# AP Calculus

Rodrigo Leonardo
3 de septiembre, 2019

## 1 - Sustitución Trigonométrica

**Problema 1** (Motivación)**.** ¿Por qué el área de un círculo es $r^2\pi$? Encuentre el área encerrada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*Solución.* Resolviendo la ecuación de la elipse se tiene que

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Dada la simetría de la elipse, basta con encontrar el área en el primer cuadrante. Por lo tanto,

$$\frac{1}{4}A_e = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

¿Cómo se resuelve esta integral? Si el integrando fuese $x\sqrt{a^2 - x^2}$, basta con sustituir $z = a^2 - x^2$. ■

**Nota 1.** Considere la siguiente tabla; cada sustitución se representa como un triángulo rectángulo.

| Expresión | Sustitución | Identidad |
|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a\sin\theta, \quad \lvert\theta\rvert \leq \frac{\pi}{2}$ | $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a\tan\theta, \quad \lvert\theta\rvert < \frac{\pi}{2}$ | $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec\theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ | $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ |

Esta nueva sustitución es distinta a la usual dado que la nueva variable es función de la variable a sustituir, es decir:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

A este tipo de sustitución se le conoce como *sustitución inversa*.

**Ejemplo 1.** Siguiendo con el ejemplo de la elipse, haga $x = a\sin\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}
A_e &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2ab[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

Si $a = b = r$, entonces la elipse es un círculo de área $r^2\pi$.

**Ejemplo 2.** Evalúe

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \quad a>0$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{3/2}}$
6. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
13. $\displaystyle\int x^2\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

**Ejemplo 3.** Utilice sustitución trigonométrica para demostrar que:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

**Ejemplo 4.** Encuentre el valor medio de:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \quad 1\le x\le 7$$