Vorkurs

für Wirtschaftsingenieure

9. Oktober 2004

Lea Poeplau, Richard Lindner, Rafael Dahmen

Inhaltsverzeichnis

1

Operationales und Begriffliches Denken

Schulmathematik besteht im wesentlichen aus der Einführung immer schwieriger zu handhabender Operatoren, beginnend bei Plus/Minus über Multiplikation/Division bis hin zum Differenzieren/Integrieren. Ziel der Schule ist es, Rechenfertigkeiten zu vermitteln. Wir nennen dies *operationales Denken*. Die Mathematik, die Ihr an der Hochschule kennenlernen werdet, hat zum Inhalt, Aspekte der Umwelt mit Hilfe mathematischer Begriffe zu beschreiben, so z.B. Stückpreise mit Hilfe von Vektoren (2.1) und linearen Gleichungssystemen (2.5), Flächeninhalte mit Determinanten (2.7) und Integralen (6), Beziehungen von meßbaren Größen mit Hilfe von Funktionen (4) usw. Der Anspruch der Mathematik, exakt zu sein, kann nur erfüllt werden, wenn die Bedeutungen der verwendeten Begriffe (Vektor, Determinante, Funktion,...) exakt festgelegt werden. Dies geschieht durch *Definitionen*. Die Beziehungen dieser Begriffe untereinander werden durch *Sätze* ausgedrückt. Viele Sinnfragen bzgl. dieser Sätze („Wer will das wissen?“) sind in Wirklichkeit operationale Fragen („Was kann ich damit ausrechnen?“). Nicht jeder Satz enthält aber konkrete Rechenvorschriften (Operationen), manche sichern lediglich den korrekten Gebrauch der Begriffe. Diese Sätze bilden das Fundament der Mathematik, auf dem die mathematische Arbeit - und dazu gehört dann auch das konkrete Ausrechnen mit Operatoren - aufbaut.
Übliches mathematisches Arbeiten beginnt mit einer Problemstellung, die dann auf die Aspekte reduziert wird, die in irgendeiner Weise meßbar sind. Zwischen diesen Meßgrößen werden Beziehungen aufgestellt (durch Gleichungen, Funktionen u.ä.). In diesem abstrakten Modell werden nun Schlüsse gezogen und die Ergebnisse im ursprünglichen Problem wieder interpretiert. Vorteil dieser Arbeitsweise ist, daß Probleme vergleichbar werden: Wir gewinnen allgemeingültige Methoden und Einsichten, die wir für alle „strukturell gleichen“ Fragestellungen verwenden können.

In der Anwendung ist es nun entscheidend, die Struktur eines Sachverhalts zu erkennen und ggf. so zu modifizieren, daß eine ausgearbeitete mathematische Theorie - dies ist eine Menge von Begriffen und Sätzen, die das Verhältnis von den Begriffen der Theorie angeben - angewandt werden kann. Dazu ist es natürlich notwendig, die entsprechenden Theorien zu kennen, d.h. die Begriffe exakt zu definieren und die Sätze zu beweisen (letzteres machen wir hier allerdings nicht!). Dies wollen wir *begriffliches Denken* nennen.

2

Vektoren und Matrizen

2.0.1 Aufgabe:
Die Firma A kauft im Januar '96 für ihre Büroausstattung 20 Kugelschreiber, 100 Bleistifte, 5 Radierer und 200 Pakete Papier ein. Im Februar erhält die Firma einen neuen Auftrag und kauft doppelt soviel Büromaterial wie im Januar. Im März kauft die Firma nur $\frac{1}{5}$ der im Januar benötigten Produkte. Die Rechnung für das Büromaterial wird über Januar, Februar und März ausgestellt. Wieviel muß die Firma A bezahlen, wenn ein Kugelschreiber 20 Pfennige, ein Bleistift 10 Pfennige, ein Radierer 15 Pfennige und ein Paket Papier 3 DM kostet?

Entscheidend in dieser Aufgabe sind natürlich die Zahlenwerte. Manche von diesen wollen wir addieren (beispielsweise Anzahl der Radierer im Januar und Anzahl der Radierer im Februar), andere sicher nicht (so ist die Summe aus 20 Kugelschreibern und 100 Radierern hier wenig sinnvoll). Wir haben ein gleichzeitiges Produkt für mehrere Zahlenwerte (die einzelnen Einkäufe im Februar sind das doppelte derer im Januar) und eine Summe über ein Produkt (Gesamtausgaben im Januar sind Anzahl der Radierer mal deren Preis plus Anzahl der Bleistifte mal deren Preis plus ...). Eine mathematische Theorie, die solche Verknüpfungen betrachtet, ist die der linearen Algebra; wir wollen nun einige ihrer elementaren Begriffe kennenlernen.

2.0.2 Definition: Vektor, Addition, Multiplikation, Skalarprodukt

a) Ein (reeller) <u>Vektor</u> ist ein Zahlentupel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *mit* $x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n$ *und* $n \in \mathbf{N}$.

b) <u>Addition</u> und <u>Subtraktion</u>: Sind $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *zwei Vektoren, so heißt* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ *die <u>Summe</u> und* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} := (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$ *die <u>Differenz</u> von* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$.

c) <u>Skalarmultiplikation</u>: Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ein Vektor und* $\lambda \in \mathbf{R}$*, dann setzen wir:*
$\lambda \cdot \mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

d) Die Menge aller Vektoren mit n reellen Einträgen zusammen mit den Operationen Vektoraddition und Skalarmultiplikation nennen wir $\mathbf{R}^n$.
e) Sind $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ zwei Vektoren, dann heißt $\mathbf{x}*\mathbf{y} := x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ das innere Produkt oder Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. (Anmerkung: Das Ergebnis ist eine reelle Zahl.)

Nun stellt sich das Problem wie folgt dar:

a) Material der Firma im Januar: $(20; 100; 5; 200)$.
b) Material der Firma im Februar: $2 \cdot (20; 100; 5; 200) = (40; 200; 10; 400)$.
c) Material der Firma im März: $\frac{1}{5} \cdot (20; 100; 5; 200) = (4; 20; 1; 40)$.
d) In den drei Monaten: $(20; 100; 5; 200) + (40; 200; 10; 400) + (4; 20; 1; 40) = (64; 320; 16; 640)$.
e) Preis des Materials (in DM):
$(0,2; 0,1; 0,15; 3) * (64; 320; 16; 640) = 12,80 + 32 + 2,40 + 1920 = 1967,20$

Interpretation des Ergebnisses: Die Firma muß 1967,20 DM für ihr Büromaterial bezahlen.

Probleme solcher oder ähnlicher Struktur können mit den Methoden der linearen Algebra bearbeitet werden.

2.0.3 Aufgabe:
Nehmen wir an, daß die Firma nach dem ersten Quartal des Jahres berechnen will, wieviel sie pro Monat für Büromaterial ausgegeben hat.

Hier können wir folgende Begriffe der linearen Algebra verwenden:

2.0.4 Definition: Matrix, Matrix-Vektor-Produkt

a) Ein $m \times n$-Zahlenfeld

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$-Matrix.
b) Sei A eine $m \times n$-Matrix und $\mathbf{x}$ ein Vektor mit n Einträgen. Dann wird das Produkt der Matrix A mit dem Vektor $\mathbf{x}$ definiert als der Vektor

$$\mathbf{y} = A \star \mathbf{x} := (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\ \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\ \ \ldots\ \ ,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)$$

(Matrix-Vektor-Produkt) Man berechnet also für jede Zeile das Skalarprodukt mit dem Vektor.

Fortsetzung der Aufgabe:
Nun haben wir also die Möglichkeit, anstatt die Angaben für jeden einzelnen Monat in einem Vektor festzuhalten, sie zusammen in einer Matrix zu notieren. (Ob wir sie nun in die Spalten oder Zeilen schreiben, hängt von der jeweiligen Problemstellung ab.)

$$A \star \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 & 100 & 5 & 200 \\ 40 & 200 & 10 & 400 \\ 4 & 20 & 1 & 40 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,15 \\ 3 \end{pmatrix} = \dots$$

Übung: Interpretiere das Ergebnis.

2.0.5 Aufgabe:
Als die Firma die Rechnungen für die Kugelschreiber, die Bleistifte und die Radierer für die Monate des zweiten Quartals erhält, muß sie feststellen, daß die Preise erhöht wurden, denn sie muß für April 15,50 DM, für Mai 24,50 DM und für Juni 18,50 DM bezahlen. Wieviel kosten die jeweiligen Materialien, wenn sie im April $\begin{pmatrix} 30 \\ 100 \\ 5 \end{pmatrix}$, im Mai $\begin{pmatrix} 30 \\ 150 \\ 10 \end{pmatrix}$ und im Juni $\begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 15 \end{pmatrix}$ gekauft hat?

Wir können hier drei Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{(für April)}: & 30x + 100y + 5z = 15,50 \\ \text{(für Mai)}: & 30x + 150y + 10z = 24,50 \\ \text{(für Juni)}: & 10x + 100y + 15z = 18,50 \end{array}$$

mit x Preis der Kugelschreiber, y Preis der Bleistifte und z Preis der Radierer.

Wie können wir eine solche Aufgabe — Gleichungen mit mehreren Unbekannten — angehen? Am Beispiel von Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}$$

überlegen wir uns allgemeine Ansätze:

a) Einsetzmethode:
Wir lösen eine Gleichung nach x_1 auf und setzen das Ergebnis in die andere Gleichung ein. Die resultierende Gleichung enthält nur noch eine Unbekannte, die wir mit bekannten Umformungen bestimmen.
Für umfangreichere Gleichungssysteme empfiehlt sich die

b) Additionsmethode:
Vorüberlegung: Multipliziere ich beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl, bleibt die Gleichheit erhalten, ebenso, wenn ich auf beiden Seiten denselben Wert addiere.

Die Idee ist nun, die erste Gleichung mit einer geeigneten Zahl zu multiplizieren, so daß bei Summation der Gleichungen eine Unbekannte verschwindet, die verbleibende läßt sich dann berechnen.

Zur Verdeutlichung ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 15 \qquad &(I) \\ 6x_1 + 8x_2 &= 24 \qquad &(II) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (I) mit -2, so erhalten wir $-6x_1 - 12x_2 = -30$.
Diese Gleichung addieren wir nun zu (II):

$$\begin{array}{rcl} -6x_1 - 12x_2 &=& -30 \\ +(\quad 6x_1 + \ 8x_2 &=& \ 24\ ) \\ \hline 0 \ - \ 4x_2 &=& -6 \end{array}$$

Somit ist $x_2 = \frac{3}{2}$. Durch Einsetzen von x_2 in (I) erhalten wir die Lösung für x_1.

Übung: Beende die Aufgabe.

Die Objekte der linearen Algebra lassen eine oft sehr nützliche geometrische Interpretation zu. Dabei betrachten wir 2-stellige Vektoren als Punkte der Ebene, 3-stellige als Punkte im Raum etc. Dabei ist einfach der erste Eintrag der Wert in der ersten Koordinate, der zweite der in der zweiten usw. Natürlich werden dann geometrische Größen wie Länge (Betrag) eines Vektors und Volumen eines von Vektoren aufgespannten Parallelflachs interessant.

2.0.6 Definition: Betrag eines Vektors
Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ein Vektor.* $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ *heißt der* *Betrag* *von* $\mathbf{x}$. *Manchmal spricht man auch von der Länge eines Vektors.*

2.0.7 Definition: Determinante

- *Die Determinante einer* 2×2*- Matrix ist gegeben durch:*

$$detA := |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

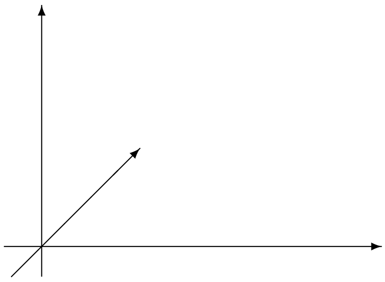
- *Die Determinante einer* 3×3*- Matrix ist gegeben duch:*

$$\begin{aligned} detA := |A| := &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = &\ a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ = &\ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Zur Bedeutung der Determinante:

aufgespanntes Parallelogramm

aufgespannter 3D-Parallelflach



Notieren wir die Vektoren als Spalten einer Matrix, so kann man das (nicht notwendig dreidimensionale) Volumen mittels des Betrages der Determinante berechnen. Im Zweidimensionalen liefert also der Betrag der Determinante den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

3

Komplexe Zahlen

Betrachten wir die Geschichte der Mathematik, so fällt auf, daß die vorhandenen Zahlbereiche immer dann erweitert wurden, wenn Probleme auftauchten, die sich in dem vorhandenen nicht lösen ließen (s. Tabelle). Die Zahlbereiche wurden so erweitert, daß sich einerseits die neuen Problemstellungen beantworten ließen, andererseits die vorhandenen Rechengesetze erhalten blieben.

Zahlbereiche:

$\mathbf{N} = 1, 2, 3, \ldots$	$5 - 13 =?$
$\mathbf{Z} = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$	$13/5 =?$
$\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}\}$	$\sqrt{2} =?$
$\mathbf{R}$	$\sqrt{-5} =?$

Anmerkung: Manche betrachten die 0 als zu $\mathbf{N}$ gehörig.

Ungelöst bleibt also das Problem, wie ich $\mathbf{R}$ „sinnvoll" erweitern kann. „Sinnvoll" heißt in diesem Zusammenhang, daß wir in der Erweiterung der rellen Zahlen Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können und daß alle Rechengesetze erhalten bleiben. Wenn die Rechengesetze erhalten bleiben, können wir die Frage nach der Wurzel aus einer beliebigen negativen Zahl auf die Frage nach $\sqrt{-1}$ zurückführen, denn z.B. ist $\sqrt{-5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5}$. Wir werden anschließend sehen, daß folgende Definition das Gewünschte leistet:

3.0.8 Definition: Komplexe Zahl, Konjugation

- *Unter einer komplexen Zahl* $z \in \mathbf{C}$ *versteht man eine Zahl der Form*

$$z = a + ib, \ \ mit\ a, b \in \mathbf{R}\ wobei\ i^2 = -1.$$

- *a nennt man den Realteil $Re(z)$ und b den Imaginärteil $Im(z)$ der komplexen Zahl z.*
- *Zu einer komplexen Zahl $z = a+ib$ heißt $\overline{z} := a-ib$ die konjugiert komplexe Zahl.*

Bemerkung: Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reell!

Nun müssen wir überlegen, ob unsere Rechengesetze wirklich erhalten bleiben und ob wir bei der Verknüpfung immer in **C** bleiben. Das bedeutet, daß wir nachprüfen müssen, ob **C** bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (natürlich ohne die Null) abgeschlossen ist. Für das Wurzelziehen müßten wir dies eigentlich auch überprüfen, doch das führt an dieser Stelle zu weit.

3.0.9 Definition: Rechengesetze für komplexe Zahlen
Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $c = a + ib$ und $z = x + iy$. Dann gilt:

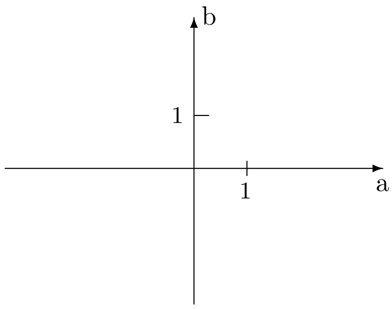
- *Addition:* $c + z = (a + ib) + (x + iy) := (a + x) + i(b + y)$
- *Subtraktion: Übung!*
- *Multiplikation:* $c \cdot z := (a + ib) \cdot (x + iy) = ax + aiy + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$
- *Division:* $\frac{c}{z} = \frac{a + ib}{x + iy} = \frac{a + ib}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{(a + ib)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{c\overline{z}}{z\overline{z}}$

3.0.10 Satz: Rechenregeln für die Konjugation *Sind y und z komplexe Zahlen, so gilt*

- $\overline{y \pm z} = \overline{y} \pm \overline{z}$
- $\overline{y \cdot z} = \overline{y} \cdot \overline{z}$
- *gilt zusätzlich $z \neq 0$, so ist $\overline{y/z} = \overline{y}/\overline{z}$*

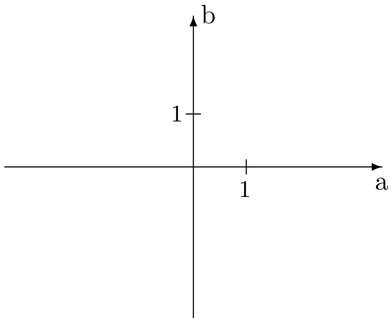
3.0.11 Anschauung:

Eine komplexe Zahl läßt sich als Punkt mit den Koordinaten (a, b) der sogenannten Gaußschen Zahlenebene auffassen:

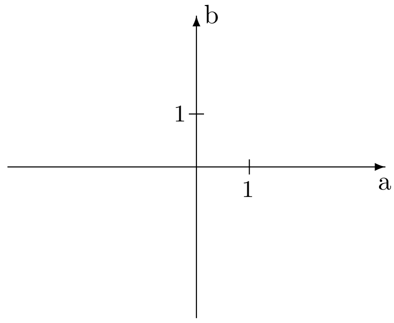


Nun können wir uns auch die Addition zweier komplexer Zahlen und die Multiplikation einer komplexen mit einer reellen Zahl veranschaulichen:

Addition:



Multiplikation mit reeller Zahl:



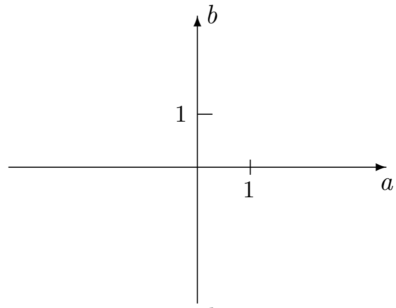
Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen läßt sich so zunächst nur schwer verstehen, eine andere Darstellung liefert jedoch eine hilfreiche Anschauung:

3.0.12 Definition: Betrag, Argument, Polardarstellung

Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + ib$

- *Der Betrag r einer komplexen Zahl ist definiert durch*

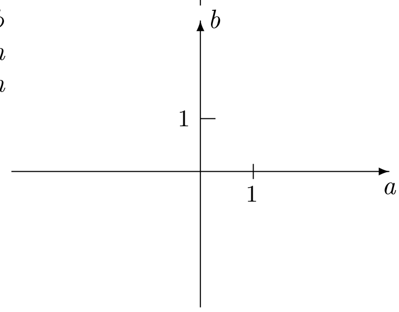
$$r := |z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$



- *Das Argument von z $Arg(z)$ ist der gerichtete Winkel ϕ zwischen der positiven rellen Achse und dem Strahl vom Ursprung nach z. Da wir bei Addition von 2π denselben Strahl erhalten, wollen wir jeden Winkel der Form*

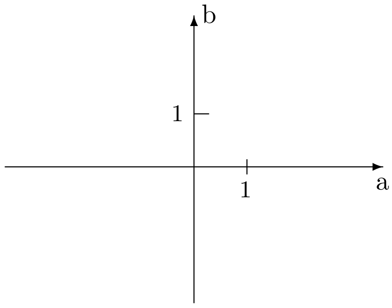
$$\phi + 2\pi \cdot k \quad (k \text{ eine feste ganze Zahl })$$

als Argument von z bezeichnen.



- *Als Polardarstellung bezeichnen wir nun die Schreibweise*

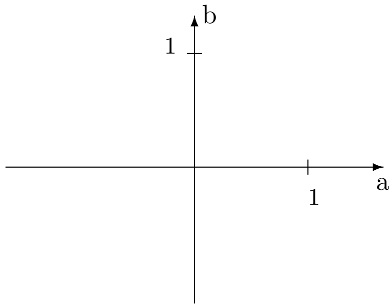
$$z = (r, \phi) \quad \text{mit } r = |z|, \phi = Arg(z)$$



Mit Hilfe der Polardarstellung können wir uns leicht veranschaulichen wie zwei komplexe Zahlen multipliziert werden: Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.

3.0.13 Übergang von einer Darstellung zur anderen:

- Von kartesischer zu Polardarstellung:
  r ist leicht zu berechnen als Betrag von $a + ib$.
  Für ϕ ist ein wenig Überlegung nötig. Alle Zahlen auf dem Kreis mit dem Abstand 1 zum Ursprung (auch Einheitskreis genannt) können wir mit den trigonometrischen Funktionen darstellen (s. Bild). Teilen wir eine Zahl durch ihren Betrag, liegt das Ergebnis auf dem Einheitskreis, somit lassen sich alle Winkel bestimmen. Wir erhalten:



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & , \text{ falls } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ falls } a = 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}$$

- von Polar- zu kartesischer Darstellung: Übung!
  Sei $z = (r, \phi)$ eine komplexe Zahl in Polardarstellung. Dann gilt $z = a + ib$ mit:

$$a =$$

$$b =$$

4

Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit „Funktionen“, einem zentralen Begriff der mathematischen Sprache. Die Idee ist, jedem Objekt aus einer Ansammlung von „Dingen“ genau ein bestimmtes anderes „Ding“ - beispielsweise einen Wert zuzuordnen, eine recht geläufige Handlung. Notiere ich z. B. für eine Gruppe von Menschen das jeweilige Alter oder frage ich nach den Hauptstädten einer Anzahl von Ländern, so sind dies in mathematischer Sicht Funktionen. Präzisieren wollen wir den Sachverhalt in folgender Definition:

4.0.14 Definition: Funktion
Es seien X und Y Mengen. Eine Zuordnung $f : X \to Y$ nennen wir Funktion, wenn gilt:

a) $(\forall x \in X)\,(\exists y \in Y) \quad f(x) = y$
b) $(\forall y_1, y_2 \in Y) : \quad f(x) = y_1$ *und* $f(x) = y_2$ *für ein* $x \in X \Rightarrow\ y_1 = y_2$

Die Menge X nennen wir Definitionsbereich, ihre Elemente heißen auch Argumente von f. Mit $f(X)$ bezeichnen wir die Wertemenge von f, das ist die Menge aller Werte, die f ‘auf X annimmt’.

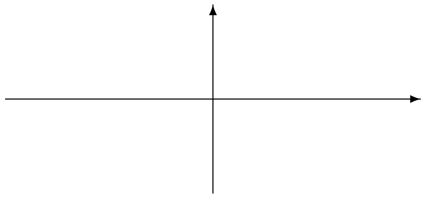
Erläuterung:
Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heißen Quantoren. Sie geben an, auf welche Anzahl von Elementen einer Menge sich etwas bezieht. $\forall$ heißt dann „für alle“ (zum besseren Verständnis lese oben „egal welches“) $\exists$ bedeutet „(es) existiert ein“ und „$\Rightarrow$“ steht für: „Wenn die linke Seite gilt, dann auch die rechte“ oder kurz „daraus folgt“. Ferner lesen wir solche Ausdücke stets von links nach rechts. Etwas weniger formal liest sich die Definition also wie folgt:

a) Egal welches x ich aus X wähle, ich finde ein y in Y so daß $f(x) = y$ gilt (das heißt es gilt $f(X) \subset Y$).
b) Nehme ich zwei Elemente y_1 und y_2 aus Y und finde ich ein Element x in X, für das sowohl $f(x) = y_1$ als auch $f(x) = y_2$ gilt, so muß y_1 gleich y_2 sein.

Anmerkung:
Können wir die Elemente von X und Y sinnvoll in eine Reihenfolge bringen (für reelle Zahlen beispielsweise nach ihrer Größe), so erweist sich oft die Darstellung im Koordinatensystem als günstig. Dabei entspricht üblicherweise X der horizontalen und Y der vertikalen Achse. Trage nun einfach die Funktionswerte zu Punkten auf der X-Achse als Höhen entlang der Y-Achse auf (s. u.).

4.0.15 Beispiele:

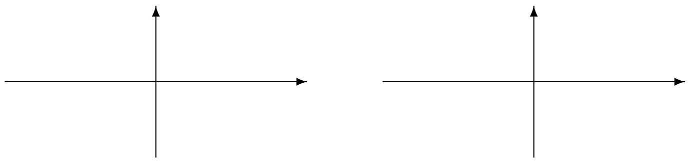
a) X sei eine Menge von Kraftfahrzeugen, Y die Menge aller möglichen Kennzeichen, f eine Vorschrift, die jedem Kfz sein Kennzeichen zuordnet.
b) X sei eine Ansammlung von Personen, Y die Menge der auftretenden Körpergrößen, f die Vorschrift, die jeder Person die Größe zuordnet.
c)



d)

Funktionen

e) X sei eine Menge von Häusern, Y die Menge der darin wohnenden Personen, f ordne jedem Haus seine Bewohner zu.
f)



g)

Keine Funktionen

Übung:

- Betrachte die Vorschrift, die jedem/jeder Bundesbürger/in die Nummer seines/ihres Personalausweises zuordnet. Unter welchen Voraussetzungen genau ist dies eine Funktion?
- Begründe formal, d. h. mit Hilfe der Definition, warum die einzelnen Beispiele Funktionen sind bzw. nicht sind.

Anmerkungen:

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

- Es ist nicht verlangt, daß alle Werte aus Y erreicht werden (Beispiel a: es muß nicht jedes Kennzeichen bereits an ein Kfz vergeben sein).
- Es können durchaus mehrere Elemente aus X durch f dasselbe Element in Y zugewiesen bekommen (Beispiel b: Es können sicherlich Personen gleich groß sein).

Solche Eigenschaften sind zuweilen von Interesse, wir wollen ihnen deshalb Bezeichnungen geben:

4.0.16 Definition: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität
Es seien $f : X \to Y$ eine Funktion, $x_1, x_2 \in X$. f heißt

- *injektiv, wenn gilt $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,*
- *surjektiv, wenn gilt $(\forall y \in Y)\,(\exists x \in X)\; f(x) = y$,*
- *bijektiv, wenn f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.*

Übung:
Verdeutliche Dir die Begriffe „Funktion", „injektiv", „surjektiv" und „bijektiv" anhand der Darstellung für $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ im Koordinatensystem: Woran wird deutlich, ob f Funktion ist? Woran erkennt man Injektivität, Surjektivität und Bijektivität?

Wir haben Funktionen eingeführt; nun wollen wir näher vereinbaren, wie wir mit ihnen umzugehen haben:

4.0.17 Definition: Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Funktionen
Es seien $f, g : X \to Y$ Funktionen und Y eine Menge, in der Addition, Subtraktion, Produkt und Quotient definiert sind.

- *Die Funktion $(f \pm g) : X \to Y$ gegeben durch $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ heißt Summe (bzw. Differenz) der Funktionen f und g*
- *Die Funktion $(f \cdot g) : X \to Y$ gegeben durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ heißt Produkt der Funktionen f und g*
- *Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so heißt die Funktion $\frac{f}{g} : X \to Y$ gegeben durch $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ der Quotient der Funktionen f und g*

Anmerkung:
Elemente $x \in X$, für die $g(x) = 0$ gilt, heißen Nullstellen der Funktion g. Man betrachtet auch oft den Quotienten von f und g zumindest auf den Elementen $x \in X$, für die $g(x) \neq 0$ gilt. Seien diese Elemente bezeichnet mit X_0, so ist das also die Funktion $\frac{f}{g} : X_0 \to Y$.

4.0.18 Definition: Verkettung von Funktionen
Es seien $f : W \to X$ und $g : X \to Y$ Funktionen. Dann heißt die Funktion $g \circ f : W \to Y$ gegeben durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$ die Verkettung (oder Hintereinanderausführung) von g und f.

Beispiel a)

Beispiel b)

Sei $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$
Dann ist $(g \circ f)(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$
und $(f \circ g)(x) = \sin x^2 = \sin(x^2)$

Nun einige Beispiele von sehr oft auftretenden Funktionen:

4.0.19 Definition: Polynom, rationale Funktion

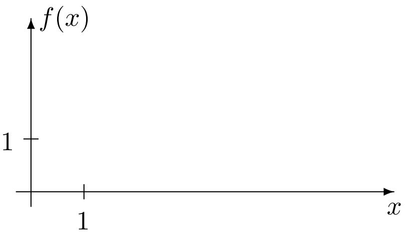
- *Eine Funktion* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *mit* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 \quad (a_i \in \mathbf{R}$*für alle*$i \in \{1, \ldots, n\}$ *heißt* *Polynom* *(oder auch* *ganzrationale Funktion* *)*
- *Seien* p *und* q *Polynome und* $\mathbf{D} := \mathbf{R} \backslash \{x \in \mathbf{R} | q(x) \neq 0\}$ *(die Menge der reellen Zahlen, für die* q *nicht Null wird). Dann heißt* $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ *gegeben durch* $f(x) = p(x)/q(x)$ *rationale Funktion.*

4.0.20 Definition: Wurzelfunktion

Eine Funktion $f : \mathbf{R}_\mathbf{0}^+ \to \mathbf{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$ *heißt* *Wurzelfunktion.*

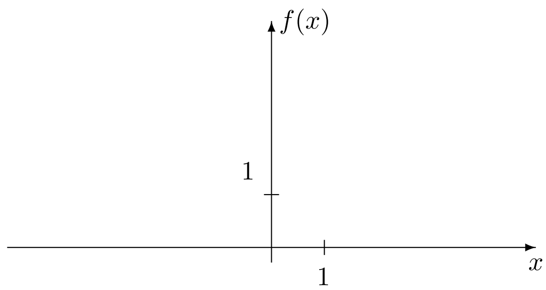
Beispiel:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

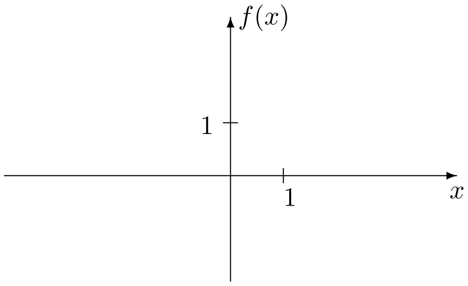


4.0.21 Definition: Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *mit* $f(x) = e^x$, $e = 2,718281\ldots$ *, heißt* *(natürliche) Exponentialfunktion.*



Die Funktion $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \ln x$ heißt (natürliche) Logarithmusfunktion.

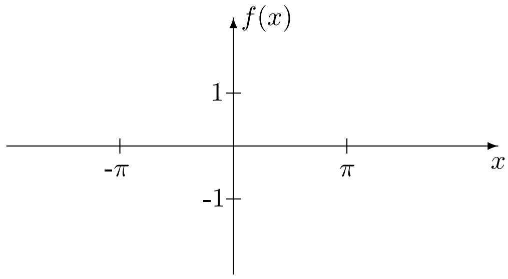


Bemerkung:
Natürliche Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus sind eng miteinander verknüpft, es gilt nämlich $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und $e^{\ln x} = x$ für alle $x \in \mathbf{R}^+$. Der (natürliche) Logarithmus wird deshalb die Umkehrfunktion der (natürlichen) Exponentialfunktion genannt (und umgekehrt).

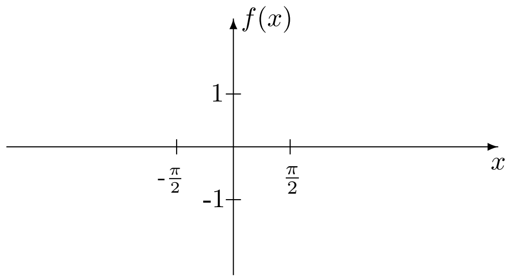
4.0.22 Definition: Trigonometrische Funktionen

Die folgenden vier Funktionen fallen unter den Begriff der trigonometrische Funktionen.

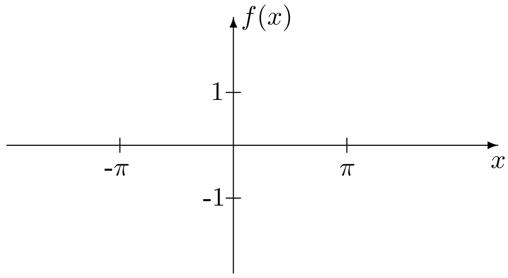
a) Sinus-Funktion
$f(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$



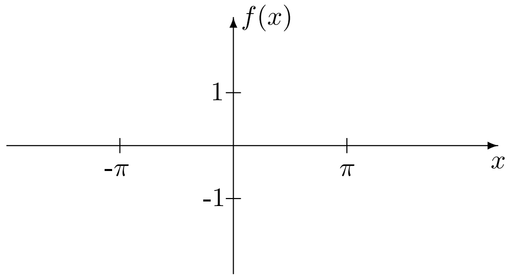
b) Cosinus-Funktion
$f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$



c) Tangens-Funktion
$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$x \in \mathbf{R}\setminus\{x \in \mathbf{R} | \cos x = 0\}$



d) Cotangens-Funktion
$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$x \in \mathbf{R}\setminus\{x \in \mathbf{R} | \sin x = 0\}$



Anmerkung: Bei diesen Funktionen fallen bestimmte Symmetrieeigenschaften des Graphen auf, die wir ebenfalls benennen wollen.

4.0.23 Definition:

Eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ heißt achsensymmetrisch, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt. Falls $-f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt, so heißt sie punktsymmetrisch.

Beispiel: - Sinus-, Tangens-, und Cotangens-Funktion sind punktsymmetrisch.
- Die Cosinus-Funktion ist achsensymmetrisch.

Um den qualitativen Verlauf einer Funktion anzugeben, benutzen wir noch weitere Begriffe; zunächst wollen wir aber bestimmte Teilmengen der reellen Zahlen benennen:

4.0.24 Definition: reelle Intervalle

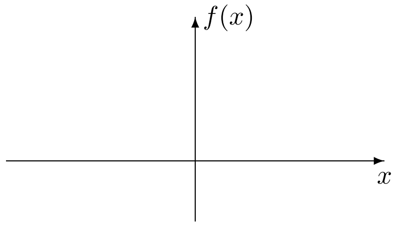
- *Ein Intervall in $\mathbf{R}$ (oder reelles Intervall) ist eine Teilmenge I von $\mathbf{R}$ für die gilt:*
$$a, b \in I, a \leq c \leq b \Longrightarrow c \in I \quad (\forall a, b, c \in \mathbf{R})$$
- *Gibt es zwei reelle Zahlen a und b mit $I = \{r \in \mathbf{R} \,|\, a < r < b\}$ (Schreibweise: $I =]a, b[$), so heißt I offenes reelles Intervall.*
- *Gibt es zwei reelle Zahlen a und b mit $I = \{r \in \mathbf{R} \,|\, a \leq r \leq b\}$ (Schreibweise: $I = [a, b]$), so heißt I abgeschlossenes reelles Intervall.*
- *Gilt $I = \{r \in \mathbf{R} \,|\, a < r \leq b\}$ oder $I = \{r \in \mathbf{R} \,|\, a \leq r < b\}$ für zwei reelle Zahlen a und b (Schreibweise: $I =]a, b]$ bzw. $I = [a, b[$) so heißt I halboffenes reelles Intervall.*

4.0.25 Definition: Monotonie

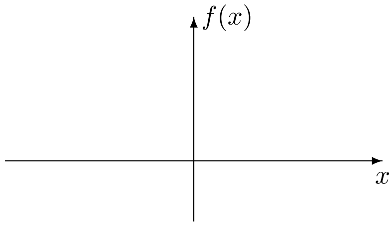
Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion und I ein reelles Intervall.

- *Gilt für alle a, b aus I $\quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (bzw. $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$), so heißt f auf I monoton steigend (bzw. fallend).*
- *Gilt sogar für alle a, b aus I $\quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ (bzw. $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$), so heißt f auf I streng monoton steigend (bzw. fallend).*
- *f heißt auf I monoton, wenn f auf I monoton wachsend oder fallend ist.*
- *f heißt auf I streng monoton, wenn f auf I streng monoton wachsend oder fallend ist.*

f monoton fallend:



f streng monoton steigend:

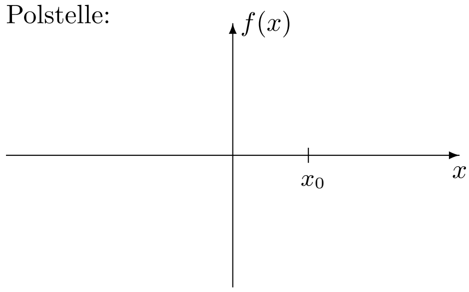


4.0.26 Definition: Polstellen, Minima und Maxima

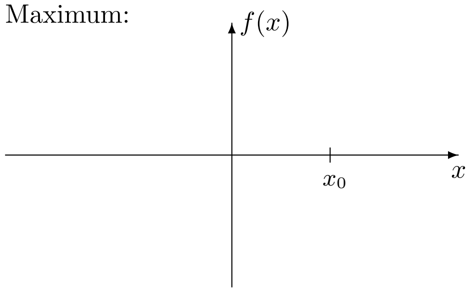
Sei $f : \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Wir sagen

a) f hat eine Polstelle an der Stelle x_0, wenn der Betrag von f in jedem offenen Intervall I um x_0 (d. h. $x_0 \in I$) beliebig große Werte annimmt.
b) f hat ein (lokales) Maximum ((lokales) Minimum) an der Stelle $x_0 \in \mathbf{D}$, wenn in einem genügend kleinen offenen Intervall I um x_0 gilt $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ für alle $x \in I$. Hat f an der Stelle x_0 ein Maximum oder ein Minimum, so sagen wir auch, f hat dort ein (lokales) Extremum.
c) f hat in $x_0 \in \mathbf{D}$ ein globales Maximum (globales Minimum), wenn $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt.

Polstelle:



Maximum:



Ferner ist oft das Verhalten einer Funktion für „x gegen unendlich“ (oder minus unendlich) von Interesse. Damit ist dann das Verhalten der Funktion für sehr große (oder betragsmäßig sehr große negative) Argumentwerte gemeint. Beispielsweise geht die oben angegebene Exponentialfunktion gegen unendlich, wenn x gegen unendlich läuft und gegen 0, wenn x gegen minus unendlich läuft.

Der Begriff der Stetigkeit

Mathematische Theorien werden üblicherweise anhand bestimmter Fragestellungen entwickelt. Hoher Abstraktionsgrad und der Wunsch nach allgemein anwendbaren Ergebnissen haben in diesem Jahrhundert jedoch zu einer weitgehenden Formalisierung der mathematischen Sprache geführt und allzu häufig fällt es sehr schwer, die Vorstellung hinter den formalen Sätzen und Definitionen zu erfassen. Für ein tieferes Verständnis und wesentlich leichteren Umgang mit den dargebrachten Sachverhalten ist eine eigene Vorstellung aber unverzichtbar. Anhand einer geläufigen Definition der Stetigkeit von Funktionen werden wir versuchen zu sehen, daß sich eine solche erarbeiten läßt.

4.0.27 Stetigkeit
Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *eine Funktion.* f *heißt stetig im Punkt* x_0*, falls gilt:*

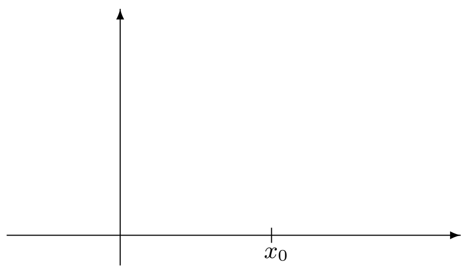
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \mathbf{R}) \quad |x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \epsilon$$

f *heißt stetig auf* $\mathbf{R}$*, falls* f *stetig in jedem Punkt* x *aus* $\mathbf{R}$ *ist.*

Übung:
Versuche, die Definition zu lesen, also gewissermaßen „in Prosa“ wiederzugeben.

Sicher haben wir so noch keinen intuitiven Zugang zur „Stetigkeit“. Um diesen zu gewinnen gehen wir Schritt für Schritt vor:

a) f ist eine Funktion von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$.
b) Betrachte eine Funktion von $\mathbf{R}$ nach $\mathbf{R}$ im Koordinatensystem und untersuche, wo dort x bzw. y liegen und $f(x)$ bzw. $f(y)$.
c) Welche Rolle spielen δ und ϵ?
d) Was heißt $|x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \epsilon$?
e) Interpretiere nun den Begriff Stetigkeit.



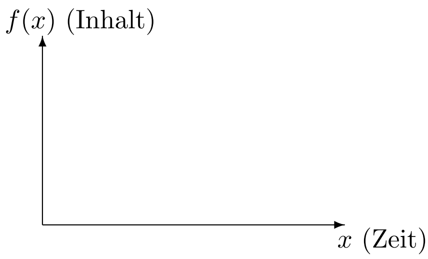
Anmerkung: Es kommt auch durchaus vor (wünschenswert wäre, es wäre die Regel), daß eine Vorstellung hinter dem Begriff vermittelt wird. Aber auch dann ist es für das Verständnis überaus hilfreich, sich den genauen Zweck der auftretenden Symbole und ihr Zusammenspiel zu verdeutlichen. Die Fertigkeit hierzu läßt sich durchaus trainieren und ist wohl das beste Rüstzeug für mathematische Vorlesungen.

5

Differentialrechnung

Anhand dieses Kapitels wollen wir uns noch einmal verdeutlichen, wie eine mathematische Theorie oft entsteht: Um irgendein (Alltags-) Problem mithilfe mathematischer Methoden besser beschreiben und lösen zu können, wird die Theorie (hier: der Funktionen) um geeignete Begriffe erweitert (hier den der Ableitung), dann wird untersucht, durch welche Gesetzmäßigkeiten sich die Handhabung der Erweiterung vereinfacht (hier: Ableitungsregeln), um nicht jedes Mal auf die Definition zurückgreifen zu müssen. Schließlich stellt man (hoffentlich) fest, daß sich mit dem neuen Teil der Theorie auch andere Probleme lösen lassen (hier: Ermitteln der Extremstellen); dann wird die Erweiterung interessant.

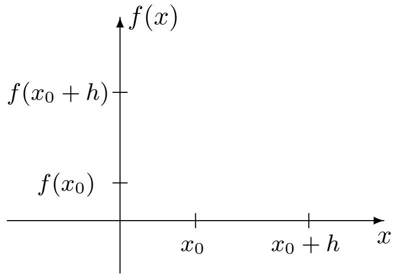
5.0.28 Ausgangsposition:
Wir betrachten die Badewannen-Funktion $f : \mathbf{R_0^+} \to \mathbf{R_0^+}$, die jedem Zeitpunkt x den Inhalt der mit Wasser vollaufenden Badewanne zuordnet. Neben dem jeweiligen Inhalt interessieren wir uns für die Veränderung an sich, d. h. für die Zu- oder Abnahme des Wassers. So können wir zu jedem Zeitpunkt x_0 die Änderungsrate (also Zu- bzw. Ablaufgeschwindigkeit) untersuchen. Wie läßt sich diese anhand der Funktion und ihres Graphen ermitteln? Wie läßt sie sich geometrisch interpretieren?



5.0.29 Definition: Ableitung, Differenzierbarkeit

- *Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Die Steigung der Funktion f in dem Punkt x_0 wird als Ableitung von f in x_0 bezeichnet und definiert* *als Grenzwert von Sekantensteigungen:*

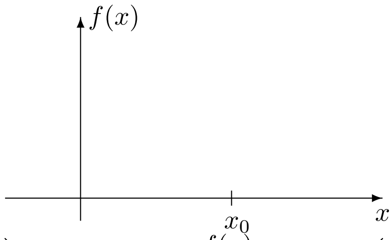
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - (x_0)}$$



- *Die Funktion f heißt in x_0 differenzierbar, wenn dieser Grenzwert existiert.*
- *Ist f in jedem Punkt x_0 differenzierbar, so heißt f auf $\mathbf{R}$ differenzierbar. Durch $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f' : x \mapsto f'(x)$ wird eine neue Funktion, die Ableitungsfunktion definiert.*

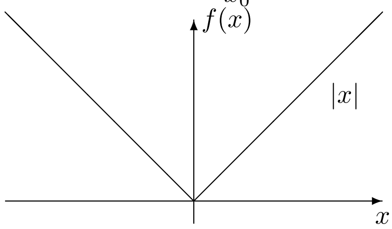
5.0.30 Beispiele:

a)



nicht differenzierbar in x_0

b)



nicht differenzierbar in $x_0 = 0$

Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|$
Betrachten wir den Grenzwert der Sekantensteigungen, so finden wir:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{wenn h} \searrow 0 \\ -1, & \text{wenn h} \nearrow 0 \end{cases}$$

Dieser Grenzwert ist nicht eindeutig bestimmt, demnach ist f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

c) Man betrachte $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 - h}{1} = 2x_0$$

also $f'(x) = 2x$.

Um nicht jedesmal die Ableitung über den Grenzwert der Sekantensteigungen ermitteln zu müssen, zeigen wir im folgenden einige Rechenregeln, mit denen sich aus wenigen bekannten Ableitungsfunktionen sehr viele andere bestimmen lassen.

5.0.31 Satz: Ableitungsregeln

Voraussetzung: Die Funktionen $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ seien differenzierbar.

a) *Faktorregel: Sei* $f(x) = c \cdot u(x)$ $(c fest \in \mathbf{R})$, *dann ist* f *differenzierbar und* $f'(x) = c \cdot u'(x)$
b) *Summenregel: Sei* $f(x) = u(x) \pm v(x)$, *dann ist* f *differenzierbar und* $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
c) *Produktregel: Sei* $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, *dann ist* f *differenzierbar und* $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
d) *Quotientenregel: Sei* $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, *dann ist* f *differenzierbar in allen Punkten* $x \in \mathbf{R}$ *mit* $v(x) \neq 0$ *und in diesen Punkten gilt* $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(u(x))^2}$
e) *Kettenregel: Sei* $f(x) = v(u(x))$. *Dann ist* f *differenzierbar und* $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$ *für alle* $x \in \mathbf{R}$

5.0.32 Tabelle: Einige häufig auftretende Ableitungen

$f(x)$		$f'(x)$
c	$(c \in \mathbf{R})$	0
x^a	$(a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$	ax^{a-1}
a^x	$(a \in \mathbf{R}, a \neq 0)$	$\ln a \cdot a^x$
e^x		e^x
$\ln\|x\|$		$\frac{1}{x}$
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$		$-\sin x$

Anmerkung:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$
und $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$

5.0.33 Beispiel für die Anwendung

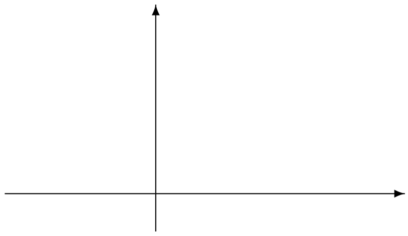
a) Quotientenregel: Sei $f(x) = \frac{x^5+3x^4+1}{x^2+3}$. Setze $u(x) = x^5 + 3x^4 + 1$ und $v(x) = x^2 + 3$
Dann ist

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(x^5 + 3x^4 + 1)'}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 + 3)}^{v} - \overbrace{(x^5 + 3x^4 + 1)}^{u} \cdot \overbrace{(x^2 + 3)'}^{v'}}{\underbrace{(x^2 + 3)^2}_{v^2}}$$
$$= \frac{(5x^4 + 12x^3)(x^2 + 3) - 2x(x^5 + 3x^4 + 1)}{(x^2 + 3)^2} = \dots$$

b) Kettenregel: Sei $t(x) = 3(x^3 + 2x^2 + 4)^4$. Setze $f(y) = 3y^4$ und $y(x) = x^3 + 2x^2 + 4$
Dann ist $t = f \circ y$ und $t'(x) = \underbrace{4 \cdot 3(x^3 + 2x^2 + 4)^3}_{f'(y)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 4x)}_{y'(x)} = \dots$

Mit diesem neuen Werkzeug des Differenzierens haben wir nun ein Mittel zur Bestimmung von Extremstellen.

5.0.34 Satz über Extremstellen:
Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. f hat genau dann ein relatives Minimum (bzw. Maximum) in x_0, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$) gilt.



5.0.35 Exkurs: Implikation und Kontraposition
Der vorangegangene Satz ist ein gutes Anschauungsbeispiel für die Handhabung von Implikation („wenn, dann“). Wir spalten den Satz auf:

a) x_0 ist relatives Extremum $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$
b) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist relatives Extremum

Bedingung a) ist notwendig, damit x_0 ein Extremum ist. Die Aussage „$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist relatives Extremum“ wäre nun natürlich falsch: b) besagt ja gerade, daß zusätzlich noch $f''(x_0) \neq 0$ benötigt wird. Bedingung b) ist somit eine hinreichende Bedingung dafür, daß x_0 eine Extremstelle ist. Wir können aber aus a) auf

d) $f'(x_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist kein relatives Extremum

schließen. Allgemein gilt:

gilt A, dann gilt B $\Longleftrightarrow$ gilt B nicht, dann gilt auch A nicht

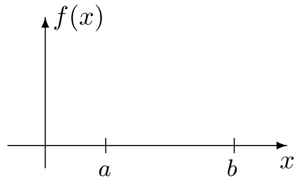
Diese Schlußweise nennen wir <u>Kontraposition</u>

6

Integralrechnung

In der Integralrechnung interessiert man sich für die Fläche unter dem Graph einer Funktion f:

$$F_{\square} = \int_a^b f(x)\,dx$$



Diesen Flächeninhalt erhält man (verkürzt beschrieben) als Grenzwert eines Annäherungsprozesses durch Rechtecksflächen. Man kann herleiten, daß dieser Vorgang der Integration gerade der Umkehrvorgang zur Differentiation ist (dies besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Um es einfacher zu machen, definieren wir daher die Integration gleich über die Differentiation statt über die Flächeninhalte. (Diese Freiheit hat man beim Definieren!)

6.0.36 Definition: Stammfunktion, Integration, unbestimmtes Integral

- *Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, falls für jedes $x \in \mathbf{R}$ gilt: $F'(x) = f(x)$; sie ist nur bis auf eine Konstante $c \in \mathbf{R}$ eindeutig bestimmt.*
- *Die Operation, die einer Funktion eine Stammfunktion zuordnet, heißt Integration.*
- *Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ heißt unbestimmtes Integral von f und wird notiert als $\int f(x)\,dx$.*

6.0.37 Beispiel:

Gesucht: Eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^5 + 2$. Wir suchen also eine Funktion, deren Ableitung $F'(x) = x^5 + 2$ ist. Aufgrund der Ableitungsregeln ergibt sich z. B. $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + 2x + c,\ c \in \mathbf{R}$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß sich die Ableitungsregeln auf die Integrationsregeln übertragen:

6.0.38 Satz: Integrationsregeln
Voraussetzung: f, u, v seien integrierbare Funktionen, $c \in \mathbf{R}$

a) Faktorregel: $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$
b) Summenregel: $\int (u(x) \pm v(x))\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$
c) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel): $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$

6.0.39 Beispiel für die partielle Integration:

$$\int \underbrace{x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u(x)} \underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \quad c \in \mathbf{R}$$

6.0.40 Definition: Bestimmtes Integral
Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ integrierbar, a und $b \in \mathbf{R}$, $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

und nennen $\int_a^b f(x)\,dx$ das bestimmte Integral von a bis b.

Dieses bestimmte Integral von f ist unabhängig von der Wahl der Stammfunktion F. Es ist keine Funktion mehr, sondern eine reelle Zahl.
Nun sind wir also wieder beim Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen angelangt, aber leider haben wir diese Interpretation durch die Definition des Integrals über die Stammfunktion, also durch unseren einfacheren Zugang „verloren“. In diesem Zusammenhang hat das Integral keine Bedeutung mehr, sie wurde der leichteren Handhabbarkeit der Integration „geopfert“. Daher müssen wir nun Rechenregeln für das bestimmte Integral erst beweisen, die bei seiner Interpretation als Flächeninhalt sofort klar gewesen wären.

6.0.41 Satz: Rechenregeln für bestimmte Integrale
Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, sowie relle Zahlen a, b, c. Dann gilt:

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
c) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$