Computational Physics SoSe 2022
3. Übungsblatt

Ausgabe: 21.04.2022
Abgabe: 28.04.2022 20 Uhr

Prof. H. Jelger Risselada

Aufgabe 0: Verständnisfragen 0 Punkte

1. Welche Arten der Schrittweitenanpassung kennen Sie?
2. Ist eine Schrittweitenanpassung immer sinnvoll?

Aufgabe 1: Adams-Bashforth-Verfahren 8 Punkte

Sie haben in der Vorlesung verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen kennengelernt. Es gibt die sogenannten Einschritt-Verfahren, bei denen in jedem Iterationsschritt jeweils das Ergebnis des ***einen*** *vorherigen Schrittes berücksichtigt wird. Darunter fallen zum Beispiel das Euler- sowie das Runge-Kutta-Verfahren. In dieser Aufgabe sollen Sie sich mit einem Mehrschritt-Verfahren, dem sogenannten Adams-Bashforth-Verfahren, vertraut machen, welches in jedem Iterationsschritt die Ergebnisse aus* ***mehreren*** *vorherigen Schritten berücksichtigt. Die Laufzeit soll am Ende mit der eines Runge-Kutta-Verfahrens gleicher Ordnung verglichen werden.*

Implementieren Sie das Adams-Bashforth-Verfahren 4. Ordnung für d-dimensionale Bewegungsgleichungen

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{24}(55\vec{y}_n^{\,\prime} - 59\vec{y}_{n-1}^{\,\prime} + 37\vec{y}_{n-2}^{\,\prime} - 9\vec{y}_{n-3}^{\,\prime}) + \mathcal{O}(h^5) \tag{1}$$

Beachten Sie, dass wir hier nicht das vollständige Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren verwenden, da wir den Korrektor auslassen.
Testen Sie Ihre Implementation an der folgenden Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} = -x - \alpha\dot{x}. \tag{2}$$

a) Welche unterschiedlichen Fälle erwarten Sie als Lösung bei verschiedenen Werten von α? Erzeugen Sie numerisch Plots dieser Fälle.

b) Untersuchen Sie die Energieerhaltung, indem Sie die Energie über einen Zeitraum $t = 20$ für $\alpha = 0.1$ beobachten.

c) Vergleichen Sie die Laufzeit des Adams-Bashforth-Verfahrens mit der Laufzeit eines Runge-Kutta Verfahrens gleicher Ordnung und gleicher Schrittweite. Integrieren Sie dafür die hier gegebene Bewegungsgleichung über einen längeren Zeitraum. Entsprechen Ihre Ergebnisse Ihren Erwartungen? Was würde sich ändern, wenn jede Auswertung der Bewegungsgleichung mehr Rechenzeit benötigen würde?

Aufgabe 2: Fußball **12 Punkte**

In dieser Aufgabe sollen Sie erneut ein Runge-Kutta-Verfahren zum Lösen einer Differentialgleichung nutzen. Der Fokus liegt dabei nicht auf der Implemetierung des Verfahrens, diese dürfen Sie vom letzten Blatt recyclen, sondern auf der Umsetzung einer konkreten physikalischen Anwendung: Die Flugbahn eines Fußballs unter Berücksichtigung verschiedener Effekte, die im Zusammenspiel eine analytische Beschreibung unmöglich machen, darunter Schwerkraft, Luftreibung, Wind und Magnus-Kraft.

Wir betrachten eine Bewegung eines Fußballs im dreidimensionalen Raum. Die im Flug auf den Ball wirkenden Kräfte sind

$$\vec{F}_{\text{Luftreibung}} = -\frac{1}{2} c_w \cdot \varrho \cdot A \cdot \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{3}$$

$$\vec{F}_{\text{g}} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z . \tag{4}$$

Dabei sind für einen durchschnittlichen Fußball

$$c_w = 0.2\,, \tag{5}$$

$$\text{Radius } R = 11 \text{ cm} \to \text{Querschnittsfläche } A = 0.038 \text{ m}^2\,, \tag{6}$$

$$\text{Masse } m = 0.43 \text{ kg}\,, \tag{7}$$

$$\text{Dichte der Luft } \varrho = 1.3 \text{ kg}\,\text{m}^{-3}\,, \tag{8}$$

$$\text{Gravitationskonstante } g = 9.81 \text{ m}\,\text{s}^{-2}\,. \tag{9}$$

a) Stellen Sie aus den auf den Ball wirkenden Kräften eine (nicht-lineare) Differentialgleichung für $\vec{r}(t)$ auf.

b) Der Ball wird vom Ort $\vec{r_0} = (0, 0, R)$ aus im Winkel α mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0} = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$ losgeschossen. (Koordinaten in einem rechtshändigen Koordinatensystem mit nach oben zeigender z-Achse) Plotten Sie die Flugweite des Balls für 1000 Werte für $\alpha \in (0°, 90°)$ und $v_0 = 30 \text{ m}\,\text{s}^{-1}$.

   Lösen Sie hierzu die in a) aufgestellte Differentialgleichung mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung.

c) Verwenden Sie den Abschusswinkel α für den weitesten Schuss aus Aufgabenteil b) und plotten Sie die Bahnkurve $z(x)$ des Balles, wenn zusätzlich Wind $\vec{v_{\text{Wind}}} = (v_{\text{Wind}}, 0, 0)\text{m}\,\text{s}^{-1}$ mit verschiedenen $v_{\text{Wind}} = -10, -5, 0, 5, 10$ weht. *Hinweis*: Überlegen Sie sich, welchen Einfluss der Wind auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Gleichung (3) hat.

d) Nun versucht ein Spieler das 60 m entfernte gegnerische Tor zu treffen. Bestimmen Sie die Winkelbereiche α in denen der Ball hinter der Torlinie landet, wenn der Spieler mit $v_0 = 40 \text{ m}\,\text{s}^{-1}$ schießt. (Höhe der Latte über dem Boden: 2.44 m) Bestimmen Sie die Bereichsgrenzen auf 0.01° genau.

e) Rotiert der Ball mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse $\vec{\omega}$ ist eine korrektere Beschreibung der Flugbahn nur unter Berücksichtigung der *Magnus-Kraft* möglich:

$$\vec{F}_{\text{Magnus}} = \gamma \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{10}$$

$$\gamma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}. \tag{11}$$

   Zusätzlich verlangsamt sich die Drehbewegung durch Reibung mit der Luft:

$$\dot{\vec{\omega}} = -\eta \vec{\omega} \tag{12}$$

$$\eta = 0.01 \text{ s}^{-1}. \tag{13}$$

   Erweitern Sie, sofern nötig, Ihr Runge-Kutta-Verfahren, sodass dieses neben den 3 Raumkoordinaten zusätzlich 3 Drehwinkel mit entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ nach der Differentialgleichung (12) berechnen kann.

f) Nun trainiert der Spieler auf dem leeren Platz aus eine Ecke ein Tor zu schießen. Der Schuss habe folgende Anfangsgeschwindigkeit und Drall:

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \mathrm{s^{-1}} \tag{14}$$

(siehe Abbildung 1). In welchem Bereich darf ω liegen, wenn der Schuss im 34 m entfernten, 7.32 m breiten, Tor hinter der Torlinie landen soll?
Hinweis: Suchen Sie im Bereich $\omega \in [0, 100\,\mathrm{Hz}]$.

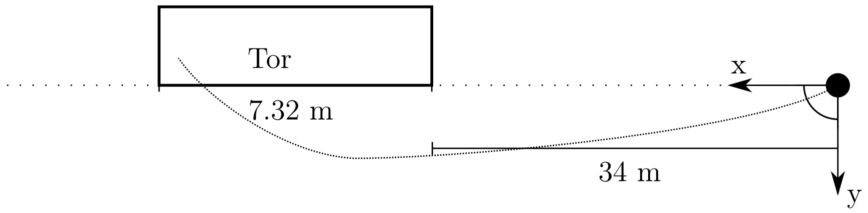

Abbildung 1: Der Torschuss.