Algebra

[Basis Transformationen] Es sei $\varphi : U \to V$ und $B = (\mathrm{b}_1,...,\mathrm{b}_\mathrm{n})$ Basis von U bzw. $C = (\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_\mathrm{n})$ Basis von V :

$[\varphi]_C^B = (\varphi(b_1)_C,...,\varphi(b_n)_C)$ Die i -te Spalte ist das Bild des i -ten Basisvektors von B zur Basis C

$[\varphi]_C^B\, v_B = [\varphi(v)]_C$ φ angewandt auf v zur Basis B gibt das Bild von v zur Basis C

$B = [id]_B \qquad C^{-1} = [id]^C$ B enthält die Bilder der Kanonischen Basis

$[\varphi]_K = C^{-1}[\varphi]_C^B\, B \qquad C[\varphi]_K\, B^{-1} = [\varphi]_C^B$

Es sei E eine von den Vektoren b_x, b_y mit $x \perp y$ aufgespannt wird und v ein Vektor der orthogonal auf E steht.

Dann sieht die Lineare Abbildung φ zur Basis $B = (v, b_x, b_y)$ wie folgt aus:

Projektion entlang v auf E :	**Reflektion an E orthogonal zu v :**	**Rotation um $\alpha°$ in E orthogonal zu v :**
$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ B muß normiert sein

[Permutationen] $\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\} : \sigma \mapsto 1$ wenn σ gerade ist -1 sonst

$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \omega) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \quad \tau$ transposition $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = -1$

σ n-elementiger Zyklus $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-1}$

[Kreuzprodukt]

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

[Spur und Determinante] Sei $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$

$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ Hat A Dreiecksform gilt: $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

$\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A) \qquad \det(A^t) = \det(A)$

[Gram Schmidt] Seien $b_1,...,b_n$ linear unabhängig. Dann bekommt man orthogonale $u_1,...,u_n$ rekursiv mit

$$u_1 := b_1 \qquad u_2 := b_2 - \frac{\langle u_1, b_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \qquad u_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} - \frac{\langle b_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} \qquad u_i := b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle b_i, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

werden diese $u_1,...,u_n$ noch zu $v_1,...,v_n$ normalisiert haben wir eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$.

[QR Zerlegung] Sei B eine bel. $n \times m$ Matrix. Dann interpretieren wir die Spalten als $b_1,...,b_m$.

Mit dem Gram Schmidt Verfahren erhalten wir $v_1,...,v_m$ die wir als Spalten in die Matrix Q schrieben.

Matrix R mit $r_{ij} := \langle v_i, b_j \rangle$ hat die Form $\begin{pmatrix} \|u_1\| & * & \langle v_1, b_m \rangle \\ & \ddots & * \\ 0 & & \|u_m\| \end{pmatrix}$ dann gilt: $B = QR$!

[Orthogonale Projektion] Sei U ein linearer Teilraum von V und $v_1,...,v_m$ eine orthonormale Basis von U dann

ist $\pi_U : V \to U : v \mapsto \sum_{i=1}^m \langle v_i, v \rangle v_i$ die orthogonale Projektion auf U . $\operatorname{im}(\pi_U) = U \wedge \ker(\pi_U) = U^\perp$

[Diagonalisierung]

(A normal) $\quad A\overline{A^t} = \overline{A^t}A \Leftrightarrow (\exists Q \text{ unitär})\, \overline{Q^t}AQ = A'$ $\quad \mathbb{C}$ -diagonal

(A hermitisch) $\quad A = \overline{A^t} \Leftrightarrow (\exists Q \text{ unitär})\, \overline{Q^t}AQ = A'$ $\quad \mathbb{R}$ -diagonal

(A symmetrisch) $\quad A = A^t \Leftrightarrow (\exists Q \text{ orthonormal})\, Q^t AQ = A'$ $\quad \mathbb{R}$ -diagonal