# Sesión 1

1. *Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul. Para la coloración del resto de fichas se siguen las siguientes reglas:*

   *a) Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color, entonces la ficha con el número $|x-y|$ se pinta de color rojo.*

   *b) Si la ficha con el número $x$ y la ficha con el número $y$ son de distinto color y $x \cdot y$ es un número entre 1 y 50 (incluyendo ambos), entonces la ficha con el número $x \cdot y$ se pinta de color azul.*

   *Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.*

   **Solución.** Observemos que dos números que se diferencian en 5 tienen el mismo color. En efecto, si fueran de distinto color, su diferencia debería ser de color rojo, por la regla a). Pero su diferencia es 5, que es de color azul. Por tanto basta con saber el color de los 4 primeros números. Aquí, distinguimos dos casos: 1) que la ficha 1 sea de color azul y 2) que la ficha 1 sea de color rojo.

   *Caso 1)* Si 1 es de color azul, el resto de fichas deberá ser de color azul, por la regla b). Esto es así porque si la ficha $k \neq 1$ fuera roja, entonces por b), $k = k \cdot 1$ tendría que ser azul, lo que contradice que $k$ sea roja.

   *Caso 2)* Si 1 es roja, por la regla a) $4 = 5 - 1$ es roja. Para determinar el color de 2 y 3, supongamos que 3 es azul. Por ser $2 = 3 - 1$ y ser 3 y 1 de diferente color, entonces 2 es roja. Ahora bien $3 = 5 - 2$ y 5 es azul y 2 roja, por lo tanto 3 es roja. Esto no puede ser, por lo tanto 3 no puede ser azul y es roja, por lo que 2 también es roja. Así pues, 1, 2, 3 y 4 son rojas, lo mismo que el resto de fichas que no son múltiplo de 5.

   Por tanto, solo hay dos coloraciones posibles, o todas las fichas de color azul o todas rojas, excepto los múltiplos de 5 que son azules.

2. *Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación*

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{3 - x^3}.$$

**Solución.** Para que existan soluciones reales tiene que ser $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Ahora bien, si $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ se tiene que

$$2 - x^2 \leq 2, \quad 3 - x^3 \geq 3,$$

pero $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, por lo que no hay soluciones cuando $x \in [-\sqrt{2}, 0]$. Por otra parte, cuando $x \in (0, \sqrt{2}]$ podemos ver que

$$\sqrt[3]{3 - x^3} > \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3}.$$

Puesto que la ecuación

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3}$$

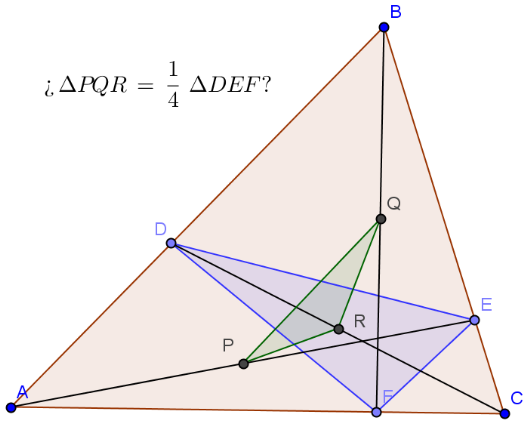
tiene como únicas soluciones $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ y, para $x = 1$, resulta $\sqrt[3]{2\sqrt{2} - 1} > \sqrt{2 - 1} = 1$, es evidente que

$$\sqrt[3]{3 - x^3} > \sqrt[3]{2\sqrt{2} - x^3} \geq \sqrt{2 - x^2},$$

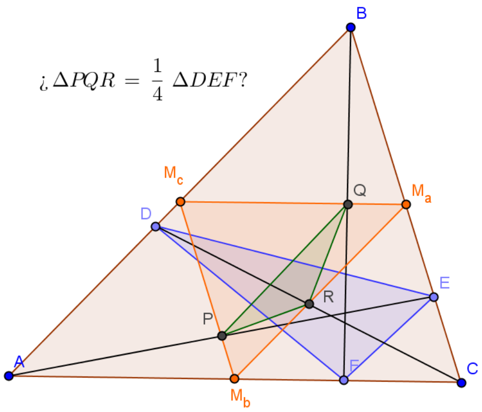
por lo que tampoco pueden existir soluciones cuando $x \in (0, \sqrt{2}]$.

3. *Sea $\Delta ABC$ un triángulo y $D$, $E$ y $F$ tres puntos cualesquiera sobre los lados $AB$, $BC$ y $CA$ respectivamente. Llamemos $P$ al punto medio de $AE$, $Q$ al punto medio de $BF$ y $R$ al punto medio de $CD$. Probar que el área del triángulo $\Delta PQR$ es la cuarta parte del área del triángulo $\Delta DEF$.*

**Solución.** Hagamos primero un dibujo donde queden reflejados los elementos que intervienen en el problema.



Observemos que, como $P$, $Q$ y $R$ son los puntos medios de las correspondientes Cevianas $AE$, $BF$ y $CD$, estos puntos se encuentran en los lados del triángulo que determinan los pies de las medianas de cada lado, como se ve en la figura siguiente.




Los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta M_aM_bM_c$ son semejantes con razón de semejanza $1/2$, por lo que se tiene

$$\frac{\overline{M_cM_a}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{M_cQ}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{QM_a}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\overline{M_aM_b}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{M_aR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{RM_b}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{\overline{M_bM_c}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{M_bP}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{PM_c}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}.$$

Además, los ángulos en $A$, $B$ y $C$ son iguales, respectivamente, a los ángulos en $M_a$, $M_b$ y $M_c$.

Sea $u = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, $v = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ y $w = \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}$, por lo que

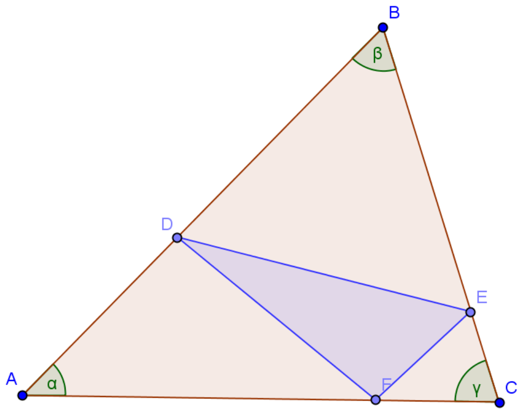
$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = 1 - u, \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = 1 - v, \quad \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = 1 - w.$$

Aplicando la semejanza de los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta M_aM_bM_c$, resulta

$$u = \frac{\overline{RM_b}}{\overline{M_aM_b}}, \quad v = \frac{\overline{PM_c}}{\overline{M_bM_c}}, \quad w = \frac{\overline{QM_a}}{\overline{M_cM_a}},$$

$$\frac{\overline{M_aR}}{\overline{M_aM_b}} = 1-u, \quad \frac{\overline{M_bP}}{\overline{M_bM_c}} = 1-v, \quad \frac{\overline{M_cQ}}{\overline{M_cM_a}} = 1-w.$$

Con esto, calculemos ahora el área de los triángulos complementarios del triángulo $\Delta DEF$.



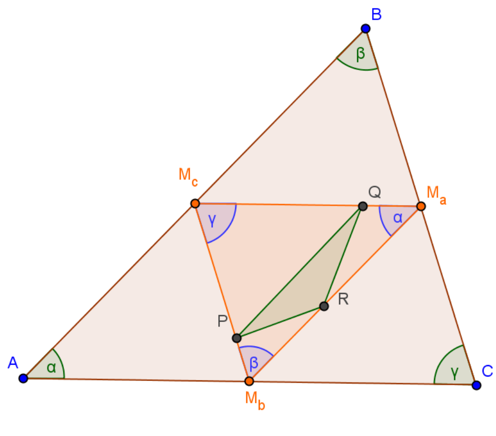

Si $[ABC]$ denota el área de un triángulo $\Delta ABC$, tenemos que

$$[AFD] = \overline{FA}\,\overline{AD}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-w)u\,\overline{CA}\,\overline{AB}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-w)u[ABC],$$

$$[BED] = \overline{DB}\,\overline{BE}\,\operatorname{sen}\beta = (1-u)v\,\overline{AB}\,\overline{BC}\,\operatorname{sen}\beta = (1-u)v[ABC],$$

$$[CFE] = \overline{EC}\,\overline{CF}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-v)w\,\overline{BC}\,\overline{CA}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-v)w[ABC].$$

Haciendo lo mismo con los triángulos complementarios del triángulo $\Delta PQR$, con respecto al triángulo $\Delta M_aM_bM_c$ se tiene



$$[M_aRQ] = \overline{QM_a}\,\overline{M_aR}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-u)w\,\overline{M_aM_b}\,\overline{M_aM_c}\,\operatorname{sen}\alpha = (1-u)w[M_aM_bM_c],$$

$$[M_bPR] = \overline{RM_b}\,\overline{M_bP}\,\operatorname{sen}\beta = (1-v)u\,\overline{M_aM_b}\,\overline{M_bM_c}\,\operatorname{sen}\beta = (1-v)u[M_aM_bM_c],$$

$$[M_cQP] = \overline{PM_c}\,\overline{M_cQ}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-w)v\,\overline{M_bM_c}\,\overline{M_aM_c}\,\operatorname{sen}\gamma = (1-w)v[M_aM_bM_c].$$

Teniendo en cuenta que $[ABC] = 4[M_aM_bM_c]$ y que

$$(1-u)w + (1-v)u + (1-w)v = (1-w)u + (1-u)v + (1-v)w,$$

se sigue el resultado.

# Sesión 2

1. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

   **Solución.** Consideremos el primer par de números consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014, que son el 45 y el 46. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 46 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embrago, entre los vértices numerados del 46 al 90 hay, al menos, 45 vértices.

2. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

   **Solución 1.** Supongamos, en primer lugar, que $x = 0$. En este caso se tiene $y^4 = 0$, por lo que $y$ también tiene que ser 0. Así pues, una solución es $x = y = 0$.

   Si $x \neq 0$ dividimos toda la ecuación por $x^4$, quedando

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 3\frac{y}{x}.$$

   Sea $t = y/x$, entonces, las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ dan lugar a soluciones racionales de la ecuación $t^4 - 3t + 1 = 0$. Sin embargo, esta ecuación no tiene soluciones racionales pues, de tenerlas, el denominador de la fracción debería ser un divisor del coeficiente de $t^4$ y el denominador un divisor del término independiente. Es decir, las posibles soluciones racionales solo pueden ser 1 o $-1$, pero ninguna de ellas verifica $t^4 - 3t + 1 = 0$. Por tanto, como no hay soluciones racionales, no hay soluciones enteras de $x^4 + y^4 = 3x^3y$ con $x \neq 0$.

   **Solución 2.** En primer lugar observemos que si $(x, y)$ es una solución, también lo es $(-x, -y)$ y que, por ser $x^4 + y^4 \geq 0$, entonces o bien $x, y \geq 0$, o bien $x, y \leq 0$. Debido a esto, buscaremos soluciones tales que $x, y \geq 0$.

   Puesto que el segundo miembro de la ecuación es un múltiplo de 3, también ha de serlo el primero. Ahora bien, toda potencia cuarta es congruente con 0 o con 1 módulo 3, siendo congruente con 0 solo cuando se trata de un múltiplo de 3. Por tanto, tanto $x$ como $y$ deben ser múltiplos de 3. Es decir, existen $k_1 \geq 0$ y $k_2 \geq 0$ enteros tales que

$$x = 3k_1, \quad y = 3k_2.$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando resulta

$$k_1^4 + k_2^4 = 3k_1^3 k_2.$$

Es decir $k_1, k_2$ es una solución tal que $0 \leq k_1 < x$ y $0 \leq k_2 < y$. Si aplicáramos el mismo razonamiento a $k_1, k_2$ obtendríamos una nueva solución $k_3, k_4$ tal que $0 \leq k_3 < k_1$, $0 \leq k_4 < k_2$. Es decir podemos obtener una sucesión infinita de soluciones, decreciente, a partir de una dada. Pero esto no es posible ya que la solución de partida es finita. Por tanto debe ser $k_1 = k_2 = 0$, o lo que es lo mismo $x = y = 0$, que es la única solución entera de la ecuación.

3. *Probar que*

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

*es múltiplo de*

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3.$$

**Solución.** Se tiene que $2014 = 1013 + 1001$. Sea $a = 2014$ y $b = 1013$, entonces deberemos probar que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013}$$

es múltiplo de

$$a^3 - b^3 - (a-b)^3 = 3ab(a-b).$$

Ahora bien, por el binomio de Newton, se obtiene

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} (-1)^n a^{2013-n}\, b^n,$$

y agrupando por parejas simétricas resulta

$$\begin{aligned} a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n (a^{2013-n}\, b^n - a^n\, b^{2013-n}) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (-1)^n a^n b^n (a^{2013-2n} - b^{2013-2n}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1} = (a-b)p_k(a,b),$$

podemos escribir

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} = a\,b\,(a-b)\sum_{n=1}^{1006}\binom{2013}{n}(-1)^n a^{n-1}b^{n-1}p_n(a,b).$$

Finalmente, observemos que $2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$ es múltiplo de 3, pero no $a = 2014$ ni $b = 1013$ ni $a - b = 1001$, de donde se concluye que

$$a^{2013} - b^{2013} - (a-b)^{2013} \quad \text{es múltiplo de} \quad 3ab(a-b).$$