Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Lea Poeplau, Richard Lindner, Rafael Dahmen

Vorkurs

für Wirtschaftsingenieure
WS 2004/2005

08. Oktober 2004

2. Übungsblatt - Lösungen

GRUPPENÜBUNGEN

G1 (Welche Zuordnungen sind Funktionen?)

(a) FUKTION, diese Zuordnung ist eine Funktion, da jeder natürlichen Zahl genau eine Zahl zugeordnet wird.

(b) KEINE FUNKTION, da es ein Element (nämlich die Zahl 1) gibt, der kein Bild zugeordnet wird.

(c) KEINE FUNKTION, da es ein Element gibt, dem zwei unterschiedliche Werte zugeornet werden.

(d) KEINE FUNKTION, da es sogar mehrere Elemente gibt, denen zwei unterschiedliche Werte zugeornet werden.

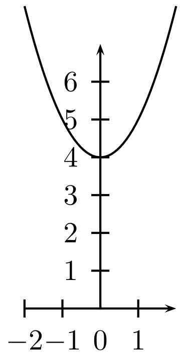
(e) KEINE FUNKTION, siehe (d)

(f) Hier soll man darüber nachdenken, dass f keine Funktion ist, falls es eine Aufgabe ohne Lösung oder eine Aufgabe mit mehreren Lösungen gibt.

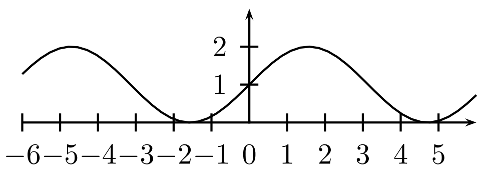
(g) KEINE FUNKTION, da die (Quadrat-)Wurzelfunktion nicht für negative Zahlen definiert ist und man deshalb nicht jeder Zahl einen Wert zuordnet. (Dies wird eine Funktion, falls man den Definitionsbereich auf $[0, +\infty[$ einschränkt.

G2 (Skizziere die folgenden Funktionen)

(a) $\varphi(x) = x^2 + 4$



(b) $\psi(x) = \sin x + 1$



(c) Wenn man die Funktion ϕ auf die endliche Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ einschränkt, dann reichen die Funktionswerte an diesen vier Stellen aus, um die Funktion eindeutig zu beschreiben. Folglich könnte eine Wertetabelle eine sinnvolle Darstellung sein:

x	1	2	3	4
$\varphi(x)$	5	8	13	20

G3 (Rechnen mit Polynomen im $\mathbb{R}[X]$)

$p(x) = x^2 + 2x + 2$
$q(x) = x^2 + 3$
$p + q(x) = p(x) + q(x) = (x^2 + 2x + 2) + (x^2 + 3) = 2x^2 + 2x + 5$
$p - q(x) = p(x) - q(x) = (x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 3) = 2x - 1$

$p \cdot q(x) = p(x) \cdot q(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 + 3) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$
$p : q(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3}$
Mit Polynomdivision lässt dieses Ergebnis noch umformen zu: $= 1 + \frac{2x-1}{x^2+3}$
$p \circ q(x) = p(q(x)) = (q(x))^2 + 2q(x) + 2 = (x^2 + 3)^2 + 2(x^2 + 3) + 2 = x^4 + 6x^2 + 9 + 2x^2 + 6 + 2 = x^4 + 8x^2 + 17$
$q \circ p(x) = q(p(x)) = (p(x))^2 + 3 = (x^2 + 2x + 2)^2 + 3 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 7$

G4 (Finde die Nullstellen)

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Nullstellen von quadratischen Polynomen finden man z.B. mit der pq-Formel:
$x^2 + 2x - 3 = 0$
Also ist $p = 2$ und $q = -3$.
Somit ergeben sich als Lösungen:
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -1 \pm \sqrt{1 - (-3)} = -1 \pm 2$ Also sind unsere Nullstellen $x_1 = -1-2 = -3$ und $x_2 = -1 + 2 = 1$.

(b) $f(x) = e^x$
Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *(siehe Skizze im Skript)*

G5 (Bestimme den maximalen Definitionsbereich)
$\xi : D \to \mathbb{R} : \xi(x) = \frac{e^x+\sqrt{x}}{x^2-1}$

Die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ nur für x, die größer oder gleich 0 sind. Und der Bruch ist nur wohldefiniert, wenn der Nenner ungleich 0 ist. Der Nenner $(x^2 - 1)$ ist genau dann 0, wenn $x = 1$ oder $x = -1$ ist. Die -1 ist aber bereits aus dem Definitionsbereich herausgenommen, da dort die Wurzel nicht definiert war. Somit bleibt als maximaler Definitionsbereich $D =$ die Menge aller reelen Zahlen, die größer oder gleich 0 sind und die nicht gleich 1 sind: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \textit{ und } x \neq 1\} = [0, +\infty[\setminus\{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

G6 (In welchen Intervallen ist die Sinusfunktion monoton steigend?)
Die Sinusfunktion ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ monoton steigend. (siehe Skizze im Skript). Von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3}{2}\pi$ ist sie monoton fallend. Da die Funktion 2π-periodisch ist, setzt sich dieses Verhalten in beide Richtungen periodisch fort:
Also ist die Sinusfunktion beispielsweise auch in den Intervallen $[-\frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi]$ und $[-\frac{\pi}{2}+4\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi]$ monoton steigend. Allgemeiner gilt also:
Die Sinusfunktion ist auf allen Intervallen der Form $[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi]$ monoton steigend für $k \in \mathbb{Z}$ beliebig.

G7 (Skizziere Funktion im Intervall $[0, 1]$)

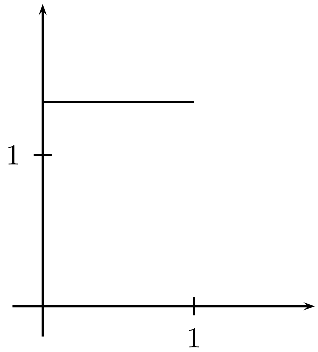
(a) h monoton steigend:

$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} : x \mapsto sin(x)$

(b) g streng monoton fallend:

$f : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R} : x \mapsto sin(x)$

(c) Die einzigen Funktionen, die sowohl monoton steigend als auch monoton fallend sind, sind die Konstanten: $f(x) = C$ (für ein $C \in \mathbb{R}$)



(d) Die Eigenschaften „Streng monoton steigend“ und „streng monoton fallend“ widersprechen sich, da für eine solche Funktion sowohl $f(1) > f(0)$ als auch $f(1) < f(0)$ gelten müsste.

G8 (Symmetrische Polynome)

Sei p ein beliebiges Polynom der Form $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$. Wir wissen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist, falls $(\forall x \in \mathbb{R})p(-x) = -p(x)$ gilt. Diese Bedingung können wir nun für unser Polynom p überprüfen.
$p(-x) = c_0 + c_1(-x) + c_2(-x)^2 + ... + c_n(-x)^n = c_0 + c_1(-1)x + c_2(-1)^2x^2 + ... + c_n(-1)^nx^n$ Das heißt, dass die Koeffizienten c_k alle mit $(-1)^k$ multipliziert werden. Somit bleiben alle Koeffizienten mit geraden Indizes $c_0, c_2, ...$ gleich, die mit ungeraden Indizes $c_1, c_3, ...$ werden zu $-c_1, c_3, ...$ Damit nun also $p(-x) = -p(x)$ für alle x-Werte gelten kann, müssen alle geraden Koeffizienten Null sein. Somit ergibt sich als Resultat: Ein Polynom ist punktsymetrisch zum Ursprung, wenn alle geraden Koeffizienten Null sind, also nur ungerade Exponenten der Variablen $(x, x^3, x^5, ...)$ vorkommen.

Analog zeigt sich, dass p achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wenn alle ungeraden Koeffizienten Null sind, also nur gerade Exponten $(x^0, x^2, x^4, ...)$ vorkommen.

G9 (Welche der abgebildeten Funktionen sind stetig?)

(a) Die Funktion ist stetig.

(b) Die abgebildete Kurve ist überhaupt KEINE Funktion, da ein x-Wert zwei unterschiedliche y-Werte erhlt.

(c) Die Funktion ist stetig.

(d) Auch diese Funktion ist stetig auf ihrem gesammten Definitionsbereich $]0, +\infty[$.

G10 (Welche Aussage ist richtig?)

(a) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})x > y$ In Worten bedeutet diese Aussage: Für jede beliebige reele Zahl y lässt sich eine Zahl x finden, die größer ist. Die Aussage ist somit wahr, da man ja z.B. die Zahl $x + 1$ nehmen könnte.

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})x > y$ In Worten bedeutet diese Aussage: Es gibt eine reele Zahl x, die so gewhlt ist, dass sie größer als jede beliebige reele Zahl y ist. Das ist natürlich falsch, denn eine solche Zahl müsste ja z.B. auch größer als sein als sie selbst: $x > x$, was natürlich nicht möglich ist.