Sesión 2

1. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

   Solución. Consideremos el primer par de números consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014, que son el 45 y el 46. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 46 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embrago, entre los vértices numerados del 46 al 90 hay, al menos, 45 vértices.

2. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

   Solución 1. Supongamos, en primer lugar, que $x = 0$. En este caso se tiene $y^4 = 0$, por lo que y también tiene que ser 0. Así pues, una solución es $x = y = 0$.

   Si $x \neq 0$ dividimos toda la ecuación por x^4, quedando

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 3\frac{y}{x}.$$

   Sea $t = y/x$, entonces, las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ dan lugar a soluciones racionales de la ecuación $t^4 - 3t + 1 = 0$. Sin embargo, esta ecuación no tiene soluciones racionales pues, de tenerlas, el denominador de la fracción debería ser un divisor del coeficiente de t^4 y el denominador un divisor del término independiente. Es decir, las posibles soluciones racionales solo pueden ser 1 o -1, pero ninguna de ellas verifica $t^4 - 3t + 1 = 0$. Por tanto, como no hay soluciones racionales, no hay soluciones enteras de $x^4 + y^4 = 3x^3y$ con $x \neq 0$.

   Solución 2. En primer lugar observemos que si (x, y) es una solución, también lo es $(-x, -y)$ y que, por ser $x^4 + y^4 \geq 0$, entonces o bien $x, y \geq 0$, o bien $x, y \leq 0$. Debido a esto, buscaremos soluciones tales que $x, y \geq 0$.

   Puesto que el segundo miembro de la ecuación es un múltiplo de 3, también ha de serlo el primero. Ahora bien, toda potencia cuarta es congruente con 0 o con 1 módulo 3, siendo congruente con 0 solo cuando se trata de un múltiplo de 3. Por tanto, tanto x como y deben ser múltiplos de 3. Es decir, existen $k_1 \geq 0$ y $k_2 \geq 0$ enteros tales que

$$x = 3k_1, \quad y = 3k_2.$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$k_1^4 + k_2^4 = 3k_1^3 k_2.$$

Es decir k_1, k_2 es una solución tal que $0 \leq k_1 < x$ y $0 \leq k_2 < y$. Si aplicáramos el mismo razonamiento a k_1, k_2 obtendríamos una nueva solución k_3, k_4 tal que $0 \leq k_3 < k_1$, $0 \leq k_4 < k_2$. Es decir podemos obtener una sucesión infinita de soluciones, decreciente, a partir de una dada. Pero esto no es posible ya que la solución de partida es finita. Por tanto debe ser $k_1 = k_2 = 0$, o lo que es lo mismo $x = y = 0$, que es la única solución entera de la ecuación.

3. *Probar que*

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3.$$

Solución. Se tiene que $2014 = 1013 + 1001$. Sea $a = 2014$ y $b = 1013$, entonces deberemos probar que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013}$$

es múltiplo de

$$a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab(a-b).$$

Ahora bien, por el binomio de Newton, se obtiene

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n}\, b^n,$$

y agrupando por parejas simétricas resulta

$$\begin{aligned} a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n (a^{2013-n}\, b^n - a^n\, b^{2013-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^n b^n (a^{2013-2n} - b^{2013-2n}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1} = (a-b)p_k(a,b),$$

podemos escribir

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = a\,b\,(a-b)\sum_{n=1}^{1006}\binom{2013}{n}(-1)^n a^{n-1}b^{n-1}p_n(a,b).$$

Finalmente, observemos que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ es múltiplo de 3, pero no $a = 2014$ ni $b = 1013$ ni $a - b = 1001$, de donde se concluye que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} \quad \text{es múltiplo de} \quad 3ab(a-b).$$

Sesión 3

1. *Sean a, b números positivos. Probar que*

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Solución 1. La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica al miembro de la izquierda obtenemos

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{ab + \frac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Solución 2. Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2$ $(0 \leq s, t)$ obtenemos la desigualdad equivalente

$$st + \sqrt{\frac{s^4 + t^4}{2}} \leq s^2 + t^2.$$

Aislando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, también es equivalente

$$\frac{s^4 + t^4}{2} \leq s^4 + t^4 + s^2t^2 + 2s^2t^2 - 2s^3t - 2t^3s.$$

Multiplicando por 2 e igualando a 0 el miembro de la izquierda, es equivalente probar que

$$0 \leq s^4 + t^4 + 6s^2t^2 - 4s^3t - 4t^3s.$$

Finalmente, gracias al binomio de Newton,

$$s^4 + t^4 + 6s^2t^2 - 4s^3t - 4t^3s = (t - s)^4 \geq 0.$$

Solución 3. Denotamos

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmética de los números } a \text{ y } b.)$$

$$G = \sqrt{ab} \text{ (media geométrica de los números } a \text{ y } b.)$$

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (media cuadrática de los números } a \text{ y } b.)$$

Con esta notación debemos probar que

$$G + Q \leq 2A$$

o, equivalentemente,

$$Q - A \leq A - G,$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2 - A^2}{Q + A} \leq \frac{A^2 - G^2}{A + G}.$$

Puesto que $Q \geq G$, se tiene que $Q + A \geq A + G > 0$. Como $Q \geq A$, tenemos $Q^2 - A^2 \geq 0$. Puesto que $A \geq G$, tenemos que $A^2 - G^2 \geq 0$. Así pues, basta probar que

$$Q^2 - A^2 \leq A^2 - G^2,$$

que equivale a

$$Q^2 + G^2 \leq 2A^2.$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2+b^2}{2} + ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad.

Solución 4. La desigualdad equivale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Puesto que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, gracias a la desigualdad de Jensen,

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2}.$$

2. *Encontrar las tres últimas cifras de* 7^{2014}.

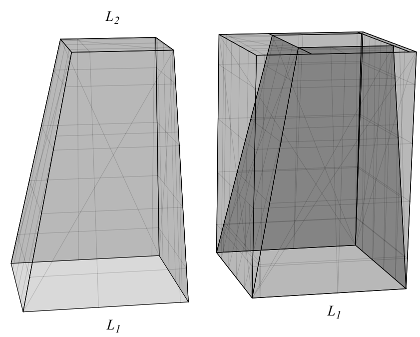
   Solución 1. Usaremos el teorema de Euler-Fermat: si $\operatorname{mcd} a, m = 1$, entonces
$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$
   En nuestro caso, queremos calcular $7^{2014} \pmod{1000}$. Por ser $1000 = 2^3 5^3$, se tiene que $\varphi(1000) = 2^2(2-1) \cdot 5^2(5-1) = 400$. Entonces,
$$7^{2014} = 7^{5\cdot 400+14} = \left(7^{400}\right)^5 \cdot 7^{14} \equiv 1^5 \cdot 7^{14} \equiv 849 \pmod{1000}.$$
   En consecuencia, las tres últimas cifras de 7^{2014} son 849.

   Solución 2. Observemos que las tres últimas cifras de 7^4 son 401. Por tanto, multiplicando sucesivamente por 7^4, resulta que

Potencia	últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

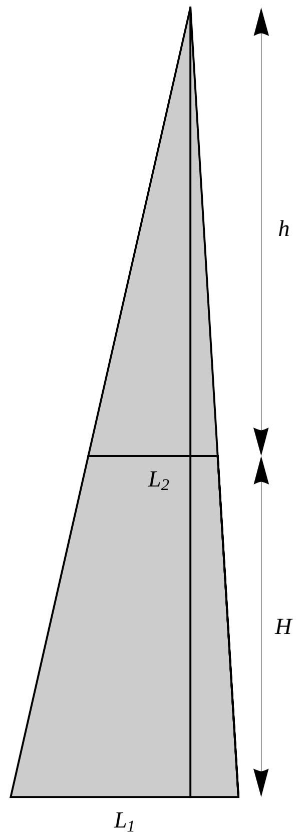
   Puesto que $7^{2014} = 7^2 \cdot 7^{2012} = 7^2 \cdot 7^{503\cdot 4}$, resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 deja resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el periodo de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla). Así pues, las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto $49 \cdot 201$, es decir 849.

3. *De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud* L_1*, y altura* H*, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud* L_1 *(para la inferior) y* L_2 *(para la superior), y altura* H*. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente.*



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

Solución. Si prolongamos una altura h el tronco de pirámide hasta obtener una pirámide completa de altura $H + h$ tendrá una sección como la que se muestra en la figura siguiente.



Un argumento de semejanza de triángulos permite comprobar que

$$\frac{h+H}{L_1} = \frac{h}{L_2}$$

y, por tanto,

$$h = \frac{HL_2}{L_1 - L_2}.$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del tronco de pirámide} &= \tfrac{1}{3}(L_1^2(H+h) - L_2^2 h) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{HL_1^3}{L_1 - L_2} - \frac{HL_1^3}{L_1 - L_2}\right) \\
&= \frac{H}{3}\frac{L_1^3 - L_2^3}{L_1 - L_2} = \frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2).
\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que

$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = \frac{2}{3}\,\text{Volumen del prisma},$$

tendremos la ecuación

$$\frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) = \frac{2}{3}HL_1^2,$$

que se transforma en

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - \frac{L_1}{L_2} - 1 = 0,$$

cuya única solución positiva es $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es decir, los lados deben estar en relación áurea.