
$f(1-x)<0$
$a\{(1-x)+2\}\{(1-x)-6\}<0$
$a(-x+3)(-x-5)<0$
$a(x-3)(x+5)<0$
$(x-3)(x+5)<0$
$-5<x<3$
$\therefore\ \alpha\times\beta=(-5)\times 3$
$=-15$

6) ④
사차방정식 $x^4-2qx^3-13px^2-p^2qx-p^3=0$은 중근 α, β를 가지므로 사차방정식은 $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=0$이다.
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)$
$=x^4-(2\alpha+2\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$
에서 $2\alpha+2\beta=2q$, $-13p=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$,
$-p^2q=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$, $-p^3=\alpha^2\beta^2$이다.
$\alpha+\beta=q$이므로 $-p^2q=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$에서 $-p^2q=-2\alpha\beta\times q$,
$p^2=2\alpha\beta$ ($\because\ q\ne 0$)
$\alpha\beta=\frac{p^2}{2}$
$\alpha^2\beta^2=\frac{p^4}{4}=-p^3$에서 $p\ne 0$이므로 $p=-4$이다.
즉, $\alpha+\beta=q$, $\alpha^2+4\alpha+\beta^2=52$, $\alpha\beta=8$, $\alpha^2-\beta^2=-12$이다.
이를 연립하면 $\alpha=2$, $\beta=4$, $p=-4$, $q=6$이다.
연립부등식 $\begin{cases}-24(x-2)(x-8)\ge 0\\x^2-2nx-2x+n^2+2n\ge 0\end{cases}$에서
$-24(x-2)(x-8)\ge 0$
$(x-2)(x-8)\le 0$
$2\le x\le 8$
$x^2-2nx-2x+n^2+2n\ge 0$
$x^2-(2n+2)x+n(n+2)\ge 0$
$(x-n)(x-n-2)\ge 0$
$x\le n$ 또는 $x\ge n+2$이다.
이때 $2\le x\le 8$와 $x\le n$ 또는 $x\ge n+2$를 동시에 만족하는 정수해의 개수가 6이기 위해서는 $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.
따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은
$1+2+3+4+5+6+7=28$이다.

7) ④
5명 중에서 5명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{P}_5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

8) ③
100 미만인 자연수 중에서 3의 배수는 33개
일의 자리의 수가 3, 6, 9 인 수는 30개
3의 배수 중에서 일의 자리의 수가 3, 6, 9 인 수는 12개
따라서 $33+30-12=51$

9) ①
$(a+b+c)(d+e)(x+y+z)$를 전개하면 a, b, c에 d, e와 x, y, z를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 모든 항의 개수는 $3\times2\times3=18$ 즉 $p=18$
x를 포함한 항의 개수는 a, b, c에 d, e를 곱하여 항이 만들어지므로 $3\times2=6$ 즉 $q=6$
따라서 $p+q=24$

10) ④
10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$
일직선 위에 있는 3개의 점을 포함하여 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3\times5\times{}_7\mathrm{C}_1=35$
그런데 일직선 위에 있는 3개의 점을 포함하면 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는 $210-35=175$

11) ③
1, 2, 4, 5번 정사각형에 칠하는 경우의 수
ⅰ) 1번과 2번 정사각형에 색칠하는 경우의 수 : $4\times3=12$
ⅱ) 5번 정사각형에 색칠하고 4번 정사각형에 색칠하는 경우의 수 경우의 수
1번 정사각형과 같은 색을 칠하는 경우의 수 : $1\times3=3$
1번 정사각형과 다른 색을 칠하는 경우의 수 : $2\times2=4$
$\therefore\ 7$
ⅲ) 3번 정사각형과 6번 정사각형을 색칠하는 경우의 수 : $3\times2=6$
$\therefore\ 12\times7\times6=504$

12) ⑤
검은색 모자 5개, 하얀색 모자 7개를 12곳에 나열하는 총 가짓수는 $\frac{12!}{7!5!}=792$ 이다.
적어도 하나의 가로줄 또는 하나의 세로줄이 같은 색의 모자로
채워지는 경우를 구해야 하므로
총 가짓수에서 가로줄 세로줄 모두 검은색 모자, 하얀색 모자로
구성되어 있는 경우의 수를 빼주면 된다.
네 개의 세로줄에 검은색 모자 5개를 2개,1개,1개,1개 나열하는 것으로 계산 하자.
$4\times{}_3\mathrm{C}_2\times(3^3-2^3)=228$
그러므로 적어도 하나의 가로를 또는 하나의 세로줄이 같은 색의 모자로 채워지는 경우의 수는 $792-228=564$

13) ⑤
$a_{11}=0$
$a_{12}=(P_1$나라애서 P_2나라로 직접보내는 통신망의 개수$)=2$
$a_{13}=(P_1$나라애서 P_3나라로 직접보내는 통신망의 개수$)=2$
마찬가지 방법으로
$a_{21}=1,\ a_{22}=0,\ a_{23}=0,\ a_{31}=0,\ a_{32}=1,\ a_{33}=0$
$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

14) ④
$2X+Y=A,\ X-Y=B$를 연립하여 풀면
$X=\frac{1}{3}(A+B),\ \ Y=\frac{1}{3}(A-2B)$
$$\therefore\ X+Y=\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}B=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&5\\4&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&-1\\0&-2\end{pmatrix}$$

15) ④
$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$이므로
$A^4=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$
$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$이므로
$B^4=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\12&1\end{pmatrix}$
$\therefore\ B^4-A^4=\begin{pmatrix}1&0\\12&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-8\\12&0\end{pmatrix}$
따라서 행렬 B^4-A^4의 모든 성분의 합은 4이다.

16) ⑤
$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$에서
$AB=BA$이므로
$\begin{pmatrix}3&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&5\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3x+2y&7\\x+5y&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+1&2x+5\\3y+2&2y+10\end{pmatrix}$
즉,
$3x+2y=3x+1,\ \ 7=2x+5,\ \ x+5y=3y+2,\ \ 11=2y+10$
$\therefore\ x=1,\ y=\frac{1}{2}\quad\therefore\ x+y=\frac{3}{2}$

17) ①
① $A^3=A^5=E$이면
$A^5=A^3A^2=EA^2=E,\ A^3=A^2A=EA=A=E$
$\therefore\ A=E$ (참)
② (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면
$AB=O, A\neq O$이지만 $B\neq O$이다. (거짓)

③ (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=O$이지만 $A\neq O$이다.
(거짓)

④ (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$이면 $A^2=E$이지만
$A\neq E,\ A\neq -E$이다. (거짓)

⑤ (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면
$AB=O$이지만 $BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq O$이다. (거짓)

18) ②

$AB=\begin{pmatrix}\boxed{700\quad 400}\\500\quad 450\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\boxed{5}\\3&\boxed{4}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}700\times2+400\times3 & \boxed{700\times5+400\times4}\\500\times2+400\times3 & 500\times5+450\times4\end{pmatrix}$

이 때, 행렬 AB의$(1,\ 2)$성분은 700원짜리 빵 5개와 400원짜리 우융 4개의 가격의 합이므로 알파 상점에서의 사코의 지불 금액을 나타낸다.

19) $-5,\ -3,\ -1,\ 1$

(i) 삼차방정식의 근이 세 실근인 경우
실근은 모두 양의 실수이므로 $p=1,\ q=0$이다.
$(x-1)^3=x^3+ax^2+bx+c$
$a=-3,\ b=3,\ c=-1$이므로 $a-b-c=-5$이다.

(ii) 삼차방정식의 근이 한 실근과 두 허근일 경우
$\alpha=p+qi$가 근이므로 $x=p-qi$도 근으로 가지며, 나머지 한 실근은 $p=1,\ q=0$이므로 $x=1$이다.
근과 계수의 관계를 이용해보면
$-a=1+2p,\ b=p^2+q^2+2p,\ -c=p^2+q^2$이고
$p^2+q^2=1$이므로 $-a=1+2p,\ b=1+2p,\ c=-1$이다.
$a,\ b,\ c$는 모두 정수이므로 $2p$도 정수이다.
$p^2+q^2=1$에서 $-1\le p\le 1$이고 $\alpha=p+qi$는 허근이므로 $-1<p<1$이다.
$-2<2p<2$이고 $2p=-1,\ 0,\ 1$이다.
$-a=1+2p,\ b=1+2p,\ c=-1$이므로 $a-b-c=-4p-1$,
$2p=-1,\ 0,\ 1$이므로 가능한 $p=-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$이고 가능한 $a-b-c=1,\ -1,\ -3$이다.
(i), (ii)에 의하여 가능한 $a-b-c$의 값은 $-1,\ -3,\ -5,\ 1$이다.

20) 2640

7장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$이다.
$2,\ 6$ 이 이웃한 경우의 수는 $6!\times2$
$3,\ 4$ 이 이웃한 경우의 수는 $6!\times2$
$2,\ 6$ 이 이웃하고 $3,\ 4$ 도 이웃한 경우의 수는 $5!\times2\times2$
나열하는 경우의 수는
$7!-(6!\times2)-(6!\times2)+(5!\times2\times2)=2640$

21) (1) 4 (2) 5 (3) 6
(2) $a_{12}+a_{21}-a_{33}=2+1-(-2)=5$
(3) $i+j=4\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$를 만족시키는 순서쌍 $(i,\ j)$는 $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$이므로 구하는 합은
$a_{13}+a_{22}+a_{31}=3+0+3=6$

22) $\begin{pmatrix}-2&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$

$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)=$
$\begin{pmatrix}8&-6\\-12&17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&-5\\-10&20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$

MD고등학교

1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<7 \\ 2(x+2) \ge 3x+1 \end{cases}$ 을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수는? [3.5점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 를 만족시키는 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값은? [4.0점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 일차부등식 $|x-1|+|x+1| \le 4$를 만족하는 정수 x의 개수는?

[4.3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 자연수 k에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-2(k+2)x-2k-5 \le 0 \\ x^2-(k+5)x+2k+6 \ge 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수를 $f(k)$라 하자. 이때, $f(k^2)=128$을 만족시키는 k의 값은? [5.0점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

5. 남학생 4명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때 남학생이 양 끝에 서는 경우의 수를 m, 여학생이 이웃하게 서는 경우의 수를 n이라 하자. $m-n$의 값은? [4점]

① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

6. 5개의 숫자 $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리 자연수를 만들려고 한다. 작은 수부터 차례대로 나열했을 때, 61번째에 오는 수는? [4.1점]

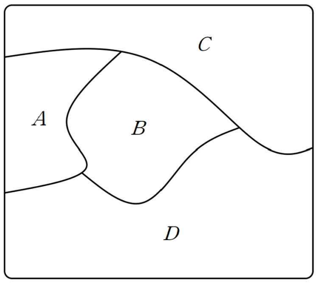
① 4286 ② 4608 ③ 6284
④ 6402 ⑤ 8024

7. 서로 다른 3개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 할 때, $a^2bc+ab^2c+abc^2$의 값이 홀수가 되는 경우의 수는? [4.1점]

① 9 ② 27 ③ 36
④ 45 ⑤ 54

8. 그림과 같이 구분된 4개의 영역을 서로 다른 5가지 색 중 일부를 사용하여 칠하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 사용해도 좋으나 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠하여 구분할 때, 칠하는 경우의 수는?

[4.3점]



① 24 ② 48 ③ 96
④ 120 ⑤ 144

9. 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자 중 어느 두 숫자의 합이 나머지 한 숫자의 2배이고, 숫자 0, 9를 포함하지 않는 세 자리 자연수의 개수는? [4.5점]

① 72 ② 80 ③ 92
④ 109 ⑤ 121

10. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $2(X-A)=3X+2B$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{20}의 모든 성분의 합은?

① -20 ② -19 ③ -18
④ -17 ⑤ -16

12. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이 성립할 때, 점 $P(x, y)$가 그리는 도형의 넓이는?

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

13. 다음 풀이 과정에서 잘못된 부분은?

$A^2=E$
①
$A^2-E=O$
②
$A^2-E^2=O$
③
$(A+E)(A-E)=O$
④
$A+E=O$ 또는 $A-E=O$
⑤
$\therefore A=-E$ 또는 $A=E$

14. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$가 $A+B=E,\ AB=O$를 만족시킬 때,
$A^{2011}+A^{2010}B+A^{2009}B^2+\ \cdots\ +AB^{2010}+B^{2011}$을 간단히 하면?

① A ② B ③ E
④ $2E$ ⑤ O

15. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A-kE)^2=O$가 성립할 때, $a+k$의 값은? (단, $a,\ k$는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

16. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$에 대하여
다음 중 옳은 것은?

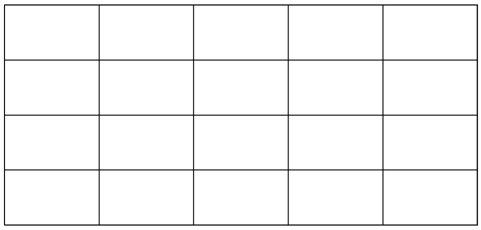
① $A^2=O$이면 $A=O$이다.
② $(AB)^3=A^3B^3$
③ $A^2-A+E=O$이면 $A^6=E$이다.
④ $A^2=E$이면 $A=E$ 또는 $A=-E$이다.
⑤ $A^k=A^m=A^n=E$를 만족시키는 서로 다른 자연수 $k,\ m,\ n$이
존재하면 $A=E$이다.

서술형

17. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2kx \geq -3k-4$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. [7점]

18. 음이 아닌 정수 x, y에 대하여 $x+y \leq 4$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하시오. [7점]

19. 그림과 같이 가로의 길이가 15cm, 세로의 길이가 6cm인 직사각형이 있다. 직사각형의 가로와 세로에 평행한 선분을 동일한 간격으로 각각 3개, 4개 그었을 때, 그림에서 찾을 수 있는 크고 작은 직사각형 중 넓이가 9cm^2 이상인 직사각형의 개수를 구하시오. [7점]



20. 어느 상점에서 5가지 종류의 빵과 3가지 종류의 떡 중 세 종류의 간식을 박스에 담아 판매한다. 명덕이와 명순이가 다음 조건에 따라 간식 박스를 구입하려고 할 때, 가능한 경우의 수를 구하시오. [8점]

> (가) 각 박스는 적어도 하나 이상의 떡을 포함한 서로 다른 세 종류로 구성한다.
> (나) 두 사람이 각각 구성한 박스의 간식은 한 종류만 일치한다.

21. 행렬 $A=(a_{ij})$의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를

$$\begin{cases} i>j \text{ 이면 } & a_{ij}=i+j \\ i=j \text{ 이면 } & a_{ij}=ij \\ i<j \text{ 이면 } & a_{ij}=i-j \end{cases}$$

로 정의할 때, 이차정사각행렬 A를 구하시오.

22. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$가

$(A+B)^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시킬 때, 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합을 구하시오.

정답 및 풀이

1) ③	2) ③	3) ⑤
4) ①	5) ⑤	6) ④
7) ②	8) ④	9) ②
10) ④	11) ③	12) ④
13) ④	14) ③	15) ①
16) ③	17) $-1 \le k \le 4$	18) 15
19) 130	20) 1110	21) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
22) 3		

---

1) ③
$2x-3<7$에서 $x<5$이고
$2(x+2) \ge 3x+1$에서 $x \le 3$이므로
연립부등식의 해는 $x \le 3$이고 가장 큰 정수는 3이다.

2) ③
$2x^2+3xy-2y^2=0$에서 $(2x-y)(x+2y)=0$이므로
$y=2x$일 때, $x^2+y^2=5$에 대입하여 정리하면
$x^2+4x^2=5$, $x^2=1$에서 $x=\pm 1$이고 $y=\pm 2$이다.
$y=-\dfrac{1}{2}x$일 때, $x^2+y^2=5$에 대입하여 정리하면
$x^2+\dfrac{1}{4}x^2=5$, $x^2=4$에서 $x=\pm 2$이고 $y=\mp 1$이다.
$x+y$의 최댓값은 3이다.

3) ⑤
$x<-1$일 때, $-x+1-x-1 \le 4$에서 $x \ge -2$이므로
$-2 \le x < -1$이다.
$-1 \le x < 1$일 때, $-x+1+x+1 \le 4$에서 $2 \le 4$이므로
항상 성립하므로 $-1 \le x < 1$이다.
$x \ge 1$일 때, $x-1+x+1 \le 4$에서 $x \le 2$이므로
$1 \le x \le 2$이다.
그러므로 $-2 \le x \le 2$이고 정수 개수는 5개이다.

4) ①
$x^2-2(k+2)x-2k-5 \le 0$에서 인수분해하면
$(x+1)(x-2k-5) \le 0$이고 k는 자연수이므로
부등식의 해는 $-1 \le x \le 2k+5$이다.
$x^2-(k+5)x+2k+6 \ge 0$에서 인수분해하면
$(x-2)(x-k-3) \ge 0$이고 k는 자연수이므로
부등식의 해는 $x \le 2$, $k+3 \le x$이다.
그러므로 연립부등식의 해는
$-1 \le x \le 2$, $k+3 \le x \le 2k+5$이다.
정수 x의 개수 $f(k)=4+(k+3)=k+7$이다.
$f(k^2)=k^2+7=128$에서 $k^2=121$이다.
그러므로 $k=11$이다.

5) ⑤
남학생이 양 끝에 서는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2 \times 2! \times 4 \neq 288$
여학생이 이웃하게 서는 경우의 수는
$2! \times 5 \neq 240$
$m-n=48$

6) ④
2로 시작하는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_3 \times 3 \neq 24$
4로 시작하는 네 자리 자연수의 개수도 24개다.
60으로 시작하는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_3\mathrm{C}_2 \times 2 \neq 6$
62로 시작하는 네 자리 자연수의 개수도 6이다.
지금까지 총 60개의 자연수가 나왔기에
6402가 61번째 수이다.

7) ②
$a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c)$
그 값이 홀수가 나오기 위해서는 홀수$\times$홀수여야 하기에
$abc=$홀수$\times$홀수$\times$홀수,
$a+b+c=$홀수$+$홀수$+$홀수 또는 짝수$+$짝수$+$홀수
a, b, c는 모두 홀수여야 한다.
주사위에서 홀수는 총 3개이기에
$3 \times 3 \times 3 = 27$

8) ④
가운데의 B부터 $\mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ 순서대로 색칠하면
$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$가지의 경우의 수가 존재한다.

9) ②
세 숫자를 a, b, c라 하면
$2c=a+b$를 만족해야 한다.
$c=1$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(1,\ 1)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 1
$c=2$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3!+1=7$
$c=3$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 $2 \times 3! + 1 = 13$
$c=4$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3 \times 3! + 1 = 19$
$c=5$인 경우

가능한 a, b의 값은 $(2,\ 8)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3\times3!+1=19$
$c=6$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(4,\ 8)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 6)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 $2\times3!+1=13$
$c=7$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(6,\ 8)$, $(7,\ 7)$
이 새 숫자를 배열하는 경우의 수는 $3!+1=7$
$c=8$인 경우
가능한 a, b의 값은 $(8,\ 8)$
이 세 숫자를 배열하는 경우의 수는 1
가능한 경우의 수를 모두 더하면
$1+7+13+19+19+13+7+1=80$

10) ④
$2(X-A)=3X+2B$에서
$X=-2A-2B=-2(A+B)$
$=-2\left\{\begin{pmatrix}2&-1\\1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}=-2\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

11) ③
$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$, $\cdots$, $A^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\-20&1\end{pmatrix}$
따라서 행렬 A^{20}의 모든 성분의 합은 -18이다.

12) ④
$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$에서
$AB=BA$이므로
$\begin{pmatrix}x^2&1\\1&2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2&1\\1&2x\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3x^2+1&x^2+y^2\\2x+3&2xy^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2+1&2x+3\\x^2+y^2&2xy^2+1\end{pmatrix}$
즉, $x^2+y^2=2x+3$이므로 $(x-1)^2+y^2=4$
따라서 점 $P(x,\ y)$가 그리는 도형의 넓이는
$\pi\times2^2=4\pi$

13) ④
④ (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$이면
$(A+E)(A-E)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
즉, $(A+E)(A-E)=O$이지만
$A+E\neq O$, $A-E\neq O$이다.

14) ③
$A+B=E$에서 $B=E-A$, $A=E-B$이고 $AB=O$이므로
$A(E-A)=A-A^2=O$ $\therefore A^2=A$
$\therefore A=A^2=A^3=\cdots=A^n=\cdots$ $\cdots\cdots$ ㉠
$(E-B)B=B-B^2=O$ $\therefore B^2=B$
$\therefore B=B^2=B^3=\cdots=B^n=\cdots$ $\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore A^{2011}+A^{2010}B+A^{2009}B^2+\cdots+AB^{2010}+B^{2011}$
$=A+AB+AB+\cdots+AB+B$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=A+B=E$

15) ①
$(A-kE)^2=\begin{pmatrix}-k&-1\\a&-2-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k&-1\\a&-2-k\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}k^2-a&2k+2\\-2ak-2a&(k+2)^2-a\end{pmatrix}=O$
즉,
$k^2-a=0$, $2k+2=0$, $-2ak-2a=0$, $(k+2)^2-a=0$이므로
$k=-1$, $a=1$
$\therefore\ a+k=0$

16) ③
① (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=O$이지만 $A\neq O$ (거짓)
② $(AB)^3=ABABAB$ (거짓)
③ $A^2-A+E=O$이면$A^3=-E$이므로 $A^6=(A^3)^2=E$ (참)
④ (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=E$이지만 $A\neq E$, $A\neq-E$
(거짓)
⑤ (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면 $k=2$, $m=4$, $n=6$일 때,
$A^2=A^4=A^6=E$이지만 $A\neq E$ (거짓)

17) $-1\leq k\leq4$
모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+3k+4\geq0$이 항상
성립하므로
$D/4\leq0$이다.
그러므로 $k^2-3k-4\leq0$에서
이차부등식의 해를 구하면 $(k+1)(k-4)\leq0$에서
$-1\leq k\leq4$이다.

18) 15
x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+y\leq4$인 $x+y$의 값은
0, 1, 2, 3, 4이고, 각 경우의 순서쌍 $(x,\ y)$는
(i) $x+y=0$인 경우 $(0,\ 0)$의 1개
(ii) $x+y=1$인 경우 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$의 2개
(iii) $x+y=2$인 경우 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$의 3개
(iv) $x+y=3$인 경우 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$의 4개
(v) $x+y=4$인 경우
$(0,\ 4)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 0)$의 5개
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 합의 법칙에
의하여

$1+2+3+4+5=15$

19) 130
전체 직사각형의 개수 ${}_6\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=150$
$9cm^2$ 이상인 직사각형 $=$ 전체 $-$ $9cm^2$ 미만의 직사각형
$9cm^2$ 미만의 넓이를 가지는 건 가로 1칸 $\times$ 세로 1칸인 경우이다.
1×1인 경우 20가지
$150-20=130$

20) 1110
i) 서로 일치하는 디저트가 떡일 때
3종류의 떡에서 1종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
위의 각 경우에 대하여 나머지 7종류 중에서 명덕이가 2개를 선택하고, 나머지 5종류 중에서 명순이가 2개를 선택하는 경우의 수는 2100
이때의 경우의 수는 $3\times210=630$
ii) 서로 일치하는 디저트가 빵일 때
5종류의 빵 중에서 1종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$
위의 각 경우에 대하여 나머지 7종류 중에서 명덕이와 명순이는 떡을 1개 이상 선택해야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.
(ii-1) 둘 다 한 명은 떡 2개를 선택하고, 다른 한 명은 떡 1개와 빵 1 개를 선택하는 경우의 수는
$({}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1)\times({}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1)=72$
(ii-2) 둘 중 한 명은 떡 2개를 선택하고, 다른 한 명은 떡 1개와 빵 1개를 선택하는 경우의 수는 $({}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1)\times2=24$
이때의 경우의 수는 $5\times(72+24)=480$
i), ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $630+480=1110$

21) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
$a_{11}=1\times1=1,\ a_{12}=1-2=-1$
$a_{21}=2+1=3,\ a_{22}=2\times2=4$
$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

22) 3
$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\ \cdots$ ㉠
$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2\ \cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$(A+B)^2+(A-B)^2=2(A^2+B^2)$
$\therefore\ (A-B)^2=2(A^2+B^2)-(A+B)^2$
$=2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$
따라서 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은 3이다.

SM고등학교

1. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 를 풀면? [3.1점]

① $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$
② $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$
③ $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$
④ $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$
⑤ $\begin{cases} x=-2 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=-2 \end{cases}$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x-5>-2 \\ 2x-2 \geq 3x-1 \end{cases}$ 을 풀면? [3.3점]

① $x=-2$ ② 모든 실수 ③ 해가 없다
④ $1 \leq x \leq 4$ ⑤ $x \neq 1$인 모든 실수

3. 이차부등식 $-x^2+5x-4 \geq 0$을 풀면? [3.3점]

① $x=-2$ ② 모든 실수 ③ 해가 없다
④ $1 \leq x \leq 4$ ⑤ $x \neq 1$인 모든 실수

4. 이차부등식 $x^2-2x+1>0$을 풀면? [3.3점]

① $x=-2$ ② 모든 실수 ③ 해가 없다
④ $1 \leq x \leq 4$ ⑤ $x \neq 1$인 모든 실수

5. 이차부등식 $-x^2-4x \geq 4$를 풀면? [3.3점]

① $x=-2$　② 모든 실수　③ 해가 없다
④ $1 \leq x \leq 4$　⑤ $x \neq 1$인 모든 실수

6. 이차부등식 $x^2+5x+9>0$을 풀면? [3.3점]

① $x=-2$　② 모든 실수　③ 해가 없다
④ $1 \leq x \leq 4$　⑤ $x \neq 1$인 모든 실수

7. 부등식 $|x^2-4x| \geq |x^2-4x+6|$에서 해의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4.4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

8. 이차부등식 $x^2+kx+1>0$의 해가 모든 실수일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하면? [3.8점]

① $0<k<1$　② $-2<k<1$
③ $-2<k<0$　④ $-2<k<2$
⑤ $-1<k<2$

9. 이차부등식 $ax^2-bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 다음 중 이차부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해는? (단, $p>0$) [4.5점]

① $-\frac{1}{p}<x<-\frac{1}{q}$
② $x>-\frac{1}{q}$ 또는 $x<-\frac{1}{p}$
③ $-q<x<-p$
④ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$
⑤ $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

10. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$이 한 실근과 두 허근 α, $-\alpha^2$을 가질 때, $a+b$의 값은? [4.7점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

11. 함수 $f(x)=2x^2-2x-24$에 대하여 부등식 $2f(x)+|f(x)|-15x-18\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [5.1점]

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

12. x에 대한 세 다항식 $A(x)=x^2+3x+5$, $B(x)=\frac{p}{q}x+r$, $C(x)=-2x^2-4x+5$에 대하여 세 연립부등식

$\begin{cases}A(x)<B(x)\\A(x)<C(x)\end{cases}$, $\begin{cases}A(x)<C(x)\\B(x)<C(x)\end{cases}$, $\begin{cases}A(x)<B(x)\\B(x)<C(x)\end{cases}$

의 해가 모두 존재하고, 세 연립부등식의 해가 모두 일치한다.
이때 $p+q+r$의 값은? (단, $|p|$와 $|q|$는 서로소인 자연수이며, $0<q$이다.) [5.5점]

① 10　② 8　③ 6
④ 4　⑤ 2

13. 어느 전시 기획자가 서로 다른 미술 작품 5개를 전시실에 일렬로 나열하려고 한다. 작품 5개 중에서 2개만 동일한 작가의 작품일 때, 동일한 작가의 작품 2개를 서로 이웃하게 나열하는 모든 경우의 수는? [3.6점]

① 12 ② 24 ③ 27
④ 48 ⑤ 54

14. 서로 다른 케이크 5개와 서로 다른 음료 3잔 중에서 케이크 2개와 음료 2잔을 택하는 모든 경우의 수는? [3.8점]

① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

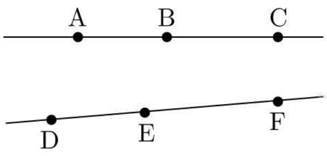
15. x, y가 자연수일 때, 부등식 $x+y \leq 4$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는? [3.9점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

16. 96의 양의 약수의 개수는? [4.0점]

① 5 ② 8 ③ 9
④ 12 ⑤ 16

17. 오른쪽 그림과 같이 직선 2개 위에 각각 점 3개가 있다. 서로 다른 점 6개 중에서 점 4개를 꼭짓점으로 하는 서로 다른 사각형의 개수는?
[4.2점]



① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

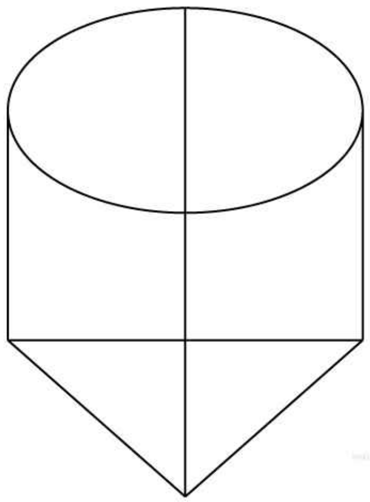
18. x에 대한 이차방정식 ${}_n\mathrm{C}_5 x^2 - {}_n\mathrm{C}_6 x + 3{}_n\mathrm{C}_4 = 0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha\beta = 5$일 때, $\alpha + \beta$의 값은? [4.4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

19. $(c+h+e+r)(r+y)(c+o+k+e)$를 전개하였을 때, 서로 다른 항의 개수는? (단, 동류항은 서로 같은 항으로 본다.) [4.6점]

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

20. 오른쪽 그림과 같이 여섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 초록색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 네 가지 색을 모두 사용하여 칠할 수 있는 방법의 수는?
(단, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있다.) [5.2점]



① 336 ② 360 ③ 384
④ 408 ⑤ 432

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$일 때, $3A+2X=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

22. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 실수 a, b에 대하여 a^3+b^3의 값은?

① -10 ② -14 ③ -18
④ -22 ⑤ -26

서술형

23. 다음 방정식의 해를 복소수의 범위에서 모두 구하시오. [2.0점]

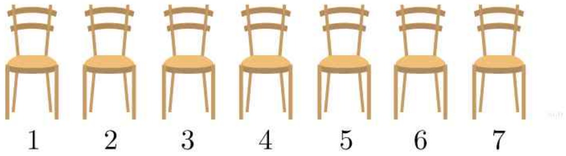
$$x^4+4x^2-5=0$$

24. 삼차방정식 $x^3+2(a-1)x^2+(b^2-4a)x-2b^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근의 합이 12가 되도록 하는 두 정수 a, b가 존재한다. 이때, 가능한 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하는 과정과 답을 서술하시오. [5.0점]

25. $1 \le r \le n$일 때, 다음 등식이 성립함을 보이는 과정을 자세히 서술하시오. [2.0점]

$${}_n\mathrm{P}_r = n \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$$

26. 민서, 서진, 윤서, 예은, 지현, 나영, 민지 7명의 학생을 다음과 같이 의자에 앉힐 때, 조건 (가)~(마)를 모두 만족시키도록 앉히는 모든 경우의 수를 구하는 과정을 자세히 서술하시오. [5.0점]



(가) 윤서는 두 번째 자리에 앉을 수 없다.
(나) 다섯 번째 자리에는 윤서와 나영이는 앉을 수 없다.
(다) 일곱 번째 자리에는 윤서, 예은, 지현이는 앉을 수 없다.
(라) 윤서가 여섯 번째 자리에 앉는다면, 서진이는 무조건 윤서 옆에 앉는다.
(마) 윤서가 네 번째 자리에 앉으면, 민지는 일곱 번째 자리에 앉는다.

27. 두 이차정사각행렬 A, B가
$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$, $A^2+B^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$을 만족시킬 때, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합을 구하시오.

빠른정답

1) ③	2) ③	3) ④
4) ⑤	5) ①	6) ②
7) ②	8) ④	9) ①
10) ③	11) ②	12) ①
13) ④	14) ③	15) ①
16) ④	17) ③	18) ①
19) ③	20) ③	21) ②
22) ③	23) $x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 ± 1	

24) 6개

25) ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{n\times(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!}$

$=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

26) 1080　　27) -18

정답 및 풀이

1) ③

$y=7-x$ 이므로 $x^2+(7-x)^2=25$에 의해

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$이다.

따라서 $x=3$일 때, $y=4$, $x=4$일 때 $y=3$이다.

2) ③

$x-5>-2$에서 $x>3$이고 $2x-2\geq 3x-1$에서

$x\leq -1$이므로 해가 없다.

3) ④

$-x^2+5x-4\geq 0$은 $x^2-5x+4\leq 0$에 의해

$(x-4)(x-1)\leq 0$이므로 $1\leq x\leq 4$이다.

4) ⑤

$x^2-2x+1=(x-1)^2>0$를 만족하는 x는 $x\neq 1$인 모든 실수이다.

5) ①

$-x^2-4x-4\geq 0$은 $(x+2)^2\leq 0$이므로 이를 만족하는 실수 x는 -2이다.

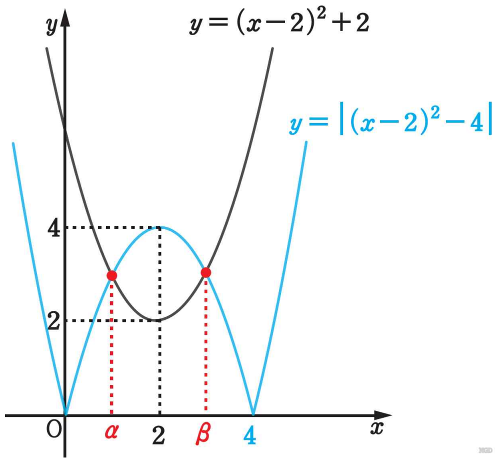
6) ②

$x^2+5x+9=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$을 만족하는 x는 모든 실수이다.

7) ②

$y=\left|x^2-4x+6\right|=\left|(x-2)^2+2\right|=(x-2)^2+2$이고

$y=\left|x^2-4x\right|=\left|(x-2)^2-4\right|$이므로 다음과 같다.



이때 $y=-(x^2-4x)$와 $y=x^2-4x+6$이 만나는 교점의 x좌표를 α, β라고 하면 구하고자 하는 x범위는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다.

따라서 $-x^2+4x=x^2-4x+6$에 의해

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$이므로 $1\leq x\leq 3$이다.

$\therefore\ M-m=2$

8) ④

이차부등식 $x^2+kx+1>0$의 해가 모든 실수이려면 판별식 $D=k^2-4<0$를 만족해야 하므로

$-2<k<2$이다.

9) ①

이차부등식 $ax^2-bx+c>0$의 해가 $p<x<q$이므로

$a<0$이고 $x^2-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}<0$에 의해 $p+q=\dfrac{b}{a}>0$,

$pq=\dfrac{c}{a}>0$이므로 $c<0$이다. 그러면 $cx^2+bx+a>0$는

$x^2+\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}<0$이고 $x^2+\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}=x^2+\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)x+\dfrac{1}{pq}$

$=\left(x+\dfrac{1}{p}\right)\left(x+\dfrac{1}{q}\right)<0$

이므로 $-\dfrac{1}{p}<x<-\dfrac{1}{q}$가 해이다.

10) ③

계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-c=0$의 한 허근 $\alpha=m+\ni$라고 하면 다른 한 허근은

$\overline{\alpha}=m-\ni=-\alpha^2=-(m+\ni)^2$을 만족한다.

즉, $2mn=n$, $m=n^2-m^2$에 의해 $n=0$이면 허근이

존재하지 않으므로 $m=\frac{1}{2}$, $n=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 두 허근은 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이고 한 실근을

β라고 하면 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\times\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\times\beta=3$이므로

$\beta=3$이다. 그러면 근과 계수 관계에 의해

$a=-\left(3+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=-4$,

$b=3\times\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=4$가

되므로 $a+b=0$이다.

11) ②
함수 $f(x)=2(x-4)(x+3)$이므로
$-3\le x\le 4$일 때 $f(x)\le 0$에 의해
$2f(x)+|f(x)|-15x-18=f(x)-15x-18$
$=2x^2-17x-42$
$=(2x-21)(x+2)\le 0$
이다. 즉, $-2\le x\le 4$이다.
또한 $x<-3$ 또는 $x>4$일 때 $f(x)>0$이므로
$2f(x)+f(x)-15x-18=3f(x)-15x-18$
$=3(2x^2-7x-30)$
$=3(2x+5)(x-6)\le 0$
이다. 즉, $4<x\le 6$이다.
따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 9개다.

12) ①
주어진 세 함수 $A(x)=x^2+3x+5$, $B(x)=\frac{p}{q}x+r$,
$C(x)=-2x^2-4x+5$가 세 연립부등식의 해가 모두 같도록 존재하기 위해서는 함수 $A(x)$와 $C(x)$의 교점을 지나는 직선이 $B(x)$이어야 한다.
따라서 $x^2+3x+5=-2x^2-4x+5$에 의해
점 $(0,\ 5)$와 $\left(-\frac{7}{3},\ \frac{31}{9}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{5-\frac{31}{9}}{0+\frac{7}{3}}(x-0)+5=\frac{2}{3}x+5$이다.

$\therefore\ p+q+r=10$

13) ④
동일한 작가의 작품 2개를 하나로 보고, 전체 4개를 배열하는 경우의 수 $4!$
동일한 작가의 작품 2개를 배열하는 경우의 수 $2!$
따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times 2\neq 48$

14) ③
${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=30$

15) ①
$x=1$일 때, $y=1,\ 2,\ 3$
$x=2$일 때, $y=1,\ 2$
$x=3$일 때, $y=1$
따라서 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 6

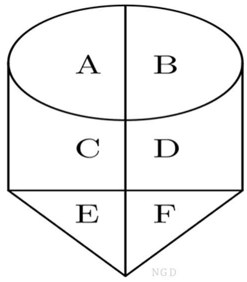
16) ④
$96=2^5\times 3$이므로
양의 약수의 개수는 $6\times 2=12$

17) ③
각 직선에서 2개의 점을 선택하면 되므로
${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$

18) ①
$\alpha\beta=5=\frac{3\,{}_n\mathrm{C}_4}{{}_n\mathrm{C}_5}$
$5\,{}_n\mathrm{C}_5=3\,{}_n\mathrm{C}_4$
$\frac{5n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}=\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$
$n=7$이므로
$\alpha+\beta=\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_n\mathrm{C}_5}=\frac{{}_7\mathrm{C}_6}{{}_7\mathrm{C}_5}=\frac{1}{3}$

19) ③
주어진 식 $(c+h+e+r)(r+y)(c+o+k+e)$을 전개하였을 때,
만들어지는 모든 항의 개수는 $4\times 2\times 4=32$개다.
이때, cre와 erc는 같은 항으로 보고, cye와 eyc도 마찬가지이다.
따라서 2개의 항이 중복되었으므로, 구하는 항의 개수는
$32-2=30$

20) ③
주어진 영역을 오른쪽 그림과 같이 표시하고,
위의 A, B, C, D 네 가지 영역에 몇 가지 색을 칠하는지로 구분해보자.



(ⅰ) 네 가지 색을 사용하는 경우
A, B, C, D에 배열하는 경우의 수 $4!$
E에 D와 다른 색을 칠하는 경우의 수 2

이때, F에 칠하는 경우의 수 $\times 2$
E에 D와 같은 색을 칠했을 때, F에 칠하는 경우의 수 3
따라서 구하는 경우의 수는 $4!\times(2\times 2+3)=168$
(ii) 세 가지 색을 사용하는 경우
세 가지 색을 고르는 경우 ${}_4C_3$
A, B, C, D에 배열할 때, 어떤 색을 두 번 칠할지 고르는 경우의 수 ${}_3C_1$
두 번 칠하는 색이 A, D인지 B, C인지 고르는 경우의 수 $\times 2$
나머지 두 영역에 색을 칠하는 경우의 수 $\times 2$
남은 색을 E 또는 F에 칠하는 경우의 수 $\times 2$
남은 영역에 칠하는 경우의 수 $\times 2$
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_3\times{}_3C_1\times 2\times 2\times 2\times 2=192$
(iii) 두 가지 색을 사용하는 경우
두 가지 색을 고르는 경우 ${}_4C_2$
A, B, C, D에 배열하는 경우의 수 $\times 2$
남은 두 영역에 남은 두 색을 칠하는 경우의 수 $\times 2$
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times 2\times 2=24$
(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는
$168+192+24=384$

21) ②
$$X=\frac{1}{2}B-\frac{3}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11 & -2\\ 3 & 16\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$
따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 5이다.

22) ③
$$\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 1\\ 2 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab+2 & a+b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
즉, $ab+2=3,\ a+b=-3$
$\therefore\ ab=1,\ a+b=-3$
$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-3)^3-3\times 1\times(-3)=-18$

23) $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 ± 1
$x^4+4x^2+4-9=0$
$(x^2+2)^2-3^2=0$
$(x^2+5)(x^2-1)=0$
$\therefore\ x^2=-5$ 또는 $x^2=1$
따라서 $x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 ± 1이다.

24) 6개
$x^3+2(a-1)x^2+(b^2-4a)x-2b^2=(x-2)(x^2+2ax+b^2)=0$
이므로 $x^2+2ax+b^2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면
$\alpha+\beta=-2a=10$에 의해 $a=-5$이고 $\alpha\beta=b^2$이다. 이때, $x\neq 2$이므로 $4+4a+b^2\neq 0$이다. 즉, $b^2\neq 16$이다. 또한
판별식 $\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$이므로 $b^2<25$이다. 이때 b가 정수이므로 $b^2=1,\ 4,\ 9,\ 16$이고 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6개다.

25) ${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$
$=\frac{n\times(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!}$
$=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$

26) 1080
조건들에서 윤서가 가장 많이 언급되므로, 윤서가 2, 5, 7번을 제외한 자리에 앉을 때로 구분한다.
(i) 윤서가 1 또는 3번에 앉을 때,
윤서가 앉는 경우의 수가 2
나머지 여섯 명이 앉는 경우의 수가 $6!$
이때, 나영이가 5번에 앉는 경우의 수 $5!$
예은 또는 지현이 7번에 앉는 경우의 수 $2\times 5!$
나영이가 5번에 앉고, 예은 또는 지현이 7번에 앉는 경우의 수 $2\times 4!$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(6!-5!-2\times 5!+2\times 4!)=816$
(ii) 윤서가 4번에 앉을 때,
민지가 7번에 앉으므로 나머지 다섯 명이 앉는 경우의 수 $5!$
이때, 나영이가 5번에 앉는 경우의 수 $4!$
따라서 구하는 경우의 수 $5!-4\neq 96$
(iii) 윤서가 6번에 앉을 때,
서진이가 5번 또는 7번에 앉아야 한다.
서진이가 5번에 앉는 경우
: 나머지 5명이 앉는 경우의 수 $5!$
이때, 예은 또는 지현이 7번에 앉는 경우의 수 $2\times 4!$
서진이가 7번에 앉는 경우
: 나머지 5명이 앉는 경우의 수 $5!$
이때, 나영이가 5번에 앉는 경우의 수 $4!$
따라서 구하는 경우의 수는 $(5!-2\times 4!)+(5!-4!)=168$
(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는
$816+96+168=1080$

27) -18
$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로
$AB+BA=A^2+B^2-(A-B)^2$
$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -8 & -8\end{pmatrix}$
따라서 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은 -18이다.