Algebra

[Algebraische Strukturen] Es sei M eine Menge und $*: M \times M \to M : (a,b) \mapsto a*b$ eine Operation auf M.

(Abgeschlossenheit)	$a,b \in M \Rightarrow a*b \in M$	Gruppoid
(Assoziativität)	$(\forall a,b,c \in M)(a*b)*c = a*(b*c)$	Halbgruppe
(Neutrales Element)	$(\exists e \in S)(\forall a \in M)\, e*a = a = a*e$	Monoid
(Invertierbare Elemente)	$(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)\, a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$	Gruppe
(Kommutativität)	$(\forall a,b \in M)\, a*b = b*a$	abelsche Gruppe

Ist $(M,+,0)$ *abelsche Gruppe* und $(M,\cdot)$ *Halbgruppe* so gibt uns

(Distributivität)	$(\forall a,b,c \in M)\, a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$	
	$(\forall a,b,c \in M)\, (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$	Ring

Ist $(M,\cdot,1)$ ein *Monoid* so nennt man $M^{\times} := \left\{a \in M : (\exists a^{-1} \in M)\, a\cdot a^{-1} = e = a^{-1}\cdot a\right\}$ die Einheitengruppe.
Ist $(M,+,\cdot,0)$ ein *Ring* dann nennt man $a,b \in M \setminus \{0\}$ für die gilt $a\cdot b = 0$ Nullteiler.
Ist $(M,\cdot)$ eine *kommutative Halbgruppe*, dann ist M ein kommutativer Ring.
Ist $(M,\cdot,1)$ ein *kommutativer Monoid* und $M^{\times} = M \setminus \{0\}$ und $1 \neq 0$ dann ist $\mathbb{M}$ ein Körper.

[Homomorphismen] Es seien $(G_1,\cdot,e_1)$ und $(G_2,\circ,e_2)$ *Gruppen* und $f: G_1 \to G_2$ dann ist

(Homomorphie)	$(\forall a,b \in G_1)\, f(a\cdot b) = f(a)\circ f(b)$	Homomorphismus
Es folgen daraus:	$f(e_1) = e_2 \quad\wedge\quad (\forall a \in G_1)\, f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$	Gruppenhomomorphismus

[Vektorraum] Es sei $\mathbb{K}$ ein *Körper*. V ist ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum* wenn

(Neutrales Element)	$0 \in V$	
(Abgeschlossenheit)	$v,w \in V \Rightarrow v+w \in V \;\wedge\; \lambda \in \mathbb{K}, v \in V \Rightarrow \lambda v \in V$	Untervektorraum

Ist $(V,+,0)$ eine *abelsche Gruppe* dann gilt (V1) bis (V4) und
Für alle $u,v,w \in V$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ muss gelten…
(V5) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ (V6) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$ (V7) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ (V8) $1v = v$

Daraus folgt dann…
(V9) $u+w = v+w \Rightarrow u = v$ (V10) $0v = 0 \wedge \lambda 0 = 0$ (V11) $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$
(Dimension) $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

[Lineare Abbildung] Es seien V,W $\mathbb{K}$-*Vektorräume* und $\varphi: V \to W$ und für alle $u,v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
(L1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ (L2) $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$ Lineare Abbildung
Es seien $(v_1,...,v_n)$ eine Basis von V dann weiß man über $\varphi: V \to W$

(Kern)	$\operatorname{im}\varphi := \varphi(V) = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$
(Bild)	$\ker\varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \subseteq V$
(Rang)	$\operatorname{rank}\varphi := \dim(\operatorname{im}\varphi) = \dim(\varphi(V))$
(Dimensionssatz)	$\dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$
(Injektiv)	$\ker\varphi = \{0\} \vee \operatorname{rank}\varphi = \dim V \vee \varphi(v_1),...,\varphi(v_n)\,\text{l.u.}$
(Surjektiv)	$\operatorname{im}\varphi = W \vee \operatorname{rank}\varphi = \dim W$