Sea N la segunda intersección de AT con (BTC), quiero ver que $N \in MK$. Primero, hago una inversion en T. Una vez tengo el diagrama invertido, hago inversión en D. El problema se reduce a lo siguiente (manteniendo los nombres de los puntos):

> Sea EFT un triangulo, y sean B, C las reflexiones de T con respecto a las rectas por F, E perpendiculares a EF, respectivamente. Sea D la intersección de EF con la mediatríz de BC. Sea A el humpty point de EFT, y sea N un punto sobre (DBC) de manera que $\angle DBT = \angle MDC$. Demuestra que $DATM$ es cíclico.

Define $K := BF \cap CE$, observa que K, D y N están alineados, ya que K es la reflexión de T especto de EF. Sean H, J los puntos medios de TK y EF. Sea $L \neq D$ la segunda intersección de EF con (NTD). Sea ψ la inversión de centro J y radio JE. Como ψ envia A a T (por humpty point), entonces basta con ver que envía D a L, que es equivalente a ver que $(FE; DL) = -1$.

Para ver esto último, me basta (por propiedades de las quaternas harmónicas, y porque J es el punto medio de HD), ver que $2 \cdot HF \cdot HE = HD \cdot DL$. Para ver esto, uso linearity of power of a point. Sea $\mathbb{P}(X) = Pow_{(DBC)}(X) - Pow_{(DTN)}(X)$. Por linearity,

$$\mathbb{P}(K) = 2\mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(T).$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K) &= 0 \\
\mathbb{P}(H) &= HD^2 - HD \cdot HL = -HD \cdot DL \\
\mathbb{P}(T) &= -TB \cdot TC = -4 \cdot HD \cdot HE
\end{aligned}$$

y por tanto

$$0 = -2 \cdot HD \cdot DL + 4 \cdot HD \cdot HE \iff 2 \cdot HF \cdot HE = HD \cdot DL$$

como queríamos demostrar.