Sesión 3

1. *Sean a, b números positivos. Probar que*

$$a+b \geq \sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Solución 1. La desigualdad equivale a

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica al miembro de la izquierda obtenemos

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{ab+\frac{a^2+b^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2^2}} = \frac{a+b}{2}.$$

Solución 2. Con el cambio de variable $a = s^2$, $b = t^2$ $(0 \leq s,t)$ obtenemos la desigualdad equivalente

$$st+\sqrt{\frac{s^4+t^4}{2}} \leq s^2+t^2.$$

Aislando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, también es equivalente

$$\frac{s^4+t^4}{2} \leq s^4+t^4+s^2t^2+2s^2t^2-2s^3t-2t^3s.$$

Multiplicando por 2 e igualando a 0 el miembro de la izquierda, es equivalente probar que

$$0 \leq s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s.$$

Finalmente, gracias al binomio de Newton,

$$s^4+t^4+6s^2t^2-4s^3t-4t^3s = (t-s)^4 \geq 0.$$

Solución 3. Denotamos

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ (media aritmética de los números } a \text{ y } b.)$$

$$G=\sqrt{ab} \text{ (media geométrica de los números } a \text{ y } b.)$$
$$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (media cuadrática de los números } a \text{ y } b.)$$

Con esta notación debemos probar que

$$G+Q\leq 2A$$

o, equivalentemente,

$$Q-A\leq A-G,$$

que expresamos, multiplicando por el conjugado en cada uno de los términos, como

$$\frac{Q^2-A^2}{Q+A}\leq\frac{A^2-G^2}{A+G}.$$

Puesto que $Q\geq G$, se tiene que $Q+A\geq A+G>0$. Como $Q\geq A$, tenemos $Q^2-A^2\geq 0$. Puesto que $A\geq G$, tenemos que $A^2-G^2\geq 0$. Así pues, basta probar que

$$Q^2-A^2\leq A^2-G^2,$$

que equivale a

$$Q^2+G^2\leq 2A^2.$$

Es decir, basta probar que

$$\frac{a^2+b^2}{2}+ab\leq\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Simplificando observamos que esta última expresión es, en realidad, una igualdad.

Solución 4. La desigualdad equivale a

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq\frac{a+b}{2}.$$

Puesto que la función $f(x)=\sqrt{x}$ es cóncava, gracias a la desigualdad de Jensen,

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq\sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{2}}=\frac{a+b}{2}.$$

2. *Encontrar las tres últimas cifras de* 7^{2014}.

Solución 1. Usaremos el teorema de Euler-Fermat: si $\operatorname{mcd} a, m = 1$, entonces

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

En nuestro caso, queremos calcular $7^{2014} \pmod{1000}$. Por ser $1000 = 2^3 5^3$, se tiene que $\varphi(1000) = 2^2(2-1) \cdot 5^2(5-1) = 400$. Entonces,

$$7^{2014} = 7^{5 \cdot 400 + 14} = \left(7^{400}\right)^5 \cdot 7^{14} \equiv 1^5 \cdot 7^{14} \equiv 849 \pmod{1000}.$$

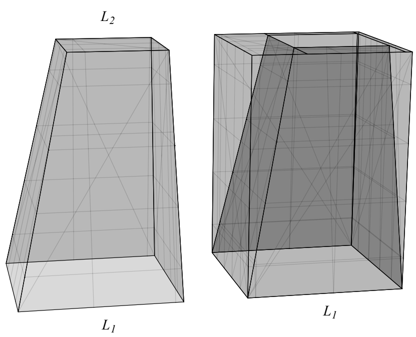
En consecuencia, las tres últimas cifras de 7^{2014} son 849.

Solución 2. Observemos que las tres últimas cifras de 7^4 son 401. Por tanto, multiplicando sucesivamente por 7^4, resulta que

Potencia	últimas cifras
7^4	401
7^8	801
7^{12}	201
7^{16}	601
7^{20}	001
7^{24}	401

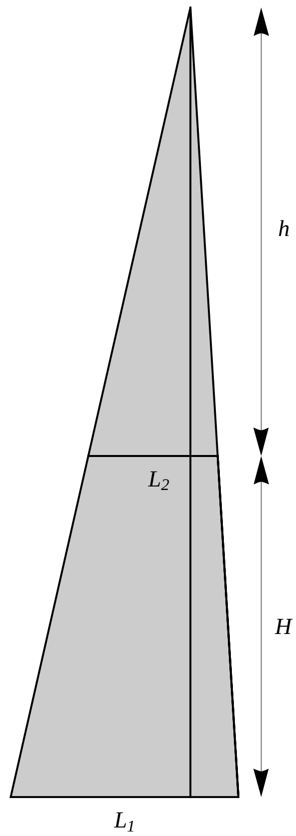
Puesto que $7^{2014} = 7^2 \cdot 7^{2012} = 7^2 \cdot 7^{503 \cdot 4}$, resulta que las tres últimas cifras de 7^{2012} son 201, ya que 503 deja resto 3 al dividirlo por 5 (5 es el periodo de la tabla y 3 corresponde a la tercera entrada de la tabla). Así pues, las tres últimas cifras de 7^{2014} son las tres últimas cifras del producto $49 \cdot 201$, es decir 849.

3. *De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud* L_1, *y altura* H, *extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud* L_1 *(para la inferior) y* L_2 *(para la superior), y altura* H. *Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente.*



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

Solución. Si prolongamos una altura h el tronco de pirámide hasta obtener una pirámide completa de altura $H + h$ tendrá una sección como la que se muestra en la figura siguiente.



Un argumento de semejanza de triángulos permite comprobar que

$$\frac{h+H}{L_1} = \frac{h}{L_2}$$

y, por tanto,

$$h = \frac{HL_2}{L_1 - L_2}.$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del tronco de pirámide} &= \tfrac{1}{3}(L_1^2(H+h) - L_2^2 h) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{HL_1^3}{L_1 - L_2} - \frac{HL_1^3}{L_1 - L_2}\right) \\
&= \frac{H}{3}\frac{L_1^3 - L_2^3}{L_1 - L_2} = \frac{H}{3}(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2).
\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que

$$\text{Volumen del tronco de pirámide} = \frac{2}{3}\,\text{Volumen del prisma},$$

tendremos la ecuación

$$\frac{H}{3}(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2) = \frac{2}{3} H L_1^2,$$

que se transforma en

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 - \frac{L_1}{L_2} - 1 = 0,$$

cuya única solución positiva es $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es decir, los lados deben estar en relación áurea.

Sesión 4

1. *Hallar para qué valores del número real a todas las raíces del polinomio, en la variable x,*

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$

son números enteros.

Solución 1. Sean α, β y γ las raíces del polinomio. Aplicando las fórmulas de Cardano-Vieta se tiene

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -25.$$

Ahora bien

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 54.$$

Como α, β y γ son enteros, buscamos soluciones enteras de la pareja de ecuaciones

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 54.$$

De la segunda vemos que las únicas soluciones posibles son

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 7), \quad (\pm 2, \pm 5, \pm 5), \quad (\pm 3, \pm 3, \pm 6),$$

y teniendo en cuenta la primera ecuación, la única solución posible es $(2, 5, -5)$ y entonces $a = 50$.

Solución 2. Notemos que el polinomio que nos dan es uno que se obtiene desplazando verticalmente a unidades el polinomio

$$P(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 25x = x(x^2 - 2x - 25),$$

que tiene raíces en $x = 1 \pm \sqrt{26}$ y $x = 0$. Si $a > 0$ habrá dos raíces positivas mayores que 0 y menores que $1 + \sqrt{26}$. Al ser enteras, solo podrán ser $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ o $x_6 = 6$ y además, se tendrá que verificar $P(x_j) = P(x_k)$, para $j \neq k$ y $1 \leq j, k \leq 6$.

Teniendo en cuenta que $P(2) = P(5) = -50$, resulta que el polinomio

$$x^3 - 2x^2 - 25x + 50$$

tiene sus tres raíces enteras, dos de ellas son las mencionadas 2 y 5 y la tercera -5.

En el caso en que $a < 0$, no existen soluciones, ya que en este caso habría dos raíces negativas, que podrían ser -1, -2 -3 o -4, pero

$$P(-1) \neq P(-2) \neq P(-3) \neq P(-4).$$

2. *Sean* x *e* y *números reales entre* 0 *y* 1. *Probar que*

$$x^3 + xy^2 + 2\,xy \le 2\,x^2y + x^2 + x + y.$$

Solución. La desigualdad equivale a

$$P = 2\,x^2y + x^2 + x + y - x^3 - xy^2 - 2\,xy \ge 0.$$

Escribimos P como un polinomio en la variable x,

$$P = -x^3 + (2y+1)x^2 + (1 - 2y - y^2)x + y.$$

Dividimos este polinomio entre $x - 1$, mediante el algoritmo de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 2y+1 & 1-2y-y^2 & y \\ 1 & & -1 & 2y & 1-y^2 \\ \hline & -1 & 2y & 1-y^2 & 1+y-y^2. \end{array}$$

Es decir,

$$P = (-x^2 + 2xy + 1 - y^2)(x-1) + 1 + y - y^2.$$

También

$$\begin{aligned} P &= (-x^2 + 2xy - y^2)(x-1) + x - 1 + 1 + y - y^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2)(1-x) + x + y - y^2 \\ &= (x-y)^2(1-x) + x + y(1-y). \end{aligned}$$

Puesto que las cinco cantidades $(x-y)^2$, $1-x$, x, y, $1-y$ son no negativas, $P \ge 0$.

3. *Consideramos un número primo* p. *Debemos diseñar un torneo de* p*-parchís sujeto a las siguientes reglas.*

   - *En el torneo participan* p^2 *jugadores.*
   - *En cada partida juegan* p *jugadores.*
   - *El torneo se divide en rondas. Las rondas se dividen en partidas. Cada jugador juega una, o ninguna, partida en cada ronda.*
   - *Al final del torneo cada jugador se ha enfrentado exactamente una vez con cada uno de los otros jugadores.*

Determinar si es posible diseñar un torneo así. En caso afirmativo, obtened el mínimo número de rondas que puede tener el torneo.

Solución. El número de partidas que disputa cada jugador es

$$\frac{\text{número de jugadores a los que se enfrenta}}{\text{número de jugadores a los que se enfrenta en cada partida}} = \frac{p^2-1}{p-1}.$$

O sea, cada jugador juega $p+1$ partidas. Por tanto el número de rondas es, al menos, $p+1$, y es exactamente $p+1$ cuando todos los jugadores juegan en todas las rondas. En ese caso, en cada ronda se disputan $\frac{p^2}{p} = p$ partidas.

Vamos a probar que es posible organizar un torneo con $p+1$ rondas. Representamos a cada jugador como un número de dos cifras escrito en base p. Es decir, escribimos cada jugador de la forma

$$C_i C_d,$$

donde C_i, la cifra de la izquierda, y C_d, la cifra de la derecha, toman valores enteros entre 0 y $p-1$.

Realizamos la siguiente planificación.

- Ronda 0. Agrupamos los jugadores en los que C_i coincide.
- Ronda 1. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- ......
- Ronda k. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + k \cdot C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- ....
- Ronda $p-1$. Agrupamos los jugadores en los que $C_i + (p-1) \cdot C_d$ tiene el mismo resto al dividir por p.
- Ronda p. Agrupamos los jugadores en los que C_d coincide.

En los argumentos que siguen, diremos que $D \equiv E$ si ambos números tienen el mismo resto al dividir por p.

Debemos observar que la planificación propuesta agrupa a los jugadores en conjuntos de p elementos. En los rondas 0 y p eso es claro. Consideramos una ronda k con $0 < k < p$. Para cada C_i fijado, al mover C_d, el resto de $C_i + k \cdot C_d$ es siempre distinto (si no lo fuera tendríamos dos jugadores C_iC_d, $C_iC'_d$ para los que $C_i + k \cdot C_d \equiv C_i + k \cdot C'_d$, y restando llegaríamos a que $k(C'_d - C_d)$ es múltiplo de p, sin que ni k ni $C'_d - C_d$ lo sean). Por tanto, obtenemos una vez, y sólo una, todos los posibles restos. Al variar C_i obtenemos p veces cada uno de los restos.

Supongamos que dos jugadores, C_iC_d y $C'_iC'_d$, se enfrentan dos veces.

Si lo hacen en rondas $0 \leq j < k \leq p-1$ tenemos que $C_i + k \cdot C_d \equiv C'_i + k \cdot C'_d$, $C_i + j \cdot C_d \equiv C'_i + j \cdot C'_d$. Restando, $(k-j) \cdot C_d \equiv (k-j) \cdot C'_d$. Como $k - j$ es primo con p, $C_d \equiv C'_d$. Luego $C_d = C'_d$. Llevando esta igualdad a nuestra hipótesis, y restando, obtenemos fácilmente $C_i \equiv C'_i$. Luego $C_i = C'_i$.

Si los jugadores se enfrentan en rondas k y p con $0 \leq k < p$ obtenemos directamente que $C_d = C'_d$, y repetimos el argumento anterior.