Topología Algebraica

Rufino López Saborido

2024-2025

Índice

1. Homología Celular

Definición 1.1. Dados (X,T), (Y,T') espacios topológicos y $f : A \subset X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se define el espacio de adjunción de X e Y a lo largo de (f,A) como $X \cup_f Y = \dfrac{X \sqcup Y}{\sim}$, donde $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ e identificando $(x,0) \equiv x \in X$, $(y,1) \equiv 1 \in Y$, $x \sim y \iff x \in A \wedge y \in Y \wedge f(x) = y$.

Definición 1.2. Una n-célula abierta es un espacio, e^n, homeomorfo a $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$.

Nota 1.1. Denotaremos $D^n = ad(B^n)$ y $S^{n-1} = fr(D^n)$.

Definición 1.3. CW-complejo. Sea X un espacio topológico y sea $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq ...$ una sucesión de subconjuntos de X satisfaciendo:

1. $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$.

2. X_0 tiene la topología discreta.

3. Para cada $n > 0$, existe un conjunto, $\mathcal{I}_n$, indexando las$n$-células de X, e^n_α, y una familia de aplicaciones continuas y sobreyectivas, llamadas características de sus respectivas n-células, $f^n_\alpha : D^n \longrightarrow \overline{e^n_\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{I}_n$, tales que $f^n_\alpha|_{B^n}$ es un homeomorfismo, $f^n_\alpha(B^n) = e^n_\alpha$, y $\forall \alpha \in \mathcal{I}_n$ la frontera de la célula, definida como $f^n_\alpha(S^{n-1}) = \overline{e^n_\alpha} \setminus e^n_\alpha$, está en la unión de una cantidad finita de q-células, con $q < n$, $X^n = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} D^n \cup_{f^n_\alpha} X^{n-1}$. Si $\mathcal{I}_n = \emptyset$, tomamos $X^n = X^{n-1}$.

4. Topología débil: $C \subseteq X$ es cerrado si y solo si $C \cap \overline{e^n_\alpha}$ es cerrado en $\overline{e^n_\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathcal{I} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{I}_n$, con la topología inducida por f^n_α (aquella que la hace continua, es decir $\{C \subseteq X : (f^n_\alpha)^{-1}(C) \in \mathcal{T}_u\big|_{D^n}\}$, de lo que se deduce que es una aplicación cerrada ya que se cumple la igualdad $C = f^n_\alpha((f^n_\alpha)^{-1}(C))$ por ser sobreyectiva).

Entonces, si E es el conjunto de todas las células, asociadas inherente y unívocamente cada una a una aplicación característica, el par $K = (X, E)$ define una estructura de CW-complejo en X. Denotaremos por E_n al conjunto de n-células, así $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$. Las células que forman parte de la frontera de e^n_α se denominan q-caras, con $q < n$.

El CW-complejo es finito si tiene un número finito de células. La dimensión del CW-complejo es la mayor dimensión de sus células, es decir, el mínimo de los n tal que $X^m = X^n$ si $m > n$, si no existe tal n, diremos que tiene dimensión infinita. Un CW-complejo finito tiene dimensión finita, pero el recíproco no es cierto, por ejemplo, el collar hawaiano. PONER IMAGEN.

Proposición 1.1. La dimensión de un espacio X como CW-complejo es independiente de la estructura celular construida, es decir, independiente del par (X, E). Por tanto, podemos hablar de la dimensión de X.

Nota 1.2. Si un CW-complejo es finito, se cumple que tiene la topología débil y cumple la condición de clausura finita, por tanto, estas condiciones solo tienen interés en caso de CW-complejos infinitos, i.e., con infinitas células. En efecto, sea $A \subseteq X$. De la igualdad $A = \bigcup_{e \in E}(A \cap \overline{e})$ (que es una unión finita) deducimos que si $A \cap \overline{e}$ es cerrado, entonces A es cerrado y si A es cerrado, $A \cap \overline{e}$ es cerrado para cualquier célula, por cómo es la topología inducida en un subespacio (como cada célula).

Proposición 1.2. Los n-esqueletos son cerrados y las n-células son abiertas en cada n-esqueleto, por tanto, $X^n \setminus X^{n-1} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} e^n_\alpha$ es abierto en X^n.

Proposición 1.3. Un espacio X que admite descomposición celular es compacto si y solo si para cualquier descomposición celular (X, E) es un CW-complejo finito. [Teorema 8.19, Rotman]

Proposición 1.4. Los CW-complejos son localmente arcoconexos y localmente contráctiles, es decir, para cada punto del espacio podemos encontrar un entorno del punto que es arcoconexo y contráctil.

Definición 1.4. Definimos la orientación de cada n-célula como aquella inducida por la orientación de B^n a través del homeomorfismo $f^n_\alpha|_{B^n}$ sobre e^n_α, digamos que es el sentido en que recorre la célula.

Definición 1.5. Sea $K = (X, E)$ un complejo celular, definimos el n-ésimo grupo de n-cadenas de K al grupo abeliano libre generado por las n-células de K (combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de un número finito de n-células) y lo denotaremos por $C_n(K)$, es decir, $C_n(K) = \{\sum_\alpha \lambda_\alpha e^n_\alpha : \lambda_\alpha \in \mathbb{Z}, e^n_\alpha \in E_n, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_\alpha \neq 0\}| < \infty\}$, con la operación:

$$(\sum_\alpha \lambda_\alpha e^n_\alpha) + (\sum_\alpha \mu_\alpha e^n_\alpha) = \sum_\alpha (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) e^n_\alpha.$$

Nota 1.3. El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos una célula tantas veces como es recorrida por la n-cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación de la célula y negativo en caso contrario.

Definición 1.6. Sean $n > 0$, e^n una n-célula y f^n su aplicación característica asociada en un CW-complejo. Elegida una orientación de e^n, el borde de la n-célula e^n se define como una $(n-1)$-cadena, $\partial e^n := \sum_\alpha \lambda_\alpha e^{n-1}_\alpha$ cuyos coeficientes λ_α son el número de veces que la $(n-1)$-célula e^{n-1}_α es recorrida por f contando cada una con signo positivo o negativo según la orientación de la $(n-1)$-célula coincida o no, respectivamente, con la orientación inducida por la de e^n. Si $n = 0$, $\partial e^0 = 0$.

Observación 1.1. Notemos que formalmente no nos importa la definición de la orientación para poder sumar o restar, sino tan solo la coincidencia o no entre la orientación de la célula preestablecido y la orientación con que es recorrida por una cadena, que es lo que nos determinará el signo de la célula en la cadena.

Nota 1.4. Las células del borde de una n-célula, aquellas con coeficientes no nulos, son las (n-1)-células de su frontera.

Definición 1.7. Sea $K = (X, E)$ un complejo celular. Elegida una orientación de las células, definimos el operador borde, para $n > 0$, $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ que aplica $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha e^n_\alpha \in C_n(K)$ en $\partial_n c := \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial e^n_\alpha \in C_{n-1}(K)$ y es un homomorfismo de grupos. Para el caso $n = 0$, definimos $\partial_0 = 0$, es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

Nota 1.5. Hemos usado ∂ para denotar el borde de una célula y ∂_n para la imagen de una n-cadena por el operador borde, o sea, el borde de una n-cadena, pero usaremos indistintamente una u otra notación ya que por contexto siempre se sabrá a qué nos referimos.

Proposición 1.5. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Definición 1.8. El conjunto $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$ es el conjunto de n-ciclos de K, es decir, aquellas n-cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

Definición 1.9. El conjunto $B_n(K) = \text{Im}\partial_{n+1}$ es el conjunto de n-bordes de K, es decir, aquellas n-cadenas que son el borde de alguna (n+1)-cadena. (Notar que un borde puede serlo de dos cadenas distintas, por ejemplo, la descomposición de la esfera en dos hemisferios con una 1-célula como ecuador). PONER AQUÍ DESCOMPOSICION ESA.

Nota 1.6. De la proposición anterior se desprende que $B_n(K) \subseteq Z_n(K) \subseteq C_n(K)$.

Definición 1.10. Como $C_n(K)$ es abeliano, $Z_n(K)$ también y $B_n(K)$ es normal en $Z_n(K)$, por tanto, podemos construir el grupo cociente $Z_n(K)/B_n(K) =: H_n(K)$ que llamaremos n-ésimo grupo de homología de K, para $n \geq 0$.

Proposición 1.6. Los grupos de homología de un CW-complejo $K = (X, E)$ no dependen de la estructura de CW-complejo de X. En particular, podemos escribir y escribiremos $H_n(X) := H_n(K)\ \forall n \geq 0$, para cualquiera que sea la estructura de CW-complejo K de X.

Proposición 1.7. Si no hay ninguna n-célula para $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = 0$ y $H_{n-1}(X) = Z_{n-1}(x)$

2. Homología simplicial

Definición 2.1. $\{v_0, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto de puntos afínmente independientes si $\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Observación 2.1. Observemos que es necesario que $m \geq n$ en la definción anterior.

Definición 2.2. Sea $S = \{v_0, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto de puntos afínmente indpendientes. Entonces, se define el n-símplice, o símplice de dimensión n, como la combinación lineal convexa de este conjunto, es decir,

$$\{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \ \forall\ 1 \leq i \leq n\} =: \langle S \rangle = \langle v_0, ..., v_n \rangle.$$

Llamaremos a cada v_i vértice del símplice.

Proposición 2.1. Dado un símplice, σ, los coeficientes de la combinación lineal convexa, llamados coordenadas baricéntricas, son únicos para cualquier punto en el símplice. Es decir, si $x \in \sigma$, $\exists! \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = x$.

Demostración.

Si $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$, entonces $\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_0 = 0$, por tanto $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)(v_i - v_0) = 0$, luego de la independencia lineal se sigue que $\lambda_i = \mu_i \ \forall i \geq 1$ y así también para $i = 0$. $\square$

Definición 2.3. Sea $\langle v_0, ..., v_n \rangle$ un n-símplice. Una k-cara del símplice, $k < n$, es un k-símplice generado por $k + 1$ vértices seleccionados de $\{v_0, ..., v_n\}$.

Definición 2.4. Dado un símplice $\langle v_0, ..., v_n \rangle$, decimos que un punto está en el interior del símplice si todas sus coordenadas baricéntricas son positivas y decimos que es del borde si alguna de estas se anula. En este último caso, el punto estará en la k-cara engendrada por los vértices con coordenada baricéntrica no nula para el punto.

Definición 2.5. Un complejo simplicial K de dimensión $n \in \mathbb{N}$ es un conjunto de símplices de dimensiones menores o iguales que n tal que:

1. Si un símplice está en K, entonces todas sus caras también están en K.

2. Dos símplices de K o bien son disjuntos o bien intersecan en una sola cara en común.

Definición 2.6. Si K es un complejo simplicial, denotamos por $|K|$ a la unión de los símplices de K, que es el conjunto de $\mathbb{R}^m$ subyacente al complejo simplicial K.

Nota 2.1. Aunque es similar, la definición de complejo simplicial no coincide con la de triangulación, pues admite que, por ejemplo, tres triángulos intersequen en un lado común, que no sería homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. La generalización a cualquier dimensión de triangulación es la siguiente.

Definición 2.7. Dado un espacio topológico (X, T), una triangulación de X es un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \longrightarrow X$.

Definición 2.8. Dado un complejo simplicial K, un subcomplejo es un subconjunto $L \subseteq K$ tal que para todo símplice de L todas sus caras también están en L. Así, L es un complejo simplicial también.

Definición 2.9. Dado un complejo simplicial K, el conjunto de los k-símplices de K con $k \leq n$ forman un subcomplejo simplicial de K que llamaremos el n-esqueleto de K y denotaremos por K^n.

Definición 2.10. La orientación de un símplice viene definida por el orden de aparición de sus vértices. De modo que si $S = \{v_0, ..., v_n\}$ es el conjunto de vértices del símplice, denotaremos por $\sigma^n = (v_0, ..., v_n)$ el símplice orientado yendo en orden desde v_0 hasta v_n, como si fuera un $n + 1$ ciclo del grupo de permutaciones.

Nota 2.2. La orientación de un símplice cambiará si cambiamos el orden de aparición de los vértices con una permutación impar, pero no si lo hacemos con una par. Además, la orientación de un n-símplice induce una orientación en todas sus caras.

Definición 2.11. Dado un complejo simplicial K, definimos el n-ésimo grupo de n-cadenas de K al grupo abeliano libre generado por los n-símplices de K (indexados por el conjunto $\mathcal{I}_n$) y lo denotaremos por $C_n(K)$, es decir, $C_n(K) = \{\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n : \lambda_\alpha \in \mathbb{Z}, \sigma_\alpha^n \in K^n \setminus K^{n-1}, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_\alpha \neq 0\}| < \infty\}$, con la operación:

$$(\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n) + (\sum_\alpha \mu_\alpha \sigma_\alpha^n) = \sum_\alpha (\lambda_\alpha + \mu_\alpha)\sigma_\alpha^n.$$

En caso de que $I_n = \emptyset$, $C_n(K) = 0$.

Nota 2.3. El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos un símplice tantas veces como es recorrida por la n-cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación del símplice, $+\sigma^n$, y negativo en caso contrario,$-\sigma^n$.

Definición 2.12. Definimos el borde de un n-símplice, $\sigma^n = (v_0, ..., v_n)$, como

$$\partial\sigma^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n)$$

Definición 2.13. Dado un complejo simplicial K y elegida una orientación de los símplices, definimos el operador borde, para $n > 0$, como la correspondencia $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$, $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n \in C_n(K) \mapsto \partial_n c := \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial\sigma_\alpha^n \in C_{n-1}(K)$. Para el caso $n = 0$, definimos $\partial_0 = 0$, es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

Proposición 2.2. El operador borde es un homomorfismo de grupos abelianos cumpliendo $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Nota 2.4. De la proposición anterior se desprende que $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\partial_n \subseteq C_n(K),\ n > 0$, lo que motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.14. El conjunto $Z_n(K) := \text{Ker}\partial_n$ es el conjunto de n-ciclos de K, es decir, aquellas n-cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

Definición 2.15. El conjunto $B_n(K) := \text{Im}\partial_{n+1}$ es el conjunto de n-bordes de K, es decir, aquellas n-cadenas que son el borde de alguna $(n+1)$-cadena.

Proposición 2.3. $\text{Im}\partial_{n+1} \trianglelefteq \text{Ker}\partial_n \trianglelefteq C_n(K)$.

Definición 2.16. Definimos los grupos de homología simplicial como los grupos cocientes

$$H_n := Z_n(K)/B_n(K),$$

para $n \geq 0$.

Proposición 2.4. Sea K un complejo simplicial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que:

1. $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^m$ con m el número de componentes conexas de $|K|$.

2. $B_n(K) = 0$, luego $H_n(K) \cong Z_n(K)$.

3. $H_p(K) = 0$ si $p > n$.

4. $H_p(K)$ solo depende de K^{p+1}.

Veamos ahora un teorema sobre la orientabilidad de las superficies compactas. Recordemos, primero, la definición de triangulación.

Definición 2.17. Una triangulación de X, superficie topológica, es una colección finita de homeomorfismos $T = \{\phi_i : T_i \longrightarrow T_i'\}_{i=1}^n$ tales que:

1. $T_i' \subseteq \mathbb{R}^2$ es un 2-símplice, o sea, un triángulo y $X = \bigcup_{i=1}^n T_i$.

2. Si $T_i \neq T_j$, entonces solo puede ocurrir una de las siguientes tres situaciones: $T_i \cap T_j = \emptyset$ o $T_i \cap T_j$ es un vértice común o $T_i \cap T_j$ es un lado común, con $1 \leq i \neq j \leq n$.

3. Todo lado (preimagen de un 1-símplice del borde de un triángulo) es lado de exactamente dos triángulos.

4. Dado un vértice cualquiera, la familia de triángulos que lo contienen forman una cadena cerrada, es decir, su imagen por el operador borde es 0.

Teorema 2.1. *Si K es una triangulación de una superficie compacta, entonces $H_2(K) = \mathbb{Z}$ si K es orientable y $H_2(K) = 0$ si no lo es.*

3. Homología singular

3.1. Definición

Definición 3.1. Un n-símplice singular en un espacio topológico X es una aplicación continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, donde $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i x_i = 1, t_i \geq 0\}$ es el n-símplice estándar (las coordenadas baricéntricas de sus puntos son las coordenadas respecto de la base canónica).

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico. Para cada $n \geq 0$, definimos $S_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por todos los n-símplices singulares en X, y también definimos $S_{-1}(X) = 0$. Los elementos de estos grupos los llamaremos n-cadenas en X.

3.1.1. Borde de n-símplices singulares

Motivacion. Habiendo definido una estructura de grupo en las n-cadenas, donde el signo determina la coincidencia o no de la orientación con la que recorre la cadena cada símplice singular y la orientación elegida de este, si queremos mantener la estructura y, además, definir la orientación como la inducida por la orientación de los símplices estándares, con lo que el borde sería $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma^n|_{(e_0,\ldots,\hat{e_i},\ldots,e_n)})$, necesitamos, para tener bien definido un operador borde $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X)$, que el borde sea una $n-1$-cadena de manera que el dominio sea Δ^{n-1} en todos los sumandos. Por ello, necesitamos trabajar más en la definición del borde.

Definición 3.3. Para cada $n \geq 1, i \geq 0$ definimos la i-ésima aplicación cara como $d_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$, $(t_0, ..., t_{n-1}) \mapsto (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})$, donde las tuplas son las coordenadas de los puntos.

Ahora ya podemos dar una definición de borde:

Definición 3.4. Sea $\sigma \in S_n(X)$, $n > 0$. Definimos su borde como

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma \circ d_i^n \in S_{n-1}(X).$$

Si $n = 0$, $\partial\sigma = 0$.

3.1.2. Complejo singular

Definición 3.5. El operador borde es $\partial_n : S_n(K) \longrightarrow S_{n-1}(K)$, $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n \in S_n(K) \mapsto \partial_n c := \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial \sigma_\alpha^n \in S_{n-1}(K)$.

Proposición 3.1. El operador borde antes definido es el único homomorfismo de grupos que a cada n-símplice singular le asocia su borde.

Demostración. Al definirlo como la extensión lineal del borde es obvio que es único y homomorfismo. $\square$

Definición 3.6. A la sucesión de grupos y operadores:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

la llamamos complejo singular de X denotado como $(S(X), \partial)$ o simplemente $S(X)$.

Nota 3.1. El símbolo ∂ de la definición anterior representa la sucesión de operadores borde, no el borde que habíamos definido antes. En cualquier caso, a partir de ahora escribiremos indistintamente ∂ siempre que no haya confusión y se requiera entonces los subíndices.

Lema 3.1. *Si $n \geq j > k \geq 0$, las aplicaciones cara satisfacen $d_j^{n+1} \circ d_k^n = d_k^{n+1} \circ d_{j-1}^n$*

Demostración.

$$d_j^{n+1} \circ d_k^n(t_0, ..., t_{n-1}) = d_j^{n+1}(t_0, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{n-1}) = (t_0, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{j-2}, 0, t_{j-1}, ..., t_{n-1})$$

$$d_k^{n+1} \circ d_{j-1}^n(t_0, ..., t_{n-1}) = d_k^{n+1}(t_0, ..., t_{j-2}, 0, t_{j-1}, ..., t_{n-1}) = (t_0, ..., t_{k-1}, 0, t_k, ..., t_{j-2}, 0, t_{j-1}, ..., t_{n-1})$$

donde la n-tupla $(t_{k+1}, ..., t_{j-2})$ es vacía si $k = j-1$, tiene una sola componente, t_k, si $k = j-1$, y en general tiene m componentes si $k = j - m$. $\square$

Teorema 3.2. *Para $n \geq 0$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$*

Demostración. Bastará probarlo para un $n+1$-símplice singular de $S_{n+1}(X)$ cualquiera, sea σ dicho elemento.

$$\partial\partial\sigma = \partial\Big(\sum_{j}(-1)^j \sigma d_j^{n+1}\Big) = \sum_{j,k}(-1)^{j+k}\sigma d_j^{n+1} d_k^n = \sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}\sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{k<j}(-1)^{j+k-1}\sigma d_j^{n+1} d_k^n =$$

$$\overset{\text{Lema 3.1}}{=} \sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}\sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{k<j}(-1)^{j+k-1}\sigma d_k^{n+1} d_{j-1}^n \overset{\substack{q=j-1\\ p=k}}{=}$$

$$= \sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}\sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{p\leq q}(-1)^{p+q}\sigma d_p^{n+1} d_q^n = 0$$

□

3.1.3. Grupos de homología singular

Definición 3.7. Igual que en homología simplicial y celular, definimos $Z_n(X) := \mathrm{Ker}\partial_n$ el grupo de n-ciclos de X y $B_n(X) := \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ el grupo de n-bordes de X.

Corolario 3.2.1. *Para $n \geq 0$, $B_n(X) \leqslant Z_n(X) \leqslant S_n(X)$.*

Demostración. □

Definición 3.8. Para $n \geq 0$, el n-ésimo grupo de homología singular de un espacio X se define como $H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$.

Definición 3.9. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y $\sigma \in S_n(X)$, entonces $f \circ \sigma \in S_n(Y)$. Así definimos una aplicación inducida por f, $f_\# : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$ (aunque induce una para cada $n \geq 0$, no escribiremos índice), $\sum_\sigma m_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma m_\sigma f \circ \sigma,\ m_\sigma \in \mathbb{Z}$, que claramente es un homomorfismo de grupos abelianos.

Lema 3.3. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces*

1. *$\partial_n f_\# = f_\# \partial_n$, es decir, para cada $n \geq 0$ el siguiente diagrama conmuta:*

2. para cada $n \geq 0$, $f_\#(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y)$ y $f_\#(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$

Demostración. 1. Sea $\sigma \in S_n(X)$,

$$f_\#\partial\sigma = f_\#(\sum_i (-1)^i \sigma d_i) = \sum_i (-1)^i f_\#(\sigma d_i) = \sum_i (-1)^i f(\sigma d_i);$$

$$\partial(f_\#(\sigma)) = \partial(f\sigma) = \sum_i (-1)^i (f\sigma) d_i$$

2.

$$\alpha \in Z_n(X) \implies \partial\alpha = 0 \implies \partial f_\#\alpha = f_\#\partial\alpha = f_\#(0) = 0 \implies f_\#\alpha \in Z_n(Y)$$

$$\beta \in B_n(X) \implies \partial\gamma = \beta, \gamma \in S_{n+1}(X);\ f_\#\gamma \in S_{n+1}(Y) \implies f_\#\beta = f_\#\partial\gamma = \partial f_\#\gamma \in B_n(Y)$$

□

Definición 3.10. Definimos el homomorfismo inducido en los grupos de homología por $f_\#$ como $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, $z_n + B_n(X) = [z_n] \mapsto f_\#(z_n) + B_n(Y) = [f_\#(z_n)]$.

Veamos en el siguiente teorema que la definición anterior tiene sentido.

Teorema 3.4. *Para cada $n \geq 0$, la correspondencia que a cada espacio topológico le asigna su n-ésimo grupo de homología, H_n : **Top** $\to$ **Ab**, es un funtor, es decir, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, la correspondencia $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$, $z_n + B_n(X) = [z_n] \mapsto f_\#(z_n) + B_n(Y) = [f_\#(z_n)]$ cumple que:*

1. *$H_n(f) = f_*$ es un homomorfismo de grupos.*

2. *Si $g : Y \to Z$ es una aplicación continua, $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ $((f \circ g)_* = f_* \circ g_*)$.*

3. *$H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$ $((Id_X)_* = Id_{H_n(X)})$.*

Demostración. Ejercicio para el lector (hecho en clase y en el Rotman). Los lemas serán necesarios para probar que está bien definida la aplicación. □

Ejercicio 3.1. La correspondencia S_n : **Top** $\longrightarrow$ **Ab** también es un funtor, donde para $f : X \longrightarrow Y$ continua, $S_n(f) = f_{\#}$.

Corolario 3.4.1. *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $H_n(X) \cong H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$.*

3.2. Axioma de la dimensión

Teorema 3.5 (Axioma de la dimensión)**.** *Si X es un espacio con un solo punto, $X = \{p\}$, entonces $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$.*

Demostración. Para cada $n \geq 0$, solo hay un único n-símplice singular, el constante, σ^n. Por tanto, $S_n(X) = \langle \sigma^n \rangle \cong \mathbb{Z}$. Ahora veamos su borde.

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^n d_i^n = (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i) \sigma^{n-1},$$

donde razonamos que solo hay un único $n-1$-símplice singular, el constante, y, por ello, lo extraemos como factor común. Por tanto, si n es impar, $\partial_n = 0$ y si n es par y positivo, $\partial_n \sigma^n = \sigma^{n-1}$, luego ∂_n es isomorfismo (pues lleva el generador de $S_n(X)$ al generador de $S_{n-1}(X)$). Asumamos que $n > 0$ y consideremos la secuencia

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}.$$

Si n es impar, $\partial_n = 0$: por un lado, implica que $S_n(X) = \mathrm{Ker}\partial_n = Z_n(X)$ y, por otro lado, ∂_{n+1} es un isomorfismo ($n+1$ es impar), por tanto sobreyectiva y así $S_n(X) = \mathrm{Im}\partial_{n+1} = B_n(X)$; concluimos que $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = S_n(X)/S_n(X) = 0$. Y si n es par, ∂_n es un isomorfismo, por tanto, inyectiva y así $Z_n(X) = \mathrm{Ker}\partial_n = 0$, luego también se cumple que $H_n(X) = 0$. □

Proposición 3.2. $H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$

Demostración. Como $\partial_0 : S_0(X) \longrightarrow S_{-1}(X) = 0$, por definición, y $d_1 = 0$ como se ha visto en la demostración del teorema anterior, concluimos que $Z_0(X) = \text{Ker}\partial_0 = S_0(X)$ y $B_0(X) = \text{Im}\partial_1 = 0$, luego $H_0(X) = S_0(X)/0 \cong \mathbb{Z}$. $\square$

3.3. Homología y componentes arcoconexas

Teorema 3.6. *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es el conjunto de componentes arcoconexas de X, entonces para cada $n \geq 0$,*

$$H_n(X) = \bigoplus_\lambda H_n(X_\lambda)$$

Demostración. Si $\gamma = \sum_{i\in\mathcal{I}} m_i\sigma_i \in S_n(X)$, $|\mathcal{I}| < \infty$, entonces como el dominio de cada σ_i es arcoconexo, cada $\text{Im}\sigma_i$ está contenido en una única componente arcoconexa de X, X_λ; podemos entonces escribir $\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda$, donde γ_λ es la suma de aquellos términos en γ que involucran un símplice σ_i para el cual $\text{Im}\sigma_i \subseteq X_\lambda$. Notar que esta suma es finita porque originalmente hay un número finito de símplices singulares que conforman γ. Es fácil ver que, para cada n, la aplicación $\gamma \mapsto (\gamma_\lambda)_\lambda$ es un isomorfismo $S_n(X) \to \bigoplus_\lambda S_n(X_\lambda)$, teniendo en cuenta las propiedades de la suma directa.

Ahora, γ es un ciclo si y solo si cada γ_λ es un ciclo: ya que $\partial\gamma_\lambda \in S_{n-1}(X_\lambda)$ (porque $\text{Im}\sigma \subseteq X_\lambda \implies \text{Im}\partial\sigma \subseteq X_\lambda$), la suposición $0 = \partial\gamma = \sum_\lambda \partial\gamma_\lambda$ implica $\partial\gamma_\lambda = 0$ para todo λ (porque un elemento en la suma directa $\bigoplus_\lambda S_{n-1}(X_\lambda)$ es cero si y solo si todas sus coordenadas son cero). Se sigue que la aplicación $\theta_n : H_n(X) \to \bigoplus_\lambda H_n(X_\lambda)$, dada por $[\gamma] \mapsto ([\gamma_\lambda])_\lambda$, está bien definida, además es un homomorfismo de grupos (si no es claro, es fácil de comprobar escribiendo un poco). Para ver que θ_n es un isomorfismo, damos su inverso, definido por $\Phi_n : \sum H_n(X_\lambda) \to H_n(X)$ por $([\gamma_\lambda])_\lambda \mapsto [\sum_\lambda \gamma_\lambda]$; es rutinario comprobar que ambas composiciones son identidades. $\square$

Lema 3.7. *Si X es un espacio arcoconexo no vacío, $B_0(X) = \{\sum_x m_x x \in S_0(X) : m_x \in \mathbb{Z}, \sum_x m_x = 0, |\{x \in X : m_x \neq 0\}| < \infty\}$.*

Demostración. Sea $\gamma = \sum_{i=0}^{k} m_i x_i \in S_0(X)$ con $\sum m_i = 0$. Elegimos un punto $x \in X$ $(X \neq \emptyset)$ y un camino σ_i en X desde x hasta x_i para cada i (ya que X es arcoconexo). Nótese que $\partial_1 \sigma_i = \sigma_i(v_1) - \sigma_i(v_0) = x_i - x$ (recordemos que el dominio de cada símplice singular es $\Delta^1 = [v_0, v_1]$). Ahora, $\sum m_i \sigma_i \in S_1(X)$, y

$$\partial_1 \left(\sum m_i \sigma_i \right) = \sum m_i \partial_1(\sigma_i) = \sum m_i (x_i - x) = \sum m_i x_i - \left(\sum m_i \right) x = \gamma,$$

ya que $\sum m_i = 0$. Por lo tanto, $\gamma = \sum m_i x_i = \partial_1 \left(\sum m_i \sigma_i \right) \in B_0(X)$.

Recíprocamente, si $\gamma \in B_0(X)$, entonces $\gamma = \partial_1 \left(\sum n_j \tau_j \right)$, donde $n_j \in \mathbb{Z}$ y τ_j es un 1-símplice singular en X. Por lo tanto,

$$\gamma = \sum n_j \left(\tau_j(e_1) - \tau_j(e_0) \right),$$

de modo que cada coeficiente n_j aparece dos veces y con signo opuesto. Así, la suma de los coeficientes es cero. $\square$

Teorema 3.8. *Si X es un espacio no vacío arcoconexo, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Además si $x_0, x_1 \in X$, $[x_0] = [x_1]$ es un generador de $H_0(X)$.*

Demostración. Definimos en el homomorfismo de grupos $\theta : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$, $\sum_x m_x x \mapsto \sum_x m_x$, donde identificamos cada punto con el 0-símplice singular cuya imagen es ese punto. Claramente es sobreyectivo tomando para $x \in X, nx \in Z_0(X)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Además, por el lema anterior, su núcleo es $B_0(X)$, luego por el primer teorema de isomorfía de grupos, $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \cong \mathrm{Im}\theta = \mathbb{Z}$

Veamos la segunda parte. Sean $x_0, x_1 \in X$. Existe un camino σ en X desde x_0 hasta x_1, y $x_1 - x_0 = \partial_1 \sigma \in B_0(X)$; esto es equivalente a que $x_1 + B_0(X) = x_0 + B_0(X)$, es decir, $[x_0] = [x_1]$. Si $[\gamma]$ es un generador de $H_0(X)$, donde $\gamma = \sum_i m_i x_i$, entonces $\theta(\gamma) = \sum m_i = \pm 1$. Reemplazando γ por $-\gamma$ si es necesario, podemos suponer que $\sum m_i = 1$. Si $x_0 \in X$, entonces $\gamma = x_0 + (\gamma - x_0)$; dado que $\gamma - x_0 \in B_0(X)$ (la suma de sus coeficientes es cero), tenemos $[\gamma] = [x_0]$, como queríamos.

$\square$

3.4. Grupos graduados y complejos de cadenas

Definición 3.11. 1. Un grupo graduado es una colección ordenada de grupos $\{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$

2. Dados dos grupos graduados, G y H, diremos que una aplicación es un homomorfismo si es una colección de homomorfismos de grupos $h_n : G_n \longrightarrow H_{n+r}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, donde r es un entero fijo llamado el grado de h. (Digamos que si la estructura adicional de estos grupos es el orden, entonces al homomorfismo de estos grupos hay que exigirle que respete, sea congruente, con esa estructura adicional).

3. Un complejo de cadenas de grupos graduados abelianos es un par (G, ∂), donde G es un grupo graduado abeliano y ∂ es un homomorfismo de grupos graduados abelianos de grado -1 y, además, $\mathrm{Im}\partial_n \leqslant \mathrm{Ker}\partial_{n-1}$, al homomorfismo ∂ lo llamaremos operador borde.

4. Si $G = \{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un grupo graduado, un subgrupo de G es un grupo graduado $H = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $H_n \leqslant G_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Si son abelianos, podemos considerar el grupo cociente graduado $G/H = \{G_n/H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

5. Si (C, ∂) es un complejo de cadenas, definimos los grupos graduados de ciclos, $Z(C) = \{\mathrm{Ker}\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \equiv \mathrm{Ker}\partial$, y de bordes, $B(C) = \{\mathrm{Im}\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \equiv \mathrm{Im}\partial$, con lo que definimos el grupo de homología graduado $H(C) = Z(C)/B(C)$.

6. Dados dos complejos de cadenas (de g.g.a.) $(C, \partial), (\tilde{C}, \tilde{\partial})$, decimos que una aplicación $\Phi : C \longrightarrow \tilde{C}$ es una aplicación de cadenas de grado d si es un homomorfismo (de g.g.a.) tal que $C_n \to \tilde{C}_{n+d}$ y que, además, respeta ∂ y $\tilde{\partial}$, es decir, tal que $\tilde{\partial}_{n+d+1} \circ \Phi_{n+1} = \Phi_n \circ \partial_{n+1}$ (hace conmutar en cada eslabón el diagrama formado por las dos cadenas relacionadas mediante Φ). PONER DIAGRAMA. Si no se especifica el grado es porque es de grado cero.

7. Dados dos complejos de cadenas $(C, \partial), (\tilde{C}, \tilde{\partial})$, una homotopía de cadenas entre dos aplicaciones de cadenas de grado 0, $f, g : C \longrightarrow \tilde{C}$, es un homomorfismo de cadenas $T : C \longrightarrow \tilde{C}$ de grado $+1$ que satisface $\tilde{\partial} \circ T + T \circ \partial = f - g$, es decir, $\tilde{\partial}_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$.

Proposición 3.3. Con la notación de la definición 6, $\Phi(Z_n(C)) \subseteq Z_{n+d}(\tilde{C}), \Phi(B_n(C)) \subseteq B_{n+d}(\tilde{C})$.

Demostración. Basada en la conmutatividad de la aplicación con el operador borde que exigimos en la definición. □

Ahora podemos definir una aplicacación en los grupos de homología entre dos cadenas inducida por una aplicación de cadenas entre ellas:

Definición 3.12. Una aplicación de cadenas de grado d $f : C \longrightarrow \tilde{C}$ entre dos complejos de cadenas, $(C, \partial), (\tilde{C}, \tilde{\partial})$, induce un homomorfismo en los grupos de homología definida por $f_* : H_n(C) \longrightarrow H_{n+d}(\tilde{C})$, $z_n + B_n(C) \mapsto f(z_n) + B_{n+d}(\tilde{C}), z_n \in Z(C)$

Nosotros consideraremos en este contexto de aplicaciones inducidas en los grupos de homología, aplicaciones de cadenas de grado 0.

Proposición 3.4. Si existe una homotopía de cadenas entre dos homomorfismos de cadenas, entonces las aplicaciones inducidas de los homomorifismo como aplicaciones entre los grupos de homología de ambos complejos son iguales. Es decir, en las condiciones de la definición 7,

$$f_{n*} = g_{n*}$$

Demostración. Si $\alpha = \tilde{\partial} T + T\partial$, tenemos que α tiene grado 0 (la suma de los grados de T y los operadores borde) y $\tilde{\partial}\alpha = \tilde{\partial}^2 T + \tilde{\partial} T \partial = \tilde{\partial} T \partial + T\partial^2 = (\tilde{\partial} T + T\partial)\partial = \alpha\partial$. Además, si $z \in Z_n(C)$, $\alpha(z) = \tilde{\partial}(T(z)) \in B_n(\tilde{C})$. Por tanto, α como aplicación de cadenas induce el homomorfismo 0 en los grupos de homología, así, $\alpha_* = (f_n - g_n)_* = 0$, luego $f_{n*} = g_{n*}$ □

3.5. Axioma de homotopía

Teorema 3.9. *Dadas dos aplicaciones $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas y homotópicas, se tiene que los homomorfismos inducidos en los grupos de homología son iguales, $f_{n*} = g_{n*}$.*

Demostración. Sea $F : X \times I \longrightarrow Y$ la homotopía entre $f = F(\cdot, 0)$ y $g = F(\cdot, 1)$, definimos la homotopía de cadenas a la que aplicaremos la proposición anterior como $P_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(Y)$.

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(\sigma \times \mathrm{Id}) c_i^{n+1},$$

donde $c_i^{n+1} : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times I, c_i^{n+1}(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}, t_{i+1} + \dots + t_{n+1})$, es una aplicación afín bien definida que es un homeomorfismo además, por ser continua y biyectiva de un espacio compacto en uno Hausdorff. En primer lugar, notemos que P está bien definida y es un homomorfismo de grado 1. Ahora veamos que cumple la relación requerida computando su borde.

$$\begin{aligned}
\partial P_n(\sigma) = \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le n+1}} (-1)^{i+j} F\left(\sigma \times Id\right) c_i^{n+1}\, d_j^{n+1} &= \sum_{j\le i\le n} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_j^{n+1} + \sum_{i<j\le n+1} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_j^{n+1} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j\le i\le n} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_j^{n+1} - \sum_{i\le j\le n} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_{j+1}^{n+1} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j<i\le n} (-1)^{j+1} \phi c_i^{n+1} d_j^{n+1} - \sum_{i<j\le n} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_{j+1}^{n+1} + \phi c_0^{n+1} d_0^{n+1} - \phi c_n^{n+1} d_{n+1}^{n+1} \\
&\overset{(3)}{=} - \sum_{j\le i\le n-1} (-1)^{i+j} \phi c_{i+1}^{n+1} d_j^{n+1} + \sum_{i\le j\le n-1} (-1)^{i+j} \phi c_i^{n+1} d_{j+2}^{n+1} + f_{\#}(\sigma) - g_{\#}(\sigma)
\end{aligned}$$

En (1) hacemos el cambio de variable $k = j-1 \equiv j$ en el segundo sumatorio. En (2) notamos que como $c_k^{n+1} d_k^{n+1} = c_{k-1}^{n+1} d_k^{n+1}$ $\forall 1 \le k \le n$ los términos indexados en el primer sumatorio por (k, k) se cancelan con los indexados en el segundo sumatorio por $(k-1, k-1)$ para $1 \le k \le n$. En (3) hacemos en el primer sumatorio el cambio de variable $k = i - 1 \equiv i$ y en el segundo sumatorio el cambio $k = j - 1 \equiv j$, además de notar que $\phi c_0^{n+1} d_0^{n+1} = f\sigma = f_{\#}(\sigma)$ y $\phi c_n^{n+1} d_{n+1}^{n+1} = g\sigma =$

$g_{\#}(\sigma)$. Ahora veamos que los sumatorios de la última igualdad se corresponden a $P_{n-1}(\partial\sigma)$ desarrollando $P_{n-1}(\partial\sigma)$.

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i F(\partial\sigma \times \mathrm{Id})c_i^n = \sum_{0\leq i\leq n-1}\sum_{0\leq j\leq n}(-1)^{i+j}F(\sigma d_j^n \times \mathrm{Id})c_i^n \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{j\leq i\leq n-1}(-1)^{i+j}\phi((d_j^n\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n)) + \sum_{i<j\leq n}(-1)^{i+j}\phi((d_j^n\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n)) \\
&\overset{(5)}{=} \sum_{j\leq i\leq n-1}(-1)^{i+j}\phi((d_j^n\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n)) - \sum_{i\leq j\leq n-1}(-1)^{i+j}\phi((d_{j+1}^n\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n))
\end{aligned}$$

En (4) notamos que $F(\sigma d_j^n \times Id)c_i^n = F(\sigma \times Id)((d_j^n\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n))$, que es una identidad bastante sencilla de ver. Y en (5) hacemos en el segundo sumatorio el cambio de variable $k = j-1 \equiv j$.

Finalmente, de las igualdades $((d_j\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n)) = c_{i+1}^{n+1}d_j^{n+1}$ cuando $j \leq i \leq n-1$ y $((d_{j+1}\pi(c_i^n)) \times \pi_{n+1}(c_i^n)) = c_i^{n+1}d_{j+2}^{n+1}$ cuando $i \leq j \leq n-1$, se deduce que $\partial P_n(\sigma) + P_{n-1}(\partial\sigma) = f_{\#}(\sigma) - g_{\#}(\sigma)$ para $\sigma \in S_n(X)$, luego P es una homotopía de cadenas entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$ y, por tanto, estas inducen el mismo homomorfismo en los grupos de homología, $f_* = g_*$. $\square$

Corolario 3.9.1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces f_* es un isomorfismo, por tanto, $H(X) = H(Y)$.*

4. Sucesiones exactas y complejos de cadenas

Definición 4.1. Una secuencia de grupos y homomorfismos

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$$

es una sucesión exacta finita si $Kerf_{j+1} = Imf_j$ $\forall 1 \leq j \leq n-1$. Si $G_0 = G_4 = 0$, se dice que es una sucesión exacta corta, en la que, en consecuencia, se cumple que f_1 es inyectiva y f_2 es sobreyectiva.

Definición 4.2. Una secuencia de grupos y homomorfismos

$$... \xrightarrow{f_{-1}} G_{-1} \xrightarrow{f_0} G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} ...$$

es una sucesión exacta larga si $Kerf_{j+1} = Imf_j \ \forall j \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.3 (Álgebra en complejos de cadenas)**.** Sean $(S, \partial), (S', \partial'), (S'', \partial'')$ complejos de cadenas.

1. (S', ∂') es un subcomplejo de (S, ∂) si cada S'_n es un subgrupo de S_n y $\partial'_n = \partial_n|_{S'_n}$.

2. Si (S', ∂') es un subcomplejo de (S, ∂), entonces definimos el complejo cociente como:

$$\cdots \longrightarrow S_n/S'_n \xrightarrow{\bar{\partial}_n} S_{n-1}/S'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

   donde $\bar{\partial}_n(s_n + S'_n) = \partial_n(s_n) + S'_{n-1}$, bien definido porque $\partial_n(S'_n) \subseteq S'_{n-1}$.

3. Si S', S'' son subcomplejos de S, entonces $S' \cap S''$ es un subcomplejo de S cuyo n-ésimo término es $S'_n \cap S''_n$, y $S' + S''$ es un subcomplejo de S cuyo n-ésimo término es $S'_n + S''_n$.

Definición 4.4. Sea $\{(S^\lambda, \partial^\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de complejos de cadenas indexados. Su suma directa es el complejo:

$$\cdots \longrightarrow \sum_\lambda S^\lambda_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \sum_\lambda S^\lambda_n \xrightarrow{\partial_n} \sum_\lambda S^\lambda_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

con $\partial_n(\sum_\lambda s^\lambda_n) = \sum_\lambda \partial^\lambda_n(s^\lambda_n)$, con $s^\lambda_n \in S^\lambda_n$.

Lema 4.1. *Si* $0 \longrightarrow (S', \partial') \xrightarrow{i} (S, \partial) \xrightarrow{p} (S'', \partial'') \longrightarrow 0$ *es una secuencia exacta corta de complejos, entonces para cada n existe un homomorfismo*

$$c_n : H_n(S'') \longrightarrow H_{n-1}(S'), \quad [z''_n] \mapsto [i^{-1}_{n-1}\partial_n p^{-1}_n z''_n]$$

Demostración. Como i, p son aplicaciones de cadenas, el siguiente diagrama conmuta y por la exactitud de la hipótesis las filas de dicho diagrama también son exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S'_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial'"'] & S_n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\partial"] & S''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S'_{n-1} \arrow[r, "i"] & S_{n-1} \arrow[r, "p"] & S''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos que ver que la aplicación está bien definida. Veamos primero que tiene sentido la expresión que la define antes de estudiar cómo se comportan los elementos en las clases de homología. Sea $z''_n \in S''_n$ con $\partial'' z''_n = 0$. Como p es sobreyectiva, $\exists z_n \in S_n$ tal que $z''_n = pz_n$. Por la conmutatividad del diagrama, $0 = \partial'' z''_n = \partial'' pz_n = p\partial z_n$, por lo que $\partial z_n \in ker(p_{n-1}) = im(i_{n-1})$, luego por la inyectividad de i, $\exists! z'_{n-1} \in S'_{n-1}$ con $iz'_{n-1} = \partial z_n$; y además $0 = \partial^2 z_n = i\partial' z'_{n-1}$ y por la inyectividad de i, $\partial z'_{n-1} = 0$, luego z'_{n-1} es un ciclo.

Hay que ver también que no depende de la elección de z_n ya que p no es inyectiva. Sea $\tilde{z}_n \in S$ tal que $p\tilde{z}_n = z''_n$, y sea $\tilde{z}'_{n-1} \in S'$ el único tal que $i\tilde{z}'_{n-1} = \partial \tilde{z}_n$, entonces $\tilde{z}_n - z_n \in ker(p) = im(i)$, luego $\tilde{z}_n = z_n + i\tilde{a}'_n$ para $\tilde{a}'_n \in S'$, así $i\tilde{z}'_{n-1} = \partial\tilde{z}_n = \partial z_n + \partial i\tilde{a}'_n = iz'_{n-1} + i\partial'\tilde{a}'_n$, luego $z'_{n-1} + \partial\tilde{a}'_n - \tilde{z}'_{n-1} = 0$ y por tanto $[z'_{n-1}] = [\tilde{z}'_{n-1}]$.

Veamos que no depende del representante de $[z''_n]$. Supongamos que $x''_n \in [z''_n]$ cumple por el mismo proceso que antes que existe $x'_{n-1} \in S'$ y $x_n \in S$ tales que $px_n = x''_n$ y $\partial x_n = ix'_{n-1}$. Entonces existe $b_{n+1} \in S$ tal que $pz_n - px_n = z''_n - x''_n = \partial'' pb_{n+1} = p\partial b_{n+1}$, luego $\partial b_{n+1} - z_n + x_n \in ker(p) = im(i)$, luego existe $b'_n \in S'$ tal que $\partial b_{n+1} - z_n + x_n = ib'_n$, luego $i\partial' b'_n = \partial i b'_n = \partial^2 b_n - \partial z_n + \partial x_n = ix'_{n-1} - iz'_{n-1}$, así pues por la inyectividad de i se tiene que $x'_{n-1} - z'_{n-1} = \partial' b'_n$ y por tanto la aplicación d_n está bien definida.

Veamos que es homomorfismo, sean $z''_1, z''_2 \in S''$ tales que $\partial'' z''_i = 0$, $z''_i = pz_i$ y $\partial z_i = iz'_i$. Tenemos que $\partial(z_1 + z_2) = i(z'_1 + z'_2)$ y $p(z_1 + z_2) = z''_1 + z''_2$, luego $[z'_1 + z'_2] = c_n([z''_1 + z''_2])$, pero por ser la proyección en el cociente un homomorfismo de grupos $[z'_1 + z'_2] = [z'_1] + [z'_2] = c_n([z''_1]) + c_n([z''_2])$.

$\square$

Teorema 4.2. *En las mismas hipótesis del lema anterior, existe una secuencia exacta larga como sigue:*

$$... \longrightarrow H_n(S') \xrightarrow{i_*} H_n(S) \xrightarrow{p_*} H_n(S'') \xrightarrow{c_n} H_{n-1}(S') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(S) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(S'') \longrightarrow ...$$

Teorema 4.3. *Supongamos que las filas del siguiente diagrama conmutativo de complejos son secuencias exactas:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S'_* \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & S_* \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & S''_* \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T'_* \arrow[r, "i'"] & T_* \arrow[r, "q"] & T''_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces las filas del siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos son también exactas:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(S'_*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f'_*"] & H_n(S_*) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(S'') \arrow[r, "c_n"] \arrow[d, "f''_*"] & H_{n-1}(S'_*) \arrow[r] \arrow[d, "f'_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(T'_*) \arrow[r, "j_*"] & H_n(T_*) \arrow[r, "q_*"] & H_n(T'') \arrow[r, "c'_n"] & H_{n-1}(T'_*) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demostración. La exactitud de las filas es consecuancia del teorema anterior. Los primeros dos cuadrados conmutan porque $fi = jf'$ implica $f_*i_* = j_*f'_*$, y análogamente para p. Veamos la conmutatividad del último cuadrado. Denotamos $S = (S, \partial)$ y $T = (T, \tilde{\partial})$. Si $z''_n \in H_n(S'')$, como p es sobreyectiva, $[z''_n] = [pz_n]$ para algún $z_n \in S$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f'_*c_n[z''_n] &= f'_*c_n[pz''_n] = f'_*[i^{-1}\partial z_n] = [f'i^{-1}\partial z_n] \\ &\overset{(1)}{=} [j^{-1}f\partial z_n] \overset{(2)}{=} [j^{-1}\tilde{\partial} f z_n] \\ &\overset{(3)}{=} c'_n[qfz_n] = c'_n[f''pz_n] = c'_n[f''pz_n] = c'_nf''_*[ps] = c'_nf''_*[z''_n] \end{aligned}$$

$\square$

Definición 4.5. Si A es un subespacio de X, el n-ésimo grupo de homología relativa $H_n(X, A)$ se define por: $H_n(S(X)/S(A))$, el grupo de homología en el cociente de las cadenas.

Proposición 4.1. Si A es un subespacio de X, entonces la siguiente secuencia es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,A) \xrightarrow{c_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Es más, si $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ (f continua con $f(A) \subseteq B$), entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y,B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

donde las aplicaciones verticales vienen inducidas por f.

A. Apéndice 1: Grupos

Definición A.1. Sean $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un conjunto de grupos abelianos (finitos o infinitos), el grupo suma directa de dichos subgrupos es

$$\bigoplus_i G_i = \{\sum_{i\in\mathcal{I}} g_i : g_i \in G_i \ \forall i \in \mathcal{I},\ |\{i \in \mathcal{I} : g_i \neq 0\}| < \infty\},$$

que tiene estructura de grupo abeliano con la suma directa de elementos del mismo grupo abeliano original, G_i, es decir,

$$\sum_i g_i + \sum_i h_i = \sum_i g_i + h_i$$

Definición A.2. Si S es un conjunto, definimos el grupo libre generado por S como

$$\langle S\rangle := \{\prod_{j\in J} g_j^{n_j} : g_j \in S, n_j \in \mathbb{Z}\ \forall j \in J,\ |J| < \infty\},$$

con el producto la yuxtaposición. Notar que no es necesariamente abeliano, en tal caso lo escribiremos como una suma y la operación será sumar los coeficientes para cada elemento de S que, por tanto, solo aparecerán una vez cada uno a lo sumo.

Nota A.1. Si $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ son grupos abelianos libres generados por sendos conjuntos S_i, su suma directa también lo es y está generada por $\cup_i S_i$.

Nota A.2. Sean $H_i \leqslant G_i\ \forall i \in \mathcal{I}$, subgrupos de grupos abelianos, y sea φ el homomorfismo $\oplus_i G_i \xrightarrow{\varphi} \oplus_i G_i/H_i$, $\sum_i g_i \mapsto \sum_i g_i H_i$. Se tiene que es sobreyectiva porque es la proyección componente a componente (cada componente es un sumando) y su núcleo es $\oplus_i H_i$, por tanto, por el primer teorema de isomorfía

$$\bigoplus_i G_i / \bigoplus_i H_i \cong \bigoplus_i G_i/H_i$$