Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Lea Poeplau, Richard Lindner, Rafael Dahmen

08. Oktober 2004

1. Übungsblatt - Lösungen

Gruppenübungen

G1 (Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

(a)

$$\vec{m}_{Jan} = \begin{pmatrix} 140 \\ 700 \\ 35 \end{pmatrix} \qquad \vec{m}_{Feb} = \begin{pmatrix} 134 \\ 670 \\ 46 \end{pmatrix} \qquad \vec{m}_{Mar} = \begin{pmatrix} 137 \\ 685 \\ 40^1\!/_2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$|\vec{m}_{Jan}| = 714.72 \qquad |\vec{m}_{Feb}| = 684.815 \qquad |\vec{m}_{Mar}| = 699.739$$

(c)

$$\det \begin{pmatrix} 140 & 700 & 35 \\ 134 & 670 & 46 \\ 137 & 685 & 40^1\!/_2 \end{pmatrix} = 0$$

(d) Da die Determinante der Matrix aus c) 0 ergibt hat das von den 3 Vektoren aufgespannte Gebilde kein Volumen. Die Drei sind also linear abhängig und spannen nur eine Fläche oder eine Gerade auf.

G2 (Lineare Gleichungssysteme)

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$x = 40 \qquad y = 30 \qquad z = 20 \qquad w = 10$$

G3 (Würfelvolumen)

Die Matrix der Vektoren, die einen Würfel mit Kantenlänge 2 im Raum aufspannen kann folgende Form haben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 8$$

G4 (Rechnen in $\mathbb{C}$)

(a)

$$a+b=2+16i \qquad a+d=5+18i \qquad b+c=-1+3i \qquad a+d+e=-3+18i$$

(b)

$$b-a=-8+2i \qquad a-c=3+13i \qquad e-b-c=-7-3i$$

(c)

$$a\cdot b=-78+24i \qquad c\cdot d=66+22i \qquad b\cdot e=24-72i \qquad a\cdot c\cdot e=(52-16i)\cdot(-8)=-416+128i$$

(d)

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{a\cdot\bar{a}}(b\cdot\bar{a})=\frac{1}{37}(24+33i) \qquad \frac{d}{c}=\frac{1}{20}(-33+11i)$$

(e)

$$|a|=8.602 \qquad |b|=9.487 \qquad |c|=6.325$$

(f)

$$\bar{a}=5-7i \quad \bar{c}=2+6i \quad \bar{d}=-11i \quad \bar{e}=-8 \quad \overline{a+c}=7-i \quad \overline{b\cdot d}=-99+33i \quad \overline{c-b}=5+15i$$

G5 (Kartesische- und Polardarstellung)

(a) Eine komplexe Zahl z mit der Polardarstellung (r,φ) hat die folgende kartesische Darstellung $z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ oder $(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)$.

(b) (i) $1+i \triangleright (\sqrt{2}, \pi/4)$
- (ii) $-1+i \triangleright (\sqrt{2}, 3\pi/4)$
- (iii) $i \triangleright (1, \pi/2)$
- (iv) $(\sqrt{2}, \pi/4) \triangleright 1+i$
- (v) $(3,\pi) \triangleright -3$
- (vi) $(1, \pi/3) \triangleright 1/2 + \sqrt{3}/2\, i$

G6 (Multiplikation mit i)

Die Multiplikation mit i entspricht geometrisch in der komplexen Zahlenebene einer Drehung um $\pi/2$ nach links.

G7 (Komplexe Determinante)

$$\det\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 2 & i & 1+i \\ 0 & 2+2i & 1 \end{pmatrix} = -1+0+(-4+4i)-0-0-(-1+i)(2+2i) = -1+4i$$

G8 (Unterschiede zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$)

Auf den komplexen Zahlen haben wir eine Multiplikation definiert, die es so zwischen Vektoren der reelen Ebene nicht gibt.