Computational Physics SoSe 2022
6. Übungsblatt

Ausgabe: 19.05.2022 Prof. H. Jelger Risselada
Abgabe: 26.05.2022 12 Uhr

Aufgabe 0: Verständnisfragen 0 Punkte

1) Welche Bedeutung hat die Feigenbaumkonstante und in welchen Beispielen tritt sie auf?

2) Welche Iterationsverfahren kennen Sie zur Lösung nichtlinearer Gleichungen?

Aufgabe 1: Bifurkationsdiagramme 10 Punkte

Der Banachsche Fixpunktsatz sagt unter bestimmten Bedingungen die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes einer Iterationsvorschrift voraus. Während eine numerische Lösung in diesen Fällen meist unproblematisch ist, so ist es umso schwieriger Probleme, bei denen der Satz nicht gilt, also solche mit instabilen Fixpunkten, Orbits und "Chaos", zu behandeln. Bifurkationsdiagramme sind ein anschauliches Mittel, um diese Phänomene anhand eines einzigen Parameters zu erfassen.

Berechnen und plotten Sie Bifurkationsdiagramme für

a) die logistische Abbildung ($x_n \in [0, 1]$):

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n),$$

b) die kubische Abbildung ($x_n \in [-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}]$):

$$x_{n+1} = r x_n - x_n^3,$$

durch numerische Iteration. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Schreiben Sie eine Routine, die zu gegebenem r und x_0 die jeweilige Abbildung N mal ausführt. Dieses "Warmlaufen" soll garantieren, dass man zu einem Fixpunkt/Orbit konvergiert ist, sofern dieser existiert. Überlegen Sie sich, welche Werte $r > 0$ maximal annehmen darf, damit x_n in jedem Schritt innerhalb der jeweiligen vorgegebenen Intervalle bleibt.

2. Schreiben Sie nun eine Routine, die nach dem Warmlaufen weiteriteriert und dabei nach einem Fixpunkt/Orbit sucht. Jeder Fixpunkt und jeder Punkt eines Orbits ergibt später einen Punkt im Bifurkationsdiagramm.

3. Variieren Sie r in Schritten $\Delta r = 1 \cdot 10^{-3}$ und erzeugen Sie so ein Bifurkationsdiagramm für die jeweilige Abbildung. Testen Sie dabei verschiedene Startwerte x_0 aus, da bestimmte Fixpunkte/Orbits gegebenenfalls nur von bestimmten Startwerten aus erreicht werden können. Bestimmen Sie jeweils ein r_∞, ab welchem sich keine "echten" Orbits mehr einstellen und das Bifurkationsdiagramm chaotisch wird. Da die Orbitgröße ab einem gewissen Punkt sehr rapide mit r wächst (Stichwort Feigenbaumkonstante), ist es eine gute Näherung bereits ab einer Orbitgröße von $G > 64$ Chaos anzunehmen um r_∞ zu bestimmen.

Hinweis: Häufig werden die Bifurkationsdiagramme auch im chaotischen Bereich weitergezeichnet, auch wenn dort keine Fixpunkte/Orbits mehr existieren. Das dient vor Allem der Anschauung, denn eine Abbildung wird genau an der Stelle chaotisch, an der diskrete Linien im Bifurkationsdiagramm in ein Kontinuum übergehen.

Aufgabe 2: Der Wetterfrosch **10 Punkte**

Mit Hilfe des sogenannten Poincaré-Schnitts kann die kontinuierliche Dynamik eines Systems auf eine diskrete abgebildet werden. Damit ist er ein nützliches Mittel, um deterministisches Chaos in mehreren Dimensionen zu analysieren. In dieser Aufgabe betrachten wir ein einfaches DGL-System, das in bestimmten Fällen chaotisches Verhalten aufweist. Um dies zu analysieren, soll unter Anderem ein Poincaré-Schnitt des Phasenraums durchgeführt werden.

Die Voraussage des Wetters ist eine komplizierte Angelegenheit. Ein einfacher Zugang zur modellhaften Untersuchung der Dynamik komplexer Wetterphänomene ist das chaotische Lorenz-Modell, gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Dabei sind σ und b dimensionslose Konstanten, die Materialeigenschaften des Systems beschreiben, und r ein externer Parameter, der von der Temperaturdifferenz im System abhängt.

a) Integrieren Sie die Differentialgleichungen mit dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Wählen Sie $\sigma = 10$ und $b = 8/3$. Untersuchen Sie insbesondere die Fälle $r = 20$ und $r = 28$. Welche Rolle spielen die Anfangsbedingungen?

b) Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar

1. als Projektion der kontinuierlichen Bewegung auf die X-Y-Ebene.
2. als Poincaré-Schnitt zu $Z = \text{const} = 20$ und $\dot{Z} < 0$. Um den Schnittpunkt auf der Ebene $Z = \text{const} = 20$ genauer zu bestimmen, sollte man linear zwischen dem letzten Wert über 20 und dem ersten unter 20 interpolieren.
3. als 3D-Plot.