AP Calculus
Rodrigo Leonardo
9 de septiembre, 2019

2 - Números Complejos

Problema 1 (Motivación)**.** De $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. ¿Cuál es la necesidad de incrementar la complejidad de los conjuntos? Suponga que se cuenta con $\mathbb{N}$ y que se quiere resolver

$$x + 1 = 0$$

Por ello se necesita de $\mathbb{Z}$. Ahora, resuelva

$$2x + 1 = 0$$

La solución no se encuentra en $\mathbb{Z}$, por lo que se requiere de $\mathbb{Q}$. Luego, resuelva

$$x^2 - 2 = 1$$

Y es necesario introducir un conjunto distinto en naturaleza a los anteriores, mejor conocido como $\mathbb{R}$. Ahora,

$$x^2 + 2 = 1$$

no tiene soluciones en $\mathbb{R}$. Se necesita de un conjunto aún más general.

Definición 1. Un número complejo es aquel es puede ser expresado de la forma $z = a + bi$ con a y b números reales. A i se le conoce como la unidad imaginaria y satisface $i^2 = -1$.

Nota 1. Para el número complejo $z = a + bi$, se define la parte real $Re(z) = a$ y la parte imaginaria $Im(z) = b$. Estos pueden ser expresados en el plano complejo, el cual se comporta de forma idéntica que $\mathbb{R}^2$. A un número complejo cuya parte real es cero se le conoce como imaginario. El conjunto de los números complejos se denota como $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1. Identifique los siguientes números en el plano complejo.

1. $4 + 2i$
2. $1 - 3i$

Definición 2. La adición y substracción en $\mathbb{C}$ procede de la siguiente forma. Para $a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$,

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Ejemplo 2. Realice las operaciones de los siguientes números complejos.

1. $(9 + i) + (2 - 3i)$
2. $(i) - (-11 + 2i)$

Definición 3. Dos números complejos se multiplican de la siguiente forma.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 3. Multiplique los números complejos

1. $(3 + 2i)(1 + 7i)$
2. $(i + 1)^2$
3. $(-4 + 3i)(2 - 5i)$

Ejemplo 4. Divida los números complejos

1. $\dfrac{3 - i}{2 + 3i}$
2. $\dfrac{5 + 2i}{-4 + i}$

Definición 4. El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ se define como $\overline{z} = a - bi$.

Propiedad 1. Respecto al conjugado de $z \in \mathbb{C}$:

1. El conjugado de $\overline{z}$ es z.
2. Si $z = a + bi$,
$$a = Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad b = Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$
3. La conjugación se distribuye respecto a las cuatro operaciones aritméticas estándar.

Ejemplo 5. Escriba los conjugados de los siguientes números:

1. $4 + 16i$
2. $\sqrt{3} - 2i$

Ejemplo 6. Resuelva:

1. $\dfrac{4 + 2i}{1 + 3i} - (15 - 7i)$
2. $\left(\dfrac{2 - 3i}{9 + i}\right)\overline{(-2 + i)}$
3. $\overline{\left(\dfrac{6 + 5i}{3 + i}\right)}$
4. $\dfrac{\overline{1 + i}}{-2 + 5i}$

Definición 5. Para $z \in \mathbb{C}$, el opuesto de z es $-z$.

Definición 6. El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota 2. La definición anterior coincide con la distancia del vector $a + bi$ al origen.

Propiedad 2. Demuestre que $z\overline{z} = |z|^2$.

Ejemplo 7. Encuentre el inverso multiplicativo de $2 - 3i$.

Definición 7. Sea $z = x + iy$ un número complejo. Entonces, la representación polar de z es $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$, en donde $r = |z|$ y θ es el argumento de z.

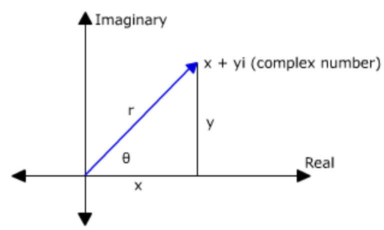

Figure 1: Forma polar de un número complejo

Definición 8. La función exponencial en los complejos se define como $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Nota 3. En la Definición 8, para el número complejo z con módulo r y argumento θ, $z = re^{i\theta}$.

Nota 4. En la Definición 8, sustituya x por π.