Vorkurs
für Wirtschaftsingenieure
WS 2004/2005

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

Lea Poeplau, Richard Lindner, Rafael Dahmen
08. Oktober 2004

3. Übungsblatt - Lösungen

Gruppenübungen

G1 (Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

Der Funktionsgraph ist streng monoton steigend, doch wird er im letzten Abschnitt "flacher", das heit die Steigung nimmt ab. f' kann als die Neuverschuldung interpretiert werden.

G2 (Physikunterricht)

f' beschreibt die Geschwindigkeit und f'' die Beschleunigung.

G3 (Grenzwert der Sekantensteigung)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5(x_0+h)^2-5x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5x_0^2+10x_0h+5h^2-5x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 10x_0+5h \\ &= 10x_0 \\ &= 50. \end{aligned}$$

G4 (Wo ist f differenzierbar?)

(a) Es gibt bei der Funktion f auf dem Übungsblatt 4 Problemstellen. Der linke Rand. Die zwei "Knicke" vor dem (globalen) Maximum und die Sprungstelle nach dem Maximum. f ist an keiner dieser Stellen differenzierbar und an der letzteren nicht mal stetig.

(b) Ja, Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit. Ist also f in einem Punkt x differenzierbar, so ist sie in diesem Punkt erst recht stetig. Umgekehrt kann f an einer Unstetigkeitsstelle nie Differenzierbar sein.

G5 (Ableiten)

(a) $f'(x) = 15x^4 + 2$

(b) $f'(x) = \frac{3}{5}(x^3+2x)^{-\frac{2}{5}}(3x^2+2)$

(c) $g'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$

(d) $f'(z) = \frac{z(8z^7-\sin z)-2(z^8+\cos z)}{3z^3}$

(e) $x'(t) = \cos(t^2)2t$

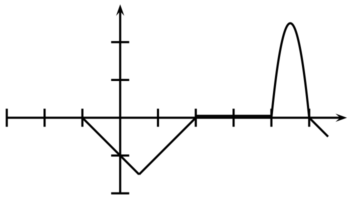
(f) $g'(y) = 0$

(g) $g'(y) = 1$

G6 (Diese Aufgabe erschien uns nicht sinnvoll)

G7 (Skizziere die Ableitung)

Achtung: Diese Zeichnung ist nur sehr ungefähr!



G8 (Nullstelle, Extrema, Wendestellen)

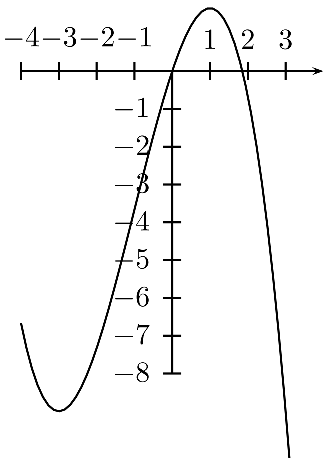
(a) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x = (x-0)(x-1)(x-3)$
Also sind die Nullstellen $0, 1, 3$.

(b) $0 = f'(x) = -3x^2 + 8x - 3 = x^2 - \frac{8}{3}x + 1$
$f''(x_{min}) \neq 0 \neq f''(x_{max})$
Lokale Extrema sind bei $x_{min} = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$ (Minimum) $x_{max} = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$ (Maximum)

(c) $0 = f''(x) = -6x + 8$
$f'''(x_w) \neq 0$
Wendepunkte: $x_w = \frac{4}{3}$

G9 (Lokale und globale Extrema)

Wir untersuchen $f : [-4, 4] \to \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$.



Also finden wir das lokale Minimum bei $x_{min} = -3$ und das globale Minimum bei $x_{Gmin} = 4$. Ein lokales und auch globales Maximum ist bei $x_{Gmax} = 1$.

G10 (Integrieren)

(a) $\int \cos x \; dx = \sin x + c$

(b) $\int x^2 + 3x + 4 \; dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$

(c) $\int 5 \; dx = 5x + c$

(d) $\int x \cdot e^x \; dx = (x-1)e^x + c$

(e) $\int \frac{1}{5}x \; dy = \frac{1}{5}xy + c$

G11 (Integrieren gleich Flächeninhalt?)

Das gegebene Integral ergibt Null, da die oberen und unteren “Flächeninhalte” (die ja noch ein Vorzeichen tragen) sich aufheben.
Um den echten Flächeninhalt zu erhalten berechnen wir $\int_0^{2\pi} |\sin t| \; dt = 4$.