



FACULTADE DE FÍSICA



Memoria das prácticas externas do Grao de Física

Roberto Losada García

5 de octubre de 2022

Titor da empresa: Andrés Gómez Tato

Titor académico: José Manuel Sánchez de Santos

Índice

1. Datos persoais do estudante	2
2. Entidade colaboradora	2
2.1. Datos da entidade	2
2.2. Datos do titor da entidade	2
2.3. Calendario e horario de realización das prácticas	2
3. Memoria das actividades	3
3.1. Estrutura desentrelazadora	4
3.2. Función de custo	6
3.3. Optimización da función de custo	7
3.4. Factorización do operador QFT	11
3.4.1. 2 qubits: descomposición con portas CZ	11
3.4.2. 2 qubits: descomposición con portas CNOT	13
3.4.3. 3 qubits: descomposición con portas CZ	15
3.4.3.1. Configuración 1	15
3.4.3.2. Configuración 2	17
3.4.4. 3 qubits: descomposición con portas CNOT	19
3.5. Conclusións e posibles futuras continuacións	21
4. Conexión do Grao en Física coas prácticas	22
5. Valoración das prácticas	23
6. Anexo	24
6.1. Portas cuánticas de 1 e 2 qubits fundamentais	24
6.2. Convención de significación para qubits de QisKit	26
6.3. Transformada de Fourier Cuántica (QFT)	26
6.4. Repositorio cos notebooks de Python e demais ficheiros de utilidade	28
Referencias	29

1. Datos persoais do estudante

- Nome e apelidos: Roberto Losada García
- DNI: 32720239W
- Enderezo: Rúa República Arxentina, 49, 3ºB, Ferrol (A Coruña)
- Teléfono: 618449712
- Email: roberto.losada@rai.usc.es // robertolosada@hotmail.es
- Estudos: Dobre grao en matemáticas e física na USC (4º ano)

2. Entidade colaboradora

Realicei as prácticas externas na Fundación Pública Galega Centro Tecnolóxico de Supercomputación de Galicia (CESGA)

2.1. Datos da entidade

O CESGA é o centro de cálculo, comunicacións de altas prestacións e servizos avanzados da Comunidade Científica Galega, do Sistema Académico Universitario e do Consello Superior de Investigacións Científicas (CSIC).

A súa misión é contribuír ao avance da ciencia e da tecnoloxía a través da investigación e aplicación da computación así como outros recursos das tecnoloxías da información en colaboración con múltiples institucións na procura do beneficio da sociedade.

O edificio do CESGA atópase na Avenida de Vigo no interior do Campus Sur da Universidade de Santiago de Compostela. Para máis información pode consultarse a súa páxina web [1].

2.2. Datos do titor da entidade

O meu titor na entidade foi Andrés Gómez Tato, administrador do departamento de aplicacións e proxectos.

2.3. Calendario e horario de realización das prácticas

O período de prácticas foi dende o venres 3 de Xuño de 2022 ata o mércores 6 de Xullo de 2022 cun horario de traballo aproximado dende as 8:00 ata as 15:00 horas (7 horas diarias ata cumprimentar as 150 horas lectivas establecidas pola descrición do programa de prácticas externas).

Cómpre salientar que a complexidade do proxecto levado a cabo débese en certa medida á ausencia tanto por parte do titor coma miña debida á COVID-19 que fundamentalmente ralentizou o desenvolvemento de proxecto. Ademais, o 5 de Xullo, eu comezaba cunha beca no IGFAE, polo que non foi posible estender máis o período de prácticas.

3. Memoria das actividades

No crecente mundo da computación cuántica, coa continua aparición de algoritmos e novas técnicas é frecuente atopar operadores que actúan sobre múltiples canles cuánticas e cuxa implementación é altamente complicada de realizar ou mesmo require do uso de moitas portas cuánticas. Consecuentemente, a descomposición de operadores arbitrarios unitarios en portas cuánticas máis sinxelas que poidan reproducir de xeito aproximado o comportamento destes é unha área de investigación de gran e crecente interés dentro do marco da computación cuántica.

Entre as principais vantaxes da factorización e descomposición de operadores máis complexos en portas cuánticas máis sinxelas se atopan a posibilidade de redución da profundidade cuántica dos circuítos e o alixeiramento do custo de simulacións.

Neste proxecto de prácticas, centrarémonos en particular na factorización do operador unitario correspondente á transformada de Fourier cuántica¹ (QFT) debido á grande utilidade e importancia que ten, por exemplo, en algoritmos [2] como a Quantum Phase Estimation ou o algoritmo de Shor cuántico.

A idea principal será construír un operador aproximado conformado polo menor número posible de portas cuánticas sinxelas² que reproduza o comportamento do operador QFT ao seren aplicado sobre calquera tipo de estado inicial.

Existen multitude de algoritmos e resultados que permiten factorizar operadores unitarios arbitrarios [3-5] en termos de portas cuánticas de rotacións e portas controladas CNOT e CZ principalmente. É importante mencionar a existencia de cotas inferiores teóricas establecidas, por exemplo para o número de portas CNOT necesarias (1), que moitos procedementos de descomposición non saturan [6].

$$N_{theo}(n) = \left\lceil \frac{1}{4} (4^n - 3n - 1) \right\rceil \quad (1) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} n \text{ (nº de qubits)} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline N_{theo}(n) & 3 & 14 & 61 & 252 \end{array}$$

Sen embargo, no caso do operador da QFT (para n qubits), pode ser implementado nun circuíto cuántico consistente en $O(n^2)$ portas cuánticas [7], polo que dito límite superior será o que buscaremos reducir á hora de buscar un operador aproximado.

Hai que mencionar que existen procedementos fundamentados na eliminación de portas de fase controladas que introduzcan factores moi pequenos [8], que permiten reducir aínda

¹Consultar a sección 6.3 para ver unha breve descrición da transformada de Fourier cuántica (QFT).

²Consultar sección 6.1 para ver máis información acerca dalgunhas das principais portas cuánticas.

máis a cota ata $O(n \log n)$. En consecuencia, plantexamos inicialmente unha restrición á cota $O(n)$ coa intención de poder chegar a intentar reducila ata $O(n \log n)$. Malia non ter éxito neste último principalmente polas limitacións que expoñemos na memoria do procedemento usado, conseguimos mellorar a cota de $O(n^2)$ tanto para 2 coma 3 qubits.

A continuación, pasaremos a describir a idea principal e o procedemento algorítmico que se recolle en [5, 9], no que nos baseamos e que buscamos reproducir para o caso concreto da QFT. Cómpre salientar que a implementación do algoritmo descrita nestas referencias está recollida nun repositorio de libre acceso condensada nun paquete denominado SQUANDER creado polos autores. Este procedemento é capaz de achegarse moito aos límites inferiores teóricos mencionados logrando descompoñer operadores arbitrarios de 3 qubits con 15 CNOTs, de 4 qubits con 63 CNOTs e de 5 qubits con 267 CNOTs.

3.1. Estrutura desentrelazadora

A idea principal descrita en [5, 9] consiste en desentrelazar todos os qubits do estado que se forma ao aplicar o operador unitario arbitrario a factorizar U , sobre o estado inicial (inicializado por defecto a $|0 \dots 0\rangle$).

Para levar a cabo o proceso de desentrelazamento, selecciónase un qubit, por simplicidade³ na nosa implementación o menos ou máis significativo⁴. A idea principal en combinar capas ou *layers* conformadas por unha porta controlada CNOT ou CZ seguidas de rotacións actuando sobre un único qubit en ambos canles cuánticos sobre os que actúa a porta controlada. Estas *layers* son as unidades ou bloques mínimos estruturais que estarán parametrizados a priori por 6 parámetros (3 para cada rotación arbitraria situada en cada canle cuántica na que actúa a porta controlada).

Non obstante, pódese reducir o número de parámetros de cada layer a un total de 4 tendo en conta que unha rotación arbitraria actuando sobre un único qubit pode ser descomposta como combinacións da forma $R_z R_y R_z$ ou $R_x R_y R_x$ e usando o feito de que as portas R_z e R_x conmutan [10] co qubit de control e controlado da porta CNOT respectivamente.

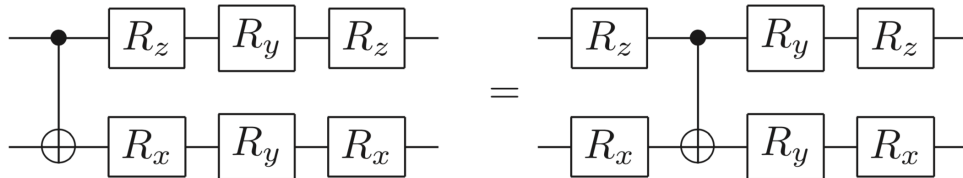


Figura 1: Simplificación sobre a estrutura das layers.

³Adicionalmente menciónase como o algoritmo poderíase adaptar á unha topoloxía concreta dun computador cuántico se fose necesario, por exemplo seguindo un orden de preferencia de desentrelazamento.

⁴Consultar sección 6.2 para ver en detalle.

Notar que no caso de utilizar como porta controlada a CZ, basta con usar a descomposición das rotacións en $R_z R_y R_z$ dúas veces e tense que a porta R_z conmuta con ambas canles cuánticas sobre as que actúa a CZ de xeito totalmente análogo ao caso previamente exposto. De agora en adiante razoarase e exemplificarase usando unha porta controlada tanto CNOT como CZ, tendo en conta que ambas son intercambiabíes facendo os pertinentes reaxustes na parte de rotacións.

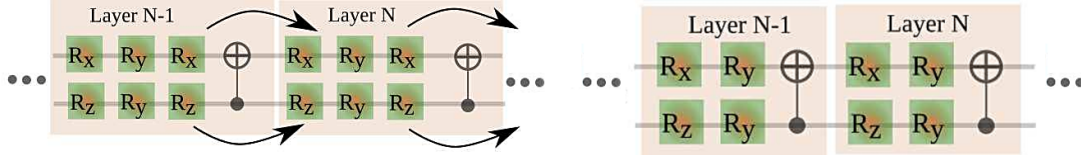


Figura 2: Simplificación en cadea de sucesivas layers para o caso de 2 qubits (Imaxe recollida en [6]).

Utilizando a simplificación descrita podemos reducir notablemente a complexidade das layers cuxa utilidade será a de desentrelazar un qubit dos demais. O qubit a desentrelazar será no que se sitúe o control das portas controladas CNOT das diferentes layers, mentres que a canle correspondente ao qubit controlada percorrerá os restantes qubits dos que se pretende desentrelazar o qubit de control.

Denominaremos como ciclo de desentrelazamento ao conxunto de k layers que desentrelazan o qubit de control escollido dos restantes k qubits. Estos ciclos deberán iterarse de xeito continuado ata producirse desentrelazamento do devandito qubit de control; i.e., requírense un certo número de ciclos para que sexa posible acadar o desentrelazamento.

Na seguinte imaxe ilústrase un exemplo de estrutura desentrelazadora de N capas totais⁵ na que se desentrelaza coas $N - 3$ primeiras layers⁶ o qubit $|q_2\rangle$ dos restantes qubits $|q_1 q_0\rangle$ e despois coas restantes layers⁷ se desentrelaza o qubit $|q_1\rangle$ do último, $|q_0\rangle$. Notar a aparición dunha última capa de rotacións arbitrarias denotadas como $U3$ cuxo obxectivo⁸ é devolver o sistema ao estado inicial.

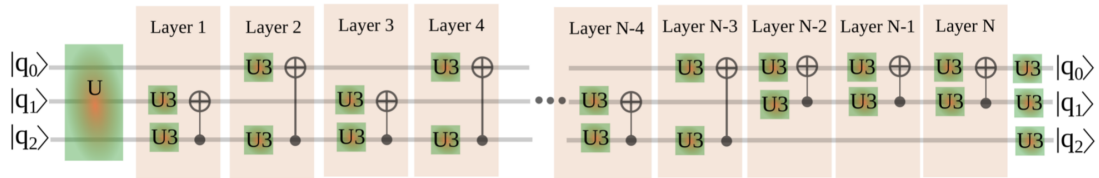


Figura 3: Exemplo de estrutura de N layers ou capas totais (Imaxe recollida en [6]).

⁵Notar que na imaxe 3 as rotacións aparecen como $U3$; isto é, rotacións arbitrarias tridimensionais, aínda que chegaría con usar as simplificacións xa descritas que se ven na imaxe 2.

⁶As capas ou layers da 1 á $N - 2$ pódense pensar como que cada dúas conforman un ciclo, habendo así un total de $\frac{N-2}{2}$ ciclos.

⁷Enténdese que cada ciclo é en si unha layer no caso de desentrelazar 2 qubits.

⁸A construción do operador aproximado non pode depender do estado inicial e debe reproducir o comportamento do operador a factorizar U dado calquera estado inicial.

3.2. Función de custo

Para poder lograr o desentrelazamento dun qubit dos demais constrúese unha función de custo a minimizar. Denotando por \bar{U} ao resultado de aplicar a estrutura desentrelazadora de N capas⁹ descrita previamente sobre o operador unitario a factorizar U , podémolo organizar por bloques como segue:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{U}_{00} & \bar{U}_{01} \\ \bar{U}_{10} & \bar{U}_{11} \end{pmatrix} \quad (2)$$

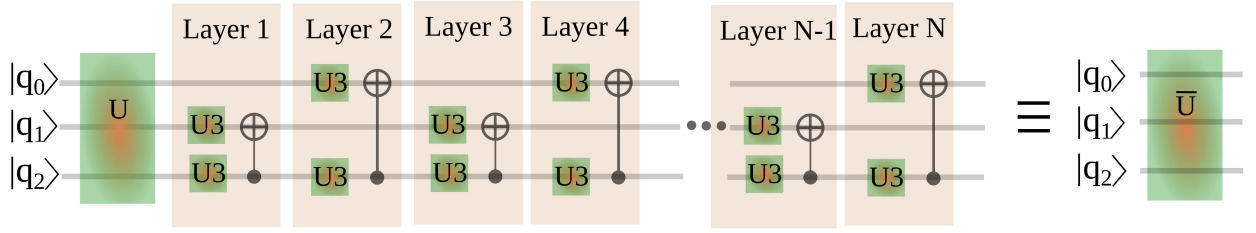


Figura 4: Esquema representativo da parte da estrutura desentrelazadora que denotamos como porta cuántica ou operador \bar{U} (Imaxe recollida en [6]).

A idea clave será ter en conta que as submatrices \bar{U}_{ij} con $i, j \in \{0, 1\}$ describen a evolución do sistema cuántico supoñendo que o último qubit $|q_{n-1}\rangle$ experimenta unha transición do estado $|j\rangle$ ao $|i\rangle$. Se o qubit $|q_{n-1}\rangle$ fose separable e independente dos demais; entón o operador \bar{U} podería factorizarse tensorialmente e todos os bloques de elementos de matriz \bar{U}_{ij} terían que ser iguais salvo un factor constante [6]. Polo tanto, baixo este suposto teremos un conxunto de factores constantes

$$\kappa_{ij}^{pq} \cdot \mathbb{I} = \bar{U}_{ij} \cdot \bar{U}_{pq}^\dagger, \quad \text{con } \{i, j; p, q\} \in \{0, 1\} \quad (3)$$

Baseándonos nesta idea e escollendo o elemento superior esquerdo do produto matricial¹⁰ que denotamos por $\tilde{\kappa}_{ij}^{pq}$, podemos definir unha función de custo como a distancia do produto de submatrices á igualdade (3) anterior (representativa da existencia de desentrelazamento)¹¹.

$$f_d(\bar{U}) = \sum_{l,m=1}^{2^{(n-1)}} \sum_{ijpq \in (0,1)} \left| \left(\bar{U}_{ij} \cdot \bar{U}_{pq}^\dagger - \tilde{\kappa}_{ij}^{pq} \mathbb{I} \right)_{lm} \right|^2 \quad (4)$$

⁹Cómpre puntualizar que \bar{U} non recolle a capa final de rotacións dado que estas non xogan un papel no desentrelazamento do estado $U|q_{n-1} \dots q_0\rangle$, pois só devolven o estado xa desentrelazado ao inicial $|q_{n-1} \dots q_0\rangle$.

¹⁰Realmente poderíase escoller un elemento de matriz calquera do produto $\bar{U}_{ij} \cdot \bar{U}_{pq}^\dagger$ para definir a función de custo, aínda que non exploramos esta opción.

¹¹Esencialmente estamos a considerar a norma 2 sobre o operador resultante de calcular a distancia entre o produto matricial $\bar{U}_{ij} \cdot \bar{U}_{pq}^\dagger$ e a substracción da identidade reescalada un factor de fase constante.

Podemos velo máis claramente para o caso de $n = 3$ qubits, se buscamos desentrelazar $|q_2\rangle$ do estado xeral $|q_2q_1q_0\rangle$. Unha posible representación xeral do operador \bar{U} na base canónica do espazo de Hilbert \mathcal{H} de $n = 3$ qubits é a seguinte:

$$\bar{U}_{lm} = |l\rangle\langle m| \otimes \left\{ \sum_{r,s \in \{00,01,10,11\}} u_{rs} |r\rangle\langle s| \right\}, \quad l, m \in \{0, 1\}, \quad u_{rs} \in \mathbb{C}; \quad \text{sendo } |lr\rangle, \langle ms| \in \mathcal{H} \quad (5)$$

Se o qubit $|q_2\rangle$ estivese separado e fose independente dos demais, as submatrices \bar{U}_{lm} non afectarían á forma do operador sobre os espazos de Hilbert correspondentes aos qubits $|q_1q_0\rangle$. Para velo, avaliamos o operador sobre o estado $|q_2q_1q_0\rangle$

$$\bar{U}_{lm}|q_2q_1q_0\rangle = \langle m|q_2\rangle |l\rangle \otimes \left(\sum_{rs \in \{00,01,10,11\}} u_{rs} \langle s|q_1q_0\rangle |r\rangle \right), \quad (6)$$

O primeiro factor do produto tensorial é ou ben nulo ou unidade, dado que o estado inicial $|q_2q_1q_0\rangle$ está desentrelazado. Por outra parte, o segundo factor non depende de q_2 , logo é o mesmo para calquera elección de índices $l, m \in \{0, 1\}$, equivalentemente para calquera das submatrices.

Consecuentemente, salvo factores de fase constantes as diferentes submatrices unitarias \bar{U}_{lm} son iguais, polo que o produto matricial $\bar{U}_{ij} \cdot \bar{U}_{pq}^\dagger$ debería ser a identidade salvo factores de fase constantes que denotamos previamente como κ_{ij}^{pq} , resultantes da combinación dos diferentes factores de fase presentes nas submatrices involucradas no produto.

3.3. Optimización da función de custo

A función de custo caracteriza o entrelazamento dun qubit con respecto aos demais, logo ao minimizar a función de custo buscamos un mínimo global (o cero). O proceso de optimización consiste nunha minimización iterativa na que se manteñen constantes os parámetros de todas as capas salvo unha que se optimiza e actualiza en cada paso.

Así só se utilizan poucos parámetros en cada paso de optimización (4 en cada layer ou n na capa de rotacións finais). Este procedemento secuencial permite achegarse ao mínimo global da función de custo buscando sucesivos mínimos relativos no gran espazo de parámetros que temos¹² e repítese ata acadar ou ben o máximo global da función de custo ou ben ata cumprir uns criterios de tolerancia entre iteracións sucesivas ou un certo umbral de converxencia; isto é, un valor da función de custo suficientemente próximo ao cero (épsilon).

No período de prácticas tratamos de implementar en Python o algoritmo para tratar de reproducir os resultados presentados en [5] para o operador da QFT. Dado que tiñamos que lograr recrear dito operador sen chegar a utilizar máis de n^2 portas controladas, á hora

¹²Notar que dado que todos os parámetros que utiliza a estrutura desentrelazadora están asociados únicamente rotacións R_x, R_y e R_z , estarán limitados ao intervalo $[0, \pi]$ todos eles.

de fixar o número de ciclos que usaríamos; i.e., o número de veces que repetiríamos as layers que desentrelazarían cada qubit do resto, consideramos únicamente o conxunto de posibilidades combinatorias que permitían manter un número de portas controladas inferior á cota establecida. Exemplifiquemos co caso de $n = 3$ qubits.

Nº de ciclos para desentrelazar $ q_2\rangle$ de $ q_1q_0\rangle$ (cada layer ou capa ten 2 portas controladas)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
Nº de ciclos para desentrelazar $ q_1\rangle$ de $ q_0\rangle$ (cada layer ou capa ten 1 porta controlada)	3	4	5	6	1	2	3	4	1	2
custo total (< 9) (nº de puertas controladas utilizadas)	5	6	7	8	5	6	7	8	7	8

Tabla 1: Posibles combinacións do nº de ciclos de capas para formar a estrutura desentrelazadora con $n = 3$ qubits. Salientamos dúas posibilidades que exemplificaremos a continuación.

Para ver máis claramente explicitamos o circuío correspondente á primeira (figura 5) e antepenúltima (figura 6) configuración (columnas descrita na táboa 1).

Nas figuras que se presentan a continuación, cada porta cuántica de rotación que forma parte dunha layer está etiquetada como $iX_j - k$ onde X é o parámetro correspondente á porta cuántica de rotación concreta da k -ésima layer que forma parte do i -ésimo ciclo que desentrelaza o qubit número $|j\rangle$ dos restantes. Notar ademais que o conxunto de ciclos que desentrelazan diferentes qubits están separados por 3 barreiras, os diferentes ciclos que desentrelazan un mesmo qubit por 2 barreiras e as layers dentro dun mesmo ciclo por 1 barreira, todo isto para facilitar a comprensión estrutural do circuío.

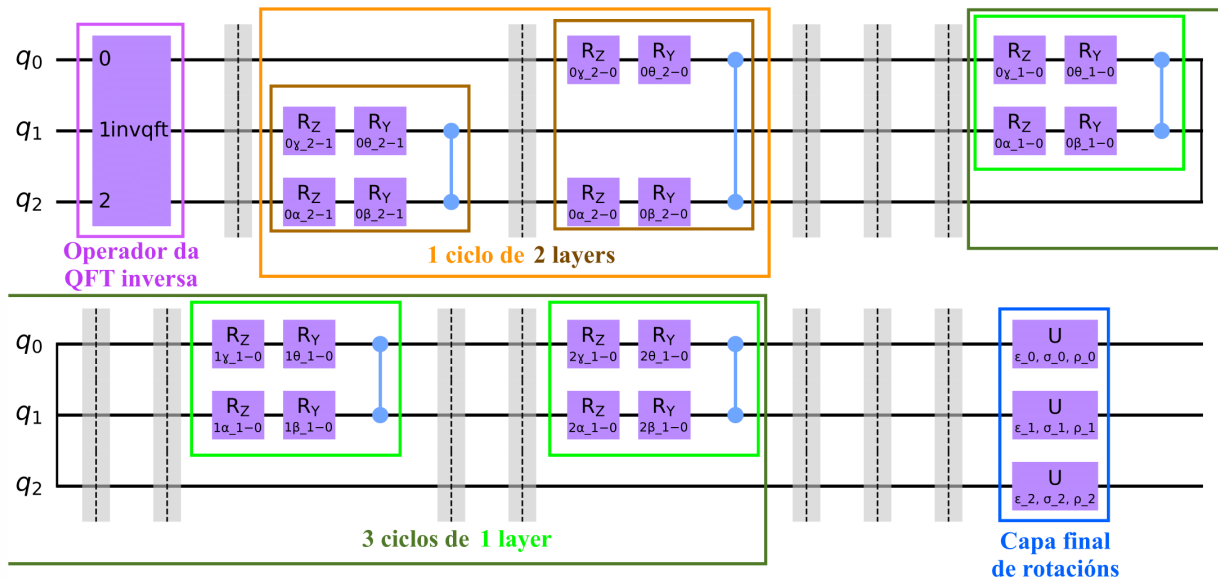


Figura 5: Estrutura desentrelazadora total usando portas CZ compuesta por 1 ciclo (de 2 layers) para desentrelazar $|q_2\rangle$ de $|q_1q_0\rangle$ e 3 ciclos (de 1 layer) para desentrelazar $|q_1\rangle$ de $|q_0\rangle$.

mala regularidade da función de custo.

Inicialmente tratamos de resolver o problema engadindo a capa final de rotacións ao operador \overline{U} , pero isto resultaba nunha solución ineficiente: máis inestabilidade dependendo dos valores iniciais dos parámetros e maior lentitude do optimizador¹⁴. Sen embargo, en múltiples ocasións resolvía o problema por completo logrando un operador aproximado funcional, pero tamén daba lugar a casos nos que a función de custo acadaba un mínimo global nulo e aínda así non reproducía o comportamento do operador U a factorizar; i.e. o operador conxunto $U \cdot V^\dagger$ non resultaba similar á identidade.

Para asegurarnos de poder diferenciar os mínimos globais que non reproducían o comportamento do operador a factorizar U consideramos dúas distancias diferentes no espazo de operadores asociado ao espazo de Hilbert \mathcal{H} dos qubits.

	<i>Norm based metric</i>	<i>Gate fidelity</i>
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}}(A, B) = 1 - \frac{1}{d^2} \left \text{Tr} \left(B^\dagger A \right) \right ^2$	$\overline{F}_{\text{HST}}(A, B) = 1 - \frac{d}{d+1} C_{\text{HST}}(A, B)$
Frobenius	$C_F(A, B) = \frac{1}{2} \ B - A\ _F^2 = d - \text{Re} \left[\text{Tr} \left(A^\dagger B \right) \right]$	$\overline{F}_F(A, B) = 1 - \frac{d}{d+1} + \frac{1}{d(d+1)} [d - f(A, B)]^2$

Tabla 2: Distancias métricas e medida da fidelidade¹⁵ para dous operadores ou portas cuánticas A e B de dimensións $d \times d$.

Pódese ver que en xeral cúmprese que $\overline{F}_{\text{HST}}(A, B) \leq \overline{F}_F(A, B)$ en [12]. Ambas medidas son altamente utilizadas no contexto de funcións de custo pola sinxeleza que teñen para ser avaliadas e para obter expresións analíticas do gradiente en función dos parámetros libres que correspondan.

Para tratar de paliar esta aparición de mínimos globais que carecesen de sentido, decidimos engadir un sumando á función de custo consistente nunha norma ou distancia métrica entre operadores que avalíase a distancia entre os operadores U e V ou equivalentemente entre o operador correspondente ao circuíto total $U \cdot V^\dagger$ e a identidade \mathbb{I} .

$$f_{\text{custo}} \left(\overline{U}, U, V \right) = f_d \left(\overline{U} \right) + C_F(U, V) \quad (7)$$

Con esta lixeira corrección conseguimos eliminar os casos patolóxicos nos que a función de custo presentaba un mínimo que non era consistente co que buscábamos aínda que ralenizando en ocasións a rapidez do optimizador.

¹⁴Isto é esperable dado que implica un maior número de operacións para calcular o operador total $U \cdot V^\dagger$ en cada paso da optimización.

¹⁵Enténdese por *gate fidelity* unha medida comparativa entre a aplicación dunha porta cuántica e a correspondente porta ideal, para máis información ver [11].

3.4. Factorización do operador QFT

Debido á alta inestabilidade do algoritmo¹⁶, non logramos factorizar o operador QFT para máis de 3 qubits. Sen embargo, conseguimos factorizar exitosamente o operador da QFT para o caso tanto de 2 qubits (que non é gran cousa, pois é esencialmente unha porta Hadamard) como para 3 qubits utilizando tanto portas CNOT como CZ.

Presentamos a continuación a forma do operador V aproximado en cada caso, así como o erro estimado da descomposición e varios exemplos nos que se compara a utilización do operador da QFT que inclúe QisKit fronte ao noso experimental para casos 2 e 3 qubits. Notar que únicamente se mostran dúas factorizacións para 2 qubits e outras dúas para 3 qubits, as que resultaron utilizar menor número de portas controladas, aínda que usando máis portas controladas tamén houbo converxencia e factorización exitosa.

Recordar que polo método descrito constrúese un operador V que é inverso¹⁷ aproximadamente ao operador U a factorizar.

3.4.1. 2 qubits: descomposición con portas CZ

Requeríronse polo menos 3 ciclos para desentrelazar os 2 qubits.

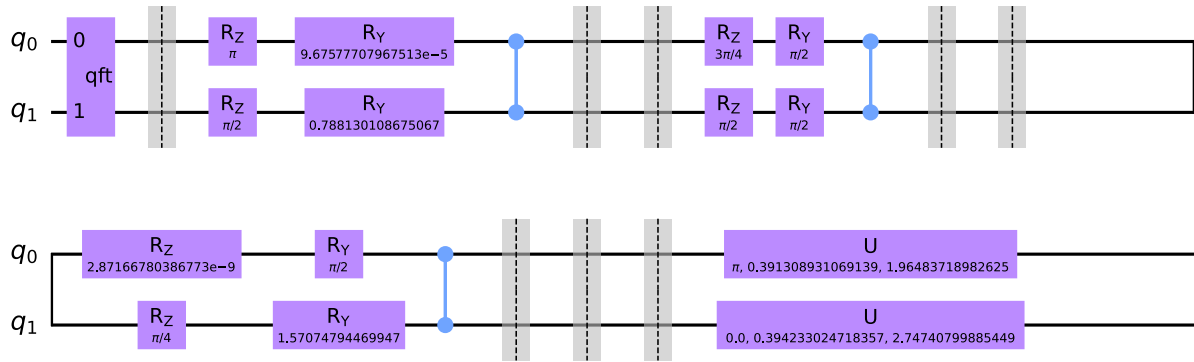


Figura 7: Circuito completo cos parámetros óptimos para desentrelazar o operador QFT de 2 qubits con portas CZ.

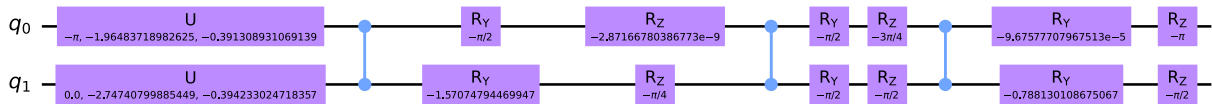


Figura 8: Forma do operador aproximado $V_{2 \text{ qubits}}^{CZ}$.

¹⁶Enténdase que a converxencia non era boa nin suficientemente rápida e remataba con frecuencia nun mínimo local, agás nos casos no que os valores iniciais aleatorios dados aos parámetros inicializaban a función de custo total nun valor baixo.

¹⁷Todos os operadores aos que se fai referencia son unitarios, logo tomar o hermítico conxugado ou *dagger* (\dagger) é equivalente a facer o inverso.

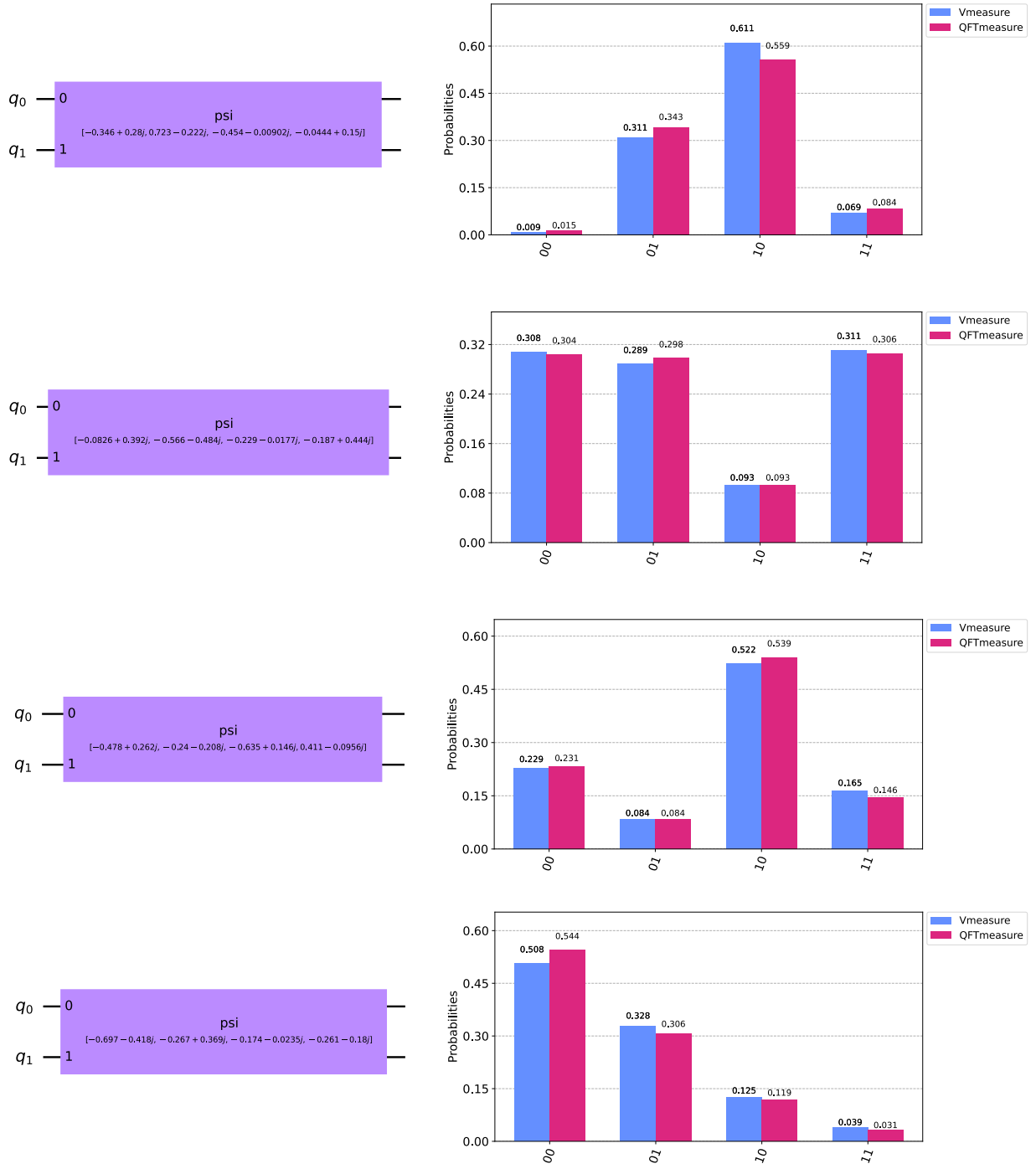


Figura 9: Comparativa de rendimiento entre o operador aproximado $V_{2 \text{ qubits}}^{\text{CZ}}$ e o operador QFT para 4 estados iniciales aleatorios.

	Norm based metric	Gate fidelity	Función de custo	
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}} = 1,170 \times 10^{-9}$	$\overline{F}_{\text{HST}} \gtrapprox 99 \%$	f_d	f_{custo}
Frobenius	$C_F = 2,34 \times 10^{-9}$	$\overline{F}_F \gtrapprox 99 \%$	$1,872 \times 10^{-8}$	$2,106 \times 10^{-8}$

Tabla 3: Erro de descomposición e custo asociado, para 2 qubits usando portas CZ.

3.4.2. 2 qubits: descomposición con portas CNOT

Requeríronse polo menos 3 ciclos para desentrelazar os 2 qubits do mesmo modo que coas portas CZ.

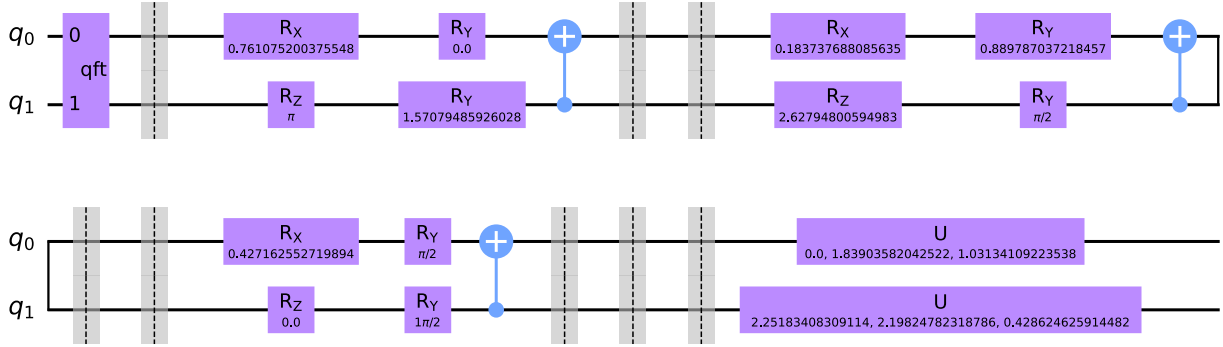


Figura 10: Ciriúto completo cos parámetros óptimos para desentrelazar o operador QFT de 2 qubits con portas CNOT.

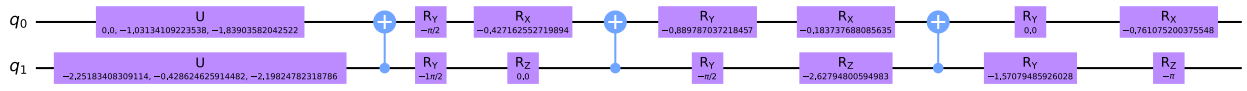
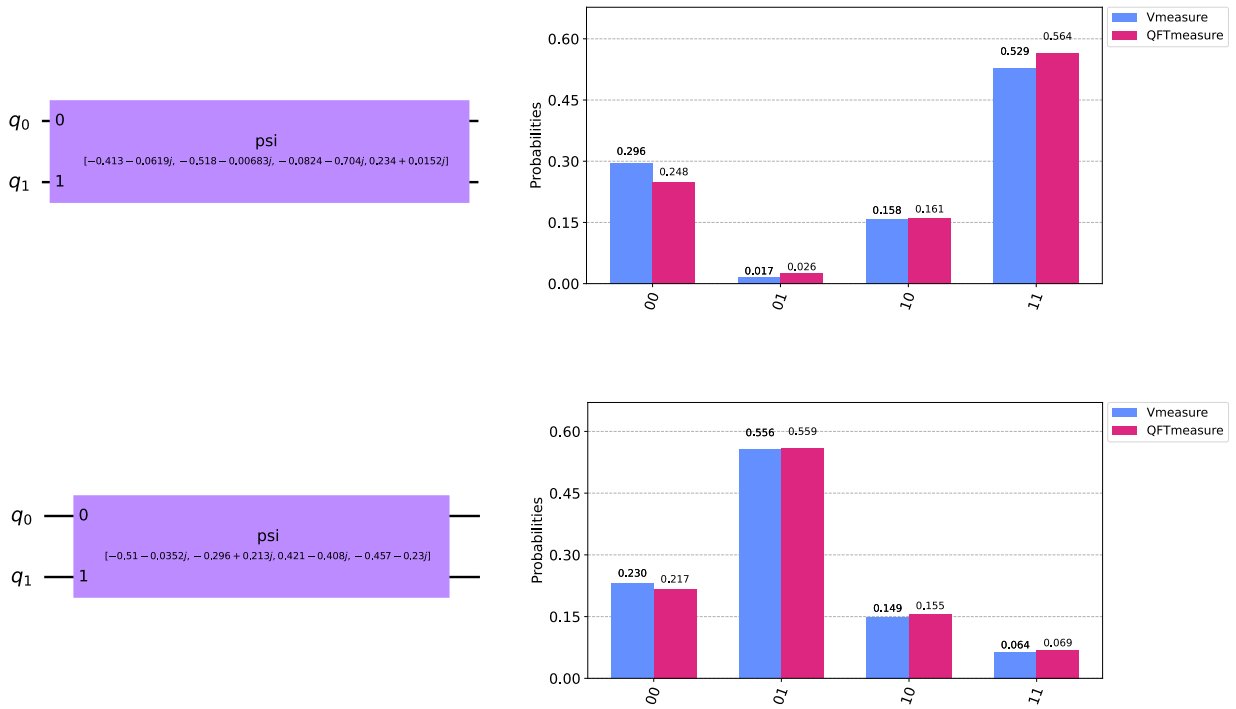


Figura 11: Forma do operador aproximado $V_{2 \text{ qubits}}^{\text{CNOT}}$.



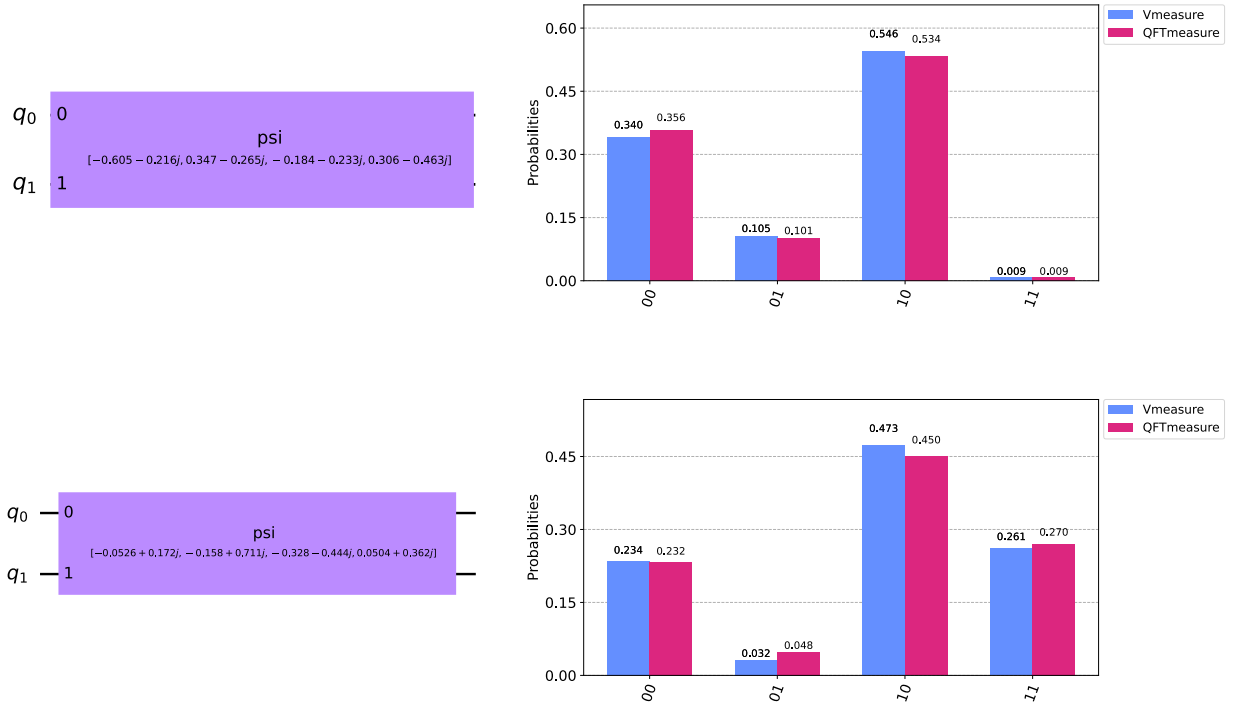


Figura 11: Comparativa de rendimento entre o operador aproximado $V_{2 \text{ qubits}}^{\text{CNOT}}$ e o operador QFT para 4 estados iniciais aleatorios.

	<i>Norm based metric</i>	<i>Gate fidelity</i>	Función de custo	
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}} = 4,629 \times 10^{-7}$	$\overline{F}_{\text{HST}} \gtrsim 99 \%$	f_d	f_{custo}
Frobenius	$C_{\text{F}} = 1,070 \times 10^{-6}$	$\overline{F}_{\text{F}} \gtrsim 99 \%$	$7,381 \times 10^{-8}$	$1,078 \times 10^{-6}$

Tabla 4: Erro de descomposición e custo asociado, para 2 qubits usando portas CNOT.

3.4.3. 3 qubits: descomposición con portas CZ

A configuración que resultou máis óptima da táboa 1 foi: 3 ciclos (de 2 capas cada un) para desentrelazar un qubit dos outros dous e 1 ciclo (de 1 capa) para desentrelazar os dous qubits restantes, supoñendo un total de 7 portas controladas (3+1). Neste caso concreto atopamos 2 conxuntos de parámetros diferentes coa mesma configuración desentrelazadora que reproducían o operador QFT para 3 qubits.

3.4.3.1 Configuración 1

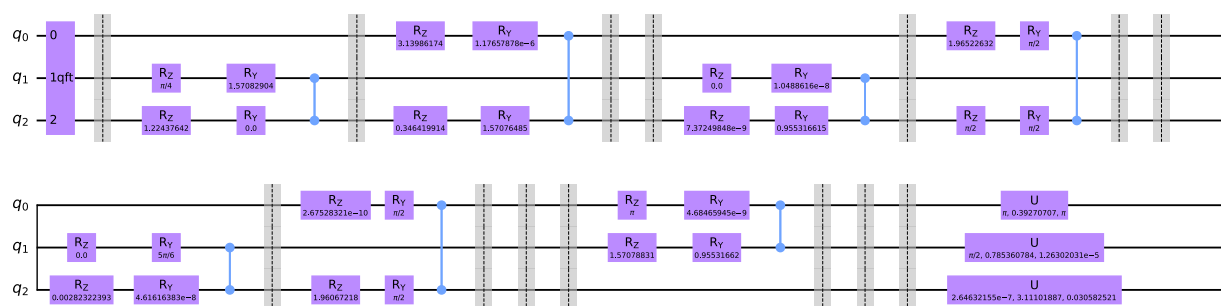


Figura 12: Circuito completo cos parámetros óptimos para desentrelazar o operador QFT de 3 qubits con portas CZ.

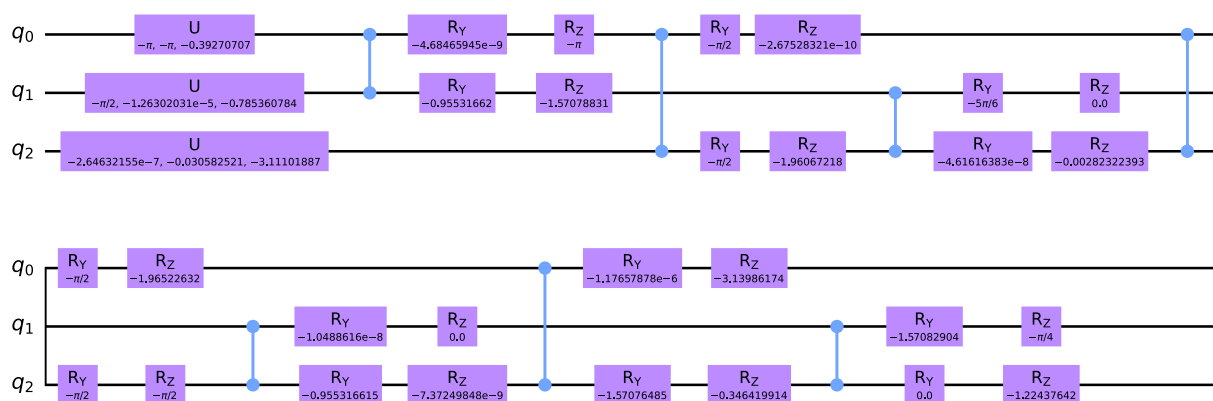


Figura 13: Forma do operador aproximado $V_{3 \text{ qubits}}^{\text{CZ}}$.

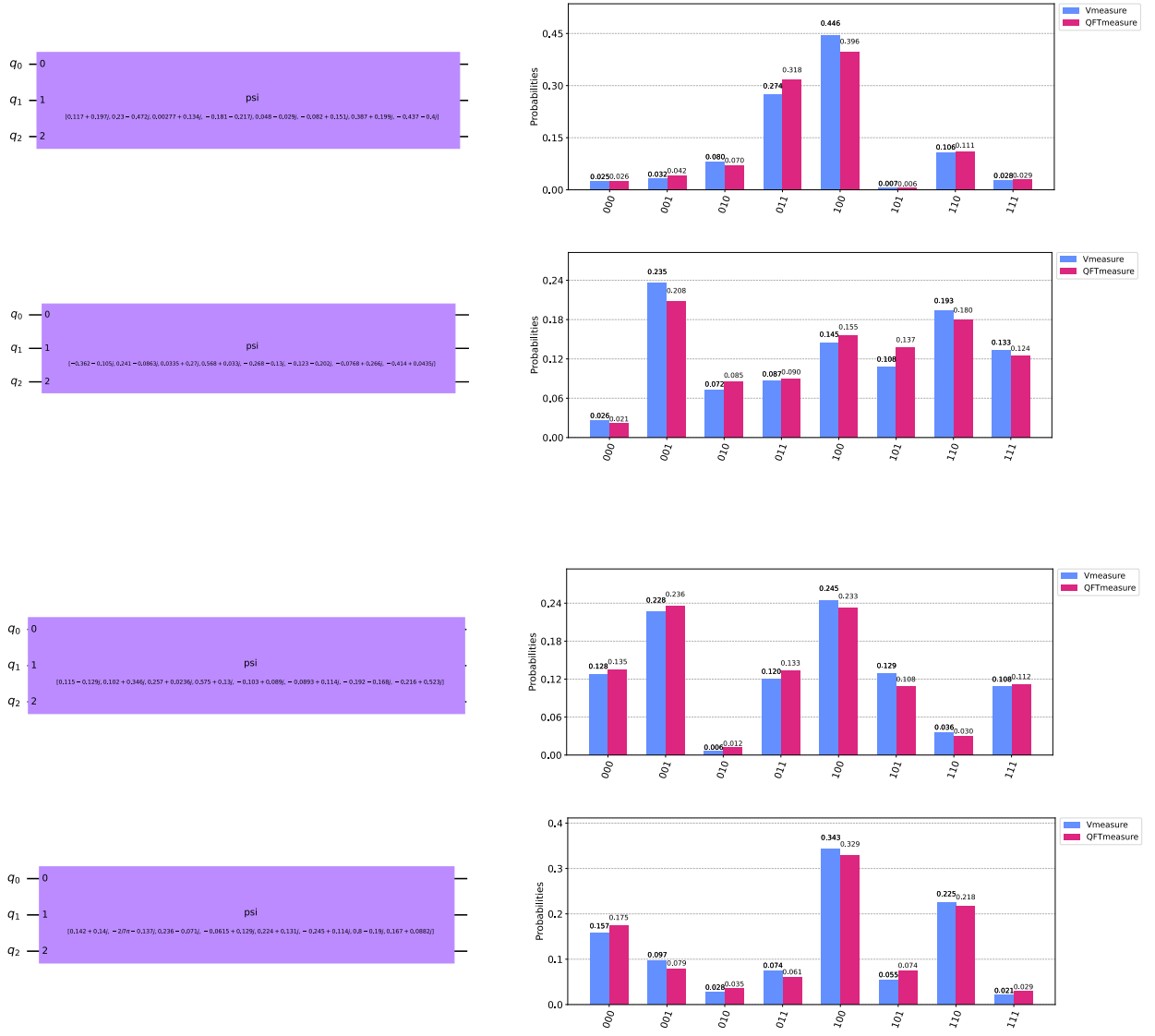


Figura 13: Comparativa de rendimento entre o operador aproximado $V_{CZ}^{3 \text{ qubits}}$ e o operador QFT para 4 estados iniciais aleatorios.

	<i>Norm based metric</i>	<i>Gate fidelity</i>	Función de custo	
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}} = 7,522 \times 10^{-11}$	$\overline{F}_{\text{HST}} \gtrapprox 99 \%$	f_d	f_{custo}
Frobenius	$C_F = 3,653 \times 10^{-10}$	$\overline{F}_F \gtrapprox 99 \%$	$8,812 \times 10^{-12}$	$3,741 \times 10^{-10}$

Tabla 5: Erro de descomposición e custo asociado, para 3 qubits usando portas CZ.

3.4.3.2 Configuração 2

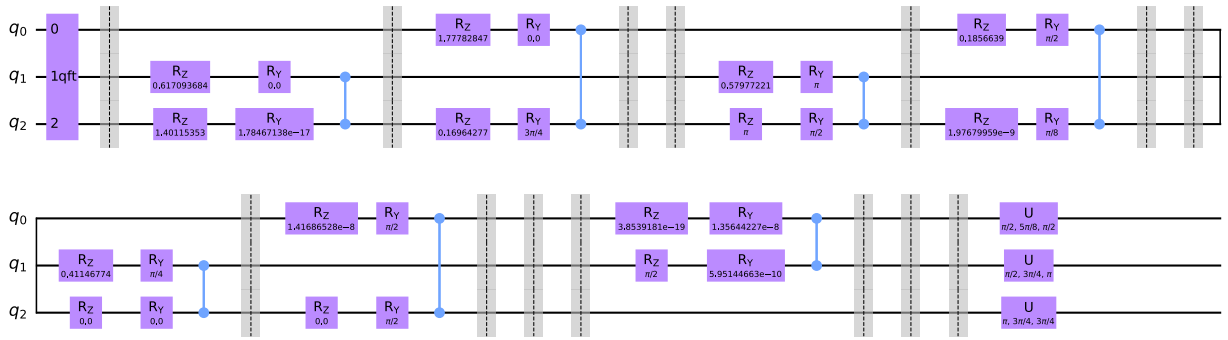


Figura 14: Circuito completo com parâmetros ótimos para desentrelazar o operador QFT de 3 qubits com portas CZ.

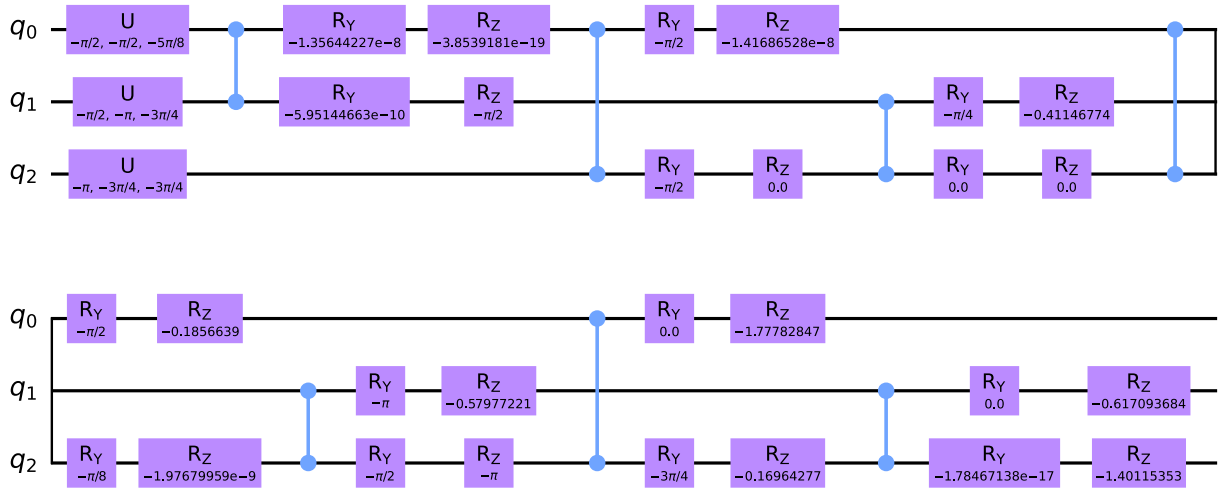
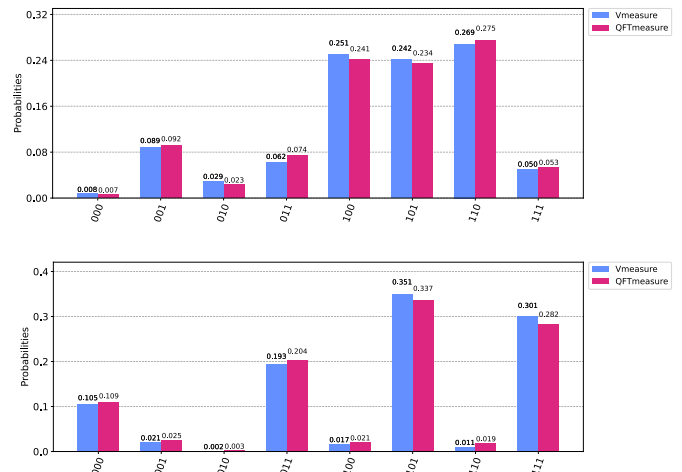
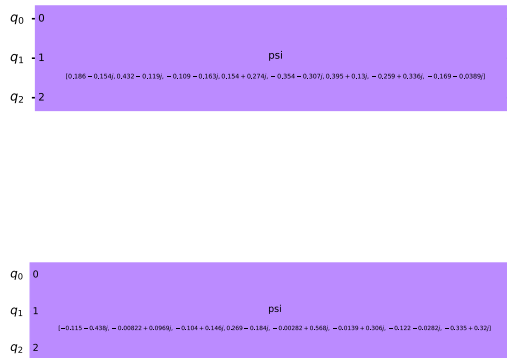


Figura 15: Forma do operador aproximado V_3^{CZ} qubits.



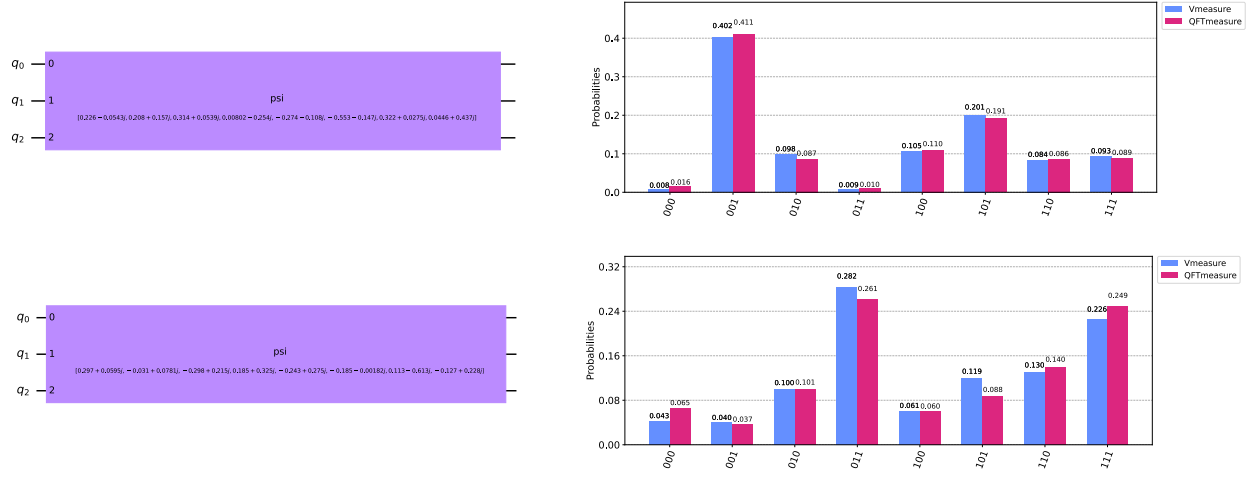
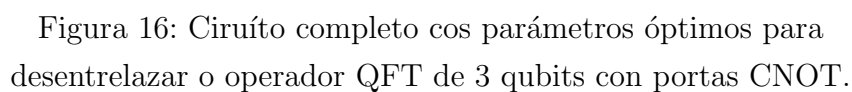


Figura 15: Comparativa de rendimento entre o operador aproximado V_3^{CZ} e o operador QFT para 4 estados iniciais aleatorios.

	<i>Norm based metric</i>	<i>Gate fidelity</i>	<i>Función de custo</i>	
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}} = 1,156 \times 10^{-12}$	$\overline{F}_{\text{HST}} \gtrapprox 99\%$	f_d	f_{custo}
Frobenius	$C_F = 4,628 \times 10^{-12}$	$\overline{F}_F \gtrapprox 99\%$	$4,776 \times 10^{-15}$	$4,632 \times 10^{-12}$

Tabla 6: Erro de descomposición e custo asociado, para 3 qubits usando portas CZ.

A configuración que resultou óptima da táboa 1 foi a mesma que a exposta na sección previa.



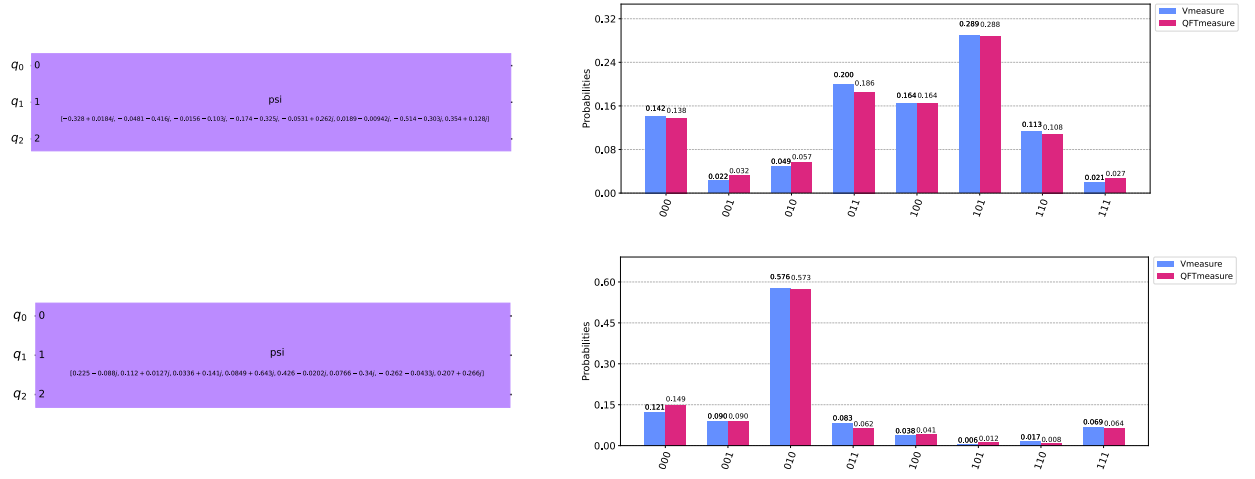


Figura 17: Comparativa de rendimento entre o operador aproximado V_3^{CNOT} e o operador QFT para 4 estados iniciais aleatorios.

	<i>Norm based metric</i>	<i>Gate fidelity</i>	Función de custo	
Hilbert-Schmidt	$C_{\text{HST}} = 5,156 \times 10^{-13}$	$\overline{F}_{\text{HST}} \gtrapprox 99\%$	f_d	f_{custo}
Frobenius	$C_F = 2,073 \times 10^{-12}$	$\overline{F}_F \gtrapprox 99\%$	$8,170 \times 10^{-12}$	$1,024 \times 10^{-11}$

Tabla 7: Erro de descomposición e custo asociado, para 3 qubits usando portas CNOT.

3.5. Conclusións e posibles futuras continuacións

A metodoloxía implementada baseándonos no traballo presentado en [5, 6] non resulta adaptarse de forma satisfactoria para o noso propósito, obter un operador QFT sinxelo e implementable con poucas portas controladas. Hai un claro problema na escalabilidade do método usado, posto que para o caso de 4 qubits o algoritmo non chega a minimizar a función de custo. Isto é un indicativo da imposibilidade de realizar dito operador de forma aproximada con un número de portas controladas inferior a 16 polo método utilizado ou en xeral.

Hai que salientar que o método si permitiría factorizar calquera operador usando un número de capas e ciclos suficientemente alto (e por tanto de portas controladas CZ ou CNOT), pero no caso que nos concirne estamos limitados pola cota superior de n^2 portas controladas.

Ademais, outras sutilezas e detalles que non abordamos así como comentarios sobre ideas que sería de interese tratar son as seguintes:

- O algoritmo usado basease nun proceso de optimización exclusivamente clásico. Podería explorarse a opción de traducir a metodoloxía a un problema variacional que se resolvese usando algoritmos híbridos de tipo clásico-cuánticos.
- A estrutura de capas ou layers proposta non se adapta facilmente a posibles topoloxías concretas de ordenadores cuánticos; i.e. o proceso de desentrelazamento dun qubit dos demais require da aplicación de polo menos unha porta controlada a cada un dos restantes qubits. Se ben é certo que mediante a introdución de portas SWAP poderíase solventar o problema de adaptabilidade a unha topoloxía de circuío concreta, estaríamos a aumentar a profundidade cuántica e complexidade do mesmo, co cal non melloraríamos a situación. Como posible solución a este problema podería ser a procura dunha estrutura de layers diferentes.
- O enfoque seguido neste proxecto baseábase exclusivamente no operador e establecendo unha función de custo con respecto ao mesmo. Sería interesante atacar o problema desde a perspectiva dos estados iniciais e resultantes; isto é, establecer unha función de custo entre a entrada e saída do circuío que permitise reaxustar os parámetros do mesmo ata lograr que o circuío recuperase ao final o estado inicial usado. Realizando este procedemento con múltiples estados iniciais (polo menos os da base canónica asociados ao número de qubits), podería valorarse se é posible a construción de dito operador aproximado.

En calquera caso, este proxecto pon de manifesto a importancia que pode ter obter unha factorización sinxela para operadores que son de gran utilidade e uso no contexto da emerxente computación cuántica. Unha posible extensión la liña de estudo da factorización

de operadores é a construción de metaoperadores; isto é, operadores que son paramterizados e que sería de interese poder aproximar por estruturas de portas cuánticas sinxelas.

4. Conexión do Grao en Física coas prácticas

Para a realización deste proxecto de prácticas tiven que formarme adecuadamente en Python, posto que no programa do dobre grao de Matemáticas e Física non se contempla o uso de Python como linguaxe de programación aínda que si doutras como Matlab e Fortran. Tamén tiven que revisitar QisKit e o funcionamento dos principais paquetes que ten cos que se constrúen e implementan os circuitos cuánticos así como algunhas nocións relativas á métodos variacionais aplicados á computación cuántica que podían ser de utilidade de cara ao proxecto inicialmente.

Nas primeiras semanas foi de gran utilidade consultar tanto o QisKit online textbook [13] como o curso online impartido por Elias Fernandez-Combarro *A practical introduction to quantum computing: from qubits to quantum machine learning and beyond*.

A comprensión tanto do marco da computación cuántica como da idea da función de custo que se implementa en [6] que constitúe o core do proceso de descomposición en portas cuánticas sinxelas que abordamos, require de coñecementos básicos de Física Cuántica e por extensión de Álgebra Lineal e Espazos de Hilbert que se adquiren no grao.

En resumo, a conexión do proxecto de prácticas cos contidos do grao en física é clara. O estudo e desenvolvemento dun algoritmo no marco da computación cuántica require de coñecementos aos que se pode acceder facilmente coa base físico-matemática que aporta o grao. De cara a implementación do mesmo, se ben é certo que a programación non é un dos principais contidos do grao, é algo imprescindible de cara a facer probas ou simulacións sobre practicamente calquer tema en física hoxe en día.

Outros coñecementos e actividades nas que participei durante a miña estancia no CESGA foron:

- Comprensión do funcionamento do Finisterrae III e por extensión do sistema de colas ao que accedía para executar os programas creados.
- Familiarización co funcionamento do protocolo SSH para acceder ao Finisterrae III.
- Asistencia a varias charlas relacionadas coa computación cuántica impartidas telemáticamente no CESGA.
- Visita explicativa polas instalacións do CESGA para ver principiamente os supercomputadores Finisterrae II e III.

Por último mencionar que no anexo en 6.4 se adxunta o código e material relacionado utilizado durante o proxecto de prácticas.

5. Valoración das prácticas

No referente ao meu paso polo CESGA, as prácticas resultaron ser unha moi boa experiencia e acercamento ao mundo laboral. Ademais de ter a posibilidade de aplicar os meus coñecementos teóricos e iniciarme no mundo da computación cuántica, adquirín a idea xeral de como funciona unha empresa.

Resultoume moi desafiante e divertido o feito de que se me presentase un problema xunto con documentación moi recente relativa ao mesmo, e tivese o desafío de intentar reproducilo. Tamén hai que recordar a presenza de factores externos como a COVID-19 que dificultaron notablemente o desenvolvemento do proxecto.

Persoalmente penso que ver como pouco a pouco vai progresando o proxecto, van aparecendo os primeiros resultados (aínda que sexan erróneos) e como vas superando os problemas que van xurdindo co código á vez que vas aprendendo deles é unha experiencia moi gratificante. Como estudante *undergraduate* non é moi frecuente que poidas traballar en temas tan recentes, como tiven oportunidade.

Finalmente, gustaríame agradecer ao meu titor Andrés Gómez Tato pola paciencia que tivo comigo e pola súa axuda coa comprensión e visión global do proxecto de prácticas; a Gonzalo Ferro Costas, pola súas aportacións con gran parte das dúbidas referentes á implementación do código realizada principalmente; a Mariamo Mussa Juane, polos materiais e numerosa documentación que me aportou durante as primeiras semanas; ao grupo de rapaces incorporados ao proxecto REACT-EU, cos que puideron comentar tamén as dúbidas que me ían xurdindo e por suposto, ao resto do persoal do CESGA que tamén me axudaron durante a miña estadía no centro especialmente a Antón Ambroa Abalo, Alejandro Feijóo Fraga e Juan Villasuso Barreiro.

6. Anexo

6.1. Portas cuánticas de 1 e 2 qubits fundamentais

Os circuítos cuánticos son esencialmente a realización de ou os propios operadores do espazo de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_n \mathbb{C}^2$ de n qubits. Para poder construílos é necesario o uso de operadores unitarios máis sinxelos, as portas cuánticas. Algunhas das máis coñecidas que mencionaremos ao longo da memoria son:

Notar que a base usadas para describir as portas cuánticas será a canónica de \mathcal{H} ; i.e.

$$B_z^{\otimes n} = \{ |l\rangle \}_{l=0}^{2^n-1}, \quad l = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i q_i, \quad q_i \in \{0, 1\}$$

- Porta Z :

$$q \text{ --- } \boxed{Z} \text{ ---} \quad Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

- Porta X ou NOT:

$$q \text{ --- } \boxed{X} \text{ ---} \quad X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

- Porta Y :

$$q \text{ --- } \boxed{Y} \text{ ---} \quad Y = i |1\rangle\langle 0| - i |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

- Porta Hadamard, H :

$$q \text{ --- } \boxed{H} \text{ ---} \quad H = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Onde $\mathcal{B}_x = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, con $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \pm |1\rangle]$.

- Rotación en Z, R_z :

$$q \text{ --- } \boxed{\text{R}_z}_{\lambda} \text{ ---} \quad R_z(\lambda) = \exp\left(-i\frac{\lambda}{2}Z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

- Rotación en X, R_x :

$$q \text{ --- } \boxed{\text{R}_x}_{\theta} \text{ ---} \quad R_x(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}X\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

- Rotación en Y, R_y :

$$q \text{ --- } \boxed{\text{R}_y}_{\theta} \text{ ---} \quad R_y(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}Y\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

- Rotación xeral, porta U ou $U3$:

$$q \text{ --- } \boxed{\text{U}}_{\theta, \varphi, \lambda} \text{ ---} \quad U(\theta, \varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{i\lambda}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i(\varphi+\lambda)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (15)$$

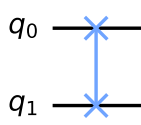
- Porta CZ :

$$\begin{array}{c} q_0 \text{ --- } \bullet \\ | \\ q_1 \text{ --- } \bullet \end{array} \quad CZ_{q_1, q_0} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

- Porta CX ou $CNOT$:

$$\begin{array}{c} q_0 \text{ --- } \bullet \\ | \\ q_1 \text{ --- } \oplus \end{array} \quad CX_{q_0, q_1} = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

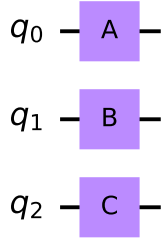
- Porta *SWAP*:



$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

6.2. Convención de significación para qubits de QisKit

Seguindo o convenio de QisKit, dado un estado arbitrario $|q_{n-1} \dots q_0\rangle$, se sitúa ao qubit menos significativo (least significant bit, LSB) $|q_0\rangle$ ao principio do circuío e ao máis significativo (most significant bit, MSB) $|q_{n-1}\rangle$ ao final.



$$(C \otimes B \otimes A) |q_2 q_1 q_0\rangle = C|q_2\rangle \otimes B|q_1\rangle \otimes A|q_0\rangle, \quad (19)$$

onde $|q_2\rangle$ é o MSB e $|q_0\rangle$ o LSB.

6.3. Transformada de Fourier Cuántica (QFT)

A transformada de Fourier cuántica (QFT) non é máis que a coñecida transformada de Fourier discreta clásica (DFT) aplicada a un vector de lonxitude $N = 2^n$ (onde n é o número de qubits).

Trátase polo tanto dunha transformación lineal e unitaria que leva un vector da forma $\vec{x} \equiv |x\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x^j |j\rangle$ noutro $\vec{y} \equiv |y\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y^k |k\rangle$, onde $\mathcal{B}_z = \{|j\rangle\}_{j=0}^{N-1}$ é a base canónica do espazo de Hilbert N dimensional, como segue

$$y^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} [\omega_N]_j^k x^j, \quad \implies \quad |y\rangle = U_{\text{QFT}} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} [\omega_N]_j^k x^j |k\rangle, \quad (20)$$

$$\text{con } [\omega_N]_j^k = \left[e^{2\pi i \frac{jk}{N}} \right]_j^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Pode deducirse así a expresión xeral do operador QFT:

$$U_{\text{QFT}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} [\omega_N]_j^k |k\rangle \langle j|. \quad (22)$$

Tendo em conta de que no caso particular em que $|x\rangle = |j\rangle$, pode verse que

$$\mathcal{U}_{\text{QFT}}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} [\omega_N]_j^k |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left\{ |0\rangle + e^{i\frac{2\pi}{2^n}j} |1\rangle \right\}, \quad j \in \{0, \dots, N-1\} \quad (23)$$

Temos por tanto dúas bases do espazo de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_n \mathbb{C}^2$ de n qubits relacionadas pola QFT:

$$\mathcal{B}_z = \{|j\rangle\}_{j=0}^{N-1} \longleftrightarrow \mathcal{B}_{\text{QFT}} = \{\text{U}_{\text{QFT}}|j\rangle\}_{j=0}^{N-1} \quad (24)$$

A expresión máis xeral posible para a actuación do operador¹⁸ U_{QFT} sobre un vector arbitrario será por tanto:

$$\mathbf{U}_{\text{QFT}}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} [\omega_N]_j^k x^j |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} x^j \left[\bigotimes_{l=0}^{n-1} \left(|0\rangle + e^{i\frac{2\pi}{2^n}j} |1\rangle \right) \right] \right\} \quad (25)$$

A implementación da QFT nun circuío cuántico admite varias realizacións equivalentes, unha delas é a seguinte¹⁹ onde o estado inicial é $|x\rangle = |x_{n-1} \dots x_1 x_0\rangle$.

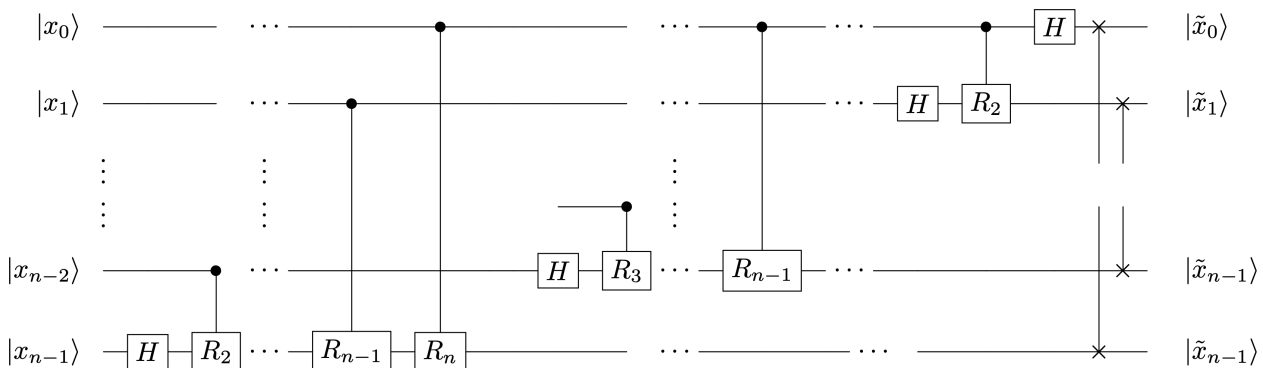


Figura 18: Esquema da implementación da transformada de Fourier cuántica sobre n qubits.

Nótese que a implementación do operador QFT require n portas Hadamard, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ rotacións contraladas e $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ portas SWAPS.

Pode consultarse información máis detallada acerca da mesma en [14].

¹⁸Notar que o operador unitario será en esencia unha matriz de dimensións $2^n \times 2^n$.

¹⁹Utiliza portas Hadamard H ; rotacións controladas, denotadas por $R_{(\cdot)}$ e portas SWAP, sinaladas cun \times .

6.4. Repositorio cos notebooks de Python e demais ficheiros de utilidade

Pódese consultar aquí unha carpeta contendo un notebook de Python (“QGD.ipynb”) con todo o código utilizado para reproducir os resultados presentados nesta memoria así como algunha documentación de repaso relacionada coa computación cuántica elaborada durante o período de prácticas e diferentes gráficas e arquivos de proba.

Os arquivos “.txt” conteñen o diccionario de parámetros dos correspondentes circuítos cuánticos que se cargan ao final do notebook.

As carpetas “2qubits_results” e “3qubits_results” inclúen os resultados das factorizacións amosados nesta memoria.

A carpeta “Run_example” contén unha optimización executada no Finisterrae III cun ficheiro “launch_3_1_cz_3qubits.sh” que lanza a execución do arquivo “3qbit_cz_3-1.py” que reúne a execución do proceso de optimización coas funcións do notebook condensadas no arquivo “QGD_functions.py”.

Referencias

1. CESGA - Centro de Supercomputación de Galicia <https://www.cesga.es/>.
2. Jozsa, R. Quantum algorithms and the Fourier transform. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **454**, 323-337. <https://doi.org/10.1098%5C%2Frspa.1998.0163> (ene. de 1998).
3. Vartiainen, J. J., Möttönen, M. y Salomaa, M. M. Efficient Decomposition of Quantum Gates. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 177902. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.177902> (17 abr. de 2004).
4. Shende, V., Bullock, S. y Markov, I. Synthesis of quantum-logic circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* **25**, 1000-1010. <https://doi.org/10.1109%5C%2Ftcad.2005.855930> (jun. de 2006).
5. Rakyta, P. y Zimborás, Z. *Efficient quantum gate decomposition via adaptive circuit compression* 2022. <https://arxiv.org/abs/2203.04426>.
6. Shende, V. V., Markov, I. L. y Bullock, S. S. Minimal universal two-qubit controlled-NOT-based circuits. *Phys. Rev. A* **69**, 062321. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062321> (6 jun. de 2004).
7. Jozsa, R. Quantum algorithms and the Fourier transform. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **454**, 323-337. <https://doi.org/10.1098%5C%2Frspa.1998.0163> (ene. de 1998).
8. Nam, Y., Su, Y. y Maslov, D. Approximate quantum Fourier transform with $O(n \log(n))$ T gates. *npj Quantum Information* **6**. <https://doi.org/10.1038%5C%2F41534-020-0257-5> (mar. de 2020).
9. Rakyta, P. y Zimborás, Z. Approaching the theoretical limit in quantum gate decomposition. *Quantum* **6**, 710. <https://doi.org/10.22331%5C%2Fq-2022-05-11-710> (mayo de 2022).
10. Iten, R., Colbeck, R., Kukuljan, I., Home, J. y Christandl, M. Quantum circuits for isometries. *Physical Review A* **93**. <https://doi.org/10.1103%5C%2Fphysreva.93.032318> (mar. de 2016).
11. Shukla, A., Sisodia, M. y Pathak, A. Complete characterization of the directly implementable quantum gates used in the IBM quantum processors. *Physics Letters A* **384**, 126387. ISSN: 0375-9601. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960120302139> (2020).
12. Madden, L. y Simonetto, A. *Best Approximate Quantum Compiling Problems* 2021. <https://arxiv.org/abs/2106.05649>.

13. Abbas, A. *et al.* *Learn Quantum Computation Using Qiskit* <http://community.qiskit.org/textbook>.
14. Nielsen, M. A. y Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* 10th, 216-221. ISBN: 1107002176 (Cambridge University Press, USA, 2011).