Topología Algebraica

Rufino López

2024-2025

1. Homología Celular

Definición 1.1. Dados (X,T), (Y,T') espacios topológicos y $f: A \subset X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se define el espacio de adjunción de X e Y a lo largo de (f,A) como $X \cup_f Y = \dfrac{X \sqcup Y}{\sim}$, donde $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ e identificando $(x,0) \equiv x \in X$, $(y,1) \equiv 1 \in Y$, $x \sim y \iff x \in A \wedge y \in Y \wedge f(x) = y$.

Definición 1.2. Una n-célula abierta es un espacio, e^n, homeomorfo a $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$.

Nota 1.1. Denotaremos $D^n = ad(B^n)$ y $S^{n-1} = fr(D^n)$.

Definición 1.3. CW-complejo. Sea X un espacio topológico y sea $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq ...$ una sucesión de subconjuntos de X satisfaciendo:

1. $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$.
2. X_0 tiene la topología discreta.
3. Para cada $n > 0$, existe un conjunto, $\mathcal{I}_n$, indexando las$n$-células de X, e^n_α, y una familia de aplicaciones continuas y sobreyectivas, llamadas características de sus respectivas n-células, $f^n_\alpha : D^n \longrightarrow \overline{e^n_\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{I}_n$, tales que $f^n_\alpha|_{B^n}$ es un homeomorfismo, $f^n_\alpha(B^n) = e^n_\alpha$, y $\forall \alpha \in \mathcal{I}_n$ la frontera de la célula, definida como $f^n_\alpha(S^{n-1}) = \overline{e^n_\alpha} \setminus e^n_\alpha$, está en la unión de una

cantidad finita de q-células, con $q < n$, $X^n = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} D^n \cup_{f_\alpha^n} X^{n-1}$. Si $\mathcal{I}_n = \emptyset$, tomamos $X^n = X^{n-1}$.

4. Topología débil: $C \subseteq X$ es cerrado si y solo si $C \cap \overline{e_\alpha^n}$ es cerrado en $\overline{e_\alpha^n}$ $\forall \alpha \in \mathcal{I} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{I}_n$, con la topología inducida por f_α^n (aquella que la hace continua, es decir $\{C \subseteq X : (f_\alpha^n)^{-1}(C) \in \mathcal{T}_u\big|_{D^n}\}$, de lo que se deduce que es una aplicación cerrada ya que se cumple la igualdad $C = f_\alpha^n((f_\alpha^n)^{-1}(C))$ por ser sobreyectiva).

   Entonces, si E es el conjunto de todas las células, asociadas inherente y unívocamente cada una a una aplicación característica, el par $K = (X, E)$ define una estructura de CW-complejo en X. Denotaremos por E_n al conjunto de n-células, así $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$. Las células que forman parte de la frontera de e_α^n se denominan q-caras, con $q < n$.

El CW-complejo es finito si tiene un número finito de células. La dimensión del CW-complejo es la mayor dimensión de sus células, es decir, el mínimo de los n tal que $X^m = X^n$ si $m > n$, si no existe tal n, diremos que tiene dimensión infinita. Un CW-complejo finito tiene dimensión finita, pero el recíproco no es cierto, por ejemplo, el collar hawaiano. PONER IMAGEN.

Proposición 1.1. La dimensión de un espacio X como CW-complejo es independiente de la estructura celular construida, es decir, independiente del par (X, E). Por tanto, podemos hablar de la dimensión de X.

Nota 1.2. Si un CW-complejo es finito, se cumple que tiene la topología débil y cumple la condición de clausura finita, por tanto, estas condiciones solo tienen interés en caso de CW-complejos infinitos, i.e., con infinitas células. En efecto, sea $A \subseteq X$. De la igualdad $A = \bigcup_{e \in E}(A \cap \overline{e})$ (que es una unión finita) deducimos que si $A \cap \overline{e}$ es cerrado, entonces A es cerrado y de la igualdad $f_e(f_e^{-1}(A)) = A \cap \overline{e}$, con f_e la aplicación característica de e, deducimos que si A es cerrado, $A \cap \overline{e}$ es cerrado para cualquier célula, por cómo es la topología inducida. $A = \bigcup_{e \in E} f_e(f_e^{-1}(A \cap \overline{e}))$

Proposición 1.2. Los n-esqueletos son cerrados y las n-células son abiertas en cada n-esqueleto, por tanto, $X^n \setminus X^{n-1} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} e_\alpha^n$ es abierto en X^n.

Proposición 1.3. Un espacio X que admite descomposición celular es compacto si y solo si para cualquier descomposición celular (X, E) es un CW-complejo finito. [Teorema 8.19, Rotman]

Proposición 1.4. Los CW-complejos son localmente arcoconexos y localmente contráctiles, es decir, para cada punto del espacio podemos encontrar un entorno del punto que es arcoconexo y contráctil.

Definición 1.4. Definimos la orientación de cada n-célula como aquella inducida por la orientación de B^n a través del homeomorfismo $f_\alpha^n|B^n$ sobre e_α^n, digamos que es .el sentido en que recorre la célula".

Definición 1.5. Sea $K = (X, E)$ un complejo celular, definimos el n-ésimo grupo de n-cadenas de K al grupo abeliano libre generado por las n-células de K (combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de un número finito de n-células) y lo denotaremos por $C_n(K)$, es decir, $C_n(K) = \{\sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha^n : \lambda_\alpha \in \mathbb{Z}, e_\alpha^n \in E_n, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_\alpha \neq 0\}| < \infty\}$, con la operación:

$$(\sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha^n) + (\sum_\alpha \mu_\alpha e_\alpha^n) = \sum_\alpha (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) e_\alpha^n.$$

Nota 1.3. El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos una célula tantas veces como es recorrida por la n-cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación de la célula y negativo en caso contrario.

Definición 1.6. Sean $n > 0$, e^n una n-célula y f^n su aplicación característica asociada en un CW-complejo. Elegida una orientación de e^n, el borde de la n-célula e^n se define como una $(n-1)$-cadena, $\partial e^n := \sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha^{n-1}$ cuyos coeficientes λ_α son el número de veces que la $(n-1)$-célula e_α^{n-1} es recorrida por f contando cada una con signo positivo o negativo según la orientación de la $(n-1)$-célula coincida o no, respectivamente, con la orientación inducida por la de e^n. Si $n = 0$, $\partial e^0 = 0$.

Observación 1.1. Notemos que formalmente no nos importa la definición de la orientación para poder sumar o restar, sino tan solo la coincidencia o no entre la orientación de la célula preestablecido y la orientación con que es recorrida por una cadena, que es lo que nos determinará el signo de la célula en la cadena.

Nota 1.4. Las células del borde de una n-célula, aquellas con coeficientes no nulos, son las (n-1)-células de su frontera.

Definición 1.7. Sea $K = (X, E)$ un complejo celular. Elegida una orientación de las células, definimos el operador borde, para $n > 0$, $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ que aplica $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha e^n_\alpha \in C_n(K)$ en $\partial_n c := \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial e^n_\alpha \in C_{n-1}(K)$ y es un homomorfismo de grupos. Para el caso $n = 0$, definimos $\partial_0 = 0$, es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

Nota 1.5. Hemos usado ∂ para denotar el borde de una célula y ∂_n para la imagen de una n-cadena por el operador borde, o sea, el borde de una n-cadena, pero usaremos indistintamente una u otra notación ya que por contexto siempre se sabrá a qué nos referimos.

Proposición 1.5. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Definición 1.8. El conjunto $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$ es el conjunto de n-ciclos de K, es decir, aquellas n-cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

Definición 1.9. El conjunto $B_n(K) = \text{Im}\partial_{n+1}$ es el conjunto de n-bordes de K, es decir, aquellas n-cadenas que son el borde de alguna (n+1)-cadena. (Notar que un borde puede serlo de dos cadenas distintas, por ejemplo, la descomposición de la esfera en dos hemisferios con una 1-célula como ecuador). PONER AQUÍ DESCOMPOSICION ESA.

Nota 1.6. De la proposición anterior se desprende que $B_n(K) \subseteq Z_n(K) \subseteq C_n(K)$.

Definición 1.10. Como $C_n(K)$ es abeliano, $Z_n(K)$ también y $B_n(K)$ es normal en $Z_n(K)$, por tanto, podemos construir el grupo cociente $Z_n(K)/B_n(K) =: H_n(K)$ que llamaremos n-ésimo grupo de homología de K, para $n \geq 0$.

Proposición 1.6. Los grupos de homología de un CW-complejo $K = (X, E)$ no dependen de la estructura de CW-complejo de X. En particular, podemos escribir y escribiremos $H_n(X) := H_n(K)$ $\forall n \geq 0$, para cualquiera que sea la estructura de CW-complejo K de X.

2. Homología simplicial

Definición 2.1. $\{v_0, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto de puntos afínmente independientes si $\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Observación 2.1. Observemos que es necesario que $m \geq n$ en la definción anterior.

Definición 2.2. Sea $S = \{v_0, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto de puntos afínmente indpendientes. Entonces, se define el n-símplice, o símplice de dimensión n, como la combinación lineal convexa de este conjunto, es decir,

$$\{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \ \forall \ 1 \leq i \leq n\} =: \langle S \rangle = \langle v_0, ..., v_n \rangle.$$

Llamaremos a cada v_i vértice del símplice.

Proposición 2.1. Dado un símplice, σ, los coeficientes de la combinación lineal convexa, llamados coordenadas baricéntricas, son únicos para cualquier punto en el símplice. Es decir, si $x \in \sigma$, $\exists! \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = x$.

Demostración.

Si $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$, entonces $\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_0 = 0$, por tanto $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)(v_i - v_0) = 0$, luego de la independencia lineal se sigue que $\lambda_i = \mu_i \ \forall i \geq 1$ y así también para $i = 0$. $\square$

Definición 2.3. Sea $\langle v_0, ..., v_n \rangle$ un n-símplice. Una k-cara del símplice, $k < n$, es un k-símplice generado por $k + 1$ vértices seleccionados de $\{v_0, ..., v_n\}$.

Definición 2.4. Dado un símplice $\langle v_0, ..., v_n \rangle$, decimos que un punto está en el interior del símplice si todas sus coordenadas baricéntricas son positivas y decimos que es del borde si alguna de estas se anula. En este último caso, el punto estará en la k-cara engendrada por los vértices con coordenada baricéntrica no nula para el punto.

Definición 2.5. Un complejo simplicial K de dimensión $n \in \mathbb{N}$ es un conjunto de símplices de dimensiones menores o iguales que n tal que:

1. Si un símplice está en K, entonces todas sus caras también están en K.
2. Dos símplices de K o bien son disjuntos o bien intersecan en una sola cara en común.

Definición 2.6. Si K es un complejo simplicial, denotamos por $|K|$ a la unión de los símplices de K, que es el conjunto de $\mathbb{R}^m$ subyacente al complejo simplicial K.

Nota 2.1. Aunque es similar, la definición de complejo simplicial no coincide con la de triangulación, pues admite que, por ejemplo, tres triángulos intersequen en un lado común, que no sería homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. La generalización a cualquier dimensión de triangulación es la siguiente.

Definición 2.7. Dado un espacio topológico (X, T), una triangulación de X es un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \longrightarrow X$.

Definición 2.8. Dado un complejo simplicial K, un subcomplejo es un subconjunto $L \subseteq K$ tal que para todo símplice de L todas sus caras también están en L. Así, L es un complejo simplicial también.

Definición 2.9. Dado un complejo simplicial K, el conjunto de los k-símplices de K con $k \leq n$ forman un subcomplejo simplicial de K que llamaremos el n-esqueleto de K y denotaremos por K^n.

Definición 2.10. La orientación de un símplice viene definida por el orden de aparición de sus vértices. De modo que si $S = \{v_0, ..., v_n\}$ es el conjunto de vértices del símplice, denotaremos por $\sigma^n = (v_0, ..., v_n)$ el símplice orientado yendo en orden desde v_0 hasta v_n, como si fuera un $n + 1$ ciclo del grupo de permutaciones.

Nota 2.2. La orientación de un símplice cambiará si cambiamos el orden de aparición de los vértices con una permutación impar, pero no si lo hacemos con una par. Además, la orientación de un n-símplice induce una orientación en todas sus caras.

Definición 2.11. Dado un complejo simplicial K, definimos el n-ésimo grupo de n-cadenas de K al grupo abeliano libre generado por los n-símplices de K (indexados por el conjunto $\mathcal{I}_n$) y lo denotaremos por $C_n(K)$, es decir, $C_n(K) = \{\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n : \lambda_\alpha \in \mathbb{Z}, \sigma_\alpha^n \in K^n \setminus K^{n-1}, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_\alpha \neq 0\}| < \infty\}$, con la operación:

$$(\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n) + (\sum_\alpha \mu_\alpha \sigma_\alpha^n) = \sum_\alpha (\lambda_\alpha + \mu_\alpha)\sigma_\alpha^n.$$

En caso de que $I_n = \emptyset$, $C_n(K) = 0$.

Nota 2.3. El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos un símplice tantas veces como es recorrida por la n-cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación del símplice, $+\sigma^n$, y negativo en caso contrario,$-\sigma^n$.

Definición 2.12. Definimos el borde de un n-símplice, $\sigma^n = (v_0, ..., v_n)$, como

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n)$$

Definición 2.13. Dado un complejo simplicial K y elegida una orientación de los símplices, definimos el operador borde, para $n > 0$, como la correspondencia $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$, $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n \in C_n(K) \mapsto \partial_n c := \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial \sigma_\alpha^n \in C_{n-1}(K)$. Para el caso $n = 0$, definimos $\partial_0 = 0$, es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

Proposición 2.2. El operador borde es un homomorfismo de grupos abelianos cumpliendo $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Nota 2.4. De la proposición anterior se desprende que $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\partial_n \subseteq C_n(K),\ n > 0$, lo que motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.14. El conjunto $Z_n(K) := \mathrm{Ker}\partial_n$ es el conjunto de n-ciclos de K, es decir, aquellas n-cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

Definición 2.15. El conjunto $B_n(K) := \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ es el conjunto de n-bordes de K, es decir, aquellas n-cadenas que son el borde de alguna $(n+1)$-cadena.

Proposición 2.3. $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \trianglelefteq \mathrm{Ker}\partial_n \trianglelefteq C_n(K)$.

Definición 2.16. Definimos los grupos de homología simplicial como los grupos cocientes

$$H_n := Z_n(K)/B_n(K),$$

para $n \geq 0$.

Proposición 2.4. Sea K un complejo simplicial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

1. $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^m$ con m el número de componentes conexas de $|K|$.

2. $B_n(K) = 0$, luego $H_n(K) \cong Z_n(K)$.

3. $H_p(K) = 0$ si $p > n$.

4. $H_p(K)$ solo depende de K^{p+1}.

Veamos ahora un teorema sobre la orientabilidad de las superficies compactas. Recordemos, primero, la definición de triangulación.

Definición 2.17. Una triangulación de X, superficie topológica, es una colección finita de homeomorfismos $T = \{\phi_i : T_i \longrightarrow T_i'\}_{i=1}^n$ tales que:

1. $T_i' \subseteq \mathbb{R}^2$ es un 2-símplice, o sea, un triángulo y $X = \bigcup_{i=1}^n T_i$.

2. Si $T_i \neq T_j$, entonces solo puede ocurrir una de las siguientes tres situaciones: $T_i \cap T_j = \emptyset$ o $T_i \cap T_j$ es un vértice común o $T_i \cap T_j$ es un lado común, con $1 \leq i \neq j \leq n$.

3. Todo lado (preimagen de un 1-símplice del borde de un triángulo) es lado de exactamente dos triángulos.

4. Dado un vértice cualquiera, la familia de triángulos que lo contienen forman una cadena cerrada, es decir, su imagen por el operador borde es 0.

Teorema 2.1. *Si K es una triangulación de una superficie compacta, entonces $H_2(K) = \mathbb{Z}$ si K es orientable y $H_2(K) = 0$ si no lo es.*