Programação Dinâmica I

SCC0210 — Algoritmos Avançados (2/2011)

Lucas Schmidt Cavalcante

- Introdução
- Soma Máxima de uma Subsequência Contígua
- Subset Sum
- Problema do Troco
- Problema da Mochila

Introdução

Técnica ampla e por isso de difícil definição, mas tem como característca **usar espaço para ganhar em velocidade!**

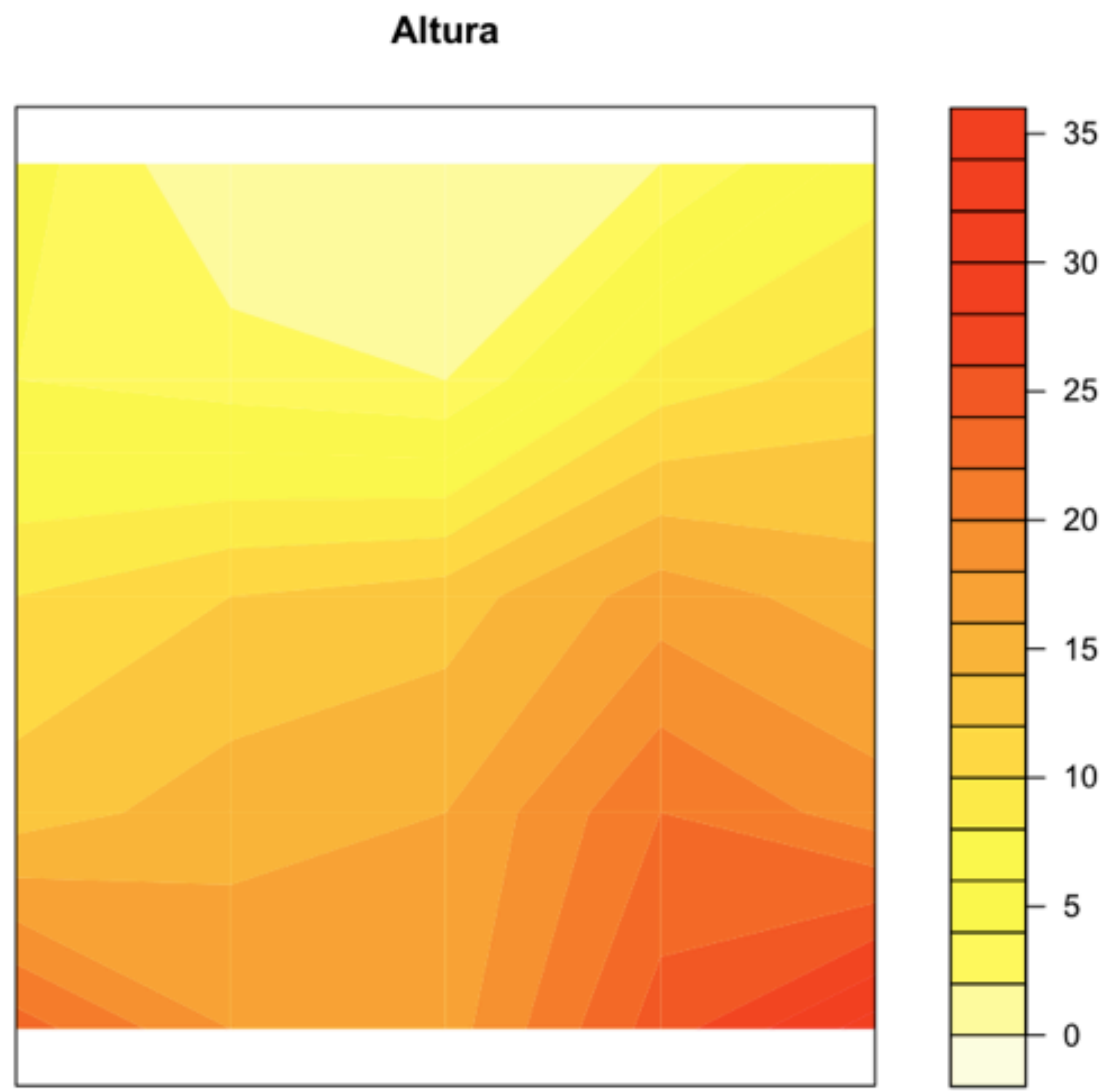
Um problema para ser resolvido com programação dinâmica (PD) requer apresentar as seguintes propriedades:

- **Sub-estrutura ótima:** a solução ótima é composta da solução ótima de instâncias menores (*Fibonacci(n)* é composto pela soma de *Fibonacci(n-1)* e *Fibonacci(n-2)*);
- **Sobreposição de subproblemas:** ao calcular *Fibonacci(n-1)* se calcula *Fibonacci(n-2)*, que é usado para calcular *Fibonacci(n)*.

Solução com PD para fibonacci é memorizar num vetor os valores/estados (usar espaço) para não re-calcular (ganhar em velocidade).

Travessia: Problema

Uma formiga que só pode andar para o leste ou para o sul deseja atravessar uma região no sentido norte-sul de forma que a somatória das diferenças de altura entre regiões subsequentes de seu caminho seja a menor possível. Determine esse caminho.



Travessia: Exemplo

Dada a seguinte entrada, um possível caminho é exibido.

5	0	1	2	7
4	3	2	9	11
10	12	13	17	15
13	15	16	22	19
23	18	17	25	31

0

+

|0-3| + |3-2|

+

|2-13|

+

|13-16|

+

|16-17|

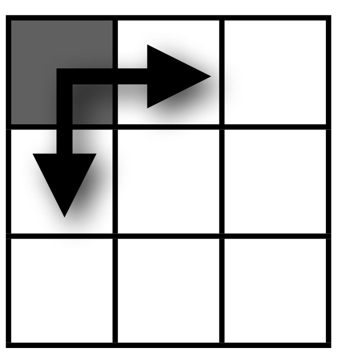
19

Travessia: Análise

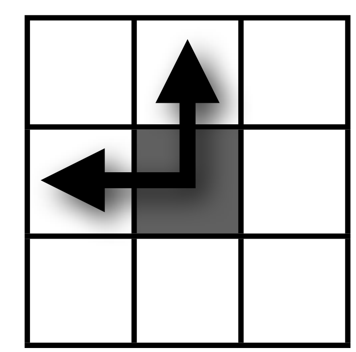
Vamos denotar por PD[i][j] o menor custo para chegar à posição (i,j).

Para a primeira linha (PD[0][j], $0 \leq j \leq N$), que são os possíveis locais em que a formiga pode começar, não há nada o que fazer, são os casos base.

Para todas as outras posições, é preciso achar o melhor caminho:



Em PD se olha para o passado. Sendo assim, não se pergunte qual o melhor caminho para chegar no estado futuro, caminhe para o estado futuro e então se pergunte por qual caminho você chegou lá. Com isso, a possibilidade de andar sul-leste se torna norte-oeste.



PD[i][j] = min(PD[i-1][j] + Diferenca(i,j,i-1,j), PD[i][j-1] + Diferenca(i,j,i,j-1)).

Travessia: Recursão

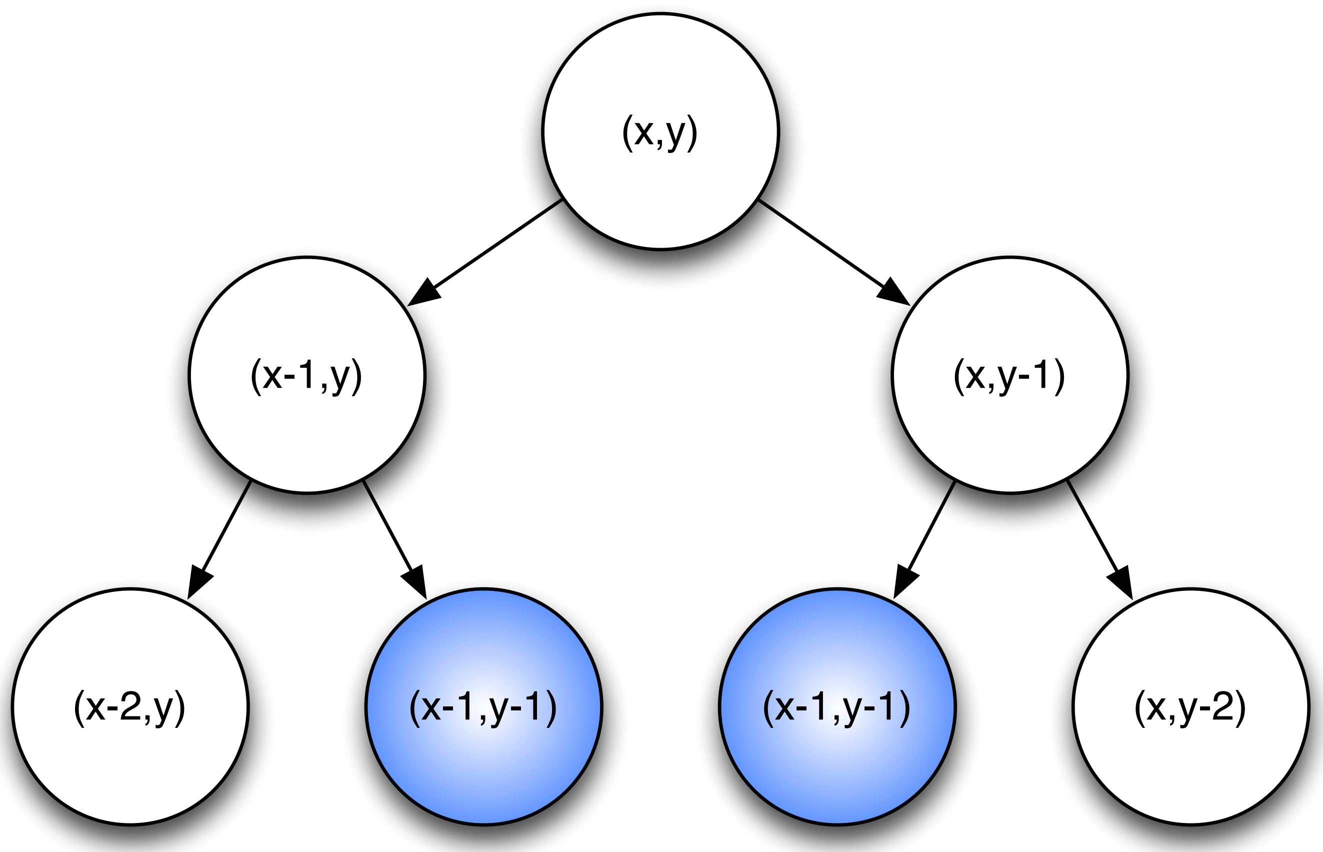
Solução por algoritmo recursivo, ignorando os casos de borda (y=0), e supondo que a matriz *m* guarda os valores da topologia:

```
int Resolve(int x, int y) {
  if(x == 0)
     return m[x][y];
  else {
     return min(Resolve(x-1,y) + abs(m[x][y]-m[x-1][y]),
                Resolve(x,y-1) + abs(m[x][y]-m[x][y-1]));
  }
}
```

Note que cada chamada recursiva tem que resolver $(x-1)\times(y-1)$ estados (a grosso modo).

Travessia: Recursão

Com o algoritmo proposto, podemos montar a seguinte árvore de recursão:



E assim nota-se que o algoritmo re-calcula estados.

Travessia: Recursão

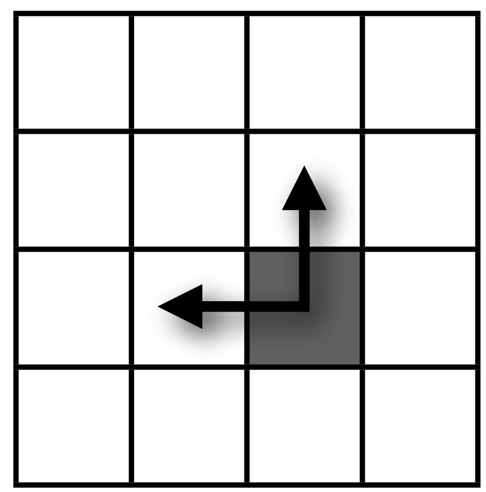
Como só há x × y estados, podemos modificar o código para memorizar estados já calculados (matriz auxiliar *pd[][]*):

```
int Resolve(int x, int y) {
  if(x == 0) return m[x][y];
  else {
     if(pd[x][y] == NAO_RESOLVIDO)
        pd[x][y] = min(Resolve(x-1,y) + abs(m[x][y]-m[x-1]
[y]), Resolve(x,y-1) + abs(m[x][y]-m[x][y-1]))
     return pd[x][y];
  }
}
```

Para preencher *pd[][]* será preciso $O(n^2)$, depois as consultas se tornam $O(1)$.

Travessia: Versão Iterativa

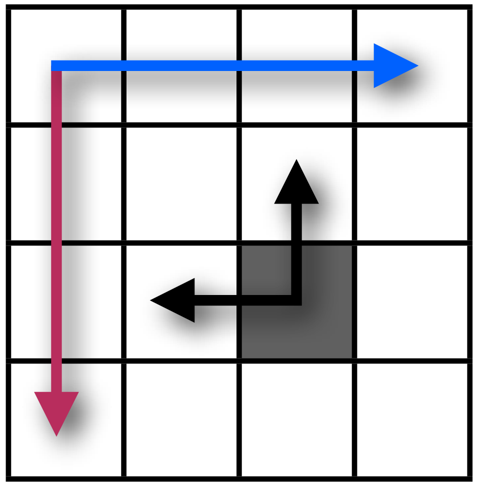
Em alguns problemas de PD é possível extrair da recursão uma versão iterativa. Observe a dependência dos estados:



Cada estado (i,j) depende do estado acima e do lado esquerdo, então basta determinar uma ordem de percorrer a matriz de modo que sempre que um estado é consultado ele já está calculado.

Travessia: Versão Iterativa

Em alguns problemas de PD é possível extrair da recursão uma versão iterativa. Observe a dependência dos estados:



Cada estado (i,j) depende do estado acima e do lado esquerdo, então basta determinar uma ordem de percorrer a matriz de modo que sempre que um estado é consultado ele já está calculado.

Primerio nesse **sentido** e depois no **outro**.

Travessia: Algumas iterações...

∞	5	0	1	2	7
∞	6				
∞					
∞					
∞					

Casos base.

$\min(5+|5-4|, \infty+|\infty-4|) = 6$

Entrada.

5	0	1	2	7
4	3	2	9	11
10	12	13	17	15
13	15	16	22	19
23	18	17	25	31

Para não se preocupar com casos de borda, adicione uma coluna extra (o valor de infinito é para "afastar" o algoritmo de tentar usar um estado inexistente na solução).

∞	5	0	1	2	7
∞	6	3			
∞					
∞					
∞					

$\min(0+|0-3|, 6+|4-3|) = 3$

Travessia: Algumas iterações...

∞	5	0	1	2	7
∞	6	3	2	9	11
∞	12	12			
∞					
∞					

$\min(12+|10-12|, 3+|3-12|) = 12$

5	0	1	2	7
4	3	2	9	11
10	12	13	17	15
13	15	16	22	19
23	18	17	25	31

∞	5	0	1	2	7
∞	6	3	2	9	11
∞	12	12	13		
∞					
∞					

$\min(12+|12-13|, 2+|2-13|) = 13$

●	●	●	●	●
↑	↑	↑	←	←
↑	↑	←		

Como é necessário saber o caminho, use uma matriz auxiliar para marcar se aquele estado foi alcançado por vir da esquerda ou de cima.

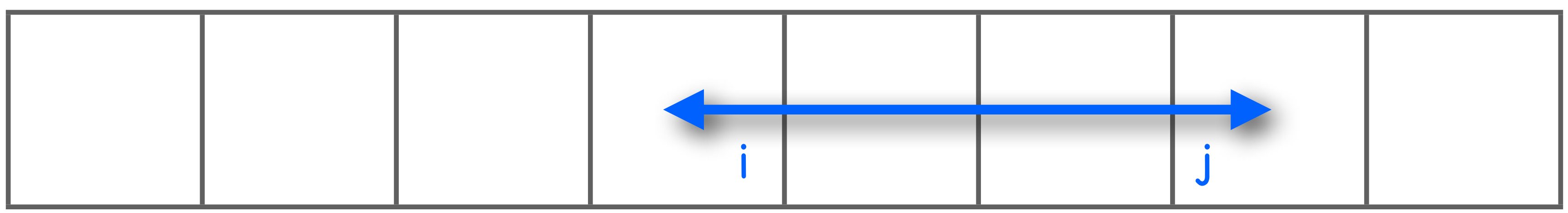
Estratégia Geral

A estratégia geral para resolver um problema de PD é:

- Determinar o estado de um problema pelo menor conjunto de seus parâmetros;
- Determinar os casos base;
- Construir uma recorrência que resolve todos os possíveis subproblemas.

Soma Máxima de uma Subsequência Contígua

Dado um vetor de números inteiros, determinar os indices i e j de tal forma que a soma de todos os valores entre i e j é máxima.



Obviamente que se não houver números negativos, a solução é a trivial, somar tudo.

5	0	1	-7	4	-1	-2	7

Soma Máxima de uma Subsequência Contígua

O algoritmo força bruta, de complexidade $O(n^2)$, começa uma soma em cada uma das posições.

5	0	1	-7	4	-1	-2	7
1	2	3	4	5	6	7	8

É interessante tentar começar uma soma na posição 2 ou 3? Não, porque pula o valor positivo 5.

Isso nos dá a primeira dica sobre um possível algoritmo: os locais onde se deve pensar em começar uma nova soma são os imediatamente a frente dos números negativos (além da posição 0, o início).

Soma Máxima de uma Subsequência Contígua

Vamos salvar a soma máxima em um vetor externo *pd[]*, mostrado logo abaixo do vetor de entrada (*v[]*).

1	2	3	4	5	6	7	8
5	0	1	-7	4	-1	-2	7

5	5	6	?				

Soma Máxima de uma Subsequência Contígua

Vamos salvar a soma máxima em um vetor externo *pd[]*, mostrado logo abaixo do vetor de entrada (*v[]*).

1 5	2 0	3 1	4 -7	5 4	6 -1	7 -2	8 7

5	5	6	-1	4	3	1	8

Uma forma de ler o vetor pd[] é "a vantgem de começar a soma em pd[i-1] e adicionar v[i]". Quando a soma pd[i-1] + v[i] dá negativo, então é uma desvantagem e o melhor é começar uma nova soma.

A cada iteração se tem duas escolhas: adicionar o elemento a soma atual ou começar uma nova, então: $pd[i] = max(pd[i\text{-}1] + v[i], v[i])$.

Soma Máxima de uma Subsequência Contígua

Com este algoritmo em uma passada se determina a soma máxima, logo a complexidade é O(n).

5	0	1	-7	4	-1	-2	7
1	2	3	4	5	6	7	8

5	5	6	-1	4	3	1	8

Para os indices, ache o valor máximo em *pd[]* e a partir dele começe a subtrair os elementos de *v[]*, quando chegar a zero é o começo.

Tome cuidado na implementação com o caso de um vetor composto por somente números negativos.

Subset-Sum

Dado um conjunto de números, quais são todos os possíveis valores que posso gerar ao somar um número com outro?

Se o conjunto for {2, 5, 9}, então os possíveis valores são {0, 2, 5, 7, 9, 11, 14, 16}. Neste conjunto estão a opção de não usar nenhum número (0), usar somente ele mesmo, somar 2 números quaisquer e somar todos.

Subset-Sum

Dado um conjunto, nós só estamos interessados em saber se um dado valor é possível ou não, então um vetor composto por 1s ou 0s é suficiente. Seja o conjunto {2,5,9}, inicializamos *pd[]* da seguinte maneira:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O tamanho do vetor será o valor da soma de todos os elementos, em alguns casos isso torna essa técnica proibitiva.

pd[] começa em zero para possibilitar a soma de nenhum dos elementos, mas também simplifica a PD.

Subset-Sum

Dado um conjunto, nós só estamos interessados em saber se um dado valor é possível ou não, então um vetor composto por 1s ou 0s é suficiente. Seja o conjunto {2,5,9}, inicializamos *pd[]* da seguinte maneira:

1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Sabemos que 2, 5 e 9 são possíveis. O que todos eles têm em comum?

Subset-Sum

Dado um conjunto, nós só estamos interessados em saber se um dado valor é possível ou não, então um vetor composto por 1s ou 0s é suficiente. Seja o conjunto {2,5,9}, inicializamos *pd[]* da seguinte maneira:

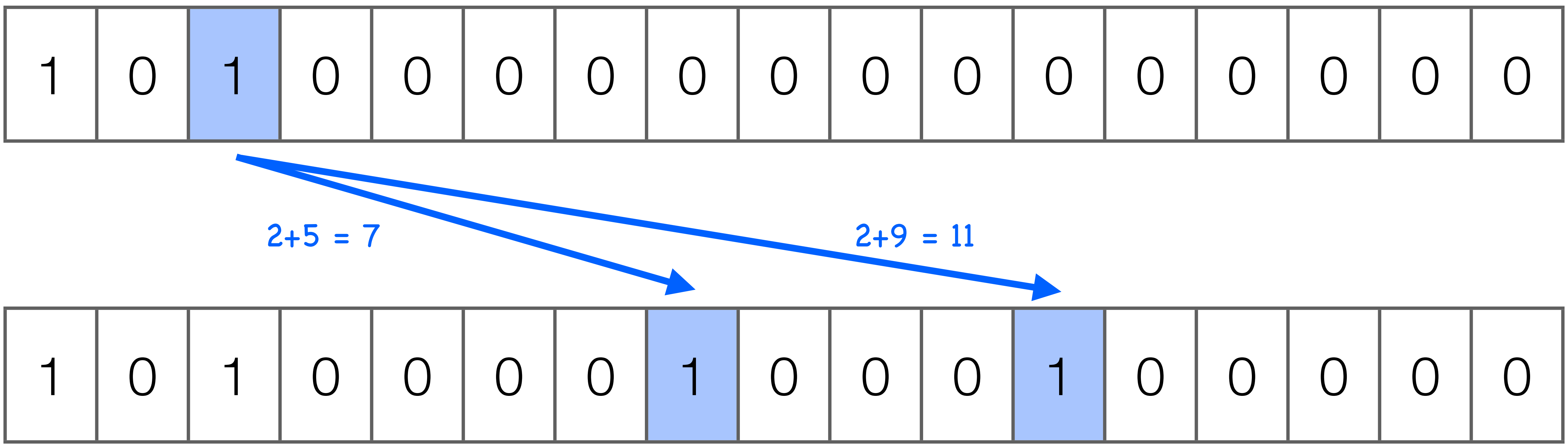
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Sabemos que 2, 5 e 9 são possíveis. O que todos eles têm em comum?

Interprete esses números como uma ponte, que levam de um estado alcançavel para um novo.

Sendo assim, *Se(pd[i-1][j]) pd[i][j+v[i]] = 1*. No qual i itera sobre os elementos do conjunto e j de 0 até N (soma de todos os elementos). Uma matriz é usada para não repetir o mesmo elemento mais de uma vez, só temos uma instância de cada.

Subset-Sum



Interprete esses números como uma ponte, que levam de um estado alcançavel para um novo.

Com a PD *Se(pd[i-1][j]) pd[i][j+v[i]] = 1* temos complexidade O(NC) e uso de O(NC) de espaço, no qual N é a soma de todos os elementos e C a quantidade de elementos. É possível usar somente O(N) de espaço?

Subset-Sum

Era necessário usar uma matriz para não sujar o vetor com repetidos valores de uma mesma instância (no começo se faz $0+2$ e então $pd[2]=1$, ao chegar na posição 2 se faz $pd[2+2]=1$, e assim por diante...).

1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Como evitar isso?

Subset-Sum

Era necessário usar uma matriz para não sujar o vetor com repetidos valores de uma mesma instância (no começo se faz $0+2$ e então $pd[2]=1$, ao chegar na posição 2 se faz $pd[2+2]=1$, e assim por diante...).

1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Como evitar isso? Olhe para trás, no passado. Marque o vetor somente se $pd[j-v[i]] = 1$, e isso implica em percorrer o vetor da posição N-1 até 0.

Mas se você tiver infinitas instâncias de um elemento, então ao usar somente um vetor e percorrer do começo para o fim você garante o uso de quantas instâncias forem possíveis usar.

Problema do Troco

Um sistema monetário possui moedas com os seguintes valores: 1, 4, 5 e 10. Deseja-se dar troco para c centavos com a menor quantidade de moedas possível.

Algoritmo guloso funciona para o caso de c=7 (5+1+1), mas falha para c=8 (guloso tentaria 5+1+1+1, mas a resposta certa é 4+4).

Problema do Troco

Um sistema monetário possui moedas com os seguintes valores: 1, 4, 5 e 10. Deseja-se dar troco para c centavos com a menor quantidade de moedas possível.

Algoritmo guloso funciona para o caso de c=7 (5+1+1), mas falha para c=8 (guloso tentaria 5+1+1+1, mas a resposta certa é 4+4).

Sabemos gerar todos os possíveis valores de troco, agora basta garantir que a solução encontrada seja mínima: $pd[j]=min(pd[j], pd[j-v[i]]+1)$.

Para afatsar o algoritmo de um estado inválido, inicialize pd[] com infinito, exceto a posição 0, que deve ter valor 0 (lembrando que i itera sobre os valores das moedas, ou seja, 1, 4, 5 e 10).

Quantidade de formas de dar troco

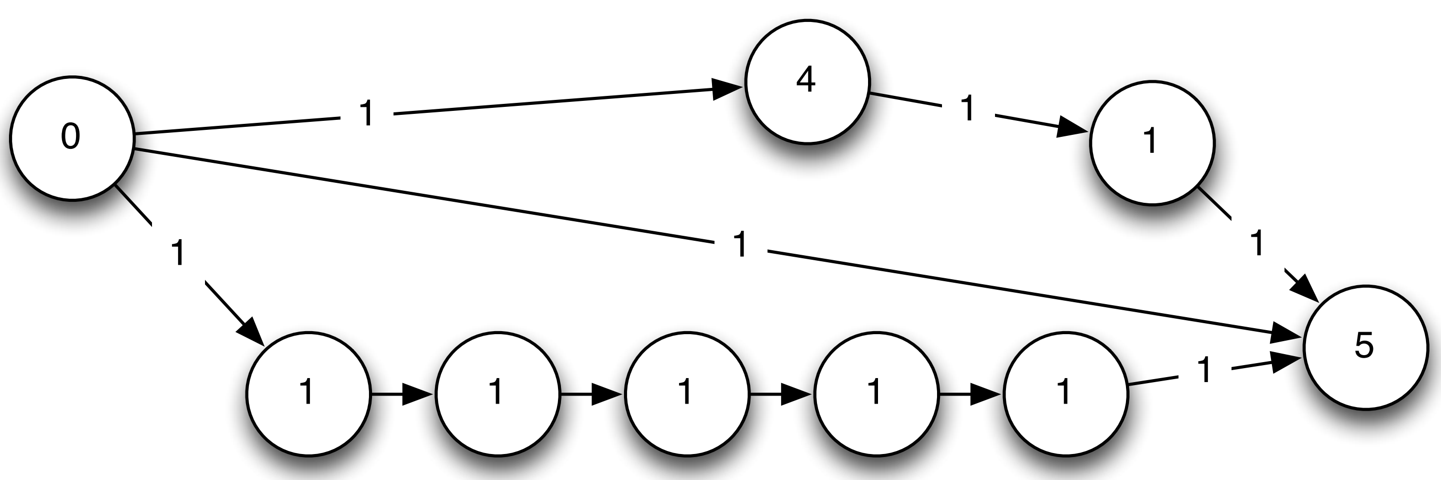
Um sistema monetário possui moedas com os seguintes valores: 1, 4, 5 e 10. Deseja-se dar troco para c centavos com a menor quantidade de moedas possível.

Algoritmo guloso funciona para o caso de c=7 (5+1+1), mas falha para c=8 (guloso tentaria 5+1+1+1, mas a resposta certa é 4+4).

Sabemos gerar todos os possíveis valores de troco, agora basta garantir que a solução encontrada seja mínima: *pd[j]=min(pd[j], pd[j-v[i]]+1)*.

Para afatsar o algoritmo de um estado inválido, inicialize pd[] com infinito, exceto a posição 0, que deve ter valor 0 (lembrando que i itera sobre os valores das moedas, ou seja, 1, 4, 5 e 10).

E se for pedido a quantidade de formas de dar troco, como fica a PD?



Para 5 a resposta é 3.

Problema da Mochila

Seja uma mochila com capacidade *C* e *N* itens, cada qual tem um peso (*p[]*) e um valor (*v[]*). Deseja-se maximizar o valor da mochila.

p[] =	2	3	5
v[] =	1	2	6

C = 9

Problema da Mochila

Seja uma mochila com capacidade *C* e *N* itens, cada qual tem um peso (*p[]*) e um valor (*v[]*). Deseja-se maximizar o valor da mochila.

p[] =	2	3	5	C = 9
v[] =	1	2	6	

Já sabemos gerar todas as somas possíveis, mas precisamos ser inteligentes na escolha da mochila de peso 5, já que temos a possibilidade de escolher entre uma de valor **3** e outra de valor **6**. Como fica a PD?

Problema da Mochila

Seja uma mochila com capacidade *C* e *N* itens, cada qual tem um peso (*p[]*) e um valor (*v[]*). Deseja-se maximizar o valor da mochila.

p[] =	2	3	5
v[] =	1	2	6

C = 9

Apesar do interesse ser discutir a mochila de tamanho 5, a resposta é uma mochila de peso 8 com valor 8 (maior valor menor que a capacidade).

Já sabemos gerar todas as somas possíveis, mas precisamos ser inteligentes na escolha da mochila de peso 5, já que temos a possibilidade de escolher entre uma de valor **3** e outra de valor **6**. Como fica a PD?
pd[j] = max(pd[j], pd[j-p[i]]+v[i]).

Exercícios

- UVa 116 - Unidirectional TSP: Resolver de trás pra frente pode simplificar.
- UVa 10130 - SuperSale.
- Uva 10664 - Luggage.
- Uva 674 - Coin Change.
- UVa 562 - Dividing Coins.

Referências

- "*Dynamic Programming*", "*Overlapping subproblems*" & "*Optimal substructure*". Wikipedia.
- "*Algoritmos I*", Guilherme P. Telles. Instituto de Computação, UNICAMP.
- Dynamic Programming Practice Problems.
- "*Dynamic Programmimg*", Cliff Stein. Columbia.
- "*Introduction to Algorithms: A Creative Approach*", Udi Manber. Addison-Wesley.
- "*Programming Challenges*", Steven S. Skiena. Springer.
- "*The Algorithm Design Manual*", Steven S. Skiena. Springer.
- "*Competitive Programming: Increasing the Lower Bound of Programming Contests*", Steven Halim & Felix Halim.