总

1. 基础：数域、不等式、空间几何
2. 极限及微积分计算能力（一切等价、有损变换）
3. 定理、相关引理及常用结论的推广能力（一般性推广、高阶推广）
4. 微积分框架的宏观架构及不同模块之间的渗透理解

数列极限与无穷级数

1. 选择题排除数列
    a. 适当选取奇偶数列
2. 证明函数极限存在的证明方法
    a. （单调）单调有界
        i. 证单调
            i. 比值判定、差值判定
            ii. 可导的$x_{n+1} = f(x_n)$
                i. $f(x)$单调增：若$x_1 \le x_2$，数列单调增，反之单调减
                ii. $f(x)$单调减：数列不单调（另寻它法）
        ii. 证有界
            i. 不等式
            ii. 数学归纳法
    b. （不单调）柯西收敛
        i. 求出极限后使用数列极限的定义 or 柯西收敛定律证明该极限存在（收敛）

柯西数列证明的关键是证明$|x_{n+1}-x_n|\leq k|x_n-x_{n-1}|$

ii. 对于$f(x_n)$型，还可考虑$f(x_{n+1})-f(x_n)$拉格朗日然后同上柯西收敛（讲道理这个好像简单一点，但前提是可以求导）

c. （不单调）分解$S=a_{n+1}-a_n$

d. （不单调）夹逼（存在自变量的阶小于主量级）（不等式两边极限均存在）

i. 微分中值定理后进行夹逼（亦可求极限）
ii. 夹逼后定积分

e. （不单调）定积分定义（定积分比夹逼精度高）

f. 施笃兹定律（**Stolz**）

对于数列$\{a_n\}\{b_n\}$且$lim b_n=\infty$有

$$lim\frac{a_n}{b_n}=lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda$$

3. 具体数列极限题：

a. n项和的数列极限

变化部分与主体是次量级用夹逼定理，与主体是同量级，用定积分定义

i. 夹逼

ii. 定积分定义

iii. 裂项相消

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n+1!}$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

b. n项积的数列极限（以下讨论取对数后级数求和的结果）

i. $ln(n+i)$同量级使用夹逼

ii. $ln(1+\frac{i}{n})$天然的定积分

iii. $ln(1+\frac{i}{n^2})$利用不等式$\frac{x}{x+1}<ln(1+x)<x<e^{x-1}$

iv. 阶乘相消

$1-\frac{1}{2!}=\frac{1*3}{2!}$、$1-\frac{1}{3!}=\frac{2*4}{3!}$

c. 存在递推关系的：证明极限存在 or 先求极限（无先后次序）

i. $x_{n+1}=f(x_n)$直接求
ii. $x_{n+2}=f(x_{n+1})+f(x_n)$特征方程

---

4. 数项级数

要求会证明

a. 多项式级数

i. $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$
ii. $\sum k^2 = \frac{1}{6}n(n+2)(2n+1)$
iii. $\sum k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
iv. $\sum k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1}$（用定积分的定义证）
v. $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
vi. $\sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$
vii. $\sum \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$

b. 指数级数

i. 等比数列（略）
ii. $\sum \frac{z^k}{k} = -ln(1-z)\ where|z| < 1$
iii. $\sum kz^k = z\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}, where\ z \neq 1$
iv. $\sum kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}, where\ |z| < 1$

c. **Harmonic**级数

i. $\sum \frac{1}{n} > ln(1+k)$
ii. $ln2 = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
iii. $\frac{\pi}{4} \sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

d. 特别的

i. $ln2 = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$
ii. $ln2 = \sum \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{3*4} + \frac{1}{5*6}$
iii. $ln2 = \sum \frac{1}{2^k k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$
iv. $e = \sum \frac{1}{k!}$
v. $\gamma = \sum \frac{1}{k} - lnn$
vi. $\pi = 3 + \frac{4}{2*3*4} + \frac{4}{4*5*6} + \frac{4}{6*7*8}\dots$
vii. $2 = \sum \frac{1}{T_k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$

5. 正项级数敛散性求解

a. p级数通式：

$$\frac{1}{x^m ln^n x}$$

i. $m > 1$ 收敛
ii. $m = 1, n > 1$收敛
iii. $m = 1, n \leq 1$发散
iv. $m < 1$ 发散

b. 基本形式：差值、比值、根值（可用stolz证明所有的比值均可由根值求解）

c. 超纲基本形式：对数法$\frac{ln\frac{1}{a_n}}{lnn}$

d. 极限形式：等价于求无穷小的阶

6. 敛散性

$$S_n = \sum a_n x^n$$

级数项极限为0是任意级数收敛的必要条件

a. 正项级数：比较判别：$a_n - a_{n-1} < 0$

b. 正项级数：比值判别：$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$

c. 交错级数：绝对收敛→绝对值的比值判别

i. 基本的莱布尼茨判定（比值法）

d. 泰勒展开（条件收敛 + 绝对收敛）

e. 级数比较：设级数$\{bn\}$收敛，则

i. $lim_{n\to\infty} a_n < b_n$，则该级数收敛

ii. $lim_{m\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < 1$，则该级数收敛

7. 幂级数展开通用步骤（$a_n x^n$）

核心思想：完全等价于在某点处进行泰勒展开 / 亦等价于求某一点的高阶导数

重要细节：微积分过程中后求和号其求和区间的变化

a. 将a_n因式分解

b. 对若干个S(x)分类讨论

c. 微积分及泰勒展开

d. ！特别注意：在积分时$f(x) = \int_0^x f'(x)dx - f(0)$

e. ！特别注意：微积分时求和项前有限项的变化

8. 和函数的求解（记得标明函数定义域）

a. 收敛半径（绝对比值、根值审敛）、收敛域、收敛区间

b. 和函数

i. $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

ii. $ln(1+x) = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$

iii. $sinx = \sum (-1)^n \frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!}$

iv. $cosx = \sum (-1)^n \frac{2^{2n}}{2n!}$

v. $\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$

c. 注

i. 积分与原保持一致

ii. 求导n的变化

iii. 泰勒展开

9. 傅里叶级数展开需满足狄利克雷收敛条件之一

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n cos\frac{2\pi x}{l}nx+b_n sin\frac{2\pi x}{l}nx)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)cos\frac{2\pi x}{l}nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)sin\frac{2\pi x}{l}nxdx$$

特别的，当$f(x)$为奇函数，有

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{+l}f(x)sin\frac{2\pi}{2}nxdx$$

当$f(x)$为偶函数，有

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{+l}f(x)cos\frac{2\pi}{2}nxdx$$

1. （√）周期为$2l$且可积（连续）
2. （*）在一个周期内具有有限个第一类间断点
3. （*）在间断点处极限存在（特别的，傅里叶展开后间断点取值为$f(x)=\frac{x_{0_-}+x_{0_+}}{2}$

函数连续与函数极限

1. 易错点：函数极限值与函数实点是不能一概而论的
2. 函数的四个特性：有界性，奇偶性，周期性，单调性，（凹凸性）
3. 函数连续选择题排除函数
   a. $f(x)=xsin\frac{1}{x}$
   b. $f(x)=x^2sin\frac{1}{x}$
   c. $f(x)=1\ if\ x\in Q, else=0\ if\ x\in R/Q\quad x\in(0,1)$（狄利克雷函数）
4. 引入导数的定义

   核心思想：动静点的结合

$$\lim_{x\to x_0}f'(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim f'(x)=\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

5. 泰勒展开（注意其一般性）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(f(x_0))^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

应用：

a. 极限
b. 高阶导数函数性态$f^{(n)}(x)$及高阶导不等式证明（多项式拟合）
c. 交错级数收敛性的证明及收敛域的求解
d. 和函数展开及求解

注意点：

a. 在哪里展开：题目里没给的就是最后要消掉的项
b. 展开多少项

6. 四个间断点
   a. 第一类间断点：无视点定义，两边极限存在
   b. 第二类间断点：无视点定义，至少有一侧极限不存在，表现为极限震荡或极限无穷或根本无极限
7. Tips
   a. 加号极限能否拆分的关键是被拆的极限均存在（不为0或无穷）
   b. 无敌泰勒（注意在积分中的一般性展开）、适当的洛必达、导数的定义、e、$\infty-\infty$通分、微分中值定理后夹逼、放缩夹逼、对于有根式的要提取x（注意正负）后泰勒展开（一般只展开一阶）、多项式极限（带根号的切忌使用，转为泰勒展开）

一元及多元微分

> *nan：求高阶导、求零点的个数*

1. 微分的几何意义：在某个点可以近似为一条直线或一个平面
2. 微分的数学公式：$dy=f'(x_0)\Delta x+o(x)$
3. 关系：偏导连续（改变积分次序）→全微分→连续及单侧导数→极限
4. 各种求导
   a. 反函数求导（链式求导现推，带入带入的是x的值）

$$\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\phi''(y)=-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}$$

5. 全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

6. 隐函数求导法
7. 链式求导（条件是可微，否则只能用导数定义）
8. 高阶导（因式分解）
    a. 递推
    b. 级数
    c. 莱布尼茨
9. 多元导（矩阵）
10. 证明全微分

$$\Delta z = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

$$lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

11. 证明偏导连续

在求多元极限过程中可将x, y替换为极坐标判定极限是否存在

    a. 直接求导 * 2：直接带点，有极限求极限
    b. 定义求导 * 2：导数定义，求极限，考虑一般性换元（极坐标）
    c. 判等
12. 微分的应用
    a. 曲率

$$r = \frac{ds}{da}, ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\frac{ds}{da} = \frac{(1 + y'^2)^{2/3}}{y''}$$

13. 极值最值（驻点）
    a. 非条件极值，一维导求驻点，二维导确定极大极小值（$\Delta = AC - B^2$）
    b. 条件极值，λ数乘法
14. 偏微分方程

$$\int f(x) dx = \int g(x, y) dx$$

$$F(x) + \phi(y) = G(x, y)$$

中值定理专题

总应用：

1. 方程根的存在性问题
2. 证明不等式
3. 求极限
4. $F(\xi, f(\xi), f'(\xi) = 0$罗尔
5. $F(\xi, f(\xi), f'(xi), \eta, f(\eta), f'(\eta)$拉格朗日、柯西
6. 其他

三个连续函数相关引理

1. 界值定理

   连续函数$f(x)$，最大值max，最小值min，$min \leq f(x) \leq max$

2. 零点定理

   连续函数$f(x), f(a) > 0, f(b) < 0, \exists \xi \in (a, b)\ s.t.\ f(\xi) = 0$

3. 费马引理

   函数$f(x)$在x_0邻域有定义且连续，若
   $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x_0) \leq f(x) or f(x_0) \geq f(x)$恒成立，则$f'(x_0) = 0$

五个中值定理

1. 罗尔定理

   连续函数$f(x)$，$f(a) = f(b), \exists \xi \in (a, b), s.t.\ f'(\xi) = 0$

   Tips：

   a. 中值定理单变量证明题，构造函数（直接构造，微分方程，F(x) = 0 or H(x,y) = 0）

2. 拉格朗日中值定理

   特点：题目中出现增量之比

   连续函数$f(x)$，$\exists \xi \in (a, b), s.t.\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   常见的增量差：

   a. $tanx = tanx - tan0$
   b. $lnx = lnx - 1$
   c. $af(a) - bf(b) = F(a) - F(b)$
   d. $arctanx = arctanx - arctan0$
   e. $ln\frac{b}{a} = lnb - lna$

   应用：

a. 求柯西数列极限及$x_{n+1}=f(x_n)$数列形式
b. 求极限，中值后夹逼
c. 中值定理多变量证明题$\xi=\eta$：同区间两次拉格朗日
d. 中值定理多变量证明题$\xi\neq\eta$：不同区间拉格朗日

3. 柯西中值定理

特点：题目中出现$f'(x)\neq 0$

连续函数$f(x),g(x)$，$f(a)=g(a),f(b)=g(b),\exists\xi\in(a,b),s.t.\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

应用：

a. 中值定理多变量证明题$\xi=\eta$

4. 积分第一中值定理（求极限）证明

$\int_a^b f(x)g(x)dx$，其中$g(x)$在(a,b)不变号，且可积，则
$\exists\xi\in(a,b)s.t.=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

5. 积分第二中值定理证明

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

不等式证明

不等式

1. 绝对值不等式

$$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$$
$$|a|-|b|\leq||a|-|b||\leq|a|+|b|$$

2. 分数不等式

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}(b*d>0)$$

3. 三角不等式

$$sinx<x<tanx$$

4. 初等不等式

$$lnn<n<n^a<a^n<n!<n^n$$
$$\frac{x}{x+1}<ln(1+x)<x<e^x-1$$

5. 均值不等式

调和平均数≤几何平均数≤算数平均数≤平方平均数：

$$\frac{1}{\sum\frac{1}{a_i}}\leq(\Pi a_i)^{(\frac{1}{n})}\leq\frac{\sum a_i}{n}\leq\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}}$$

6. 柯西不等式（级数和平方小于平方和）

$$||<x,y>|| \leq <x,x>*<y,y>$$
$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

7. 函数凹凸性

   对于凹函数（凸函数反之）：

$$f(\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2})$$
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

8. 切比雪夫不等式
9. 其他

$$(x>0) ln(1+x) \leq x \leq e^2$$

题型：

1. 单调性
   a. （变形后）构造函数
   b. 识别实变量，视虚变量为常数而后构造函数

      Tips：在后序题解中可将虚变量带入得到重要中间值

   c. $for\ A \leq f(x) \leq B$
   d. 中值定理构造导函数，配合微分方程食用
2. 泰勒展开证明不等式

   一般为三阶及三阶导以上，配合函数凹凸性进行证明

   a. 要消掉展开的哪些项
   b. 往哪些点展开
   c. 要展开多少阶
3. 利用中值定理证明不等式
4. 积分不等式
   a. 定义变限积分
   b. 柯西积分不等式

$$\int f(x)^2 dx \int g(x)^2 dx \geq [\int f(x)g(x)dx]^2$$

   c. 恒等式

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(x)dx + f(x_0)$$

积分及重积分

一元积分

原函数存在定理

区间内包含第一类间断点和无穷间断点的函数，无原函数

震荡间断点的函数，可能有原函数

判定同区间的积分大小，可利用被积函数的不等式进行判定

定积分拆解几何拆解

计算时可更改积分次序、更改函数坐标系、对称性、轮换性、奇偶性简化运算

积分方法包括凑微分法、换元法、分部积分法、升维积分法、区间再现（配合三角函数、去周期、去绝对值）等

微分方程

1. 一阶微分方程
    a. $f(y', y, x)$可直接将两个变量分离
    b. $f(y', g(x, y)$不可直接将变量分离，引入新变量替换y'
    c. $f(y', y)$齐次型引入变量并替换y'
    d. $f(y'', y', x)$对y'', y'降阶处理
2. $f(y'', y', y, f(x))$ 及更高阶

    解特征方程

    a. 若解中只有实数，设特解$y^* = x^l Q_n(x) e^{\alpha x}$，通解$y = \sum C x^n e^{\lambda x}$
    b. 若解中含有虚数，设特解$y^* = x^l (Q_n(x) cosx + Q_n(x) sinx) e^{\alpha x}$，通解$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$
3. 欧拉方程$f(x^2 y'' \dots)$

    令$e^t = x^2$

4. 高阶推广

    原则：对最低阶导换元，砍掉中间变量，转化为新的两个变量的微分方程

5. Tips：

    a. 全微分——折现还原法

    b. 莱布尼茨

    c. 其他存在高阶导的地方

  d. 对于任意的三个解，两两之差均为通解
  e. 多元微分二元导和是微分方程
  f. 中值定理证明构造是微分方程
  g. 待定系数C是由单独条件求得的
  h. 客串：导数微分定义、函数方程

空间立体几何

1. 曲线表达式
   a. 联立方程（难点：求导矩阵）

   $$F(x,y,z)=0$$
   $$G(x,y,z)=0$$

   切向量

   $$\frac{x-x_0}{x'(t)}=\frac{y-y_0}{y'(t)}=\frac{z-z_0}{z'(t)}$$

   法平面

   b. 参数方程

   $$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

   切向量

   $$\frac{x-x_0}{x'(t)}=\frac{y-y_0}{y'(t)}=\frac{z-z_0}{z'(t)}$$

   法平面

   $$x'(t)(x-x_0)+y'(t)(y-y_0)+z'(t)(z-z_0)=0$$

2. 曲面表达式
   a. 联立方程

   $$F(x,y,z)=0$$
   $$G(x,y,z)=0$$

   设$(A,B,C)=$

   $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ F'_x(x,y,z) & F'_y(x,y,z) & F'_z(x,y,z) \\ G'_x(x,y,z) & G'_y(x,y,z) & G'_z(x,y,z) \end{vmatrix}$$

   切平面

   $$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

   法向量

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

3. 参数方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$$

设$(A,B,C)=$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}$$

切平面

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

法向量

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

c. 直接表达式

$$Z=f(x,y)$$

设$(A,B,C)=$

$$(f'_x(x,y),f'_y(x,y),-1)$$

切平面

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

法向量

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

4. 旋转曲面的一般求法

设所求旋转曲面任一点$M(x,y,z)$

设原曲面任意一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

设被旋转直线$\frac{x-x_l}{A}=\frac{y-y_l}{B}=\frac{z-z_l}{C}$

由"一相等，二垂直"

$$(x-x_l)^2+(y-y_l)^2+(z-z_l)^2=(x_0-x_l)^2+(y_0-y_l)^2+(z_0-z_l)^2$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

曲线曲面方程

1. 曲线积分

   计算过程注意使用用重积分的对称性、轮换性、奇偶性简化运算

   a. 投代法

   $$ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$$

   b. 格林公式

      i. 闭合曲线
      ii. 注意奇点

   $$\begin{aligned} I &= \int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \iint_{\sum} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \end{aligned}$$

2. 曲面积分

   计算过程注意使用用重积分的对称性、轮换性、奇偶性简化运算

   a. 投代法

   $$dS = \sqrt{(\frac{dx}{dz})^2 + (\frac{dy}{dz})^2 + 1}dxdy$$

3. 高斯公式

   a. 闭合曲面
   b. 注意奇点

   $$\begin{aligned} I &= \iint_{\sum} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \\ &= \iiint \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz \end{aligned}$$

微积分的几何与物理应用

1. 斜渐近线

   $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} \ is\ exist?$$

2. 平面面积

   a. 直角坐标系

b. 极坐标系

c. 参数方程

i. 格林公式

$$S = \frac{1}{2}\int_L -ydx + xdy$$

ii. 想象

$$S = \int_a^b y(x)dx$$

3. 平面弧长 = 曲线积分定义（总之，将x,y转化为可积分态）

$$s = \int_L ds = \int \sqrt{1 + y'^2}dx$$
$$s = \int_L ds = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$
$$s = \int_L ds = \int \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta x$$

4. 反函数

$$\phi' = \frac{1}{f'(x)}$$
$$\phi'' = -\frac{y''}{y'^3}$$

5. 曲率

$$k = |\frac{y''}{(1 + y')^{\frac{3}{2}}}|$$
$$r = \frac{1}{k}$$

6. 形心

$$x = \frac{\iiint xdxdydz}{\iiint dxdydz}$$

7. 空间体积

$$V = \pi x^2 * S$$
$$V = 2\pi \int xf(x)dz$$
$$V = \pi \int f^2dx = 2\pi \int x|f|dx$$

8. 空间旋转体面积

$$S = 2\pi x * l$$
$$S = 2\pi \int yds$$

9. 转动惯量

$$\int (x^2+y^2)dS$$

10. 方向导数（一个数值）（一个向量对另一组向量的方向导数）

引入方向角$(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = (f'_x, f'_y, f'_z)/|f|$

g(x,y,z) 在零一向量 l 的方向导数

$$\frac{\partial g}{\partial l} = g'_x cos\alpha + g'_y cos\beta + g'_z cos\gamma = C$$

11. 梯度（一个向量）

$$\nabla F = F'_x * i + F'_y * j + F'_z * k = (,,)$$

12. 旋度（一个向量）（对一组梯度求旋度）

$$curlF = \nabla x F$$

$$curlF = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})i + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})j + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})k$$

13. 散度（一个数值）（对一组梯度求散度）

$$divF = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = C$$