Computational Physics SoSe 2022
0. Übungsblatt

Ausgabe: 1.4.2022
Abgabe: 8.4.2022 20 Uhr

Prof. H. Jelger Risselada

Aufgabe 0: Verständnisfragen — 0 Punkte

1) Was bedeutet numerische *Stabilität* und wieso tritt sie auf?

2) Wieso kann eine höhere *Genauigkeit* (beispielsweise durch eine feinere Diskretisierung) zu numerischer Instabilität führen?

Aufgabe 1: Hello World — 0 Punkte

Richten Sie sich einen Compiler (z.B. `GCC`) auf Ihrem System ein. Testen Sie diesen, indem Sie ein Programm schreiben, dass `Hello World` ausgibt.
Freiwilliger Zusatz: Wenn Sie `GCC` verwenden, informieren Sie sich über die `-Ox` Optionen (mit `x` $\in \{1, 2, 3\}$), die beim Kompilieren den Code optimieren und die Ausführzeit von Programmen deutlich senken können.

Aufgabe 2: Rundungsfehler — 0 Punkte

In einigen Fällen lässt sich numerische Stabilität herstellen, indem die kritischen Rechenschritte geschickt umgeformt oder genähert werden. Im Folgenden sollen Sie dies anhand von drei Beispielrechnungen einüben, um in Zukunft eigenständig einfache Stabilisierungsansätze erarbeiten zu können.

Schreiben Sie ein Programm, mit dem die folgenden Ausdrücke zunächst direkt nach Formel berechnet werden:

a) für große $x \gg 1$:
$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \tag{1}$$

b) für kleine $x \ll 1$:
$$\frac{1 - \cos x}{\sin x}, \tag{2}$$

c) für kleine $\delta \ll 1$:
$$\sin(x + \delta) - \sin x. \tag{3}$$

Suchen Sie dann nach einem numerischen Rechenweg, der Auslöschung vermeidet. Vergleichen Sie die relativen Fehler zwischen dem Rechenweg mit Auslöschung und ohne Auslöschung.

Aufgabe 3: Stabilität — 0 Punkte

Nicht immer bedeutet höhere Genauigkeit auch höhere Stabilität. Dies sollen Sie sich hier anhand des aus der Vorlesung bekannten Euler-Verfahrens klarmachen und eine erste numerische Integration als Vorbereitung auf spätere Aufgaben schreiben.

Die Differentialgleichung
$$\dot{y}(t) = -y(t), \quad y(0) = 1 \tag{4}$$

mit der analytischen Lösung

$$y(t) = \exp(-t) \tag{5}$$

soll mit Hilfe eines einfachen sogenannten Euler-Verfahrens und symmetrischen Euler-Verfahrens mit Schrittweite Δt numerisch gelöst werden. Für das Euler-Verfahren ergibt sich die folgende Rekursionsgleichung

$$y_{n+1} = y_n(1 - \Delta t) \tag{6}$$

und für das symmetrische Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = -2\Delta t y_n + y_{n-1}. \tag{7}$$

a) Implementieren Sie sowohl das Euler-Verfahren, als auch das symmetrische Euler-Verfahren und starten Sie mit Anfangswerten $y_0 = 1$ und für das symmetrische Euler-Verfahren zusätzlich mit $y_1 = \exp(-\Delta t)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der analytischen Lösung im Intervall $t \in [0, 10]$.

   Hinweis: Finden Sie selbst einen geeigneten Wert für Δt.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus dem vorigen Aufgabenteil mit den Ergebnissen, wenn Sie das Euler-Verfahren mit $y_0 = 1 - \Delta t$ und das symmetrische Euler-Verfahren mit $y_0 = 1$ und $y_1 = y_0 - \Delta t$ starten.
   Deuten Sie Ihre Ergebnisse.