

## Lecture 4 - Continuity

**Definición 1.** Una función  $y = f(x)$  es continua en un punto interior  $c$  de su dominio si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (1)$$

Una función  $y = f(x)$  es continua en un punto extremo izquierdo  $a$  o es continua en un punto extremo derecho  $b$  en su dominio si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b), \quad \text{respectivamente} \quad (2)$$

Por lo tanto, para que una función sea continua en un punto  $c$ , se debe dar

1.  $f(c)$  debe existir
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  debe existir
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Si el punto se encuentra en algún extremo del dominio, el límite es izquierdo o derecho.

**Ejemplo 1.** Dado

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

Determine en qué puntos del dominio  $[0, 4]$  la función  $f$  es continua.

Se puede dar discontinuidad del infinito  $e^x$  en  $x = 0$ , discontinuidad de salto y discontinuidades removibles (agujeros).

**Ejemplo 2.** Encuentre las discontinuidades de las siguientes funciones e identifique los tipos de discontinuidades:

1.  $f(x) = |x - 4| - |x + 3|$
2.  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
3.  $h(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

Una función es continua si es continua en cada punto de su dominio. Es  $f(x) = \frac{1}{x}$  continua?

Las familias de funciones siempre continuas son

1. Polinomios
2. Racionales
3. Valor absoluto
4. Exponenciales
5. Logarítmicas
6. Trigonómicas
7. Radicales

**Ejemplo 3.** Describa las discontinuidades de

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x < 1 \\ x^3 - 2x + 5 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \neq -1 \\ 2 & x = -1 \end{cases}$$

**Ejemplo 4.** Encuentre el valor de  $a$  que hace que las siguientes funciones sean continuas

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & x < 3 \\ 4ax & x \geq 3 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & x < -2 \\ x^3 & x \geq -2 \end{cases}$$