

# Topología Algebraica

Rufino López Saborido

2024-2025

## Índice

<b>1. Homología Celular</b>	<b>2</b>
<b>2. Homología simplicial</b>	<b>6</b>
<b>3. Homología singular</b>	<b>10</b>
3.1. Definición . . . . .	10
3.1.1. Borde de n-símplices singulares . . . . .	10
3.1.2. Complejo singular . . . . .	11
3.1.3. Grupos de homología singular . . . . .	12
3.2. Axioma de la dimensión . . . . .	14
3.3. Homología y componentes arcoconexas . . . . .	14
3.4. Grupos graduados y complejos de cadenas . . . . .	16
<b>A. Apéndice 1: Grupos</b>	<b>18</b>

# 1. Homología Celular

**Definición 1.1.** Dados  $(X, T)$ ,  $(Y, T')$  espacios topológicos y  $f : A \subset X \longrightarrow Y$  una aplicación continua. Se define el espacio de adjunción de  $X$  e  $Y$  a lo largo de  $(f, A)$  como  $X \cup_f Y = \frac{X \sqcup Y}{\sim}$ , donde  $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$  e identificando  $(x, 0) \equiv x \in X$ ,  $(y, 1) \equiv y \in Y$ ,  $x \sim y \iff x \in A \wedge y \in Y \wedge f(x) = y$ .

**Definición 1.2.** Una  $n$ -célula abierta es un espacio,  $e^n$ , homeomorfo a  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ .

**Nota 1.1.** Denotaremos  $D^n = \text{ad}(B^n)$  y  $S^{n-1} = \text{fr}(D^n)$ .

**Definición 1.3.** CW-complejo. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$  una sucesión de subconjuntos de  $X$  satisfaciendo:

1.  $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ .
2.  $X_0$  tiene la topología discreta.
3. Para cada  $n > 0$ , existe un conjunto,  $\mathcal{I}_n$ , indexando las  $n$ -células de  $X$ ,  $e_\alpha^n$ , y una familia de aplicaciones continuas y sobreyectivas, llamadas características de sus respectivas  $n$ -células,  $f_\alpha^n : D^n \longrightarrow \overline{e_\alpha^n}$ ,  $\alpha \in \mathcal{I}_n$ , tales que  $f_\alpha^n|_{B^n}$  es un homeomorfismo,  $f_\alpha^n(B^n) = e_\alpha^n$ , y  $\forall \alpha \in \mathcal{I}_n$  la frontera de la célula, definida como  $f_\alpha^n(S^{n-1}) = \overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n$ , está en la unión de una cantidad finita de  $q$ -células, con  $q < n$ ,  $X^n = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} D^n \cup_{f_\alpha^n} X^{n-1}$ . Si  $\mathcal{I}_n = \emptyset$ , tomamos  $X^n = X^{n-1}$ .
4. Topología débil:  $C \subseteq X$  es cerrado si y solo si  $C \cap \overline{e_\alpha^n}$  es cerrado en  $\overline{e_\alpha^n} \forall \alpha \in \mathcal{I} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{I}_n$ , con la topología inducida por  $f_\alpha^n$  (aquella que la hace continua, es decir  $\{C \subseteq X : (f_\alpha^n)^{-1}(C) \in \mathcal{T}_u|_{D^n}\}$ , de lo que se deduce que es una aplicación cerrada ya que se cumple la igualdad  $C = f_\alpha^n((f_\alpha^n)^{-1}(C))$  por ser sobreyectiva).

Entonces, si  $E$  es el conjunto de todas las células, asociadas inherente y unívocamente cada una a una aplicación característica, el par  $K = (X, E)$  define una estructura de CW-complejo en  $X$ . Denotaremos por  $E_n$  al conjunto de  $n$ -células, así  $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ . Las células que forman parte de la frontera de  $e_\alpha^n$  se denominan  $q$ -caras, con  $q < n$ .

El CW-complejo es finito si tiene un número finito de células. La dimensión del CW-complejo es la mayor dimensión de sus células, es decir, el mínimo de los  $n$  tal que  $X^m = X^n$  si  $m > n$ , si no existe tal  $n$ , diremos que tiene dimensión infinita. Un CW-complejo finito tiene dimensión finita, pero el recíproco no es cierto, por ejemplo, el collar hawaiano. PONER IMAGEN.

**Proposición 1.1.** La dimensión de un espacio  $X$  como CW-complejo es independiente de la estructura celular construida, es decir, independiente del par  $(X, E)$ . Por tanto, podemos hablar de la dimensión de  $X$ .

**Nota 1.2.** Si un CW-complejo es finito, se cumple que tiene la topología débil y cumple la condición de clausura finita, por tanto, estas condiciones solo tienen interés en caso de CW-complejos infinitos, i.e., con infinitas células. En efecto, sea  $A \subseteq X$ . De la igualdad  $A = \bigcup_{e \in E} (A \cap \bar{e})$  (que es una unión finita) deducimos que si  $A \cap \bar{e}$  es cerrado, entonces  $A$  es cerrado y de la igualdad  $f_e(f_e^{-1}(A)) = A \cap \bar{e}$ , con  $f_e$  la aplicación característica de  $e$ , deducimos que si  $A$  es cerrado,  $A \cap \bar{e}$  es cerrado para cualquier célula, por cómo es la topología inducida.

$$A = \bigcup_{e \in E} f_e(f_e^{-1}(A \cap \bar{e}))$$

**Proposición 1.2.** Los  $n$ -esqueletos son cerrados y las  $n$ -células son abiertas en cada  $n$ -esqueleto, por tanto,  $X^n \setminus X^{n-1} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}_n} e_\alpha^n$  es abierto en  $X^n$ .

**Proposición 1.3.** Un espacio  $X$  que admite descomposición celular es compacto si y solo si para cualquier descomposición celular  $(X, E)$  es un CW-complejo finito. [Teorema 8.19, Rotman]

**Proposición 1.4.** Los CW-complejos son localmente arcoconexos y localmente contráctiles, es decir, para cada punto del espacio podemos encontrar un entorno del punto que es arcoconexo y contráctil.

**Definición 1.4.** Definimos la orientación de cada  $n$ -célula como aquella inducida por la orientación de  $B^n$  a través del homeomorfismo  $f_\alpha^n|B^n$  sobre  $e_\alpha^n$ , digamos que es "el sentido en que recorre la célula".

**Definición 1.5.** Sea  $K = (X, E)$  un complejo celular, definimos el  $n$ -ésimo grupo de  $n$ -cadenas de  $K$  al grupo abeliano libre generado por las  $n$ -células de  $K$  (combinaciones lineales con

coeficientes en  $\mathbb{Z}$  de un número finito de  $n$ -células) y lo denotaremos por  $C_n(K)$ , es decir,  $C_n(K) = \{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha}^n : \lambda_{\alpha} \in \mathbb{Z}, e_{\alpha}^n \in E_n, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_{\alpha} \neq 0\}| < \infty\}$ , con la operación:

$$(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha}^n) + (\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} e_{\alpha}^n) = \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} + \mu_{\alpha}) e_{\alpha}^n.$$

**Nota 1.3.** El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos una célula tantas veces como es recorrida por la  $n$ -cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación de la célula y negativo en caso contrario.

**Definición 1.6.** Sean  $n > 0$ ,  $e^n$  una  $n$ -célula y  $f^n$  su aplicación característica asociada en un CW-complejo. Elegida una orientación de  $e^n$ , el borde de la  $n$ -célula  $e^n$  se define como una  $(n-1)$ -cadena,  $\partial e^n := \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha}^{n-1}$  cuyos coeficientes  $\lambda_{\alpha}$  son el número de veces que la  $(n-1)$ -célula  $e_{\alpha}^{n-1}$  es recorrida por  $f$  contando cada una con signo positivo o negativo según la orientación de la  $(n-1)$ -célula coincida o no, respectivamente, con la orientación inducida por la de  $e^n$ . Si  $n = 0$ ,  $\partial e^0 = 0$ .

**Observación 1.1.** Notemos que formalmente no nos importa la definición de la orientación para poder sumar o restar, sino tan solo la coincidencia o no entre la orientación de la célula pre-establecido y la orientación con que es recorrida por una cadena, que es lo que nos determinará el signo de la célula en la cadena.

**Nota 1.4.** Las células del borde de una  $n$ -célula, aquellas con coeficientes no nulos, son las  $(n-1)$ -células de su frontera.

**Definición 1.7.** Sea  $K = (X, E)$  un complejo celular. Elegida una orientación de las células, definimos el operador borde, para  $n > 0$ ,  $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  que aplica  $c = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha}^n \in C_n(K)$  en  $\partial_n c := \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial e_{\alpha}^n \in C_{n-1}(K)$  y es un homomorfismo de grupos. Para el caso  $n = 0$ , definimos  $\partial_0 = 0$ , es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

**Nota 1.5.** Hemos usado  $\partial$  para denotar el borde de una célula y  $\partial_n$  para la imagen de una  $n$ -cadena por el operador borde, o sea, el borde de una  $n$ -cadena, pero usaremos indistintamente una u otra notación ya que por contexto siempre se sabrá a qué nos referimos.

**Proposición 1.5.**  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

**Definición 1.8.** El conjunto  $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$  es el conjunto de  $n$ -ciclos de  $K$ , es decir, aquellas  $n$ -cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

**Definición 1.9.** El conjunto  $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$  es el conjunto de  $n$ -bordes de  $K$ , es decir, aquellas  $n$ -cadenas que son el borde de alguna  $(n+1)$ -cadena. (Notar que un borde puede serlo de dos cadenas distintas, por ejemplo, la descomposición de la esfera en dos hemisferios con una 1-célula como ecuador). PONER AQUÍ DESCOMPOSICION ESA.

**Nota 1.6.** De la proposición anterior se desprende que  $B_n(K) \subseteq Z_n(K) \subseteq C_n(K)$ .

**Definición 1.10.** Como  $C_n(K)$  es abeliano,  $Z_n(K)$  también y  $B_n(K)$  es normal en  $Z_n(K)$ , por tanto, podemos construir el grupo cociente  $Z_n(K)/B_n(K) =: H_n(K)$  que llamaremos  $n$ -ésimo grupo de homología de  $K$ , para  $n \geq 0$ .

**Proposición 1.6.** Los grupos de homología de un CW-complejo  $K = (X, E)$  no dependen de la estructura de CW-complejo de  $X$ . En particular, podemos escribir y escribiremos  $H_n(X) := H_n(K) \forall n \geq 0$ , para cualquiera que sea la estructura de CW-complejo  $K$  de  $X$ .

**Proposición 1.7.** Si no hay ninguna  $n$ -célula para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n(X) = 0$  y  $H_{n-1}(X) = Z_{n-1}(x)$

## 2. Homología simplicial

**Definición 2.1.**  $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$  es un conjunto de puntos afínmente independientes si  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes.

**Observación 2.1.** Observemos que es necesario que  $m \geq n$  en la definición anterior.

**Definición 2.2.** Sea  $S = \{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto de puntos afínmente independientes. Entonces, se define el  $n$ -símplice, o símplex de dimensión  $n$ , como la combinación lineal convexa de este conjunto, es decir,

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \forall 1 \leq i \leq n \right\} =: \langle S \rangle = \langle v_0, \dots, v_n \rangle.$$

Llamaremos a cada  $v_i$  vértice del símplex.

**Proposición 2.1.** Dado un símplex,  $\sigma$ , los coeficientes de la combinación lineal convexa, llamados coordenadas baricéntricas, son únicos para cualquier punto en el símplex. Es decir, si  $x \in \sigma$ ,  $\exists! \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = x$ .

*Demostración.*

Si  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$  con  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^n \mu_i$ , entonces  $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$  y  $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_0 = 0$ , por tanto  $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) (v_i - v_0) = 0$ , luego de la independencia lineal se sigue que  $\lambda_i = \mu_i \forall i \geq 1$  y así también para  $i = 0$ .  $\square$

**Definición 2.3.** Sea  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  un  $n$ -símplex. Una  $k$ -cara del símplex,  $k < n$ , es un  $k$ -símplex generado por  $k + 1$  vértices seleccionados de  $\{v_0, \dots, v_n\}$ .

**Definición 2.4.** Dado un símplex  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ , decimos que un punto está en el interior del símplex si todas sus coordenadas baricéntricas son positivas y decimos que es del borde si alguna de estas se anula. En este último caso, el punto estará en la  $k$ -cara engendrada por los vértices con coordenada baricéntrica no nula para el punto.

**Definición 2.5.** Un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  es un conjunto de símplexes de dimensiones menores o iguales que  $n$  tal que:

1. Si un símplice está en  $K$ , entonces todas sus caras también est n en  $K$ .
2. Dos símplices de  $K$  o bien son disjuntos o bien intersecan en una sola cara en común.

**Definición 2.6.** Si  $K$  es un complejo simplicial, denotamos por  $|K|$  a la unión de los símplices de  $K$ , que es el conjunto de  $\mathbb{R}^m$  subyacente al complejo simplicial  $K$ .

**Nota 2.1.** Aunque es similar, la definición de complejo simplicial no coincide con la de triangulación, pues admite que, por ejemplo, tres triángulos intersequen en un lado común, que no sería homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . La generalización a cualquier dimensión de triangulación es la siguiente.

**Definición 2.7.** Dado un espacio topológico  $(X, T)$ , una triangulación de  $X$  es un complejo simplicial  $K$  y un homeomorfismo  $h : |K| \longrightarrow X$ .

**Definición 2.8.** Dado un complejo simplicial  $K$ , un subcomplejo es un subconjunto  $L \subseteq K$  tal que para todo símplice de  $L$  todas sus caras también est n en  $L$ . Así,  $L$  es un complejo simplicial también.

**Definición 2.9.** Dado un complejo simplicial  $K$ , el conjunto de los  $k$ -símplices de  $K$  con  $k \leq n$  forman un subcomplejo simplicial de  $K$  que llamaremos el  $n$ -esqueleto de  $K$  y denotaremos por  $K^n$ .

**Definición 2.10.** La orientación de un símplice viene definida por el orden de aparición de sus v rtices. De modo que si  $S = \{v_0, \dots, v_n\}$  es el conjunto de v rtices del símplice, denotaremos por  $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$  el símplice orientado yendo en orden desde  $v_0$  hasta  $v_n$ , como si fuera un  $n + 1$  ciclo del grupo de permutaciones.

**Nota 2.2.** La orientación de un símplice cambiar  si cambiamos el orden de aparición de los v rtices con una permutación impar, pero no si lo hacemos con una par. Además, la orientación de un  $n$ -símplice induce una orientación en todas sus caras.

**Definición 2.11.** Dado un complejo simplicial  $K$ , definimos el  $n$ -ésimo grupo de  $n$ -cadenas de  $K$  al grupo abeliano libre generado por los  $n$ -símplices de  $K$  (indexados por el conjunto  $\mathcal{I}_n$ ) y

lo denotaremos por  $C_n(K)$ , es decir,  $C_n(K) = \{\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha}^n : \lambda_{\alpha} \in \mathbb{Z}, \sigma_{\alpha}^n \in K^n \setminus K^{n-1}, |\{\alpha \in \mathcal{I}_n : \lambda_{\alpha} \neq 0\}| < \infty\}$ , con la operación:

$$\left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha}^n\right) + \left(\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha}^n\right) = \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha} + \mu_{\alpha}) \sigma_{\alpha}^n.$$

En caso de que  $I_n = \emptyset$ ,  $C_n(K) = 0$ .

**Nota 2.3.** El sentido de la suma en la definición anterior es que sumamos un símplice tantas veces como es recorrida por la  $n$ -cadena, con signo positivo si se recorre con la orientación del símplice,  $+\sigma^n$ , y negativo en caso contrario,  $-\sigma^n$ .

**Definición 2.12.** Definimos el borde de un  $n$ -símplice,  $\sigma^n = (v_0, \dots, v_n)$ , como

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

**Definición 2.13.** Dado un complejo simplicial  $K$  y elegida una orientación de los símplices, definimos el operador borde, para  $n > 0$ , como la correspondencia  $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ ,  $c = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha}^n \in C_n(K) \mapsto \partial_n c := \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial \sigma_{\alpha}^n \in C_{n-1}(K)$ . Para el caso  $n = 0$ , definimos  $\partial_0 = 0$ , es decir, el borde de toda 0-cadena es 0.

**Proposición 2.2.** El operador borde es un homomorfismo de grupos abelianos cumpliendo  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

**Nota 2.4.** De la proposición anterior se desprende que  $\text{Im} \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker} \partial_n \subseteq C_n(K)$ ,  $n > 0$ , lo que motiva las siguientes definiciones.

**Definición 2.14.** El conjunto  $Z_n(K) := \text{Ker} \partial_n$  es el conjunto de  $n$ -ciclos de  $K$ , es decir, aquellas  $n$ -cadenas cuyo borde es 0 (no tienen borde).

**Definición 2.15.** El conjunto  $B_n(K) := \text{Im} \partial_{n+1}$  es el conjunto de  $n$ -bordes de  $K$ , es decir, aquellas  $n$ -cadenas que son el borde de alguna  $(n+1)$ -cadena.

**Proposición 2.3.**  $\text{Im} \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker} \partial_n \subseteq C_n(K)$ .



**Definición 2.16.** Definimos los grupos de homología simplicial como los grupos cocientes

$$H_n := Z_n(K)/B_n(K),$$

para  $n \geq 0$ .

**Proposición 2.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n \in \mathbb{N}$ . Se cumple que:

1.  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^m$  con  $m$  el número de componentes conexas de  $|K|$ .
2.  $B_n(K) = 0$ , luego  $H_n(K) \cong Z_n(K)$ .
3.  $H_p(K) = 0$  si  $p > n$ .
4.  $H_p(K)$  solo depende de  $K^{p+1}$ .

Veamos ahora un teorema sobre la orientabilidad de las superficies compactas. Recordemos, primero, la definición de triangulación.

**Definición 2.17.** Una triangulación de  $X$ , superficie topológica, es una colección finita de homeomorfismos  $T = \{\phi_i : T_i \longrightarrow T'_i\}_{i=1}^n$  tales que:

1.  $T'_i \subseteq \mathbb{R}^2$  es un 2-símplice, o sea, un triángulo y  $X = \bigcup_{i=1}^n T_i$ .
2. Si  $T_i \neq T_j$ , entonces solo puede ocurrir una de las siguientes tres situaciones:  $T_i \cap T_j = \emptyset$  o  $T_i \cap T_j$  es un vértice común o  $T_i \cap T_j$  es un lado común, con  $1 \leq i \neq j \leq n$ .
3. Todo lado (preimagen de un 1-símplice del borde de un triángulo) es lado de exactamente dos triángulos.
4. Dado un vértice cualquiera, la familia de triángulos que lo contienen forman una cadena cerrada, es decir, su imagen por el operador borde es 0.

**Teorema 2.1.** Si  $K$  es una triangulación de una superficie compacta, entonces  $H_2(K) = \mathbb{Z}$  si  $K$  es orientable y  $H_2(K) = 0$  si no lo es.

### 3. Homología singular

#### 3.1. Definición

**Definición 3.1.** Un  $n$ -símplice singular en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ , donde  $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i x_i = 1\}$  es el  $n$ -símplice estándar (las coordenadas baricéntricas de sus puntos son las coordenadas respecto de la base canónica).

**Definición 3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Para cada  $n \geq 0$ , definimos  $S_n(X)$  como el grupo abeliano libre generado por todos los  $n$ -símplices singulares en  $X$ , y también definimos  $S_{-1}(X) = 0$ . Los elementos de estos grupos los llamaremos  $n$ -cadenas en  $X$ .

##### 3.1.1. Borde de $n$ -símplices singulares

**Motivacion.** Habiendo definido una estructura de grupo en las  $n$ -cadenas, donde el signo determina la coincidencia o no de la orientación con la que recorre la cadena cada símplice singular y la orientación elegida de este, si queremos mantener la estructura y, además, definir la orientación como la inducida por la orientación de los símplices estándares, con lo que el borde sería  $\sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma^n|_{(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)})$ , necesitamos, para tener bien definido un operador borde  $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X)$ , que el borde sea una  $n-1$ -cadena de manera que el dominio sea  $\Delta^{n-1}$  en todos los sumandos. Por ello, necesitamos trabajar más en la definición del borde.

**Definición 3.3.** Para cada  $n \geq 1, i \geq 0$  definimos la  $i$ -ésima aplicación cara como  $d_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ ,  $(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ , donde las tuplas son las coordenadas de los puntos.

Ahora ya podemos dar una definición de borde:

**Definición 3.4.** Sea  $\sigma \in S_n(X)$ ,  $n > 0$ . Definimos su borde como

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d_i^n \in S_{n-1}(X).$$

Si  $n = 0$ ,  $\partial\sigma = 0$ .

### 3.1.2. Complejo singular

**Definición 3.5.** El operador borde es  $\partial_n : S_n(K) \longrightarrow S_{n-1}(K)$ ,  $c = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha}^n \in S_n(K) \mapsto \partial_n c := \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial \sigma_{\alpha}^n \in S_{n-1}(K)$ .

**Proposición 3.1.** El operador borde antes definido es el único homomorfismo de grupos que a cada  $n$ -símplice singular le asocia su borde.

*Demostración.* Al definirlo como la extensión lineal del borde es obvio que es único y homomorfismo.  $\square$

**Definición 3.6.** A la sucesión de grupos y operadores:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

la llamamos complejo singular de  $X$  denotado como  $(S(X), \partial)$  o simplemente  $S(X)$ .

**Nota 3.1.** El símbolo  $\partial$  de la definición anterior representa la sucesión de operadores borde, no el borde que habíamos definido antes. En cualquier caso, a partir de ahora escribiremos indistintamente  $\partial$  siempre que no haya confusión y se requiera entonces los subíndices.

**Lema 3.1.** Si  $n \geq j > k \geq 0$ , las aplicaciones cara satisfacen  $d_j^{n+1} \circ d_k^n = d_k^{n+1} \circ d_{j-1}^n$

*Demostración.*

$$d_j^{n+1} \circ d_k^n(t_0, \dots, t_{n-1}) = d_j^{n+1}(t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1})$$

$$d_k^{n+1} \circ d_{j-1}^n(t_0, \dots, t_{n-1}) = d_k^{n+1}(t_0, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1})$$

donde la  $n$ -tupla  $(t_{k+1}, \dots, t_{j-2})$  es vacía si  $k = j - 1$ , tiene una sola componente,  $t_k$ , si  $k = j - 1$ , y en general tiene  $m$  componentes si  $k = j - m$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** Para  $n \geq 0$ ,  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

*Demostración.* Bastará probarlo para un  $n + 1$ -símplice singular de  $S_{n+1}(X)$  cualquiera, sea  $\sigma$  dicho elemento.

$$\begin{aligned}
\partial\partial\sigma &= \partial\left(\sum_j (-1)^j \sigma d_j^{n+1}\right) = \sum_{j,k} (-1)^{j+k} \sigma d_j^{n+1} d_k^n = \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{k < j} (-1)^{j+k-1} \sigma d_j^{n+1} d_k^n = \\
&\stackrel{\text{Lema 3.1}}{=} \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{k < j} (-1)^{j+k-1} \sigma d_k^{n+1} d_{j-1}^n \stackrel{q=j-1}{\stackrel{p=k}{=}} \\
&= \sum_{j \leq k} (-1)^{j+k} \sigma d_j^{n+1} d_k^n - \sum_{p \leq q} (-1)^{p+q} \sigma d_p^{n+1} d_q^n = 0
\end{aligned}$$

□

### 3.1.3. Grupos de homología singular

**Definición 3.7.** Igual que en homología simplicial y celular, definimos  $Z_n(X) := \text{Ker} \partial_n$  el grupo de  $n$ -ciclos de  $X$  y  $B_n(X) := \text{Im} \partial_{n+1}$  el grupo de  $n$ -bordes de  $X$ .

**Corolario 3.2.1.** Para  $n \geq 0$ ,  $B_n(X) \leq Z_n(X) \leq S_n(X)$ .

*Demostración.*

□

**Definición 3.8.** Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -ésimo grupo de homología singular de un espacio  $X$  se define como  $H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$ .

**Definición 3.9.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua y  $\sigma \in S_n(X)$ , entonces  $f \circ \sigma \in S_n(Y)$ . Así definimos una aplicación inducida por  $f$ ,  $f_\# : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  (aunque induce una para cada  $n \geq 0$ , no escribiremos índice),  $\sum_\sigma m_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma m_\sigma f \circ \sigma$ ,  $m_\sigma \in \mathbb{Z}$ , que claramente es un homomorfismo de grupos abelianos.

**Lema 3.3.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, entonces

1.  $\partial_n f_\# = f_\# \partial_n$ , es decir, para cada  $n \geq 0$  el siguiente diagrama conmuta:
2. para cada  $n \geq 0$ ,  $f_\#(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y)$  y  $f_\#(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$

*Demostración.* 1. Sea  $\sigma \in S_n(X)$ ,

$$f_{\#}\partial\sigma = f_{\#}\left(\sum_i (-1)^i \sigma d_i\right) = \sum_i (-1)^i f_{\#}(\sigma d_i) = \sum_i (-1)^i f(\sigma d_i);$$

$$\partial(f_{\#}(\sigma)) = \partial(f\sigma) = \sum_i (-1)^i (f\sigma) d_i$$

2.

$$\alpha \in Z_n(X) \implies \partial\alpha = 0 \implies \partial f_{\#}\alpha = f_{\#}\partial\alpha = f_{\#}(0) = 0 \implies f_{\#}\alpha \in Z_n(Y)$$

$$\beta \in B_n(X) \implies \partial\gamma = \beta, \gamma \in S_{n+1}(X); f_{\#}\gamma \in S_{n+1}(Y) \implies f_{\#}\beta = f_{\#}\partial\gamma = \partial f_{\#}\gamma \in B_n(Y)$$

□

**Definición 3.10.** Definimos el homomorfismo inducido en los grupos de homología por  $f_{\#}$  como  $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ ,  $z_n + B_n(X) = [z_n] \mapsto f_{\#}(z_n) + B_n(Y) = [f_{\#}(z_n)]$ .

Veamos en el siguiente teorema que la definición anterior tiene sentido.

**Teorema 3.4.** Para cada  $n \geq 0$ , la correspondencia que a cada espacio topológico le asigna su  $n$ -ésimo grupo de homología,  $H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , es un funtor, es decir, si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, la correspondencia  $H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ,  $z_n + B_n(X) = [z_n] \mapsto f_{\#}(z_n) + B_n(Y) = [f_{\#}(z_n)]$  cumple que:

1.  $H_n(f) = f_*$  es un homomorfismo de grupos.
2. Si  $g : Y \rightarrow Z$  es una aplicación continua,  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$  ( $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ ).
3.  $H_n(\text{Id}_X) = \text{Id}_{H_n(X)}$  ( $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{H_n(X)}$ ).

*Demostración.* Ejercicio para el lector (hecho en clase y en el Rotman). Los lemas serán necesarios para probar que está bien definida la aplicación. □

**Ejercicio 3.1.** La correspondencia  $S_n : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab}$  también es un funtor, donde para  $f : X \longrightarrow Y$  continua,  $S_n(f) = f_{\#}$ .

**Corolario 3.4.1.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos, entonces  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  para todo  $n \geq 0$ .

### 3.2. Axioma de la dimensión

**Teorema 3.5** (Axioma de la dimensión). *Si  $X$  es un espacio con un solo punto,  $X = \{p\}$ , entonces  $H_n(X) = 0$  para todo  $n > 0$ .*

*Demostración.* Para cada  $n \geq 0$ , solo hay un único  $n$ -símplice singular, el constante,  $\sigma^n$ . Por tanto,  $S_n(X) = \langle \sigma^n \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Ahora veamos su borde.

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^n d_i^n = \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) \sigma^{n-1},$$

donde razonamos que solo hay un único  $n - 1$ -símplice singular, el constante, y, por ello, lo extraemos como factor común. Por tanto, si  $n$  es impar,  $\partial_n = 0$  y si  $n$  es par y positivo,  $\partial_n \sigma^n = \sigma^{n-1}$ , luego  $\partial_n$  es isomorfismo (pues lleva el generador de  $S_n(X)$  al generador de  $S_{n-1}(X)$ ). Asumamos que  $n > 0$  y consideremos la secuencia

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X).$$

Si  $n$  es impar,  $\partial_n = 0$ : por un lado, implica que  $S_n(X) = \text{Ker} \partial_n = Z_n(X)$  y, por otro lado,  $\partial_{n+1}$  es un isomorfismo ( $n + 1$  es impar), por tanto sobreyectiva y así  $S_n(X) = \text{Im} \partial_{n+1} = B_n(X)$ ; concluimos que  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = S_n(X)/S_n(X) = 0$ . Y si  $n$  es par,  $\partial_n$  es un isomorfismo, por tanto, inyectiva y así  $Z_n(X) = \text{Ker} \partial_n = 0$ , luego también se cumple que  $H_n(X) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.2.**  $H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$

*Demostración.* Como  $\partial_0 : S_0(X) \longrightarrow S_{-1}(X) = 0$ , por definición, y  $d_1 = 0$  como se ha visto en la demostración del teorema anterior, concluimos que  $Z_0(X) = \text{Ker} \partial_0 = S_0(X)$  y  $B_0(X) = \text{Im} \partial_1 = 0$ , luego  $H_0(X) = S_0(X)/0 \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 3.3. Homología y componentes arcoconexas

**Teorema 3.6.** *Si  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es el conjunto de componentes arcoconexas de  $X$ , entonces para cada  $n \geq 0$ ,*

$$H_n(X) = \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda)$$

*Demostración.* Si  $\gamma = \sum_{i \in \mathcal{I}} m_i \sigma_i \in S_n(X)$ ,  $|\mathcal{I}| < \infty$ , entonces como el dominio de cada  $\sigma_i$  es arcoconexo, cada  $\text{Im} \sigma_i$  está contenido en una única componente arcoconexa de  $X$ ,  $X_\lambda$ ; podemos entonces escribir  $\gamma = \sum_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda$ , donde  $\gamma_\lambda$  es la suma de aquellos términos en  $\gamma$  que involucran un símple  $\sigma_i$  para el cual  $\text{Im} \sigma_i \subseteq X_\lambda$ . Notar que esta suma es finita porque originalmente hay un número finito de símlices singulares que conforman  $\gamma$ . Es fácil ver que, para cada  $n$ , la aplicación  $\gamma \mapsto (\gamma_\lambda)_\lambda$  es un isomorfismo  $S_n(X) \rightarrow \bigoplus_\lambda S_n(X_\lambda)$ , teniendo en cuenta las propiedades de la suma directa.

Ahora,  $\gamma$  es un ciclo si y solo si cada  $\gamma_\lambda$  es un ciclo: ya que  $\partial \gamma_\lambda \in S_{n-1}(X_\lambda)$  (porque  $\text{Im} \sigma \subseteq X_\lambda \implies \text{Im} \partial \sigma \subseteq X_\lambda$ ), la suposición  $0 = \partial \gamma = \sum_\lambda \partial \gamma_\lambda$  implica  $\partial \gamma_\lambda = 0$  para todo  $\lambda$  (porque un elemento en la suma directa  $\bigoplus_\lambda S_{n-1}(X_\lambda)$  es cero si y solo si todas sus coordenadas son cero). Se sigue que la aplicación  $\theta_n : H_n(X) \rightarrow \bigoplus_\lambda H_n(X_\lambda)$ , dada por  $[\gamma] \mapsto ([\gamma_\lambda])_\lambda$ , está bien definida, además es un homomorfismo de grupos (si no es claro, es fácil de comprobar escribiendo un poco). Para ver que  $\theta_n$  es un isomorfismo, damos su inverso, definido por  $\Phi_n : \sum H_n(X_\lambda) \rightarrow H_n(X)$  por  $([\gamma_\lambda])_\lambda \mapsto [\sum_\lambda \gamma_\lambda]$ ; es rutinario comprobar que ambas composiciones son identidades.  $\square$

**Lema 3.7.** Si  $X$  es un espacio arcoconexo no vacío,  $B_0(X) = \{\sum_x m_x x \in S_0(X) : m_x \in \mathbb{Z}, \sum_x m_x = 0, |\{x \in X : m_x \neq 0\}| < \infty\}$ .

*Demostración.* Sea  $\gamma = \sum_{i=0}^k m_i x_i \in S_0(X)$  con  $\sum m_i = 0$ . Elegimos un punto  $x \in X$  ( $X \neq \emptyset$ ) y un camino  $\sigma_i$  en  $X$  desde  $x$  hasta  $x_i$  para cada  $i$  (ya que  $X$  es arcoconexo). Nótese que  $\partial_1 \sigma_i = \sigma_i(v_1) - \sigma_i(v_0) = x_i - x$  (recordemos que el dominio de cada símple singular es  $\Delta^1 = [v_0, v_1]$ ). Ahora,  $\sum m_i \sigma_i \in S_1(X)$ , y

$$\partial_1 \left( \sum m_i \sigma_i \right) = \sum m_i \partial_1(\sigma_i) = \sum m_i (x_i - x) = \sum m_i x_i - \left( \sum m_i \right) x = \gamma,$$

ya que  $\sum m_i = 0$ . Por lo tanto,  $\gamma = \sum m_i x_i = \partial_1(\sum m_i \sigma_i) \in B_0(X)$ .

Recíprocamente, si  $\gamma \in B_0(X)$ , entonces  $\gamma = \partial_1(\sum n_j \tau_j)$ , donde  $n_j \in \mathbb{Z}$  y  $\tau_j$  es un 1-símple singular en  $X$ . Por lo tanto,

$$\gamma = \sum n_j (\tau_j(e_1) - \tau_j(e_0)),$$

de modo que cada coeficiente  $n_j$  aparece dos veces y con signo opuesto. Así, la suma de los coeficientes es cero.  $\square$

**Teorema 3.8.** *Si  $X$  es un espacio no vacío arcoconexo, entonces  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Además si  $x_0, x_1 \in X$ ,  $[x_0] = [x_1]$  es un generador de  $H_0(X)$ .*

*Demostración.* Definimos en el homomorfismo de grupos  $\theta : Z_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\sum_x m_x x \mapsto \sum_x m_x$ , donde identificamos cada punto con el 0-símplice singular cuya imagen es ese punto. Claramente es sobreyectivo tomando para  $x \in X$ ,  $nx \in Z_0(X)$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, por el lema anterior, su núcleo es  $B_0(X)$ , luego por el primer teorema de isomorfía de grupos,  $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \cong \text{Im}\theta = \mathbb{Z}$

Veamos la segunda parte. Sean  $x_0, x_1 \in X$ . Existe un camino  $\sigma$  en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , y  $x_1 - x_0 = \partial_1 \sigma \in B_0(X)$ ; esto es equivalente a que  $x_1 + B_0(X) = x_0 + B_0(X)$ , es decir,  $[x_0] = [x_1]$ . Si  $[\gamma]$  es un generador de  $H_0(X)$ , donde  $\gamma = \sum_i m_i x_i$ , entonces  $\theta(\gamma) = \sum m_i = \pm 1$ . Reemplazando  $\gamma$  por  $-\gamma$  si es necesario, podemos suponer que  $\sum m_i = 1$ . Si  $x_0 \in X$ , entonces  $\gamma = x_0 + (\gamma - x_0)$ ; dado que  $\gamma - x_0 \in B_0(X)$  (la suma de sus coeficientes es cero), tenemos  $[\gamma] = [x_0]$ , como queríamos.  $\square$

### 3.4. Grupos graduados y complejos de cadenas

**Definición 3.11.** 1. Un grupo graduado es una colección ordenada de grupos  $\{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$

2. Dados dos grupos graduados,  $G$  y  $H$ , diremos que una aplicación es un homomorfismo si es una colección de homomorfismos de grupos  $h_n : G_n \rightarrow H_{n+r} \forall n \in \mathbb{Z}$ , donde  $r$  es un entero fijo llamado el grado de  $h$ . (Digamos que si la estructura adicional de estos grupos es el orden, entonces al homomorfismo de estos grupos hay que exigirle que respete, sea congruente, con esa estructura adicional).
3. Un complejo de cadenas de grupos graduados abelianos es un par  $(G, \partial)$ , donde  $G$  es un grupo graduado abeliano y  $\partial$  es un homomorfismo de grupos graduados abelianos de grado  $-1$  y, además,  $\text{Im}\partial_n \subseteq \text{Ker}\partial_{n-1}$ , al homomorfismo  $\partial$  lo llamaremos operador borde.



4. Dados dos complejos de cadenas (de g.g.a.)  $(C, \partial), (\tilde{C}, \tilde{\partial})$ , decimos que una aplicación  $\Phi : C \longrightarrow \tilde{C}$  es una aplicación de cadenas si es un homomorfismo (de g.g.a.) que, además, respeta  $\partial$ , es decir, tal que  $\partial_{n+1} \circ \Phi_n = \Phi_{n+1} \circ \tilde{\partial}_{n+1}$  (hace conmutar en cada eslabón el diagrama formado por las dos cadenas relacionadas mediante  $\Phi$ ). PONER DIAGRAMA
5. Si  $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un grupo graduado, un subgrupo de  $G$  es un grupo graduado  $H = \{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que  $H_n \leq G_n \forall n \in \mathbb{Z}$ . Si son abelianos, podemos considerar el grupo cociente graduado  $G/H = \{G_n/H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$
6. Si  $(C, \partial)$  es un complejo de cadenas, definimos los grupos graduados de ciclos,  $Z(C) = \{\text{Ker} \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \text{Ker} \partial$ , y de bordes,  $B(C) = \{\text{Im} \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \equiv \text{Im} \partial$ , con lo que definimos el grupo de homología graduado  $H(C) = Z(C)/B(C)$ .
7. Dados dos complejos de cadenas  $(C, \partial), (D, \tilde{\partial})$ , una homotopía de cadenas entre dos homomorfismos de cadenas  $f, g : C \longrightarrow D$  es un homomorfismo de cadenas  $T : C \longrightarrow D$  de grado  $+1$  que satisface  $\tilde{\partial} \circ T + T \circ \partial = f - g$ .

## A. Apéndice 1: Grupos

**Definición A.1.** Sean  $\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  un conjunto de grupos abelianos (finitos o infinitos), el grupo suma directa de dichos subgrupos es

$$\bigoplus_i G_i = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} g_i : g_i \in G_i \ \forall i \in \mathcal{I}, \ |\{i \in \mathcal{I} : g_i \neq 0\}| < \infty \right\},$$

que tiene estructura de grupo abeliano con la suma directa de elementos del mismo grupo abeliano original,  $G_i$ , es decir,

$$\sum_i g_i + \sum_i h_i = \sum_i (g_i + h_i)$$

**Definición A.2.** Si  $S$  es un conjunto, definimos el grupo libre generado por  $S$  como

$$\langle S \rangle := \left\{ \prod_{j \in \mathcal{J}} g_j^{n_j} : g_j \in S, n_j \in \mathbb{Z} \ \forall j \in \mathcal{J}, \ |\mathcal{J}| < \infty \right\},$$

con el producto la yuxtaposición. Notar que no es necesariamente abeliano, en tal caso lo escribiremos como una suma y la operación será sumar los coeficientes para cada elemento de  $S$  que, por tanto, solo aparecerán una vez cada uno a lo sumo.

**Nota A.1.** Si  $\{G_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  son grupos abelianos libres generados por sendos conjuntos  $S_i$ , su suma directa también lo es y está generada por  $\cup_i S_i$ .

**Nota A.2.** Sean  $H_i \leq G_i \ \forall i \in \mathcal{I}$ , subgrupos de grupos abelianos, y sea  $\varphi$  el homomorfismo  $\bigoplus_i G_i \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_i G_i / H_i$ ,  $\sum_i g_i \mapsto \sum_i g_i H_i$ . Se tiene que es sobreyectiva porque es la proyección componente a componente (cada componente es un sumando) y su núcleo es  $\bigoplus_i H_i$ , por tanto, por el primer teorema de isomorfía

$$\bigoplus_i G_i / \bigoplus_i H_i \cong \bigoplus_i G_i / H_i$$