

# DESCOMPOSICIÓN HELICOIDAL DE TURBULENCIA ROTANTE

Mariano Santaya

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2017



TEMA: Descomposición helicoidal de turbulencia rotante

ALUMNO: Mariano Santaya

LU N° : 467/11

LUGAR DE TRABAJO: Depto. De Física. FCEN. UBA.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Mininni

CODIRECTOR o COLABORADOR:

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2016

FECHA DE FINALIZACION: Marzo de 2017

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Profesor de Tesis de Licenciatura

---

Jurado



# Resumen

En esta tesis se presenta un estudio de turbulencia rotante en tres dimensiones mediante simulaciones numéricas directas. En turbulencia tridimensional, la energía y la helicidad que son constantes de movimiento de la ecuación de fluidos sin viscosidad, juegan un rol central. En este trabajo se aplicó la *descomposición helicoidal* de la velocidad en ondas con polarización positiva (+) y negativa (-) al estudio de espectros y flujos de energía y helicidad. Dicha descomposición resulta muy útil en el estudio de turbulencia rotante debido a que los modos helicoidales son soluciones exactas de ondas inerciales en fluidos en rotación. Los modos helicoidales de la energía y la helicidad no se conservan por separado, sino que puede haber transferencias entre los modos con polarizaciones + y - de estas magnitudes. Para cada uno de los dos invariantes mencionados (energía y helicidad) existen cuatro flujos, que corresponden a las transferencias entre escalas y a las transferencias entre los modos helicoidales + y -. Los flujos de helicidad en los modos helicoidales + y - tienen un rango inercial más corto que los flujos de energía. Sin embargo, el flujo de helicidad hacia las escalas pequeñas en los modos helicoidales + y -, y el flujo global de helicidad, tienen un rango inercial similar al de la energía. Este resultado fue observado previamente para turbulencia isótropa y homogénea sin rotación, y en este trabajo se extiende al estudio de turbulencia rotante. Además, se estudió el espectro espacio-temporal de la energía, y de los modos helicoidales + y - de la misma. Se observó que la presencia de helicidad modifica la cantidad de energía que se concentra en ondas inerciales con diferentes direcciones de propagación, estableciendo una dirección de propagación privilegiada. En cambio, en simulaciones sin helicidad neta, las direcciones de propagación de las ondas están balanceadas, es decir, no hay una dirección de propagación que concentre más energía que otra. En esta tesis se presenta este fenómeno y se lo explica mediante la descomposición helicoidal mencionada.



# Agradecimientos

A Olimpia y a Horacio, mis padres, les agradezco el apoyo, el cariño, y la incansable predisposición para intentar solucionar todos mis problemas no académicos. Me allanaron el camino para que pudiera dedicarme a esta profesión tan linda y demandante. A Gonzalo, por guiarme desde pequeño con sus consejos de hermano mayor; fue un placer crecer junto a vos. A mis abuelos, Chenta y Raimundo, por el cariño incondicional, y por la constante preocupación por mis avances en la carrera. ¡Ya me recibo abuela! En fin, a los cinco, les debo todo.

Al resto de mi familia, los de lejos, los de cerca, la familia de sangre, la familia por adopción (los Porteous y los Benito), gracias por acompañarme en estos años.

A Sofia por acompañarme, por contarme todo, por escucharme siempre. Sos mi compañera, mi confidente, mi psicóloga, y mi amor.

A mis amigos y compañeros de la facultad: la carrera es más fácil cursando con gente maravillosa como la que me tocó.

A mis amigos y compañeros del INTI: con su aliento y su compañía desarrollé gran parte de mi carrera.

A mis amigos de siempre, los de la primaria y los del SPAM, por estar siempre, por sacarme a pasear un poco. No hay mejor manera de despejar la cabeza.

A Pablo, mi director, por su dedicación, por la paciencia para explicar, y por la claridad, la relevancia y la rapidez de sus correcciones. Pero sobre todo por excederse en su rol de director para darme los consejos profesionales que me alentaron a inscribirme al doctorado.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Teoría de turbulencia rotante</b>	<b>15</b>
2.1. Magnitudes conservadas . . . . .	15
2.1.1. Conservación del momento . . . . .	16
2.1.2. Conservación de la energía . . . . .	17
2.1.3. Conservación de la helicidad . . . . .	17
2.2. Flujos rotantes . . . . .	19
2.3. Descomposición helicoidal . . . . .	20
2.3.1. Descripción matemática . . . . .	21
2.3.2. La descomposición helicoidal en turbulencia rotante . .	23
2.4. Fenomenología de flujos turbulentos rotantes . . . . .	24
2.4.1. Flujos sin helicidad . . . . .	25
2.4.2. Flujos helicoidales . . . . .	26
2.5. Descomposición para los flujos . . . . .	27
2.5.1. Espectros y transferencias de energía y helicidad . . .	27
2.5.2. Flujos de energía y helicidad . . . . .	29
2.5.3. Balances totales . . . . .	30
<b>3. Simulaciones numéricas</b>	<b>33</b>
3.1. Descripción de las simulaciones . . . . .	33
3.2. Espectros . . . . .	36
3.3. Flujos . . . . .	38
<b>4. La descomposición helicoidal</b>	<b>45</b>
4.1. Espectros . . . . .	45
4.1.1. Análisis fenomenológico de los espectros . . . . .	46
4.1.2. Espectros en la descomposición helicoidal . . . . .	47
4.2. Flujos . . . . .	54
4.2.1. Valores relevantes en el análisis de flujos . . . . .	54
4.2.2. Flujos en la descomposición helicoidal . . . . .	56

4.2.3. Análisis fenomenológico de los flujos . . . . .	61
4.3. Análisis de frecuencias espaciales y temporales . . . . .	68
<b>5. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La turbulencia es un fenómeno que está presente en una amplísima variedad de sistemas físicos. Los sistemas turbulentos son no lineales, lo cual genera un acoplamiento entre las estructuras en distintas escalas, resultando en interacciones altamente complejas. Para el estudio de estos problemas mediante simulaciones numéricas es necesaria una capacidad de cálculo elevada, que solo se encuentra disponible desde hace algunas décadas. Más aún, con la capacidad de cálculo disponible actualmente, valores realistas del acoplamiento entre distintas escalas son inalcanzables [6, 8].

Dentro de los sistemas turbulentos, la turbulencia en medios rotantes es un problema de mucha relevancia debido a la gran cantidad de sistemas físicos afectados por la rotación. Uno de los principales problemas que requieren una mejor comprensión de la turbulencia rotante es el movimiento a gran escala de la atmósfera y los océanos. La rotación en flujos turbulentos también tiene aplicaciones en campos tan diversos como la astrofísica, o el estudio de máquinas industriales. La existencia de tantas aplicaciones tanto en la industria como en la naturaleza genera la necesidad de estudiar en detalle estos flujos.

En el estudio de la turbulencia tienen gran importancia las magnitudes que se conservan en el caso ideal (sin viscosidad ni fuerzas externas). La energía y la helicidad son los dos invariantes cuadráticos ideales para la ecuación de movimiento que rige a la turbulencia hidrodinámica en tres dimensiones [21]. La helicidad mide la correlación global entre el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  y la vorticidad  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . En turbulencia hidrodinámica sin rotación, tanto la energía como la helicidad se transfieren hacia escalas más pequeñas en un proceso de cascada directa. Sin embargo, en el caso de la turbulencia rotante la helicidad afecta fuertemente el decaimiento de la energía, inhibiendo la cascada directa de manera que el decaimiento de la energía es más lento y las leyes de potencia que sigue el flujo son distintas [22]. Así-

mismo, las leyes de potencia en turbulencia rotante también dependen de la cantidad de helicidad presente en el flujo, mientras que en turbulencia sin rotación la presencia de helicidad no modifica la cascada de energía. A lo largo de esta tesis se estudiarán flujos con distintas frecuencias de rotación y con distintas cantidades de helicidad global.

Es muy conveniente afrontar el estudio de la turbulencia rotante desde el punto de vista de la descomposición helicoidal [4, 25]. El método consiste en descomponer la velocidad en modos helicoidales, que resultan ser soluciones de ondas iniciales en fluidos en rotación. Es precisamente por eso que esta descomposición resulta tan útil para el estudio de la turbulencia rotante. Además, la descomposición de la velocidad en modos helicoidales permite también descomponer la energía y la helicidad en dichos modos. En esta tesis se propone el estudio de flujos turbulentos rotantes mediante simulaciones numéricas, haciendo énfasis en el comportamiento de la energía en sus modos helicoidales, en su distribución espectral, y su distribución en frecuencias. Veremos como este enfoque nos permite estudiar como se distribuye la energía en ondas iniciales que se propagan en una u otra dirección de propagación, dependiendo del sentido de rotación y de la presencia o no de helicidad global. Veremos también como la tendencia al predominio de movimientos ciclónicos (es decir, en el mismo sentido de la rotación) en flujos rotantes, modifica la cantidad de energía presente en las distintas ondas iniciales dependiendo de la presencia o ausencia de helicidad.

La tesis se divide en cinco capítulos organizados de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta una breve introducción a la teoría de turbulencia rotante. Inicialmente se presentan las magnitudes conservadas en turbulencia hidrodinámica ideal, luego se presentan los flujos rotantes, la descomposición helicoidal, y finalmente se aplica dicha descomposición al estudio de espectros y flujos de energía y helicidad en turbulencia rotante. Mientras que los primeros temas corresponden a resultados previos de otros autores que son necesarios para entender el trabajo, el último tema en este capítulo es un resultado original de este trabajo. En el capítulo 3 se describen las principales características de las simulaciones numéricas realizadas en esta tesis, y se presentan los espectros y flujos de energía y helicidad para cada simulación. En el Capítulo 4 se aplica la descomposición helicoidal derivada en el Capítulo 2 al estudio de la turbulencia rotante. Se presentan espectros y flujos de energía y helicidad en los modos helicoidales, y se estudian resultados tales como la diferencia en los rangos iniciales de las distintas componentes de la energía y helicidad mencionadas anteriormente. Luego se presenta la distribución de energía en números de onda y en frecuencias (el espectro espacio-temporal), lo cual nos permite cuantificar cuanta energía se encuentra en las ondas iniciales. Asimismo, veremos como esto nos permite relacionar la cantidad de

helicidad y el sentido de la rotación, con la cantidad de energía en cada modo de las ondas inerciales con diferente dirección de propagación y polarización. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis.



# Capítulo 2

## Teoría de turbulencia rotante

En este capítulo introduciremos las bases teóricas del estudio de la turbulencia rotante, que nos serán de utilidad más adelante para comprender los fenómenos que observaremos en las simulaciones numéricas realizadas en esta tesis. Comenzaremos con un breve estudio de las magnitudes conservadas en turbulencia hidrodinámica sin rotación, en la sección 2.1. En particular nos interesará el comportamiento de la energía y la helicidad del flujo, que si bien no se conservan en las simulaciones realizadas debido a la presencia de viscosidad y forzado externo, son magnitudes de mucha utilidad para entender la dinámica del flujo. Continuaremos la sección dando una introducción a la turbulencia rotante (ver sección 2.2). En la sección 2.3 se presentará la descomposición helicoidal, un método para descomponer la velocidad en modos helicoidales que resulta muy apropiado para el estudio de turbulencia rotante. En la sección 2.4 se introducirá un modelo fenomenológico de la turbulencia, que será fundamental para entender el comportamiento de las simulaciones que se estudian en esta tesis. Para finalizar, en la sección 2.5 se aplicará la descomposición helicoidal a la energía y a la helicidad, y también a los flujos de estas magnitudes. Si bien la descomposición de la energía y la helicidad y de sus flujos se presentó originalmente para turbulencia isótropa y homogénea en [1, 4], la extensión al caso de flujos rotantes es uno de los resultados de la presente tesis.

### 2.1. Magnitudes conservadas en turbulencia hidrodinámica

En esta sección presentamos las magnitudes conservadas en la ecuación de Navier-Stokes sin viscosidad (es decir, para la ecuación de Euler), sin

rotación y sin fuerzas externas. En esas condiciones la ecuación queda

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i p, \quad (2.1)$$

donde utilizamos notación de índices y convención de la suma. Aquí,  $u_i$  son las componentes cartesianas de la velocidad del fluido, y  $p$  es la presión. Asumimos que el fluido es incompresible y tiene densidad de masa  $\rho = 1$ .

Comenzamos por introducir las condiciones de contorno que consideraremos para deducir posteriormente la conservación de momento, energía y helicidad. Si bien en esta tesis se consideran situaciones con viscosidad, fuerzas externas y rotación, por lo que estas magnitudes no se conservarán, veremos que igualmente son de mucha utilidad para describir la dinámica de los flujos considerados.

### Condiciones de contorno

Para simplificar el problema, comenzamos por asumir que el fluido en consideración ocupa todo el espacio. La falta de contornos trae dificultades en los cálculos, por lo que es más conveniente asumir condiciones de contorno periódicas [8]

$$u(x, y, z) = u(x + nL, y + mL, z + qL), \quad (2.2)$$

para cualquier valor de  $x, y, z \in \mathbb{R}$  y para todo  $n, m, q \in \mathbb{Z}$ . En el caso en que  $L$  tiende a infinito se recupera el caso homogéneo sin contornos.

Si definimos el valor medio de una cantidad  $\langle A \rangle$  como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{L^3} \int A(\mathbf{r}) dV \quad (2.3)$$

tendremos que para todas las funciones reales y periódicas se cumplen las siguientes propiedades

$$\langle \partial_i f \rangle = 0, \quad (2.4)$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \rangle = \langle (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \rangle. \quad (2.5)$$

Estas propiedades nos serán de mucha utilidad para deducir a continuación las conservaciones de momento, energía y helicidad.

#### 2.1.1. Conservación del momento

De acuerdo al teorema de Noether, cuando se trata con sistemas conservativos que pueden escribirse mediante un Lagrangiano, para cada simetría del

mismo existirá una cantidad conservada [9]. La conservación del momento se corresponde con la invarianza del Lagrangiano frente a traslaciones espaciales. Al término de advección de la ecuación (2.1),  $u_j \partial_j u_i$ , lo podemos reescribir como  $\partial_j(u_j u_i)$  usando la condición de incompresibilidad.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_i u_i = 0. \quad (2.6)$$

Si ahora hacemos uso de la ecuación (2.4), obtenemos la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (2.7)$$

### 2.1.2. Conservación de la energía

Para deducir la conservación de la energía multiplicamos la ecuación (2.1) por  $u_i$ . Utilizando la condición de incompresibilidad  $\partial_i u_i = 0$  podemos reescribir el término no lineal como  $\partial_j(u_j u^2/2)$ , mientras que el término de presión queda  $\partial_i(u_i p)$ . Si aplicamos valor medio y utilizamos la ecuación (2.4), nos queda

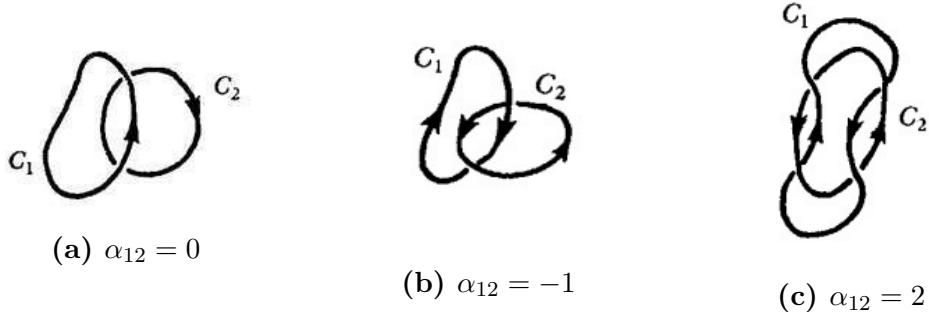
$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Esto nos indica que en ausencia de fricción y fuerzas externas, la energía cinética se conserva. La conservación de la energía permite explicar la distribución de las excitaciones en los distintas escalas que se observan en flujos turbulentos, aún en aquellas donde no se introduce energía en forma directa a través de fuerzas externas. Esta es una característica típica de flujos turbulentos y se debe a que el término no lineal excita modos en todas las escalas disponibles. En turbulencia bidimensional la energía fluye hacia escalas más grandes que la escala de inyección de energía (cascada inversa) [11], y la fricción es quien impide que la energía se acumule en la mayor escala disponible [14]. En el caso tridimensional la cascada de energía se produce desde escalas más grandes hacia las escalas más chicas (cascada directa), hasta alcanzar la escala de disipación de la energía.

### 2.1.3. Conservación de la helicidad

Definimos la helicidad en un fluido como la correlación entre la velocidad y la vorticidad [14, 16], definida como  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Matemáticamente se escribe

$$H(t) = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV. \quad (2.9)$$



**Figura 2.1:** Grado de anudamiento entre dos filamentos cerrados  $C_1$  y  $C_2$  ( $\alpha_{12}$ ). La elección del signo en (b) y (c) está determinada por la orientación relativa de los dos filamentos. El módulo de  $\alpha_{12}$  está dado por la cantidad de veces que un filamento atraviesa el área que encierra el otro [16].

Para deducir la conservación de helicidad, comenzamos tomando el rotor de la ecuación (2.1),

$$\frac{d\omega}{dt} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (2.10)$$

Si hacemos el producto escalar de esta ecuación con la velocidad  $\mathbf{u}$  y tomamos promedio temporal, notamos que por la ecuación (2.5) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = 2 \langle \mathbf{u} \cdot (\partial_t \boldsymbol{\omega}) \rangle.$$

A partir de este resultado y utilizando nuevamente la relación (2.5) para el término no lineal, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = 0. \quad (2.11)$$

Esto nos indica que la helicidad es un invariante de la ecuación de Euler.

La conservación de la helicidad se descubrió en [16], donde también se mostró que la misma es proporcional al grado de anudamiento de los filamentos de vorticidad presentes en el fluido (ver Figura 2.1). A diferencia de la energía, la helicidad no es definida positiva sino que su signo depende del sistema de referencia que se elija (puede ir a favor de la regla de la mano derecha o de la mano izquierda), por lo que se trata de un pseudo-escalar.

La presencia de helicidad en turbulencia rotante tiene particular importancia, dado que modifica la forma en que la energía es transferida entre las distintas escalas del sistema [21]. Esto tiene un fuerte impacto en la tasa de decaimiento de la energía cinética total, y en el espectro de la energía y la helicidad. La helicidad se ha medido en la atmósfera y se la ha

utilizado para explicar la estabilidad, la larga duración, y la predictibilidad de tormentas rotantes convectivas [12].

## 2.2. Flujo rotante

La dinámica de un fluido incompresible sometido a rotación rígida, si nos situamos en el sistema de referencia rotante, se describe agregando el efecto de la rotación a la ecuación de Navier Stokes mediante el término centrífugo y de Coriolis,

$$\partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2.12)$$

y utilizando la condición de incompresibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.13)$$

En estas ecuaciones  $\mathbf{u}$  representa la velocidad,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  es la vorticidad,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$  es la frecuencia de rotación,  $\mathbf{F}$  es el forzado externo mecánico por unidad de masa, y

$$P = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2} \quad (2.14)$$

es la presión total por unidad de masa, que contiene el término centrífugo.

El fenómeno de rotación tiene gran importancia en una gran variedad de flujos turbulentos. Probablemente uno de los ejemplos más relevantes del efecto de la rotación en fluidos se da en la atmósfera y los océanos. La Figura 2.2 muestra una imagen atmosférica sobre Islandia, en la que se observa rotación en sentido antihorario debida al balance de la fuerza de Coriolis con la fuerza de presión. La rotación en flujos turbulentos también tiene aplicaciones en astrofísica, y en el estudio de máquinas industriales.



**Figura 2.2:** Imagen atmosférica tomada sobre Islandia. Se observa una rotación en sentido antihorario debido al balance entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión (fuente: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)).

De aquí en adelante es muy conveniente utilizar números adimensionales para caracterizar ciertos aspectos de los flujos. Para ello conviene definir  $l$  y  $U$  como la distancia y velocidad características del problema (respectivamente). Comenzamos por definir el número de Reynolds, que mide la importancia relativa del término no lineal frente al término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes (2.1). Matemáticamente se escribe

$$Re = \frac{Ul}{\nu}. \quad (2.15)$$

En turbulencia rotante también tiene fundamental importancia el número de Rossby, que mide la importancia relativa entre el término no lineal y el de Coriolis, es decir

$$Ro = \frac{U}{2\Omega l}. \quad (2.16)$$

Finalmente, definimos el número de Ekman,

$$Ek = \frac{\nu}{2\Omega l^2}, \quad (2.17)$$

que nos da la importancia relativa del término viscoso frente al término de Coriolis.

## 2.3. Descomposición helicoidal

En esta sección se presenta una introducción teórica a la descomposición helicoidal. En la subsección 2.3.1 se presenta una descripción matemática del

problema (ver [24, 25]). A continuación, en la subsección 2.3.2, se aplica la decomposición helicoidal a la turbulencia rotante. Veremos que la descomposición helicoidal es particularmente útil para describir fluidos en rotación debido a que las ondas iniciales características de los flujos rotantes se descomponen naturalmente en modos helicoidales.

### 2.3.1. Descripción matemática

Consideremos un fluido incompresible en una caja periódica de lado  $L$ . Sabemos que el campo de velocidades puede descomponerse naturalmente en una serie de Fourier. La ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  requiere que el vector de velocidad en el espacio de Fourier,  $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ , sea ortogonal al vector de onda  $\mathbf{k}$ , es decir  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Este vínculo se satisface fácilmente si representamos el vector de velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{k})$  en términos de su proyección en una base ortonormal formada por tres vectores ortogonales  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{h}_+$  y  $\mathbf{h}_-$ , y anulamos la componente del vector de velocidad  $\mathbf{u}$  en la dirección  $\mathbf{k}$ . Los vectores de la base  $\mathbf{h}_+$  y  $\mathbf{h}_-$  pueden ser complejos, y por ortogonalidad cumplen las siguientes relaciones

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_s = \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}_{-s}^* = 0, \quad (2.18)$$

donde  $s = \pm 1$ , y  $*$  representa el complejo conjugado. Finalmente, para cumplir la condición  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ , la velocidad puede representarse como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (a_+(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_-(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.19)$$

donde  $k = (m, n, l)2\pi/L$  con  $m, n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Los coeficientes de Fourier  $a_+$  y  $a_-$  se obtienen mediante la siguiente transformación:

$$a_s(\mathbf{k}, t) = \frac{\mathbf{h}_s^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})}{\mathbf{h}_s^* \cdot \mathbf{h}_s} = \frac{1}{L^3 (\mathbf{h}_s^* \cdot \mathbf{h}_s)} \int_{L^3} \mathbf{h}_s^* \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx. \quad (2.20)$$

Hasta aquí  $\mathbf{h}_+$  y  $\mathbf{h}_-$  son simplemente dos vectores que satisfacen las condiciones (2.18). Una elección conveniente para la base  $\mathbf{h}_s$  es la de “ondas helicoidales” (que para flujos rotantes coincidirán con las ondas iniciales):

$$\mathbf{h}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \boldsymbol{\nu} \times \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} + is\boldsymbol{\nu} \right) \quad (2.21)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es un vector unitario ortogonal a  $\mathbf{k}$ , por ejemplo  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{z} \times \mathbf{k} / |\mathbf{z} \times \mathbf{k}|$ , tomando  $\mathbf{z}$  como un vector arbitrario. Esta elección para  $\mathbf{h}_s$  cumple  $\mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}_t^* = \delta(s, t)$ . Además se puede verificar que  $\mathbf{h}_s^* = \mathbf{h}_{-s}$ , y  $\mathbf{h}_s(-\mathbf{k}) = \mathbf{h}_s^*(\mathbf{k})$ . Haciendo

uso de estos resultados e imponiendo la condición de que el flujo debe ser real, se deduce también que  $a_s(-\mathbf{k}) = a_s^*(\mathbf{k})$ . Una propiedad útil de la base 2.21 es que los vectores  $\mathbf{h}_s$  son autoestados del rotor:

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_s = sk\mathbf{h}_s. \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.20) constituyen lo que se conoce como descomposición helicoidal. Los modos de Fourier  $\mathbf{h}_+e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{h}_-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  son modos circularmente polarizados y sus polaridades son opuestas. La parte real de la velocidad que corresponde al modo positivo,  $\mathbf{h}_+e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{h}_+^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , rota en sentido antihorario a medida que aumenta  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . La vorticidad es paralela a la velocidad, y por lo tanto la helicidad es máxima con signo positivo. Por otro lado, la parte real de la velocidad que corresponde al modo negativo,  $\mathbf{h}_-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{h}_-^*e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , rota en sentido horario a medida que aumenta  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , es decir, formando un espiral en el sentido de la regla de la mano izquierda. En este caso la vorticidad es antiparalela a la velocidad, y por lo tanto la helicidad es máxima con signo negativo.

En este punto es conveniente definir los vectores

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a_\pm(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.23)$$

que nos permiten descomponer el campo de velocidades según su componente en  $\mathbf{h}_+e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{h}_-e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ . De esta manera  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^-(\mathbf{x})$ . En el espacio de Fourier, el campo de velocidades también puede escribirse como  $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{u}^+(\mathbf{k}, t) + \mathbf{u}^-(\mathbf{k}, t)$ , donde ahora las componentes  $\mathbf{u}^\pm(\mathbf{k}, t)$  son simplemente

$$\mathbf{u}^\pm(\mathbf{k}, t) = a_\pm(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}). \quad (2.24)$$

La vorticidad del flujo puede escribirse como:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (ka_+ \mathbf{h}_+ - ka_- \mathbf{h}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.25)$$

haciendo uso de la ecuación (2.22). Procediendo de igual manera que para el campo de velocidades, podemos definir también

$$\boldsymbol{\omega}^\pm(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}| a_\pm(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.26)$$

de forma tal que  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^+ - \boldsymbol{\omega}^-$ . En el espacio de Fourier, esta relación se escribe como

$$\boldsymbol{\omega}^\pm(\mathbf{k}, t) = |\mathbf{k}| a_\pm(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}). \quad (2.27)$$

Dado que los modos helicoidales  $+ y -$  son ortogonales entre sí, la energía y la helicidad pueden escribirse como  $E = E^+ + E^-$  y  $H = H+ - H^-$ , donde [4]

$$E^\pm(t) = \frac{1}{2} \int |\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t)|^2 d^3\mathbf{x}, \quad H^\pm(t) = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}^\pm(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

Es importante enfatizar que cuando no hay viscosidad ni fuerzas externas, sólo las cantidades totales de energía y helicidad se conservan, y no las componentes  $E^\pm$  y  $H^\pm$  por separado.

### 2.3.2. La descomposición helicoidal en turbulencia rotante

La descomposición helicoidal presentada en la sección 2.3 es muy útil para el estudio de flujos rotantes. Esto se debe a que los modos helicoidales tienen la estructura de las ondas iniciales, presentes en fluidos sometidos a rotación rápida. En efecto, si tomamos el rotor de la ecuación de Navier-Stokes en el sistema de referencia rotante, linealizada para un fluido sin viscosidad obtenemos

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.29)$$

Es fácil verificar que las ondas iniciales  $\mathbf{u} = \mathbf{h}_s \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$  son soluciones de esta ecuación. Los vectores  $\mathbf{h}_\pm$  deben cumplir la relación  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_\pm = 0$ , que surge de la condición de incompresibilidad (2.13). La relación de dispersión para estas ondas es

$$\omega = \pm \frac{2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.30)$$

por lo que se trata de ondas dispersivas. Los modos helicoidales corresponden a ondas circularmente polarizadas que se propagan en la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$ , y cuya polarización está dada por el signo  $\pm = s$ .

Si sustituimos la velocidad en la ecuación (2.12) por  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-$  donde  $\mathbf{u}_\pm$  están dados por la ecuación (2.24), obtenemos [25]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{s_k} + \nu k^2 \right) a_{s_k} = \frac{1}{2} Ro \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q} a_{s_p}^* a_{s_q}^*. \quad (2.31)$$

Como vemos, la fuerza de Coriolis contribuye con el término  $i\omega_{s_k} a_{s_k}$ . La ecuación está adimensionalizada usando  $1/2\Omega$  como escala temporal,  $U$  y  $l$  como velocidad y longitud características respectivamente.

Si nos concentramos en valores grandes de  $\Omega$  tendremos números de Rossby y Ekman pequeños. En la escala temporal de la rotación, las amplitudes  $a_{s_k}$  se comportan como ondas rápidas moduladas por vórtices lentos [2, 25], y pueden escribirse como

$$a_{s_k} = b_{s_k} e^{i\omega_{s_k} t}. \quad (2.32)$$

Las amplitudes  $b_{s_k}$ , que corresponden a la modulación lenta de la amplitud por los vórtices, se pueden hallar reemplazando (2.32) en (2.31)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) b_{s_k} = \frac{1}{2} Ro \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q} b_{s_p}^* b_{s_q}^* e^{-i(\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q})t}. \quad (2.33)$$

Esto muestra que los  $b_{s_k}$  evolucionan en la escala temporal  $Rot$ , a partir de interacciones no lineales. En rotación rápida, esta escala temporal es mucho más lenta que la escala de variación de las ondas,  $\tau_\omega = 2\pi/\omega$ , con lo cual las interacciones entre vórtices tales que  $\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q} \neq 0$  tienden a promediarse a cero si integramos en escalas temporales largas. Teniendo esto en cuenta, se puede escribir una ecuación aproximada para las amplitudes  $b_{s_k}$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) b_{s_k} = \frac{1}{2} Ro \sum_{\substack{\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q} = 0 \\ \mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q} b_{s_p}^* b_{s_q}^*. \quad (2.34)$$

Esta última ecuación es idéntica a la ecuación que describe a la turbulencia homogénea e isótropa, con la única diferencia de que ahora la suma se encuentra restringida a tríadas resonantes que cumplan

$$\omega_{s_k} + \omega_{s_p} + \omega_{s_q} = 0. \quad (2.35)$$

Esta ecuación se satisface trivialmente en los modos con  $k_z = 0$ , llamados modos 2D o modos "lentos", dado que estos modos tienen  $\omega_{s_k} = 0$  y corresponden a vórtices bidimensionales. Por esta razón el acoplamiento no lineal da como resultado una transferencia de energía preferentemente hacia modos con  $k_z$  chico [24, 25]. De todas maneras debe tenerse en cuenta que para los modos lentos deja de ser válida la aproximación  $\tau_\omega \ll Rot$ . En la referencia [5] se hace un estudio detallado de los diferentes tiempos de decorrelación que dominan en las distintas escalas del problema.

## 2.4. Fenomenología de flujos turbulentos rotantes

En turbulencia isótropa y homogénea, tanto la helicidad como la energía se transfieren hacia escalas más pequeñas, formando una cascada directa que

sigue el espectro de Kolmogorov  $E(k) \sim k^{-5/3}$  y  $H(k) \sim k^{-5/3}$ . Este comportamiento se observa tanto en flujos helicoidales como en flujos sin helicidad, por lo que el rol de la conservación de helicidad en turbulencia isótropa y homogénea no es claro. Sin embargo, cuando se trata de turbulencia rotante, el espectro de energía se ve fuertemente afectado por la helicidad [22]. En esta sección presentamos argumentos fenomenológicos para describir el espectro de flujos turbulentos rotantes con y sin helicidad.

### 2.4.1. Flujos sin helicidad

Sabemos que la presencia de rotación rompe la simetría del flujo y establece una dirección privilegiada en el espacio, de manera que la energía se transfiere preferentemente hacia modos cuyos números de onda en la dirección paralela al eje de rotación son pequeños. Esta transferencia resulta en una tendencia a bi-dimensionalizar el flujo. Esto es el resultado de la existencia de una condición adicional para la transferencia de energía, conocida como condición de resonancia (ecuación 2.35). La condición de resonancia impone una restricción para la transferencia de energía en comparación con el caso isótropo y homogéneo, por lo que se reduce el número de tríadas aptas para dicha transferencia, reduciendo así el flujo global de energía.

Notemos que cuanto mayor es  $\Omega$ , más grande es la frecuencia característica de las ondas  $\omega$ , por lo que se torna más difícil satisfacer la condición de resonancia [19]. En otras palabras, la reducción de la transferencia de energía es más pronunciada cuanto menor es  $\tau_\Omega \sim 1/\Omega$ . Si representamos esta reducción en el flujo mediante la razón  $\tau_\Omega/\tau_{l_\perp}$ , y asumimos que la tasa de energía inyectada ( $\epsilon$ ) a escalas grandes es transferida en forma constante durante todo el rango inercial, usando que el flujo tiene unidades de energía sobre tiempo tenemos que

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_\perp}^2}{\tau_{l_\perp} \tau_{l_{perp}}} \frac{\tau_\Omega}{\tau_{l_{perp}}} \sim \frac{u_{l_\perp}^2}{\tau_{l_\perp}^2} \frac{1}{\Omega}, \quad (2.36)$$

donde  $\tau_{l_\perp}$  es el tiempo característico de giro de un remolino en la escala  $l_\perp$  del rango inercial, y  $u_{l_\perp}$  es la velocidad asociada. Tomando  $u_{l_\perp} \sim l_\perp/\tau_{l_\perp}$  y reemplazando en la ecuación anterior, queda

$$\epsilon \sim \frac{u_{l_\perp}^4}{l_\perp \Omega}. \quad (2.37)$$

De aquí se deduce que  $u_{l_{perp}}^2 \sim (\epsilon \Omega)^{1/2} l_\perp$ , con lo cual el espectro de energía perpendicular puede calcularse como

$$E(k_\perp) \sim \frac{\langle u_{l_\perp}^2 \rangle}{k_\perp} \sim (\epsilon \Omega)^{1/2} k_\perp^{-2} \quad (2.38)$$

donde reemplazamos  $l_\perp$  por  $k_\perp = 2\pi/l_\perp$ . A partir de estos argumentos fenomenológicos podemos ver que el espectro de energía perpendicular de un flujo en rotación tiene una pendiente más pronunciada que el espectro de energía en el caso isótropo y homogéneo.

### 2.4.2. Flujos helicoidales

En flujos rotantes helicoidales existen dos mecanismos que inhiben la transferencia de energía entre escalas. Por un lado, la rotación permite la transferencia de energía sólo entre tríadas que cumplen la condición de resonancia, lo cual reduce la tasa de transferencia de energía. Por otro lado, sabemos que la helicidad máxima se alcanza cuando la velocidad  $\mathbf{u}$  es paralela a la vorticidad  $\boldsymbol{\omega}$ . Si reescribimos el término no lineal de la ecuación de Navier-Stokes usando la siguiente identidad vectorial

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(u^2), \quad (2.39)$$

podemos notar fácilmente que el vector de Lamb,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ , será más pequeño cuanto mayor sea la helicidad. Esto nos indica que en presencia de helicidad las interacciones no lineales se ven fuertemente reducidas, lo cual inhibe aún más la transferencia de energía entre escalas.

Sabemos que en el espacio de Fourier la helicidad y la energía cumplen la desigualdad de Schwartz,  $H(k_\perp) \leq E(k_\perp) k_\perp$ , donde la igualdad se satisface en el caso en que la velocidad es paralela a la vorticidad. Vemos que en las escalas grandes  $k_\perp$  es pequeño, y por lo tanto la helicidad es baja, con lo cual la cascada de helicidad sólo puede producirse hacia escalas más chicas. Si llamamos  $\delta$  al flujo de helicidad, vemos que siguiendo los mismos argumentos dimensionales que en la sección anterior,

$$\delta \sim \frac{h_{l_\perp}}{\tau_{l_\perp} \tau_{l_\perp}} \frac{\tau_\Omega}{\tau_{l_\perp}} \quad (2.40)$$

donde  $h_{l_\perp}$  es el contenido de helicidad en la escala  $l_\perp$ . Usando esta condición junto con la desigualdad de Shwartz vemos que si el espectro de energía va como  $E(k_\perp) \sim k_\perp^{-n}$ , el espectro de helicidad sigue la siguiente ley de potencias [19]

$$H(k_\perp) \sim k_\perp^{n-4}. \quad (2.41)$$

De aquí se recupera que en el caso de rotación sin helicidad neta tendremos  $n = 2$ , mientras que para rotación con helicidad máxima tendremos  $n = 2,5$  (por la desigualdad de Shwartz). Es decir que el espectro de energía en turbulencia rotante estará entre las leyes de potencia  $k_\perp^{-2}$  y  $k_\perp^{-2,5}$  dependiendo de la cantidad de helicidad neta presente en el flujo.

## 2.5. Descomposición para los flujos en el caso rotante.

En esta sección se presenta un análisis de cómo aplica la descomposición helicoidal en los espectros y flujos de energía y helicidad (ver subsecciones 2.5.1 y 2.5.2 respectivamente). Este análisis fue presentado previamente en [4] para turbulencia hidrodinámica sin rotación. En esta tesis se extiende este resultado al estudio de turbulencia rotante. Finalmente, en la subsección 2.5.3 se estudian las ecuaciones de balance de energía y helicidad para las polarizaciones + y -.

### 2.5.1. Espectros y transferencias de energía y helicidad

A partir de las ecuaciones (2.24) y (2.27), y utilizando la ortogonalidad de  $\mathbf{h}_\pm$ , podemos definir los espectros de energía en los modos + y -

$$E^\pm(k, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \langle |a^\pm(\mathbf{p}, t)|^2 \rangle \delta(k - |\mathbf{p}|), \quad (2.42)$$

y de helicidad

$$H^\pm(k, t) = \sum_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}| \langle |a^\pm(\mathbf{p}, t)|^2 \rangle \delta(k - |\mathbf{p}|). \quad (2.43)$$

A partir de estas definiciones se deriva inmediatamente la siguiente relación

$$H^\pm(k, t) = 2k E^\pm(k, t). \quad (2.44)$$

Si tomamos la ecuación (2.31) para  $a_{sp}(\mathbf{p}, t)$ , la multiplicamos por  $a_{sp}^*(\mathbf{p}, t)$ , y luego le sumamos el complejo conjugado para tomar parte real, obtenemos la variación temporal de las componentes + y - de la energía

$$\partial_t E^\pm(k, t) = T_E^\pm(k, t) - 2\nu k^2 E^\pm(k, t) + F_E^\pm(k, t), \quad (2.45)$$

y de la helicidad

$$\partial_t H^\pm(k, t) = T_H^\pm(k, t) - 2\nu k^2 H^\pm(k, t) + F_H^\pm(k, t). \quad (2.46)$$

Es importante notar que las ecuaciones (2.45) y (2.46) son iguales en turbulencia homogénea e isótropa, dado que el término de Coriolis desaparece al tomar la parte real. Es decir que la variación temporal del espectro de energía y helicidad no cambia en forma explícita al aplicar rotación al sistema.

Los términos  $F_E^\pm$  y  $F_H^\pm$  son

$$F_E^\pm(k, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \langle a_\pm^*(\mathbf{p}, t) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_\pm) + c.c. \rangle \delta(k - |\mathbf{p}|), \quad (2.47)$$

$$F_H^\pm(k, t) = \sum_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}| \langle a_\pm^*(\mathbf{p}, t) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_\pm) + c.c. \rangle \delta(k - |\mathbf{p}|). \quad (2.48)$$

Estas expresiones nos dan la inyección de energía y helicidad respectivamente, en las componentes  $+$  y  $-$  del campo de velocidades, debida a la acción del forzado externo. Las funciones de transferencia  $T_E^\pm$  y  $T_H^\pm$  se definen como

$$T_E^\pm(k, t) = \frac{1}{4} Ro \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}+\mathbf{l}=\mathbf{p}} \left\langle C_{\mathbf{pq}\mathbf{l}}^{\pm s_q s_l} a_\pm^*(\mathbf{p}, t) a_{s_q}^*(\mathbf{q}, t) a_{s_l}^*(\mathbf{l}, t) + c.c. \right\rangle \delta(k - |\mathbf{p}|), \quad (2.49)$$

$$T_H^\pm(k, t) = \frac{1}{2} Ro \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}+\mathbf{l}=\mathbf{p}} |\mathbf{p}| \left\langle C_{\mathbf{pq}\mathbf{l}}^{\pm s_q s_l} a_\pm^*(\mathbf{p}, t) a_{s_q}^*(\mathbf{q}, t) a_{s_l}^*(\mathbf{l}, t) + c.c. \right\rangle \delta(k - |\mathbf{p}|). \quad (2.50)$$

La inyección de energía y helicidad total debido al forzado externo está dada respectivamente por

$$F_E(k, t) = F_E^+(k, t) + F_E^-(k, t), \quad (2.51)$$

$$F_H(k, t) = F_H^+(k, t) - F_H^-(k, t), \quad (2.52)$$

mientras que la transferencia total de energía y helicidad entre escalas se escribe como

$$T_E(k, t) = T_E^+(k, t) + T_E^-(k, t), \quad (2.53)$$

$$T_H(k, t) = T_H^+(k, t) - T_H^-(k, t). \quad (2.54)$$

Finalmente, los espectros de energía y helicidad en los modos  $+$  y  $-$  de las ecuaciones (2.45) y (2.46) se pueden combinar para obtener la variación temporal de los espectros totales de energía y helicidad

$$\partial_t E(k, t) = T_E(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) + F_E(k, t), \quad (2.55)$$

$$\partial_t H(k, t) = T_H(k, t) - 2\nu k^2 H(k, t) + F_H(k, t). \quad (2.56)$$

Esta última es la forma usual de las ecuaciones de balance detallado para la energía y la helicidad en turbulencia isotrópica y homogénea, y en turbulencia rotante [8].

### 2.5.2. Flujos de energía y helicidad

Existe una diferencia crucial entre las funciones de transferencia de las cantidades conservadas,  $T_E$  y  $T_H$ , y las funciones de transferencia de la energía y helicidad en los modos  $+$  y  $-$ ,  $T_E^\pm$  y  $T_H^\pm$ . La conservación de la energía y helicidad se manifiesta en las siguientes integrales

$$\int_0^\infty T_E(k, t) dk = \int_0^\infty T_H(k, t) dk = 0. \quad (2.57)$$

Sin embargo, estas relaciones no se satisfacen para las cantidades  $T_E^\pm$  y  $T_H^\pm$ , lo cual indica que dichas cantidades no se conservan por separado.

A partir de la ecuación (2.44), es posible escribir las cantidades  $T_E^\pm$  y  $T_H^\pm$  en función de las funciones de transferencia  $T_E$  y  $T_H$ . Empecemos por notar que

$$\begin{aligned} E(k, t) &= E^+(k, t) + E^-(k, t), \\ \frac{H(k, t)}{2k} &= E^+(k, t) - E^-(k, t). \end{aligned}$$

Reacomodando estas dos ecuaciones llegamos a las siguientes importantes relaciones

$$E^\pm(k, t) = \frac{1}{2} \left( E(k, t) \pm \frac{H(k, t)}{2k} \right), \quad (2.58)$$

$$H^\pm(k, t) = \frac{1}{2} (2kE(k, t) \pm H(k, t)). \quad (2.59)$$

Si además tomamos la derivada temporal de estas ecuaciones, y utilizamos las ecuaciones (2.45), (2.46), (2.55) y (2.56) hallamos que

$$T_E^\pm(k, t) = \frac{1}{2} \left( T_E(k, t) \pm \frac{T_H(k, t)}{2k} \right), \quad (2.60)$$

$$T_H^\pm(k, t) = \frac{1}{2} [2kT_E(k, t) \pm T_H(k, t)]. \quad (2.61)$$

Las funciones de transferencia  $T_E^\pm$  y  $T_H^\pm$  nos permiten definir los siguientes flujos

$$\Pi_X^{\pm, <}(k) = - \int_0^k T_X^\pm(p) dp, \quad (2.62)$$

y

$$\Pi_X^{\pm, >}(k) = \int_k^\infty T_X^\pm(p) dp, \quad (2.63)$$

donde  $X$  puede ser  $E$  o  $H$ .  $\Pi_X^{\pm, <}(k)$  representa el flujo de la magnitud  $X$  que sale de los modos  $\pm$  para números de onda menores a  $k$ , mientras que

$\Pi_X^{\pm,>}(k)$  representa el flujo de la magnitud  $X$  hacia los modos  $\pm$  para números de onda mayores a  $k$ . Estas cantidades en general difieren, mientras que los flujos totales satisfacen

$$\Pi_X^<(k) = \Pi_X^>(k), \quad (2.64)$$

lo cual se puede verificar fácilmente usando la relación (2.57), y sabiendo que

$$\Pi_E^<(k) = \Pi_E^{+,<}(k) + \Pi_E^{-,<}(k), \quad \Pi_H^<(k) = \Pi_H^{+,<}(k) - \Pi_H^{-,<}(k).$$

Lo mismo vale para  $\Pi_E^>(k)$  y  $\Pi_H^>(k)$ . La expresión en la ecuación 2.64 es resultado de la conservación de la energía y la helicidad en el caso ideal.

### 2.5.3. Balances totales

Para explicitar el balance total de energía y helicidad en los modos  $\pm$ , podemos integrar las ecuaciones (2.45) y (2.46) en el número de onda. Obtenemos

$$\frac{dE^\pm}{dt} = \pm R_E - D_E^\pm + F_E^\pm, \quad (2.65)$$

$$\frac{dH^\pm}{dt} = R_H - D_H^\pm + F_H^\pm, \quad (2.66)$$

donde llamamos

$$D_E^\pm = 2\nu \int_0^\infty k^2 E^\pm(k, t) dk, \quad D_H^\pm = 2\nu \int_0^\infty k^2 H^\pm(k, t) dk, \quad (2.67)$$

a la disipación total de energía y helicidad respectivamente en las componentes  $+$  y  $-$ . Definimos también

$$F_E^\pm = \int_0^\infty F_E^\pm(k, t) dk, \quad F_H^\pm = \int_0^\infty F_H^\pm(k, t) dk, \quad (2.68)$$

como las tasas de inyección total de energía y helicidad debidas al forzado externo en las componentes  $+$  y  $-$ . Para  $R_E$  y  $R_H$ , integrando las ecuaciones (2.60) y (2.61), y usando el resultado de la ecuación (2.57), obtenemos las siguientes expresiones

$$R_E = \pm \int_0^\infty T_E^\pm(k, t) dk = \int_0^\infty \frac{T_H(k, t)}{4k} dk, \quad (2.69)$$

y

$$R_H = \int_0^\infty T_H^\pm(k, t) dk = \int_0^\infty k T_E(k, t) dk. \quad (2.70)$$

Si pensamos en el caso ideal (sin disipación), y en ausencia de fuerzas externas, las ecuaciones (2.65) y (2.66) nos muestran que las componentes + y – de energía y helicidad no se conservan por separado, ya que en general, no hay motivo para que  $R_E = 0$  o  $R_H = 0$ . Por el contrario, habrá una transferencia no nula de energía ( $R_E$ ) y helicidad ( $R_H$ ) entre las componentes + y –. En otras palabras las magnitudes  $R_E$  y  $R_H$  representan respectivamente el intercambio de energía y helicidad por unidad de tiempo entre  $E^\pm$  y  $H^\pm$ . Por ejemplo, si  $R_E > 0$ , significa que hay una transferencia de energía desde la componente – hacia la componente + del campo de velocidades. Sin embargo, la variación temporal de  $E^+$  y  $E^-$  se compensará de manera que la derivada temporal de la energía total será nula, es decir, que en ausencia de fuerzas externas y disipación, la energía se conservará. En efecto, si suponemos que estamos en una situación estacionaria, obtendremos

$$D_E = F_E = \epsilon, \quad D_H = F_H = \delta, \quad (2.71)$$

mientras que para las componentes + y – por separado obtenemos

$$D_E^\pm - F_E^\pm = \pm R_E, \quad D_H^\pm - F_H^\pm = R_H. \quad (2.72)$$

Más adelante veremos que asumir una situación estacionaria no es conveniente en general en turbulencia rotante con forzado externo y disipación no nula (ver sección 4.2). Sin embargo, es útil presentar un breve análisis teórico de la situación ideal para comprender mejor las ecuaciones.

En particular, las ecuaciones anteriores nos permiten analizar en qué sentido se producirán las transferencias de energía y helicidad entre las componentes + y –. Si por ejemplo en las escalas grandes ( $k$  pequeños) se tiene que  $H^+ > H^-$ , entonces para valores de  $k$  pequeños tendremos que  $T_H(k) < 0$ , por lo que  $R_E < 0$ . Entonces ocurrirá que  $D_E^+ < F_E^+$  y  $D_E^- > F_E^-$ . El significado de estas relaciones es el siguiente: parte de la energía que se concentra en el modo + en las escalas grandes, se irá transfiriendo hacia el modo – a medida que se transfiere entre diferentes escalas, y será disipado por  $D_E^-$  y no por  $D_E^+$ . En general ocurre que la simetría de reflexión que no existe en las escalas grandes, se recupera asintóticamente en las escalas pequeñas [4]. El mismo análisis puede hacerse para el caso en que inicialmente  $H^+ < H^-$  en las escalas grandes.

Podemos hacer un análisis similar para  $R_H$ . Como vemos en la definición de  $R_H$  (ecuación 2.70) la mayor contribución a la integral vendrá de los números de onda grandes, es decir, de las escalas espaciales pequeñas, donde tenemos que  $T_E > 0$ , dado que la transferencia de energía es hacia las escalas pequeñas en cascadas directas (esta hipótesis debe ser revisada cuando la energía solo tiene una cascada inversa, dado que en ese caso  $T_E \rightarrow 0$  para

las escalas espaciales pequeñas en el límite de  $Re \rightarrow \infty$ ). Cuando  $T_E > 0$ , esto implica que tanto en la componente  $+$  como en la componente  $-$ , la disipación viscosa supera la inyección de energía dada por las fuerzas externas, es decir,  $D_H^\pm > F_H^\pm$ . Al producirse la cascada de energía en ambas componentes, hay una helicidad correspondiente para cada número de onda  $k$  dada por  $H^\pm(k) \sim 2kE^\pm(k)$ . Para  $k$  suficientemente grande, ambas componentes de helicidad crecen hasta superar la inyección misma de helicidad. En otras palabras, el valor de helicidad finito observado en un dado  $k$ , es el resultado de la cancelación de componentes  $+$  y  $-$  con amplitudes grandes, como se observó en simulaciones de turbulencia isótropa y homogénea [4]. Una dinámica similar es la responsable de las cascadas inversas de energía en turbulencia 2D (en ese caso la cantidad conservada es la enstrofía, y la ecuación análoga a (2.44) es  $\Omega(k, t) = k^2 E(k, t)$ ). La diferencia en el caso 3D es que la helicidad puede ser tanto positiva como negativa, por lo que el crecimiento de  $H^+$  se ve compensado por un crecimiento igual de  $H^-$  como se mencionó más arriba, y la helicidad total se conserva. Este crecimiento en ambas componentes de la helicidad en las escalas pequeñas implica una restauración asintótica de la simetría de paridad.

# Capítulo 3

## Simulaciones numéricas

En el presente capítulo describiremos las simulaciones númericas realizadas en esta tesis. En la sección 3.1 se presenta una breve descripción de cómo se realizaron las simulaciones y de los parámetros seleccionados. A continuación, se presentan algunos resultados como los espectros (sección 3.2) y flujos (sección 3.3) de energía y helicidad. El objetivo es caracterizar las simulaciones con las herramientas usuales de la turbulencia. Estas simulaciones se utilizarán en el capítulo siguiente para presentar un análisis de la descomposición helicoidal en turbulencia rotante.

### 3.1. Descripción de las simulaciones

En esta sección se describen las simulaciones realizadas en esta tesis. Se discute principalmente como se realizaron las simulaciones y se presentan algunas propiedades características de las mismas, como ser el número de Reynolds  $Re$ , el número de Rossby  $Ro$ , entre otros. Se trata de simulaciones numéricas de un fluido en presencia de rotación con velocidad angular  $\Omega\hat{z}$  en una caja periódica de tamaño  $(2\pi)^3$ . Todas las simulaciones se realizaron con una resolución de  $512^3$  puntos, y el sistema se forzó mecánicamente con la misma intensidad en todas las simulaciones. El forzado utilizado consistió en una suma de modos de Fourier con fases aleatorias, también con el mismo número de onda  $k_F = 3$  en todas las simulaciones.

A partir de aquí, podemos dividir las simulaciones en dos grupos. En el primero, las fases de los modos que se utilizaron para el forzado son completamente aleatorias. Esto da como resultado un forzado isótropo, con simetría de reflexión. Estas son simulaciones sin helicidad neta, y pertenecen al grupo de simulaciones que a partir de ahora denominaremos con la letra A. Para el otro grupo se impuso cierta correlación en las fases aleatorias, de forma

Simulación	$\alpha_H$	$\Omega$	$Re$	$Ro$	$Ek$
A1	0	4	3800	0,07	$1,8 \cdot 10^{-5}$
A2	0	8	3100	0,03	$9,1 \cdot 10^{-6}$
B1	$\pi/4$	4	2400	0,04	$1,8 \cdot 10^{-5}$
B2	$\pi/4$	8	2700	0,02	$9,1 \cdot 10^{-6}$

**Cuadro 3.1:** Tabla con valores característicos de las cuatro simulaciones realizadas.

tal de romper la simetría de reflexión, y en consecuencia inyectando helicidad [18, 19]. Las simulaciones que se realizaron con este forzado se incluyen en el grupo B. La correlación entre las fases del forzado en nuestras simulaciones se controlan mediante un parámetro llamado  $\alpha_H$ , teniendo helicidad neta nula para  $\alpha_H = 0$  y helicidad máxima para  $\alpha_H = \pi/4$ . A su vez, dentro de los dos grupos de simulaciones se utilizaron dos velocidades angulares distintas de rotación,  $\Omega = 4$  y  $\Omega = 8$ . En la tabla 3.1 se pueden ver los distintos parámetros de las simulaciones realizadas.

Las simulaciones se realizaron con un código paralelo usando el método de Runge-Kutta de segundo orden para evolucionar las ecuaciones en el tiempo, y el método pseudo-espectral para estimar las derivadas espaciales [10, 15]. Para controlar inestabilidades numéricas y obtener un código conservativo para la energía y la helicidad en el caso ideal, se uso la regla de los 2/3 de *dealising*, que consiste en truncar el espacio de Fourier en 2/3 de sus modos, y da un número de onda máximo para el espectro  $k_{max} = N/3$  donde  $N$  es la resolución lineal espacial de la resolución.

Definimos el número de onda de disipación de Kolmogorov como

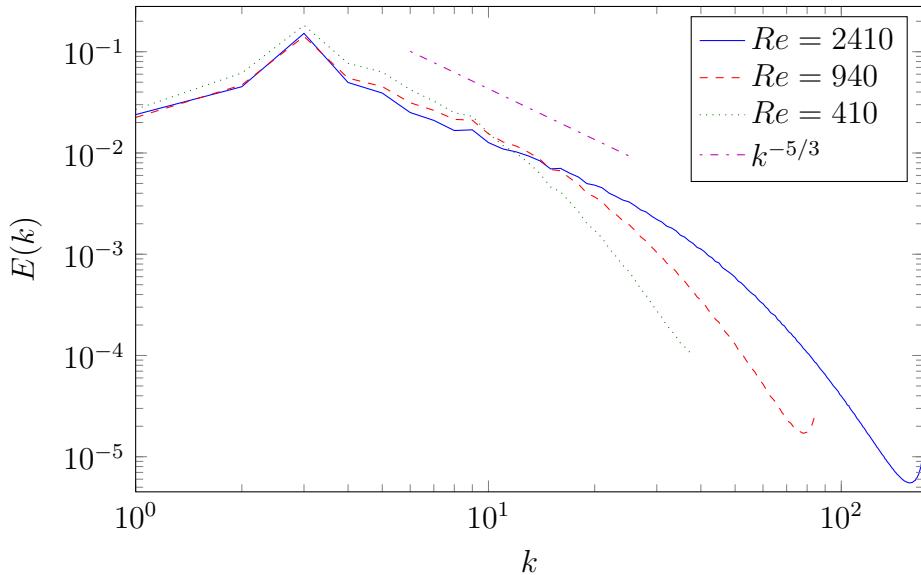
$$k_\nu = \left( \frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{1/4}, \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon$  la tasa de inyección de la energía. La viscosidad cinemática de las simulaciones se eligió de forma tal que

$$k_\nu \lesssim N/3, \quad (3.2)$$

donde  $N = 512$ . Esta elección permite que la escala de disipación esté correctamente resuelta. Al mismo tiempo se intenta que  $k_\nu$  se encuentre lo más cerca posible de  $N/3$  para no resolver muchos modos con número de onda mayor al de la escala de disipación, y así poder alcanzar el mayor número de Reynolds y el mayor ancho del rango inercial posibles.

Previo a las simulaciones con  $N = 512$  se realizaron varias simulaciones con  $N = 128$  y  $N = 256$ , de las cuales se dedujo el valor que debían tener



**Figura 3.1:** Espectro de energía en función del número de onda  $k$  para distintos valores de  $Re$  en simulaciones sin rotación. Vemos como el rango inercial se agranda a medida que  $Re$  crece. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k^{-5/3}$  correspondiente a un espectro de Kolmogorov.

ciertos parámetros de las simulaciones como  $\nu$  y la amplitud del forzado  $f_0$ . El valor de  $\nu$  influye en la escala de disipación  $k_\nu$ , y por lo tanto se eligió de modo de cumplir la condición (3.2). La amplitud de forzado ( $f_0 = 0,4$  en todas las simulaciones) se eligió de modo que la velocidad característica de las simulaciones fuera  $U_0 \sim 1$  en unidades adimensionales. En la Figura 3.1 se puede observar el espectro de energía de tres simulaciones sin rotación para distintos valores de  $N$ . Esto nos permite ver como se modifica el ancho del rango inercial dependiendo del número de Reynolds  $Re$  de cada simulación.

La metodología utilizada en todas las simulaciones del trabajo fue comenzar con el fluido en reposo y aplicar el forzado mecánico sin rotación. Una vez alcanzado un régimen turbulento se comenzó una nueva simulación donde se utilizó el estado final de la simulación previa como condición inicial, y se aplicó rotación con  $\Omega = 4$  y  $\Omega = 8$  dependiendo del caso. El procedimiento fue el mismo tanto en el caso con helicidad como en el caso sin helicidad, con la diferencia de que en el caso con helicidad lleva mucho más tiempo alcanzar el régimen turbulento (por el efecto de la reducción de la no-linealidad, mencionado en la sección 2.4).

Hasta aquí nos concentraremos principalmente en la descripción y elección de parámetros de las simulaciones. En la siguiente sección analizaremos los

espectros de energía y helicidad obtenidos en las simulaciones mencionadas, y posteriormente estudiaremos sus flujos (sección 3.3).

### 3.2. Espectros

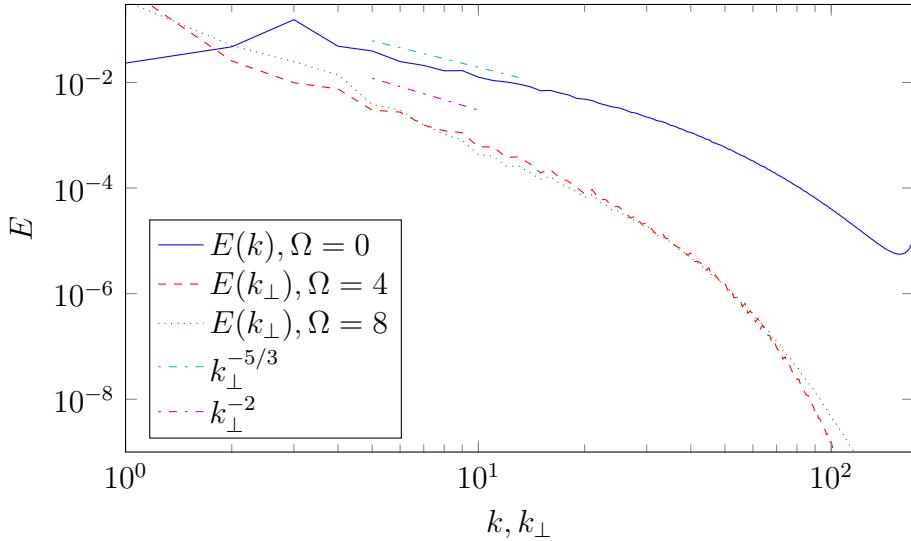
En esta sección analizamos los espectros de energía y helicidad para las distintas simulaciones presentadas en la sección anterior. Antes de comenzar es conveniente mencionar brevemente qué vectores de onda se utilizarán como referencia para el cálculo. En el estudio de turbulencia isótropa es frecuente el uso de números de onda isótropos  $k$ , que se obtienen al integrar sobre la esfera con vectores de onda  $\mathbf{k}$  tales que  $k < |\mathbf{k}| < k + 1$ . En el caso de utilizar estos vectores de onda, los espectros serán funciones de  $k$ , es decir  $f(k)$ . Sin embargo, cuando se introduce una fuerza que rompe la isotropía de forma marcada (en el caso de esta tesis, la rotación), es conveniente también utilizar los vectores de onda perpendiculares  $k_\perp$ . Los mismos se obtienen al integrar sobre el cilindro de radio  $k_\perp$  que tiene como eje principal al eje de la rotación. Es decir, si la rotación es  $\Omega \hat{z}$ , el número de onda  $k_\perp$  surge de integrar sobre los vectores tales que  $k_\perp < |\mathbf{k}_\perp| < k_\perp + 1$ , donde  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

En este punto también es importante mencionar que por simulaciones “sin helicidad”, se entiende una simulación en la que la helicidad fluctúa en el tiempo, y su valor medio es pequeño comparado con el de la máxima helicidad posible. La misma está dada por la desigualdad de Schwarz, que dice que

$$H \leq k_F E,$$

donde  $k_F$  es el número de onda en el que se aplica el forzado externo. Mientras que las simulaciones “con helicidad” tienen un valor medio de helicidad cercano al máximo posible, las simulaciones “sin helicidad” tienen un valor menor comparado con este máximo. Es también importante notar que en presencia de rotación, las fluctuaciones temporales de la helicidad se vuelven muy lentas (en comparación con el caso isótropo y homogéneo), por lo que aún en presencia de un forzado aleatorio el sistema puede quedarse en el entorno de un valor de helicidad pequeño (pero con un signo definido) por tiempos largos. En particular, las simulaciones que se muestran “sin helicidad” tienen una cantidad media pequeña de helicidad negativa.

En la Figura 3.2 observamos los espectros de energía en función de  $k$  y  $k_\perp$  para las simulaciones sin helicidad, es decir, las pertenecientes al grupo A. Con  $\Omega = 0$  se muestra la simulación de turbulencia hidrodinámica que se utiliza como condición inicial para iniciar posteriormente las demás simulaciones con rotación. Como referencia se muestra un espectro  $k^{-5/3}$ , que es compatible con el espectro de la simulación con  $\Omega = 0$ , y una pendiente  $k_\perp^{-2}$ ,

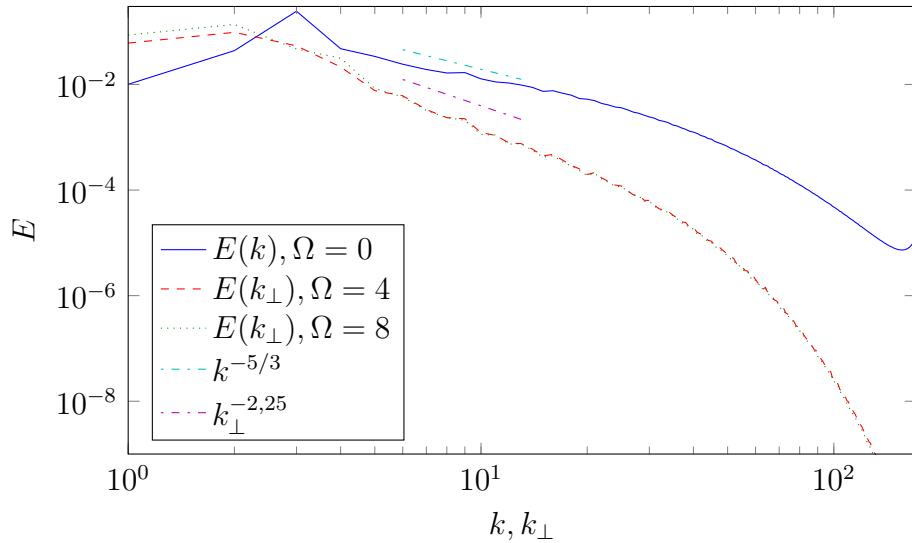


**Figura 3.2:** Espectros de energía en función de  $k$  y  $k_{\perp}$  para las simulaciones sin helicidad. Las leyes de potencia se muestra como referencia.

que se asemeja al espectro de energía de las simulaciones con rotación. Observamos que tanto para la simulación con  $\Omega = 4$  como con  $\Omega = 8$  se puede aproximar la ley de potencias en el rango inercial por el mismo espectro de energía. Esto es lo que se espera a partir de los análisis de fenomenología de turbulencia rotante presentados en la sección 2.4.

A continuación, en la Figura 3.3 podemos observar el espectro de energía en función de  $k$  y  $k_{\perp}$  para las simulaciones con helicidad (grupo B). Nuevamente la simulación con  $\Omega = 0$  es la que se utilizó como punto de partida para iniciar las simulaciones con rotación, pero esta vez con un forzado que introduce helicidad en el sistema. Vemos que la simulación con  $\Omega = 0$  también responde a una ley de potencias compatible con  $k^{-5/3}$ . Esto nos muestra que la presencia de helicidad en turbulencia hidrodinámica sin rotación no modifica el espectro de energía como fue observado anteriormente en [22]. En cambio para turbulencia rotante, la presencia de helicidad modifica fuertemente el espectro de energía, que puede variar entre un rango inercial con exponente 2 (para helicidad mínima) y 2,5 (para helicidad máxima) como vimos en la sección 2.4. Esto también fue observado previamente en [22]. En nuestro caso, vemos que la energía en turbulencia rotante y helicoidal es compatible con una ley de potencias cercana a  $k^{-2,25}$ , tanto para  $\Omega = 4$  como para  $\Omega = 8$ .

Finalmente, en la Figura 3.4 vemos el espectro de helicidad en función de  $k$  y de  $k_{\perp}$  para las simulaciones con helicidad y rotación. Como referencia se



**Figura 3.3:** Espectros de energía en función de  $k$  y de  $k_{\perp}$  para las simulaciones con helicidad. Las leyes de potencia se muestran como una referencia.

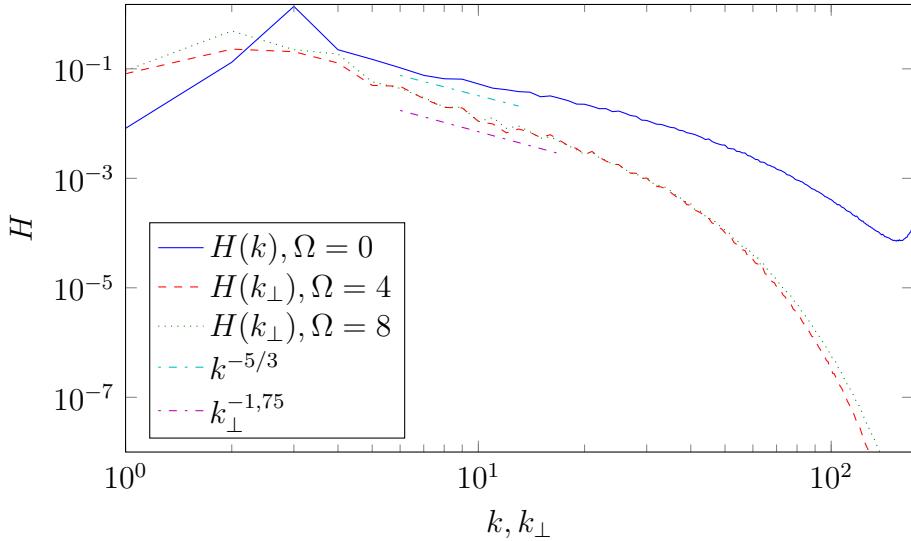
muestran leyes de potencias  $k^{-5/3}$  y  $k^{-1.75}$ . La primera es la esperada para la helicidad en ausencia de rotación, mientras que la segunda se asemeja al espectro de las simulaciones con turbulencia rotante. Si utilizamos la ecuación (2.41), vemos que  $k^{-1.75}$  es el espectro de helicidad que se espera de la teoría fenomenológica si consideramos que el espectro de energía es  $k^{-2.25}$ .

Sabemos que en turbulencia rotante el espectro de energía y helicidad se modifican dependiendo de si la helicidad es mínima o máxima. Sin embargo, el producto de los espectros de  $E \cdot H$  sigue siempre una ley de potencias  $k_{\perp}^{-4}$ . Esto podemos observarlo claramente en la Figura 3.5, donde se grafica  $E \cdot H \cdot k_{\perp}^4$  para las simulaciones de turbulencia rotante, con y sin helicidad. En ambos casos vemos que el producto de la energía con la helicidad es compatible con una ley de potencias  $k_{\perp}^{-4}$ , como vimos en la ecuación (2.41).

En la siguiente sección presentamos los flujos de energía y helicidad entre las distintas escalas que se obtuvieron como resultado del análisis de las simulaciones presentadas.

### 3.3. Flujos

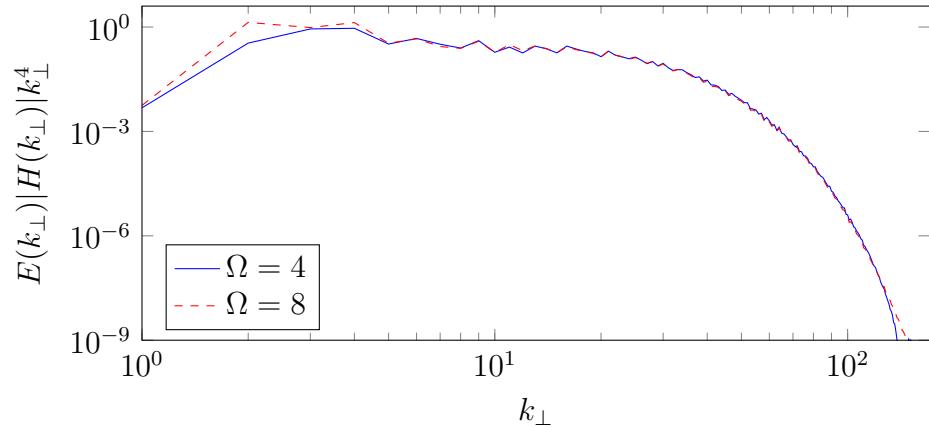
En esta sección presentamos los flujos de energía y helicidad para las distintas simulaciones realizadas. En la Figura 3.6 se muestra el flujo de energía en función de  $k$  para las simulaciones de turbulencia hidrodinámica sin rotación. En ambos casos observamos que el flujo es nulo aproximadamente hasta



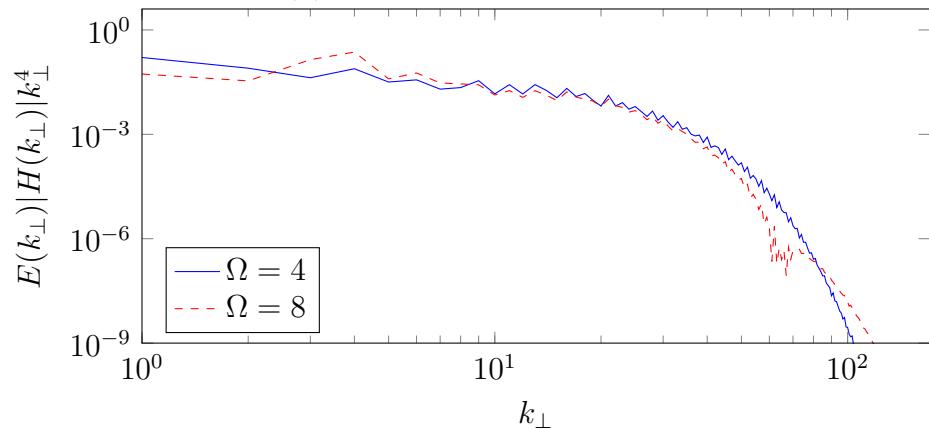
**Figura 3.4:** Espectros de helicidad en función de  $k$  y de  $k_{\perp}$  para las simulaciones con helicidad. Las leyes de potencia se muestran a modo de referencia.

$k = 3$  que es el número de onda donde se aplica el forzado,  $k_F$ . A partir de aquí, el flujo es aproximadamente constante en un rango de escalas que denominamos el rango inercial. El valor del flujo es positivo, lo que representa una transferencia de energía de las escalas más grandes hacia las escalas más chicas. Pasado el rango inercial, los flujos comienzan a decaer hasta anularse para las escalas más chicas. El hecho de que el flujo se anule indica que la energía se conserva al ser transportada entre escalas por el término no lineal, y que solo las fuerzas viscosas en las escalas más pequeñas compensan la energía inyectada por el forzado, como nos muestra la ecuación (2.57). Notemos que para la simulación con forzado helicoidal hay menor flujo de energía que en la simulación sin helicidad. Esto se debe a que cuanto mayor es la helicidad, menor es la amplitud del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes, y por lo tanto la transferencia de energía entre escalas se ve reducida.

En las Figuras 3.7 podemos ver los flujos de energía en las cuatro simulaciones con rotación. Notemos que en todos los casos los flujos son un orden de magnitud menor que en turbulencia hidrodinámica sin rotación (comparar con la Figura 3.6). Esto se debe a que, como se mencionó en el capítulo anterior, en turbulencia rotante existe una condición adicional para la transferencia de energía entre escalas, que viene dada por la ecuación (2.35). Esta condición adicional trae como resultado una fuerte reducción en la transferencia de energía.

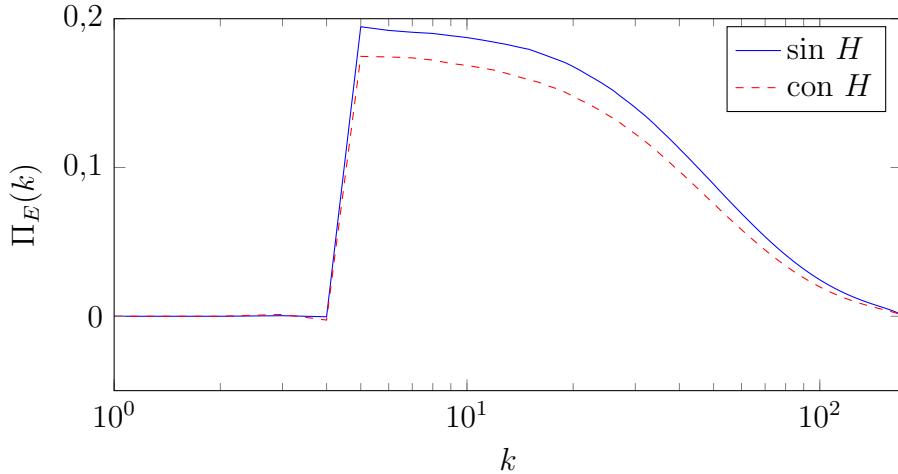


(a) Simulación con helicidad.



(b) Simulación sin helicidad.

**Figura 3.5:** Gráfico de  $EHk_\perp^4$  en función del número de onda  $k_\perp$  para todas las simulaciones con rotación. Notamos que el producto de energía y helicidad siguen una ley de potencias  $k_\perp^{-4}$ , tanto si hay helicidad como si no.

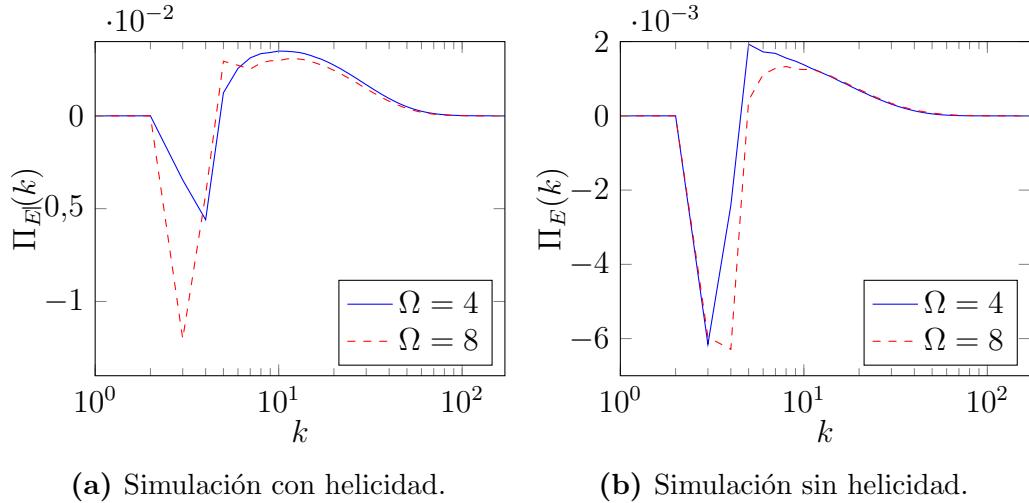


**Figura 3.6:** Flujo de energía en función de  $k$  en turbulencia hidrodinámica. En el caso de forzado helicoidal hay menor flujo de energía debido a que cuanto mayor es la helicidad, menor es la amplitud del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes.

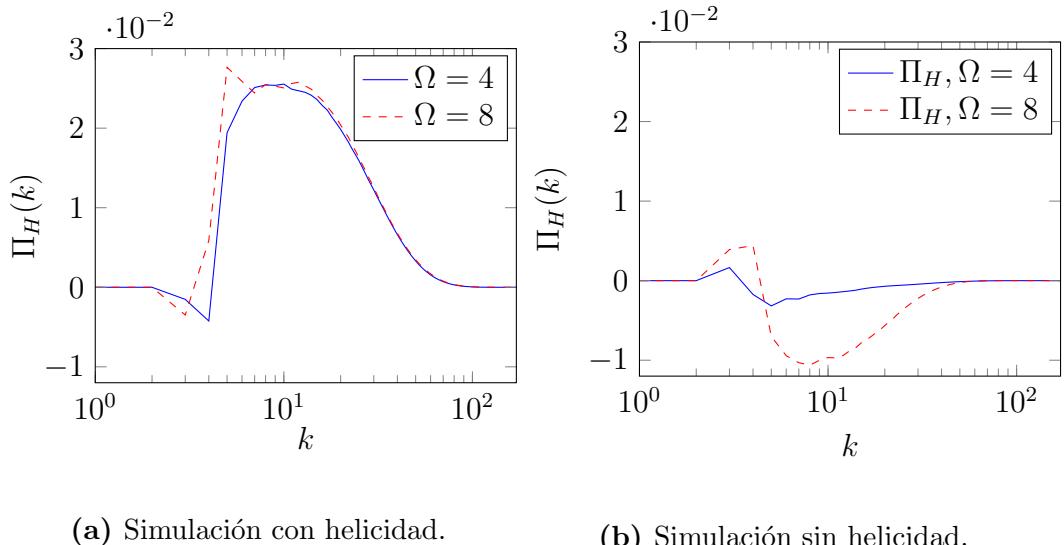
Además, observemos que para números de onda  $k < 3$  los flujos de energía toman valores negativos, lo que indica la presencia de una cascada inversa de energía hacia escalas más grandes. Para  $k > 3$  el comportamiento es similar al de los flujos sin rotación, con la diferencia mencionada más arriba en el valor del flujo.

En las Figuras 3.8a y 3.8b vemos los flujos de helicidad para las mismas simulaciones. Sabemos que la helicidad no desarrolla cascadas inversas, como verificamos en los gráficos. Notamos que el flujo de helicidad también se mantiene constante durante un rango de escalas y luego decae hasta anularse. Al igual que para la energía, esto confirma que la helicidad también se conserva al ser transportada entre escalas por el término no-lineal (ecuación 2.57).

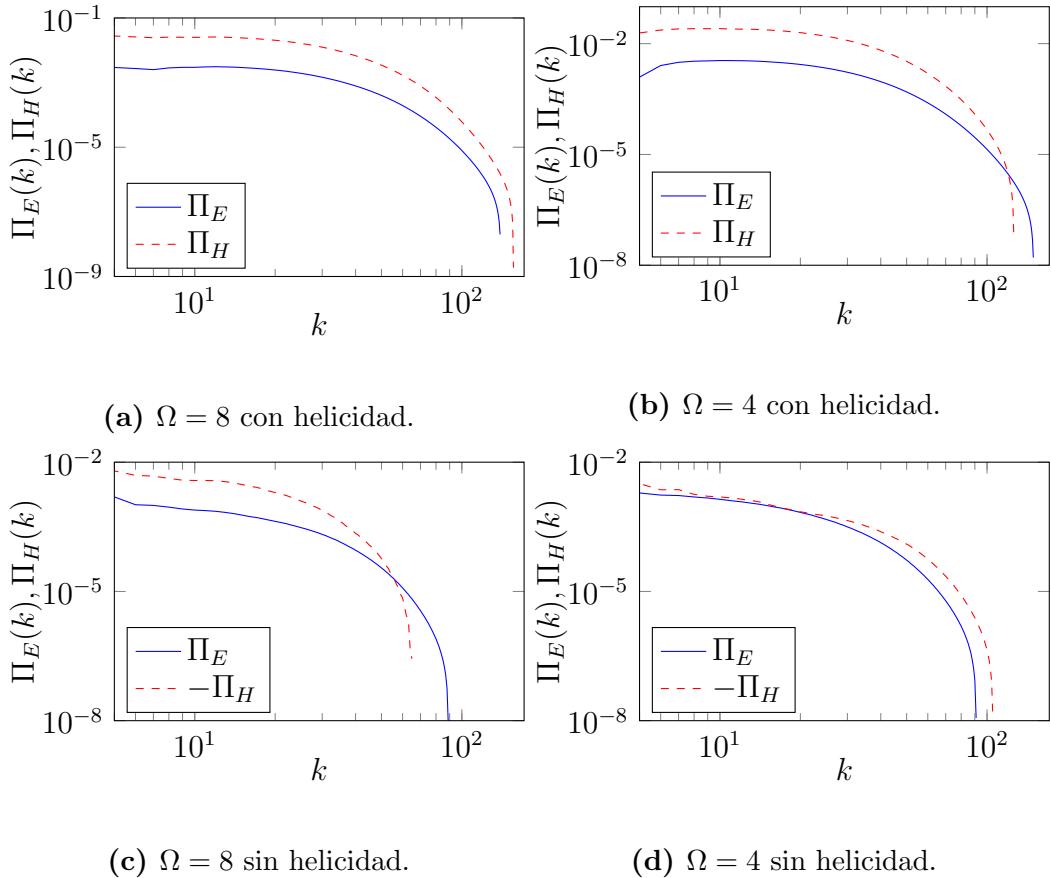
En la Figura 3.9 se observan nuevamente los flujos de energía y helicidad, en este caso con escala logarítmica en el eje de las abscisas. De esta manera pueden observarse con mayor claridad los rangos inerciales que caracterizan a cada uno de los flujos. Se puede ver que el rango inercial es aproximadamente igual para ambas magnitudes. Al igual que en el caso de turbulencia hidrodinámica analizado en [4], para turbulencia rotante tampoco hallamos un rango inercial más corto para la helicidad como fuera sugerido por [7]. En [4] se presenta un análisis muy interesante para el caso isótropo y homogéneo (sin rotación) en términos de la descomposición helicoidal, que permite explicar que si bien hay un crecimiento muy alto de la disipación de las cantidades  $H^\pm$  cuando  $Re$  es grande, este crecimiento se compensa entre ambas cantida-



**Figura 3.7:** Flujo de energía en función del número de onda  $k$  para todas las simulaciones con rotación. Notar la aparición de un rango de números de onda con flujo negativo.



**Figura 3.8:** Flujo de helicidad en función del número de onda  $k$  para todas las simulaciones con rotación.



**Figura 3.9:** Flujos de energía y de helicidad en función del número de onda  $k$  para las cuatro simulaciones.

des dando una disipación finita para  $H$ . En el capítulo siguiente se presenta un análisis similar pero extendido al caso de turbulencia rotante.



# Capítulo 4

## La descomposición helicoidal en turbulencia rotante

En el presente capítulo se analizan las simulaciones numéricas realizadas en esta tesis en el marco de la descomposición helicoidal, presentada en la sección 2.3. Junto con la extensión de dicha descomposición al caso rotante presentada al final del Capítulo 2, los resultados discutidos aquí forman parte del cuerpo principal de la tesis. En la sección 4.1 se presentan los espectros espaciales de la energía y la helicidad en sus modos  $\pm$ . Se realiza un breve análisis fenomenológico que combina los resultados de turbulencia rotante con la descomposición helicoidal, y luego se comparan los espectros obtenidos con las predicciones. A continuación (en la sección 4.2) se presenta un análisis teórico y fenomenológico de los flujos de las magnitudes  $E^\pm$  y  $H^\pm$ , y se compara con los resultados obtenidos en las simulaciones. En la siguiente sección se estudia  $E^\pm$  en función de sus frecuencias espaciales y temporales, es decir, el espectro espacio-temporal  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$ . Veremos como estas cantidades nos permiten realizar un análisis muy interesante sobre como se descompone la energía en ondas inerciales que avanzan con dirección de propagación en  $+\hat{z}$  o  $-\hat{z}$ , y como se relaciona este resultado con la descomposición en los modos helicoidales + y -.

### 4.1. Espectros

Comenzamos esta sección con un breve análisis fenomenológico de los espectros de energía y helicidad en los modos  $\pm$ . Luego se muestran los resultados de las simulaciones realizadas para esta tesis y se compara con el análisis mencionado.

### 4.1.1. Análisis fenomenológico de los espectros

Se pueden obtener conclusiones importantes sobre el comportamiento de los espectros de  $E^\pm$  y  $H^\pm$  mediante un análisis fenomenológico. En [4] se realiza un análisis de este tipo para turbulencia hidrodinámica, isótropa y homogénea. En esta tesis se extiende dicho análisis al estudio de turbulencia en flujos rotantes. En ese caso la situación se complejiza dado que no es posible estimar un valor universal para la pendiente del espectro de energía. Mientras que la presencia de helicidad en turbulencia hidrodinámica sin rotación no modifica el espectro de energía, que se puede estimar como  $E(k) \sim C_E \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , la helicidad sí modifica el espectro de energía cuando se trata de turbulencia rotante [22].

Para comenzar el análisis dimensional suponemos que ambos espectros siguen en el rango inercial las leyes de potencia

$$E(k) \sim C_E \epsilon^a \delta^b \Omega^f k^{-e} \quad H(k) \sim C_H \epsilon^c \delta^d \Omega^g k^{-h}, \quad (4.1)$$

donde  $\epsilon$  es la tasa de inyección de energía,  $\delta$  es la tasa de inyección de helicidad, y  $C_E$  y  $C_H$  son constantes adimensionales. La situación que analizaremos en esta tesis es la de una cascada directa de helicidad que predomina sobre la cascada de energía y está mediada por rotación. El estudio general de este caso se puede encontrar en la referencia [14], donde también se encuentran las siguientes relaciones para los exponentes  $a, b, c, d, e, f, g, h$ :

- $e + h = 4$ ,
- $a + c = 0$ ,
- $3a + 3b = 2 - f$ ,
- $b + d = 1$ ,
- $3b = 3e - 5 - 2f$ ,
- $f + g = 1$ .

Brevemente estas relaciones salen de realizar análisis dimensionales sobre la ecuación (4.1), y de utilizar las condiciones de flujo de energía y helicidad constante en el rango inercial dadas por las ecuaciones (2.37) y (2.40).

Si asumimos que el espectro de energía no depende de  $\delta$ , podemos obtener los espectros de energía y helicidad en función de un único parámetro  $e$ , el índice espectral de la energía.

$$E(k) \sim \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \Omega^{\frac{3e-5}{2}} k^{-e} \quad H(k) \sim \epsilon^{\frac{e-3}{2}} \delta \Omega^{\frac{7-3e}{2}} k^{e-4}. \quad (4.2)$$

Con estos resultados y las ecuaciones (2.58), (2.59) y (2.44) podemos encontrar relaciones análogas para  $E^\pm$  y  $H^\pm$

$$E^\pm \sim \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \Omega^{\frac{3e-5}{2}} k^{-e} \left( 1 \pm \frac{\gamma \delta \Omega^{(6-3e)}}{2k^{(5-2e)} \epsilon^{(3-e)}} \right), \quad (4.3)$$

$$H^\pm \sim \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \Omega^{\frac{3e-5}{2}} k^{1-e} \left( 1 \pm \frac{\gamma \delta \Omega^{(6-3e)}}{2k^{(5-2e)} \epsilon^{(3-e)}} \right), \quad (4.4)$$

donde  $\gamma = \frac{C_H}{CE}$ . Hasta aquí, no distinguimos entre espectros isótropos (en función de  $k$ ) y anisótropos. Como en el caso rotante el flujo es fuertemente anisótropo y la distribuciónpectral de energía tiende a ser axisimétrica, los números de onda isótropos  $k$  en las expresiones anteriores pueden reemplazarse por el número de onda perpendicular  $k_\perp$  y obtener los mismos resultados. En adelante usaremos  $k$  o  $k_\perp$  según el espectro que estemos considerando de interés para el análisis.

Como vimos en la sección 3.2, el índice espectral para las simulaciones realizadas en esta tesis es compatible con  $e = 2$  para las simulaciones sin helicidad, y con  $e = 2,25$  en las simulaciones con helicidad. En las simulaciones sin helicidad tenemos que  $\delta$  es pequeño, y además  $5 - 2e = 1$ , con lo cual podemos despreciar el segundo término de las ecuaciones (4.3) y (4.4) frente al primero para valores de  $k$  grandes. Entonces para el caso sin helicidad se tiene que

$$E^\pm \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} k_\perp^{-2}, \quad H^\pm \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}} k_\perp^{-1}. \quad (4.5)$$

Sin embargo, para el caso helicoidal no podemos despreciar este término a priori. Por comodidad, de aquí en adelante llamaremos  $\phi^\pm$  al paréntesis de las ecuaciones (4.3) y (4.4), es decir, definimos:

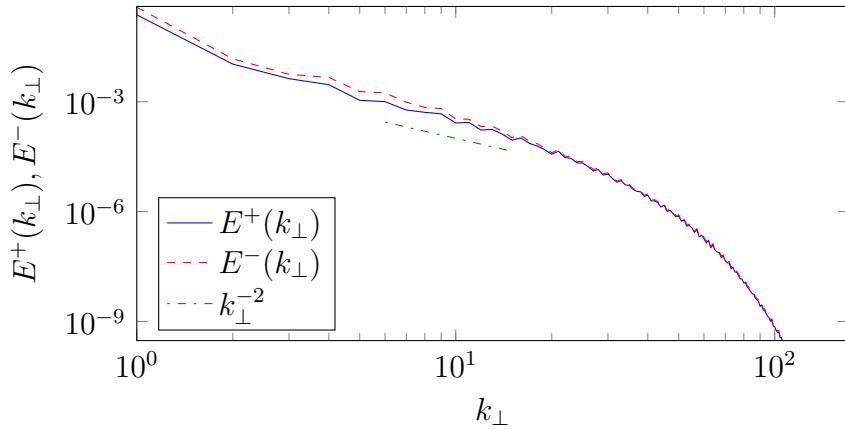
$$\phi^\pm(k) = \left( 1 \pm \frac{\gamma \delta \Omega^{(6-3e)}}{2k^{(5-2e)} \epsilon^{(3-e)}} \right). \quad (4.6)$$

En la siguiente subsección mostraremos estos resultados a la luz de las simulaciones realizadas para esta tesis.

### 4.1.2. Espectros en la descomposición helicoidal

En esta subsección se muestran los espectros de energía y helicidad en sus modos  $\pm$  para las distintas simulaciones realizadas.

Recordemos qué, como se aclaró anteriormente, las simulaciones “sin helicidad” son simulaciones en las que la helicidad fluctúa lentamente alrededor

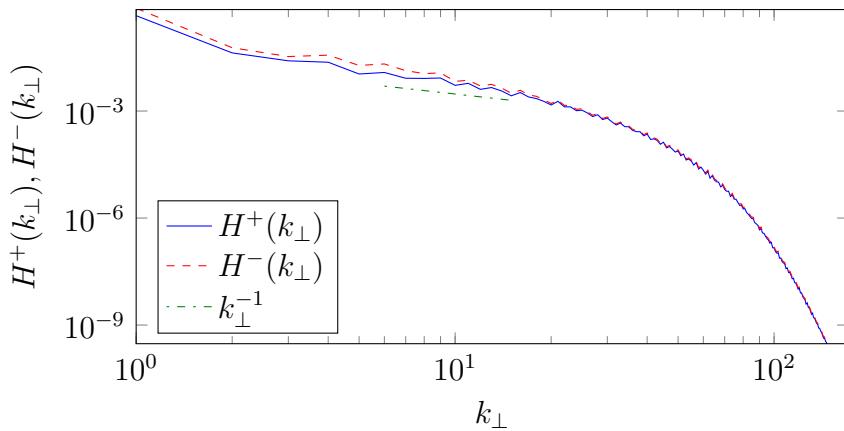


**Figura 4.1:** Espectros de  $E^+$  y  $E^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación A1. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-2}$ .

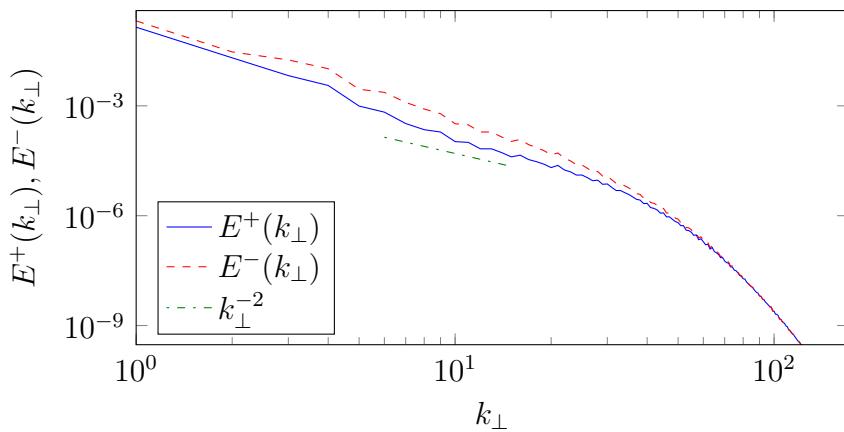
de un valor pequeño, mientras que las simulaciones “con helicidad” tienen un valor de helicidad cercano al máximo posible. En la Figura 4.1 se muestra el espectro de  $E^+$  y  $E^-$  para la simulación A1 (con  $\Omega = 4$  y sin helicidad). Vemos que en el rango inercial los espectros responden aproximadamente a la ley de potencias  $k^{-2}$ , como es de esperar dada la ecuación (4.5). Si miramos la Figura 4.2 vemos el espectro de helicidad  $H^+$  y  $H^-$  para la misma simulación. Aquí vemos que la ley de potencias es aproximadamente compatible con  $k^{-1}$  como predice la ecuación (4.5).

Si pasamos ahora a las Figuras 4.3 y 4.4 vemos los espectros de  $E^\pm$  y  $H^\pm$  para la simulación A2 ( $\Omega = 8$  y sin helicidad). Notamos que los índices espectrales coinciden con los de la simulación A1, lo cual está de acuerdo con lo predicho en la sección 4.1.1. Comparando los resultados para la simulación A1 y A2 vemos empíricamente que aumentar la velocidad de rotación de  $\Omega = 4$  a  $\Omega = 8$  no modifica visiblemente los índices espectrales. Esto está de acuerdo con lo esperado de acuerdo a la sección anterior.

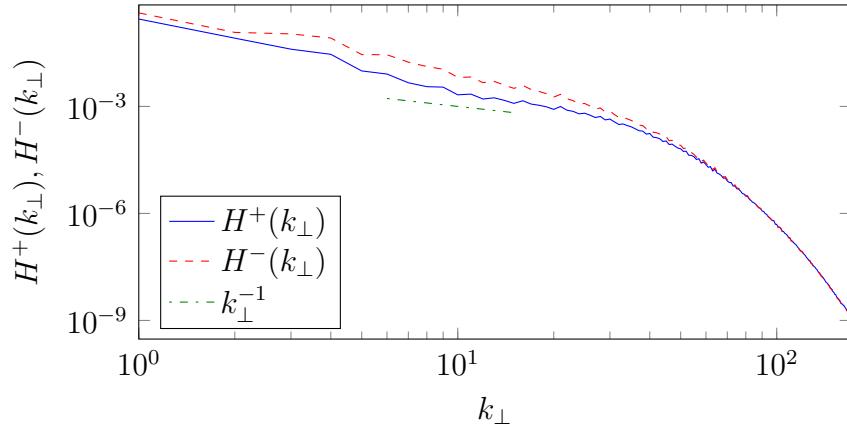
A continuación, la Figura 4.5 muestra el espectro de  $E^+$  y  $E^-$  para la simulación B1 ( $\Omega = 4$  y con helicidad). El signo dominante de helicidad debe tener un espectro con mayor potencia para que el flujo pueda ser globalmente helicoidal, como se observa en la Figura. Por esta razón no despreciamos el segundo término de la ecuación (4.3), y presentamos las dos leyes de potencia correspondientes a  $E^+$  y  $E^-$ . Observamos que en el rango inercial los espectros son compatibles con lo predicho por la ecuación (4.3). La Figura 4.6 muestra el espectro de helicidad  $H^+$  y  $H^-$  para la misma simulación. Nuevamente vemos que los espectros son compatibles con lo predicho por la ecuación (4.4).



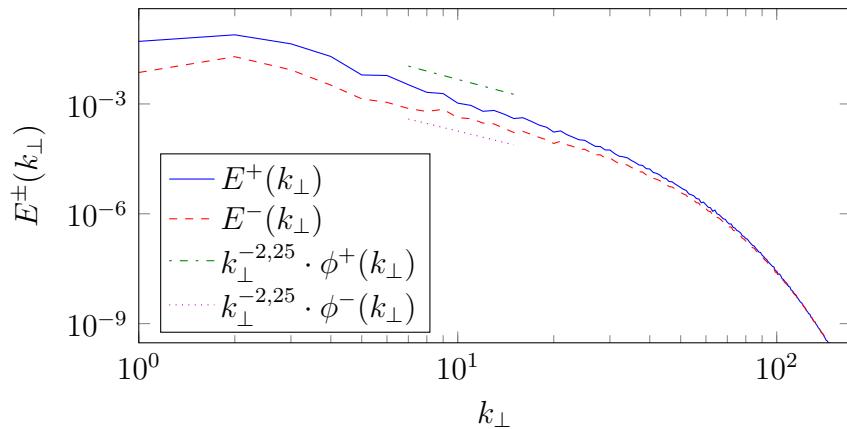
**Figura 4.2:** Espectros de  $H^+$  y  $H^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación A1. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-1}$ .



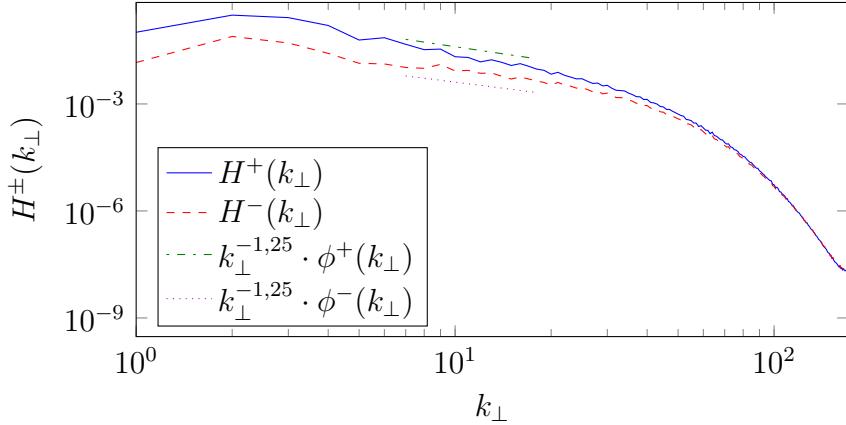
**Figura 4.3:** Espectros de  $E^+$  y  $E^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación A2. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-2}$ .



**Figura 4.4:** Espectros de  $H^+$  y  $H^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación A2. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-1}$ .



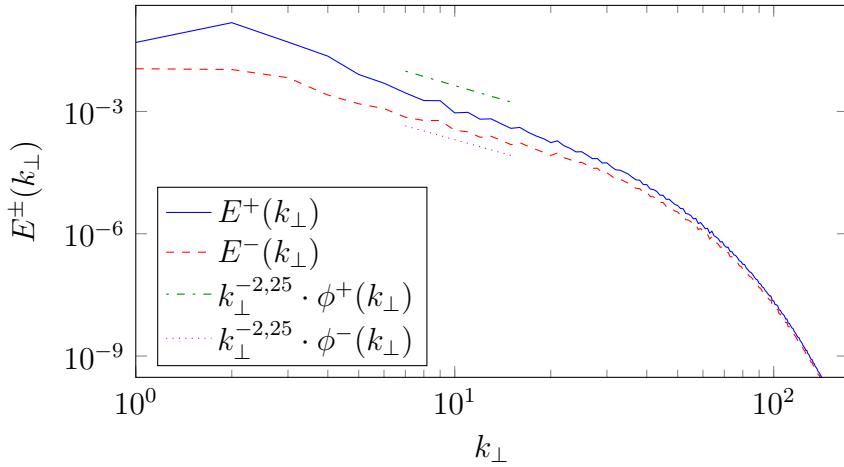
**Figura 4.5:** Espectro de  $E^+$  y  $E^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación B1. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-2.25}$  corregida por el término  $\phi^\pm$ .



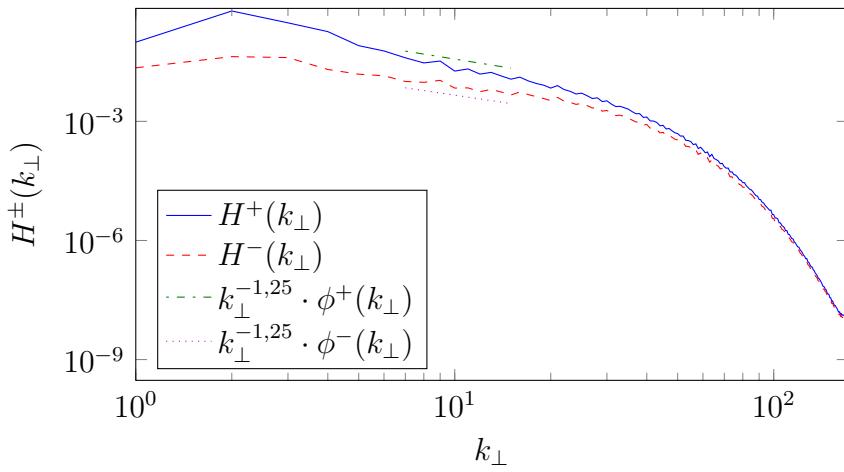
**Figura 4.6:** Espectro de  $H^+$  y  $H^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación B1. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-1,25}$  corregida por el término  $\phi^\pm$ .

Las Figuras 4.7 y 4.8 nos muestran los espectros de  $E^\pm$  y  $H^\pm$  para la simulación B2 ( $\Omega = 8$  y con helicidad). Notamos que los espectros son compatibles con las ecuaciones (4.3) y (4.4), al igual que en la simulación B1. Este resultado confirma que aumentar la velocidad de rotación de  $\Omega = 4$  a  $\Omega = 8$  no modifica los índices espectrales, sino que la principal modificación de dichos índices en turbulencia rotante depende de la cantidad de helicidad presente en el flujo.

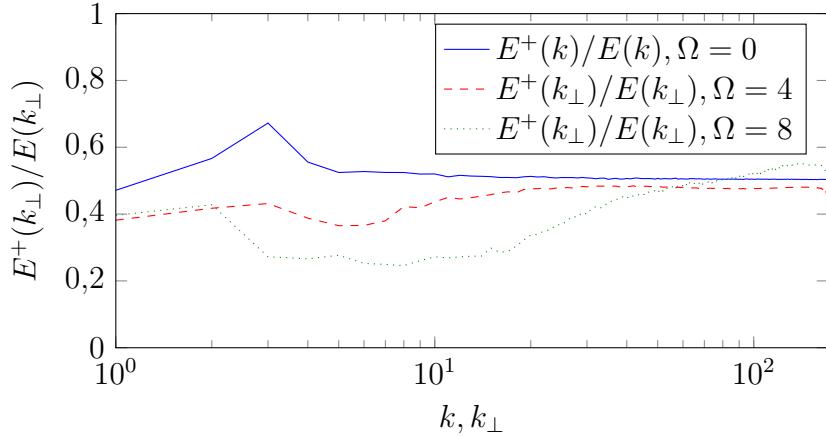
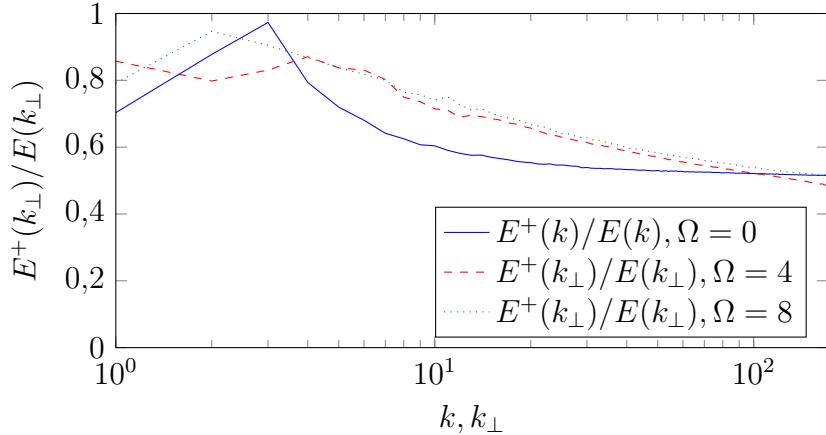
Finalmente, en la Figura 4.9 se muestra qué porcentaje de energía se concentra en los modos + en función del número de onda  $k$  (para las simulaciones sin rotación) y  $k_\perp$  (para las simulaciones de los grupos A y B). De todas maneras, el comportamiento es muy similar tanto si se utiliza  $k$  como si se utiliza  $k_\perp$  dado que, como se mencionó anteriormente, la mayor parte de la energía se concentra en los modos con  $k_\parallel$  pequeño. En la Figura 4.9a se muestra este resultado para el caso sin helicidad, mientras que el caso helicoidal se muestra en la Figura 4.9b. Dichos gráficos son el resultado de dividir los espectros de  $E^+$  presentados en esta sección con los espectros de  $E$  analizados en la sección 3.2 del capítulo anterior, obteniendo  $E^+(k)/E(k)$ . En el caso helicoidal vemos que para números de onda pequeños hay una gran concentración de energía en los modos +. A medida que aumentamos el número de onda el porcentaje de  $E^+$  decrece fuertemente (aunque más lentamente en presencia de rotación). Al obtener valores de  $E^+(k)/E(k)$  mayores a 0,5 notamos una falta de simetría entre los modos + y -, producto de la presencia de helicidad positiva. En las simulaciones sin helicidad el porcentaje de  $E^+$  sobre el total de  $E$  presenta variaciones menos bruscas, también



**Figura 4.7:** Espectro de  $E^+$  y  $E^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación B2. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-2.25}$  corregida por el término  $\phi^\pm$ .



**Figura 4.8:** Espectro de  $H^+$  y  $H^-$  en función de  $k_\perp$  para la simulación B2. Como referencia se muestra una ley de potencias  $k_\perp^{-1.25}$  corregida por el término  $\phi^\pm$ .

(a)  $E^+(k_\perp)/E(k_\perp)$  sin helicidad.(b)  $E^+(k_\perp)/E(k_\perp)$  con helicidad.

**Figura 4.9:** Relación entre  $E^+$  y el total de  $E$  en función del número de onda  $k_\perp$  para las distintas simulaciones. En las simulaciones del grupo B observamos que la mayor concentración de  $E^+$  se da en los números de onda pequeños. Pero mientras para el caso con  $\Omega = 0$  la concentración de  $E^+$  decrece rápidamente a 0,5, para los casos con rotación existe un exceso de  $E^+$  (y de helicidad) en todas las escalas del rango inercial.

en la zona del gráfico con  $k$  pequeño. Además, se observa un mejor balance entre los modos + y -, dado que la relación  $E^+(k)/E(k)$  es más cercana a 0,5 que en el caso helicoidal.

En la siguiente sección realizaremos un análisis fenomenológico para los flujos de  $E^\pm$  y  $H^\pm$  en las distintas simulaciones realizadas.

## 4.2. Flujos

Comenzamos esta sección con una breve descripción de cómo se obtuvieron ciertos valores relevantes para el análisis de los flujos. Luego buscaremos relacionar los resultados obtenidos con los flujos de energía y helicidad provenientes de las simulaciones. Notaremos la importancia de las derivadas temporales de las magnitudes analizadas, que en turbulencia hidrodinámica isótropa son fácilmente despreciables asumiendo una situación estacionaria [4], pero que en turbulencia rotante juegan un rol fundamental debido a que las magnitudes fluctúan notoriamente en el tiempo [23]. Esto se debe a que la turbulencia rotante presenta una cascada inversa de energía, por lo que la energía se acumula continuamente en las escalas más grandes, y por lo tanto el sistema no se encuentra (al menos en dichas escalas) en un estado estacionario. A continuación, presentamos un análisis de escalas para los flujos de energía y helicidad en los modos  $\pm$ , donde se comparan visualmente resultados fenomenológicos con los de las simulaciones realizadas.

### 4.2.1. Valores relevantes en el análisis de flujos

En esta subsección analizaremos cómo obtener algunos valores característicos de las simulaciones para luego compararlos con los flujos provenientes de las simulaciones realizadas en esta tesis.

En la sección 2.5.3 obtuvimos las ecuaciones necesarias para calcular  $D_E^\pm$  y  $D_H^\pm$  (ecuación 2.67), así como  $R_E$  y  $R_H$  (ecuaciones 2.69 y 2.70). Dado que en nuestras simulaciones los números de onda son discretos, estas ecuaciones pueden reescribirse como

$$D_E^\pm = 2\nu \sum_1^{k_{max}} k^2 E^\pm(k, t), \quad D_H^\pm = 2\nu \sum_1^{k_{max}} k^2 H^\pm(k, t), \quad (4.7)$$

para  $D_E^\pm$  y  $D_H^\pm$ , y

$$R_E = \sum_1^{k_{max}} \frac{T_H(k, t)}{4k}, \quad R_H = \sum_1^{k_{max}} k T_E(k, t), \quad (4.8)$$

para  $R_E$  y  $R_H$ . Para el forzado, en cambio, utilizamos las ecuaciones (2.65) y (2.66), obteniendo

$$F_E^\pm = D_E^\pm \mp R_E + \frac{dE^\pm}{dt}, \quad F_H^\pm = D_H^\pm - R_H + \frac{dH^\pm}{dt}. \quad (4.9)$$

Si en estas últimas ecuaciones se decidiera despreciar el término de la derivada temporal, se obtendrían resultados incompatibles con los de las simulaciones. Esto se debe a que en turbulencia rotante es difícil hallar una situación

estacionaria, donde todas las magnitudes analizadas no varíen significativamente en el tiempo. Esta aclaración se verá con más claridad en la sección 4.2.2, cuando comparemos con las simulaciones los resultados despreciando las derivadas temporales y el caso en que estas se tienen en cuenta.

Para obtener valores numéricos para los términos  $dE^\pm/dt$  y  $dH^\pm/dt$  consideremos la derivada temporal discreta en un punto de una función  $f$  cualquiera como

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (4.10)$$

Dado que todas las cantidades analizadas están promediadas en el tiempo, vemos que si promediamos en una ventana temporal entre  $T_1$  y  $T_2$  obtenemos

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1}^{T_2} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(T_2) - f(T_1)}{T_2 - T_1}. \quad (4.11)$$

Reemplazando  $f$  por  $E^\pm$  y  $H^\pm$  obtenemos las cantidades deseadas.

Para relacionar estas cantidades con los flujos de  $E^\pm$  y  $H^\pm$  integramos las ecuaciones (2.45) y (2.46) entre  $[0, k]$ , y luego entre  $[k, \infty]$ . Si asumimos que el forzado está confinado a los números de onda  $k$  pequeños (recordar que en esta tesis utilizamos  $k_F = 3$ ), al integrar la ecuación (2.45) entre  $[0, k]$  obtenemos

$$\Pi_E^{\pm,<}(k) = F_E^\pm - 2\nu \int_0^k p^2 E^\pm(p) dp - \int_0^k \frac{dE^\pm(p)}{dt} dp, \quad (4.12)$$

donde todos los términos están promediados en una ventana temporal. De igual manera, si integramos la ecuación (2.46) obtenemos

$$\Pi_H^{\pm,<}(k) = F_H^\pm - 2\nu \int_0^k p^2 H^\pm(p) dp - \int_0^k \frac{dH^\pm(p)}{dt} dp. \quad (4.13)$$

Si ahora en cambio integramos estas ecuaciones en el intervalo  $[k, \infty]$ , al asumir que el forzado está presente solo en los números de onda pequeños, obtenemos

$$\Pi_E^{\pm,>}(k) = D_E^\pm + \frac{dE^\pm}{dt} - 2\nu \int_0^k p^2 E^\pm(p) dp - \int_0^k \frac{dE^\pm(p)}{dt} dp, \quad (4.14)$$

para la energía, y

$$\Pi_H^{\pm,>}(k) = D_H^\pm + \frac{dH^\pm}{dt} - 2\nu \int_0^k p^2 H^\pm(p) dp - \int_0^k \frac{dH^\pm(p)}{dt} dp, \quad (4.15)$$

Sim	$D_E^+$	$D_E^-$	$R_E$	$F_E^+$	$F_E^-$	$\frac{dE^+}{dt}$	$\frac{dE^-}{dt}$
A1	0,0013	0,0018	$2,4 \cdot 10^{-5}$	0,0021	0,0027	0,0008	0,0008
A2	0,001	0,002	$8,1 \cdot 10^{-5}$	0,0006	0,0024	-0,0003	0,0045
B1	0,0048	0,0018	0,0011	0,0056	0,0010	-0,0003	0,0003
B2	0,0054	0,0016	-0,0016	0,0020	0,0016	-0,005	0,0015

**Cuadro 4.1:** Tabla con valores característicos para  $E^\pm$  en las cuatro simulaciones con rotación. 'Sim' corresponde al nombre de la simulación,  $D_E^\pm$  a las tasas de disipación de energía  $E^\pm$ ,  $R_E$  es la tasa de intercambio de energía entre + y -,  $F_E^\pm$  es la tasa de inyección de energía con cada polarización, y  $\frac{dE^\pm}{dt}$  es la derivada temporal de cada energía.

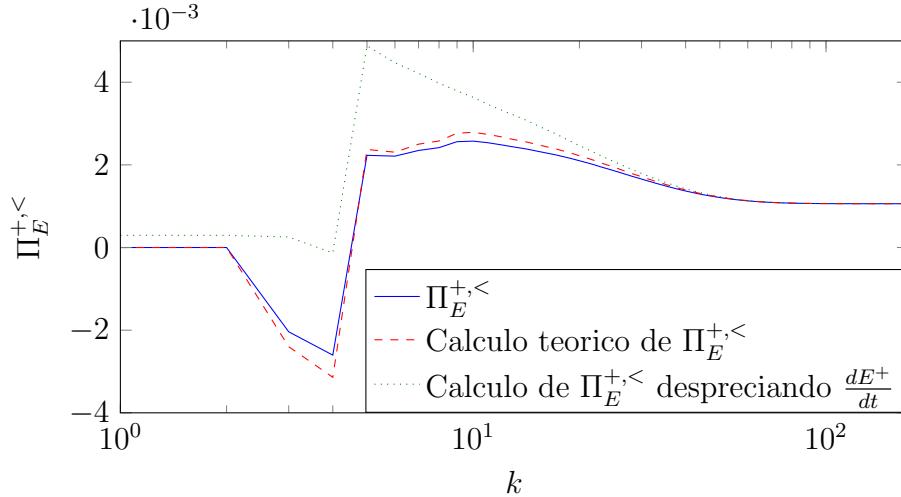
para la helicidad.

En la siguiente subsección se muestran los valores calculados y los gráficos de los flujos de las distintas magnitudes consideradas para las simulaciones realizadas en esta tesis.

#### 4.2.2. Flujos en la descomposición helicoidal

En esta sección se calculan los valores presentados en la sección anterior para las simulaciones realizadas en esta tesis, y se los analiza a la luz de los gráficos de los flujos de  $E^\pm$  y  $H^\pm$ . En la tabla 4.1 se muestran los valores de  $D_E^+$ ,  $D_E^-$ ,  $R_E$ ,  $F_E^+$ ,  $F_E^-$ ,  $dE^+/dt$  y  $dE^-/dt$  para las cuatro simulaciones realizadas de turbulencia rotante. Los valores de dicha tabla son promedios temporales sobre la misma muestra que se utiliza para realizar los gráficos. La tabla 4.2 muestra valores análogos a los de la tabla anterior pero para  $H^\pm$ .

Vemos que los términos de derivadas temporales son en muchos casos del mismo orden de magnitud que los términos de disipación o de forzado, y por lo tanto no son despreciables en general. Como se mencionó anteriormente, esto se debe a que en turbulencia rotante no siempre es posible hallar lapsos temporales donde todas las magnitudes consideradas se mantengan constantes, por lo que no podemos considerar situaciones estacionarias. Esto, junto con el flujo de energía hacia escalas más grandes resultante de la cascada inversa, lleva a un desfazaje entre el valor que alcanza  $\Pi_E$  en el rango inercial y el valor de la tasa de inyección de energía  $\epsilon$ , también entre  $\Pi_H$  y  $\delta$ , y que también se observa en los modos  $\pm$  (ver [23]). En cierto sentido, las derivadas temporales  $dE^\pm/dt$  cuantifican la evolución de la energía en las escalas grandes (y el flujo inverso hacia esas escalas), mientras que las tasas de disipación cuantifican el flujo hacia las escalas pequeñas. Solo considerando ambas se



**Figura 4.10:** Flujo de energía según las simulaciones y las expresiones teóricas. En línea continua se observa  $\Pi_E^{+,<}$ , en línea rayada se observa el flujo calculado de acuerdo con la ecuación 4.12, y en línea punteada se observa el flujo calculado según la misma ecuación pero despreciando las derivadas temporales.

puede recuperar el balance con las tasas de inyección y corregir desfazajes. Un ejemplo de desfazaje se observa en la Figura 4.10, donde se eligió como ilustración el flujo  $\Pi_E^{+,<}$ . Se compara el flujo obtenido en la simulación con el lado derecho de la igualdad en la ecuación (4.12) corroborando el resultado teórico obtenido, mientras que en línea punteada también se muestra el lado derecho de la igualdad en la ecuación (4.12) pero despreciando las derivadas temporales. Vemos que las primeros dos gráficos son compatibles, mientras que al despreciar las derivadas temporales los gráficos no coinciden. Recién a partir de  $k \approx 27$  se juntan los tres gráficos, debido a que para  $k > 27$  se tiene que

$$\int_0^k \frac{dE^+(p)}{dt} dp \sim \frac{dE^+}{dt},$$

donde el lado derecho de la igualdad está integrado sobre todo  $k$ .

En la Figura 4.11a se observan los flujos de  $\Pi_H^{+,<}$ ,  $\Pi_H^{-,<}$ , y de  $\Pi_H$  en función del número de onda  $k$  para la simulación B1. Podemos observar en el gráfico que  $\Pi_H$  está dado por la resta de  $\Pi_H^{+,<} - \Pi_H^{-,<}$ . La discrepancia entre el valor de  $F_H^+$  ( $F_H^-$ ) y el valor que alcanza el flujo  $\Pi_H^{+,<}$  ( $\Pi_H^{-,<}$ ) en el rango inercial se debe a la contribución de las integrales en la ecuación (4.13). Notamos que dicha discrepancia es menor en el flujo  $\Pi_H^{-,<}$  debido a

Sim	$D_H^+$	$D_H^-$	$R_H$	$F_H^+$	$F_H^-$	$\frac{dH^+}{dt}$	$\frac{dH^-}{dt}$
A1	0,034	0,039	0,019	0,012	0,016	-0,0025	-0,004
A2	0,023	0,043	0,012	0,01	0,014	-0,00046	-0,017
B1	0,14	0,074	0,058	0,040	-0,0003	-0,045	-0,017
B2	0,140	0,067	0,048	0,021	-0,0002	-0,071	-0,019

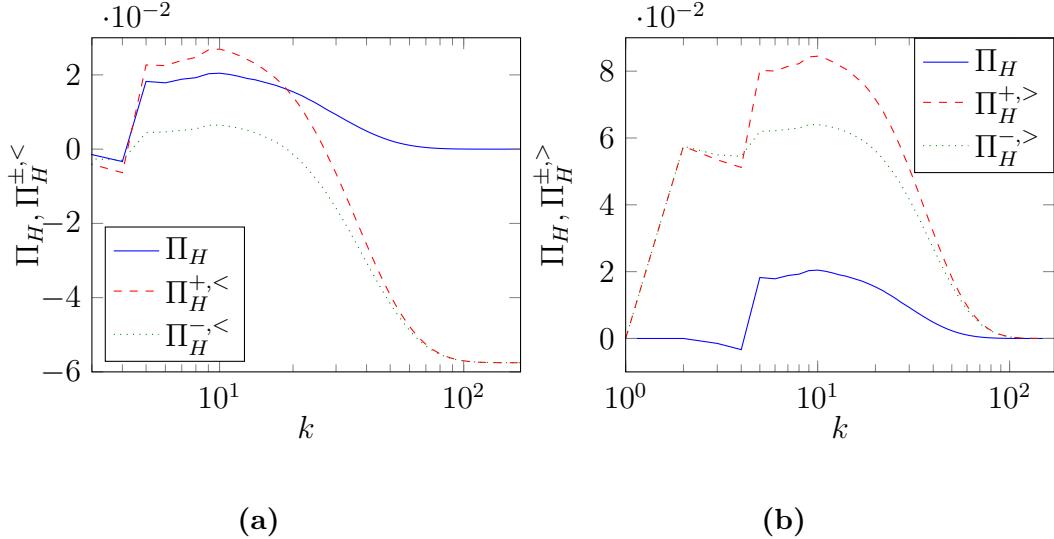
**Cuadro 4.2:** Tabla con valores característicos para  $H^\pm$  en las cuatro simulaciones con rotación. 'Sim' corresponde al nombre de la simulación,  $D_H^\pm$  a las tasas de disipación de  $H^\pm$ ,  $R_H$  a la tasa de intercambio de helicidad entre ambas polarizaciones,  $F_H^\pm$  a la tasa de inyección de  $H^\pm$ , y  $\frac{dH^\pm}{dt}$  a las derivadas temporales.

que  $D_H^- < D_H^+$  y  $dH^-/dt < dH^+/dt$ . La Figura 4.11b muestra los flujos de  $\Pi_H^{+,>}$ ,  $\Pi_H^{-,>}$ , y de  $\Pi_H$ . El valor del flujo  $\Pi_H^{-,>}$  en el rango inercial se aproxima a la suma  $D_H^- + dH^-/dt$  (ver valores en la tabla 4.2). Para el flujo  $\Pi_H^{+,>}$  existe una pequeña discrepancia que se debe, nuevamente, a que las integrales en la ecuación (4.15) son más notorias en este caso que para  $\Pi_H^{-,>}$ .

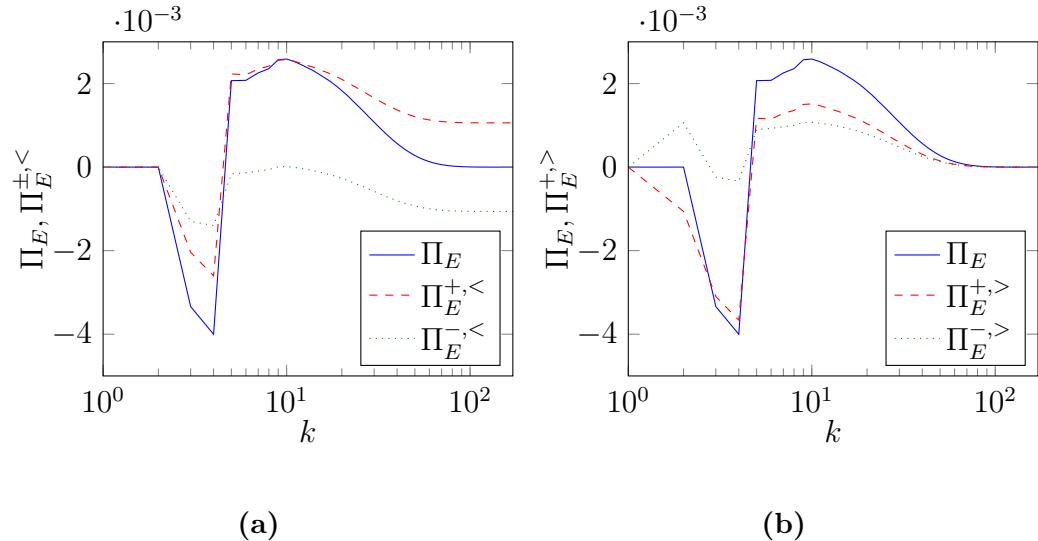
Vemos también que como  $H^\pm$  no son cantidades conservadas, los flujos  $>$  y  $<$  no coinciden, a diferencia de lo que ocurre con los flujos de  $E$  y  $H$ . Si restasemos  $\Pi_H^{+,>} - \Pi_H^{+,<}$ , lo mismo que  $\Pi_H^{-,>} - \Pi_H^{-,<}$ , obtendríamos como resultado  $R_H$ . De hecho, notemos en las Figuras 4.11b y 4.11a que las diferencias entre  $\Pi_H^{\pm,>}$  y  $\Pi_H^{\pm,<}$  coinciden con el valor de  $R_H$  dado en la tabla. Como vimos en la sección 2.5.3,  $R_H$  es precisamente la cantidad que muestra que  $H^+$  y  $H^-$  no se conservan por separado, y su valor representa la transferencia de helicidad entre modos  $+$  y  $-$ .

Pasemos ahora observar el comportamiento de la energía. En la 4.12a se observan los flujos de  $\Pi_E^{+,<}$ ,  $\Pi_E^{-,<}$ , y de  $\Pi_E$  para la simulación B1. Ahora  $\Pi_E$  está dado por la suma de  $\Pi_E^{+,<} + \Pi_E^{-,<}$ . Si recurrimos a la ecuación (4.12) y observamos los valores de la tabla 4.1 veremos que el flujo  $\Pi_E^{+,<}$  en el rango inercial no alcanza el valor de  $F_E^+$ . Por otro lado, el flujo  $\Pi_E^{-,<}$  en el rango inercial sí alcanza un valor similar a  $F_E^-$ . La diferencia entre  $\Pi_E^{+,<}$  y  $F_E^+$  se debe nuevamente la contribución de las integrales en la ecuación (4.12), mientras que la razón por la cual esto no ocurre con  $\Pi_E^{-,<}$  es que  $D_E^-$  es bastante más chico que  $D_E^+$ , y por lo tanto el término integral en este caso tiene menos peso. Es importante notar que en esta simulación el término de la ecuación (4.12) con mayor relevancia es el de disipación, dado que como vemos en la tabla 4.1 el término de la derivada temporal en esta simulación es pequeño.

Podemos hacer un análisis similar mirando la Figura 4.12b, la ecuación (4.14) y la tabla 4.1. Al igual que para la helicidad, vemos que como  $E^\pm$  no son

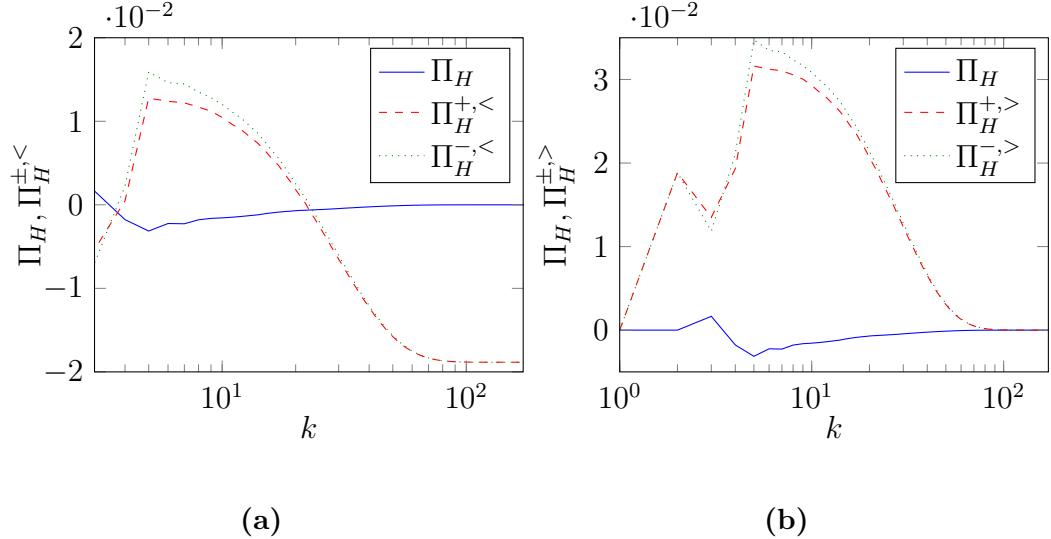


**Figura 4.11:** (a)  $\Pi_H^{\pm,<}$  y (b)  $\Pi_H^{\pm,>}$  en función del número de onda  $k$  para la simulación con  $\Omega = 4$  y con helicidad.



**Figura 4.12:** (a)  $\Pi_E^{\pm,<}$  y (b)  $\Pi_E^{\pm,>}$  en función del número de onda  $k$  para la simulación con  $\Omega = 4$  y con helicidad. Dado que  $E^\pm$  no son cantidades conservadas, los flujos  $>$  y  $<$  no coinciden.

cantidades conservadas, los flujos  $>$  y  $<$  no coinciden. Si sumasemos  $\Pi_E^{+,>} + \Pi_E^{+,<}$  obtendríamos como resultado  $R_E$ , mientras que si sumamos  $\Pi_E^{-,>} + \Pi_E^{-,<}$  el resultado es  $-R_E$ . De la sección 2.5.3 sabemos que  $R_E$  representa la transferencia de energía entre modos  $+$  y  $-$ .

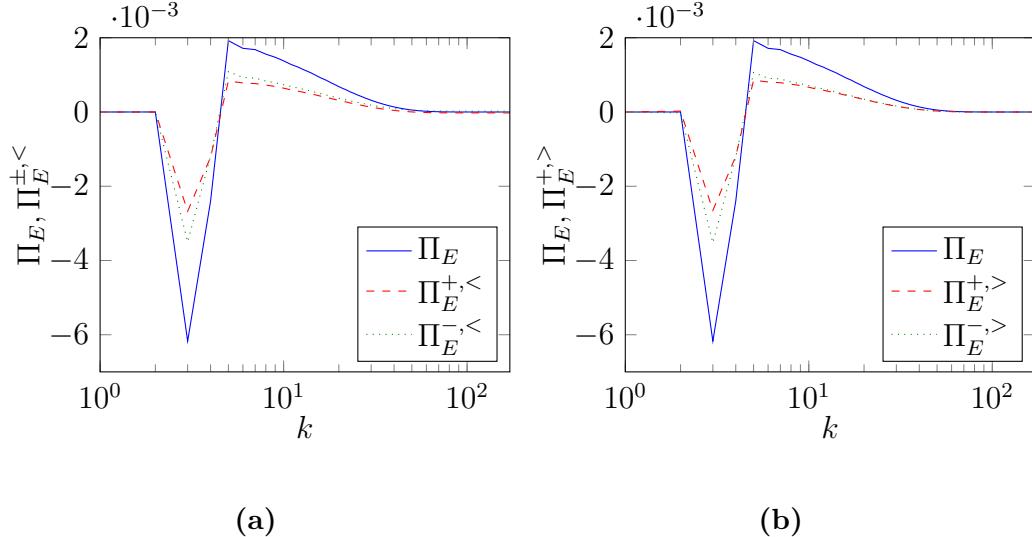


**Figura 4.13:** (a)  $\Pi_H^{\pm,<}$  y (b)  $\Pi_H^{\pm,>}$  en función del número de onda  $k$  para la simulación con  $\Omega = 4$  y sin helicidad. Dado que  $H^\pm$  no son cantidades conservadas, los flujos  $>$  y  $<$  no coinciden. Notar que el flujo de helicidad total fluctúa alrededor del cero, como se espera en el caso sin helicidad.

El análisis realizado para la simulación B1 en las figuras 4.11 y 4.12 se puede repetir para todas las simulaciones. En las figuras 4.13 y 4.14 se muestran gráficos análogos a los anteriores para la simulación A1. Notemos que en este caso las derivadas temporales de  $H^\pm$  son un orden de magnitud menores al resto de las magnitudes. Por lo tanto los valores de los flujos  $\Pi_H^{\pm,>}$  en el rango inercial se asemejan a  $D_H^\pm$ . La discrepancia observada es igual que la diferencia entre el valor de los flujos  $\Pi_H^{\pm,<}$  en el rango inercial y las cantidades  $F_H^\pm$ , y se debe nuevamente a las integrales de la ecuación (4.13) y (4.15).

En las figuras 4.14a y 4.14b se observan los flujos de  $\Pi_E^{\pm,<}$ ,  $\Pi_E^{\pm,>}$ , y de  $\Pi_E$  para la simulación A1. Podemos ver que como  $R_E$  es despreciable en esta simulación (tabla 4.1) el flujo  $\Pi_E^{+,<}$  prácticamente coincide con el flujo  $\Pi_E^{+,>}$ , y lo mismo ocurre para los modos  $-$ .

Las cantidades calculadas y el análisis realizado hasta aquí para los flujos nos serán de utilidad en la siguiente sección, donde se presenta un análisis fenomenológico que nos permitirá explicar por qué los rangos iniciales de los distintos flujos difieren.



**Figura 4.14:** (a)  $\Pi_E^{\pm,<}$  y (b)  $\Pi_E^{\pm,>}$  en función del número de onda  $k$  para la simulación con  $\Omega = 4$  y sin helicidad. Dado que  $E^\pm$  no son cantidades conservadas, los flujos  $>$  y  $<$  no coinciden. Sin embargo, en ausencia de helicidad, las diferencias son mucho menores.

### 4.2.3. Análisis fenomenológico de los flujos

En las subsecciones previas se realizó un análisis de los valores de los flujos de energía y helicidad en sus componentes  $+$  y  $-$ , se calcularon las cantidades  $D_X^\pm$ ,  $F_X^\pm$  (con  $X = E$  o  $X = H$ ),  $R_E$  y  $R_H$  para las distintas simulaciones, y se observó la importancia de la derivada temporal de  $E^\pm$ ,  $H^\pm$ ,  $E$  y  $H$  en la turbulencia rotante. En esta subsección se utilizan estos resultados, junto con los resultados de la sección 4.1.1, para realizar un análisis fenomenológico que nos permitirá explicar la causa de las diferencias en los rangos inerciales de  $E$  y  $H$ .

La extensión de los rangos inerciales en los flujos de energía, helicidad, y de sus modos  $\pm$  fue estudiada previamente por [4] para el caso de turbulencia hidrodinámica sin rotación. Entre sus resultados hallaron que la extensión del rango inercial para la helicidad es igual al de la energía, es decir que ambos flujos se mantienen constantes en un rango  $k_L \ll k \ll k_E$ , donde  $k_L$  es el número de onda donde empieza el rango inercial de la energía (proporcional al del forzado  $k_F$ ), y  $k_E$  es el número donde termina (proporcional al de disipación  $k_\nu$ ). El mismo rango inercial también se observa en los modos  $\pm$  de energía, pero no en  $H^\pm$ . En los flujos  $\Pi_H^{\pm,>}$  el rango inercial tiene una prolongación similar a la de  $E$  y  $H$ , pero los flujos  $\Pi_H^{\pm,<}$  tienen un rango inercial considerablemente más corto. Para número de  $Re$  grande, la disipación de

helicidad en los modos  $\pm$  por separado crece notablemente por encima de los valores del forzado de  $H^\pm$ . Este fenómeno hace que los rangos iniciales de  $\Pi_H^{\pm,<}$  sean más cortos que el del resto de las magnitudes analizadas. Sin embargo, este crecimiento de la disipación en los modos  $\pm$  por separado no se traslada en un crecimiento de la disipación de helicidad ( $D_H$ ), debido a una suerte de cancelación muy delicada entre  $H^+$  y  $H^-$ .

Los resultados analizados por [4] para turbulencia hidrodinámica sin rotación se dan en un marco donde tanto la helicidad como la energía desarrollan cascadas directas (hacia escalas más chicas) con una ley de potencias  $k^{-5/3}$ . La situación sería relativamente similar en el caso de rotación sin helicidad, donde tanto el espectro de energía como el de helicidad siguen una ley de potencias  $k^{-2}$ . Si bien en este caso la energía también desarrolla una cascada inversa para  $k < k_F$ , al utilizar en las simulaciones  $k_F = 3$  podríamos concentrarnos en los valores de  $k$  mayores a la escala de forzado. Sin embargo, debido a que la presencia de helicidad en turbulencia rotante modifica el aspecto de energía, no es posible generalizar los resultados obtenidos en [4] de manera directa. En turbulencia rotante se vuelve entonces necesario escribir los espectros de energía y helicidad en función de un índice espectral  $e$ , siendo  $k^{-e}$  el espectro de energía y  $k^{e-4}$  el de helicidad. Además, en turbulencia rotante no es posible despreciar las derivadas temporales de la energía y helicidad, como vimos en la sección anterior. Estas condiciones complejizan la situación para turbulencia rotante.

Comencemos por considerar las ecuaciones (4.12) y (4.14). En el término de disipación reemplazamos  $E^\pm$  usando la ecuación (4.3). Notemos que los términos de las derivadas temporales en general no se anulan debido a que las constantes que multiplican los espectros ( $C_E$  y  $C_H$ ) dependen del tiempo (como fue observado recientemente en [23]). De esta manera, el término de la derivada temporal se puede aproximar usando las ecuaciones (4.11) y (4.3) por

$$\int_0^k \frac{dE^\pm(p)}{dt} dp \sim \frac{C_{E^\pm}(T_2) - C_{E^\pm}(T_1)}{T_2 - T_1} \Omega^{\frac{5-3e}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \int_0^k p^{-e} dp, \quad (4.16)$$

donde despreciamos el segundo término de la ecuación (4.11) frente al primero, como se explica en la sección 4.1.1.

Con estos dos términos estamos en condiciones de hacer un análisis fenomenológico de la extensión del rango inercial de cada una de las magnitudes relevantes en los flujos. Por ejemplo, si tomamos la ecuación (4.12) y nos preguntamos para qué valor de  $k$  el flujo  $\Pi_E^{\pm,<}$  se anula, llegamos a la siguiente

estimación

$$F_E^\pm \sim \Omega^{\frac{3e-5}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \left( 2\nu C_{E^\pm} \frac{k_{F_E^\pm}^{(3-e)}}{3-e} + \frac{C_{E^\pm}(T_2) - C_{E^\pm}(T_1)}{T_2 - T_1} \frac{k_{F_E^\pm}^{(1-e)}}{1-e} \right), \quad (4.17)$$

donde  $C_{E^\pm}$  es el promedio temporal de las constantes en el lapso temporal analizado. Llamamos  $k_{F_E^\pm}$  al valor que representa el límite del rango inercial para el flujo  $\Pi_E^{\pm,<}$ , para distinguirlo por ejemplo de  $k_{D_E^\pm}$  que representará el límite del rango inercial del flujo  $\Pi_E^{\pm,>}$ , y así sucesivamente. El número de onda  $k_{D_E^\pm}$  surge de hacer el mismo análisis para la ecuación (4.14), donde obtenemos:

$$D_E^\pm + \frac{dE^\pm}{dt} \sim \Omega^{\frac{3e-5}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \left( 2\nu C_{E^\pm} \frac{k_{D_E^\pm}^{(3-e)}}{3-e} + \frac{C_{E^\pm}(T_2) - C_{E^\pm}(T_1)}{T_2 - T_1} \frac{k_{D_E^\pm}^{(1-e)}}{1-e} \right). \quad (4.18)$$

La diferencia entre  $k_{D_E^\pm}$  y  $k_{F_E^\pm}$  es pequeña cuando  $R_E$  es pequeño, pero puede ser importante si  $R_E$  no es despreciable.

Notemos que al no despreciar el término de la derivada temporal, no podemos despejar los valores de los números de onda de las ecuaciones (4.17) y (4.18) analíticamente, sino que es necesario hallarlos computacionalmente. Esta complicación adicional se vuelve necesaria dado que también en este análisis despreciar las derviadas temporales lleva a incongruencias fuertes entre la fenomenología y los resultados obtenidos en las simulaciones. Por ejemplo, si para la simulación B2 tomamos la energía y aproximamos que el valor alcanzado por  $\Pi_E$  en el rango inercial es similar a  $\epsilon$ , como se hace usualmente en el caso de turbulencia estacionaria sin rotación, encontramos que

$$k_E \sim \left( \frac{\Omega^{\frac{5-3e}{2}} \epsilon^{\frac{e-1}{2}}}{2C_E \nu} \right)^{\frac{1}{3-e}}, \quad (4.19)$$

lo cual da como resultado  $k_E \approx 14$ . Si en cambio utilizamos la ecuación

$$\epsilon \sim \Omega^{\frac{3e-5}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \left( 2\nu C_E \frac{k_E^{(3-e)}}{3-e} + \frac{C_E(T_2) - C_E(T_1)}{T_2 - T_1} \frac{k_E^{(1-e)}}{1-e} \right), \quad (4.20)$$

y hallamos  $k_E$  numericamente, obtenemos  $k_E \approx 38$  que está en mucho mejor acuerdo con el rango inercial que se observa para la energía en la simulación B2 (ver Figura 3.9a).

Podemos hacer el mismo análisis para la helicidad partiendo de las ecuaciones (4.13) y (4.15), y reemplazando  $H^\pm$  por la ecuación (4.4), de donde obtendremos las escalas en las que se extienden los rangos inerciales de la helicidad total y de las componentes  $\pm$  por separado. En este caso obtenemos para  $\Pi_H^{\pm,<}$  la siguiente ecuación

$$F_H^\pm \sim \Omega^{\frac{3e-5}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \left( 2\nu C_{H^\pm} \frac{k_{F_H^\pm}^{(e-1)}}{e-1} + \frac{C_{H^\pm}(T_2) - C_{H^\pm}(T_1)}{T_2 - T_1} g(k_{F_H^\pm}) \right), \quad (4.21)$$

donde  $C_{H^\pm}$  es el promedio temporal de las constantes en el lapso temporal analizado, y la función  $g(k_{F_H^\pm})$  es

$$g(k_{F_H^\pm}) = \begin{cases} \frac{k_{F_H^\pm}^{(1-e)}}{1-e} & \text{si } e \neq 2 \\ \ln(k_{F_H^\pm}) & \text{si } e = 2 \end{cases} \quad (4.22)$$

El valor de  $k = k_{F_H^\pm}$  representa el límite del rango inercial para el flujo  $\Pi_H^{\pm,<}$ . Por otro lado, el límite del rango inercial para el flujo  $\Pi_E^{\pm,>}$  está dado por  $k_{D_H^\pm}$  y puede obtenerse de la siguiente ecuación

$$D_H^\pm + \frac{dH^\pm}{dt} \sim \Omega^{\frac{3e-5}{2}} \epsilon^{\frac{3-e}{2}} \left( 2\nu C_{H^\pm} \frac{k_{D_H^\pm}^{(e-1)}}{e-1} + \frac{C_{H^\pm}(T_2) - C_{H^\pm}(T_1)}{T_2 - T_1} g(k_{D_H^\pm}) \right). \quad (4.23)$$

La diferencia entre  $k_{D_H^\pm}$  y  $k_{F_H^\pm}$  suele ser considerable. En la tabla 4.3 vemos las distintas escalas para los flujos de energía calculadas en las cuatro simulaciones con rotación realizadas en esta tesis. La tabla 4.4 muestra valores análogos para la helicidad. Es importante considerar que los valores de las tablas no son exactos, sino que provienen de un análisis fenomenológico por lo que no siempre reflejan exactamente lo que ocurre en los gráficos. Sin embargo, nos dan una idea aproximada de qué flujos tendrán un rango inercial más largo y cuales uno más corto.

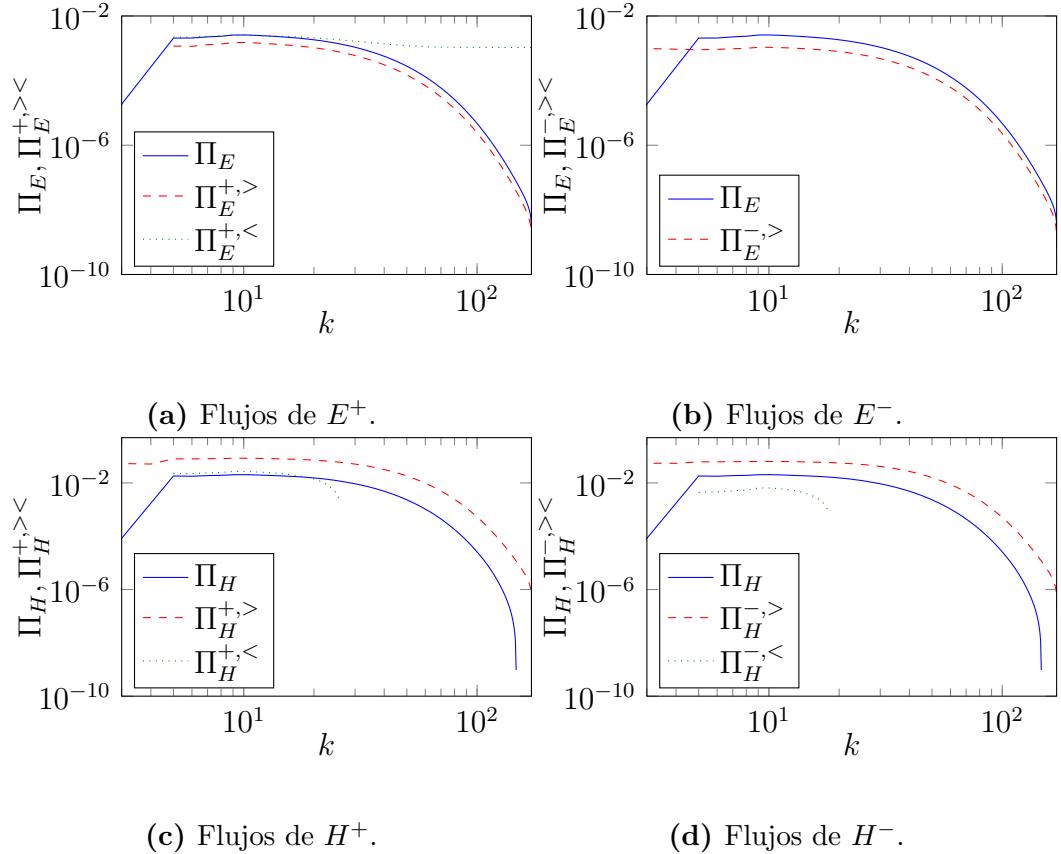
En la Figura 4.15 observamos los flujos correspondientes a la simulación B1. Como podemos observar en las tablas, los valores de  $k_E$ ,  $k_H$  y en general de los  $k_{D_X^\pm}$  para la simulación B1 son muy similares. Ese mismo comportamiento se observa en los gráficos, es decir, la prolongación de los rangos inerciales de los flujos  $\Pi_X$  y  $\Pi_X^{\pm,>}$  es similar. Sin embargo, los valores de  $k_{F_H^\pm}$  son más pequeños, lo cual indica que los rangos inerciales de  $\Pi_H^{\pm,<}$  son más cortos que el resto, como se observa en las Figuras 4.15c y 4.15d. Más

Simulación	$k_E$	$k_{F_E^+}$	$k_{F_E^-}$	$k_{D_E^+}$	$k_{D_E^-}$
A1	32	29	31	30	30
A2	38	30	31	36	29
B1	38	51	0	35	42
B2	39	62	0	36	41

**Cuadro 4.3:** Tabla con escalas características para el rango inercial de la energía y  $E^\pm$  en las cuatro simulaciones con rotación;  $k_E$  es la estimación del fin del rango inercial para el flujo  $\Pi_E$ ,  $k_{F_E^\pm}$  para el flujo  $\Pi_E^{\pm,<}$ , y  $k_{D_E^\pm}$  para el flujo  $\Pi_E^{\pm,>}$ .

Simulación	$k_H$	$k_{F_H^+}$	$k_{F_H^-}$	$k_{D_H^+}$	$k_{D_H^-}$
A1	32	19	20	31	31
A2	26	23	24	37	30
B1	36	26	12	37	44
B2	37	27	15	38	43

**Cuadro 4.4:** Tabla con escalas características para el rango inercial de la helicidad y  $H^\pm$  en las cuatro simulaciones con rotación;  $k_H$  es la estimación del fin del rango inercial para el flujo  $\Pi_H$ ,  $k_{F_H^\pm}$  para el flujo  $\Pi_H^{\pm,<}$ , y  $k_{D_H^\pm}$  para el flujo  $\Pi_H^{\pm,>}$ .

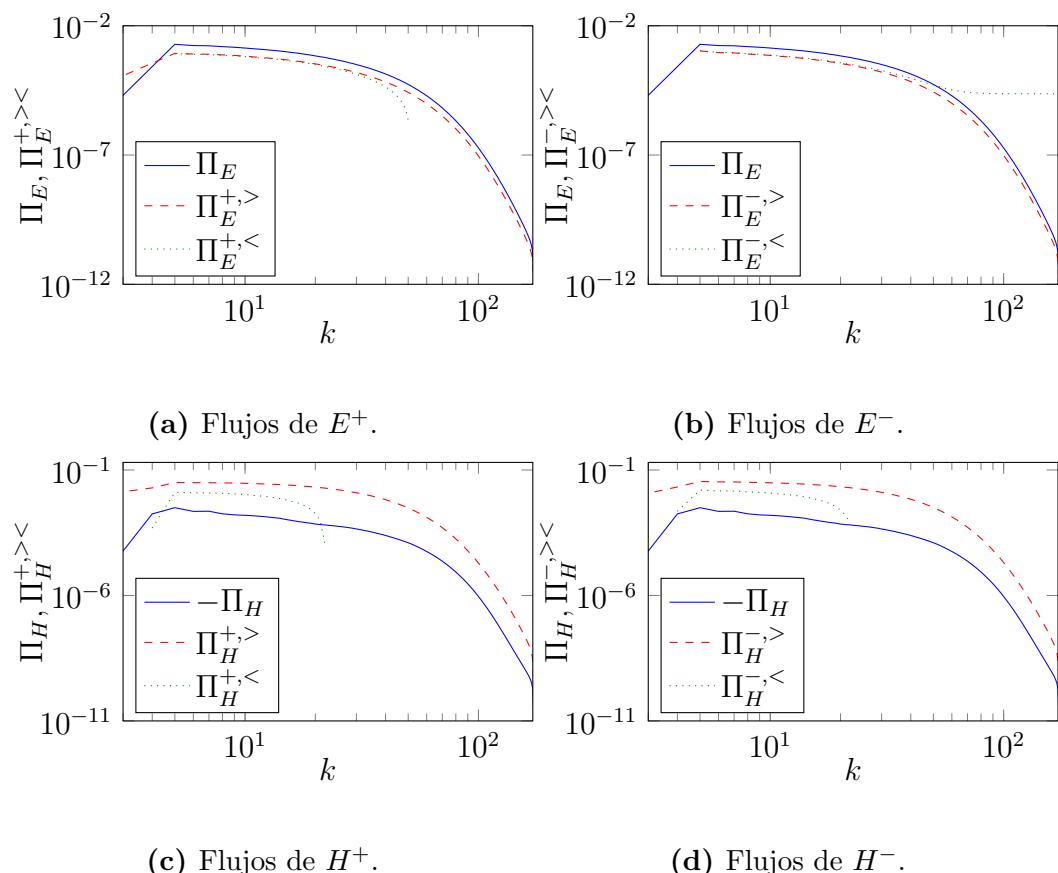


**Figura 4.15:** Flujo de  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $H^+$  y  $H^-$  en función del número de onda  $k$  para la simulación con  $\Omega = 4$  y con helicidad.

aún, notemos que  $k_{F_H^+} > k_{F_H^-}$ , con lo cual deberíamos esperar del análisis fenomenológico que el flujo de  $\Pi_H^{-,<}$  tenga un rango inercial más corto que el de  $\Pi_H^{+,<}$ , que es precisamente lo que se ve en los gráficos mencionados. En esta simulación también vemos que  $k_{F_E^-} = 0$ , y de acuerdo a esto no debería existir un rango inercial para el flujo  $\Pi_E^{-,<}$ . Lo que vemos en la Figura 4.12 es que dicho flujo es siempre negativo y nunca desciende hasta cero, sino que desciende hasta tomar el valor  $-R_E$ , mostrando la transferencia de energía entre el modo  $-$  y el  $+$ .

En la Figura 4.16 observamos los flujos correspondientes a la simulación A1. Nuevamente los valores de las escalas calculados en las tablas son muy ilustrativos para analizar la prolongación de los rangos iniciales de los flujos.

En trabajos previos realizados por Ditlevsen y Giuliani [7] se predijo un rango inercial más corto para la cascada de helicidad que para la cascada de energía. Más tarde, en [4] se presentó un análisis teórico muy interesante en



**Figura 4.16:** Flujo de  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $H^+$  y  $H^-$  en función del número de onda  $k$  para simulación con  $\Omega = 4$  y sin helicidad.

el que se mostró que para turbulencia hidrodinámica sin rotación el rango inercial de energía y helicidad tienen la misma extensión (a diferencia de lo predicho en [7]), mientras que los flujos  $\Pi_H^{\pm,\leftarrow}$  sí tienen un rango inercial más corto. En esta tesis se trasladó este análisis al caso de turbulencia en flujos rotantes. Al igual que en el caso no rotante [4], tanto en las simulaciones como en las predicciones basadas en el análisis fenomenológico, no se observa un rango inercial más corto para  $\Pi_H$  que para  $\Pi_E$ . Lo que sí observamos en todas las simulaciones es que los flujos  $\Pi_H^{\pm,\leftarrow}$  tienen un rango inercial notoriamente más corto que el resto de los flujos. Ocasionalmente  $\Pi_E^{-,\leftarrow}$  puede tener un rango inercial más corto cuando el forzado se produce principalmente en  $E^+$ . Este último resultado también ocurre en el caso estudiado en [4], donde se introduce helicidad positiva mediante el forzado. El rango inercial de  $\Pi_H$  en la simulación A1 es brevemente más corto y menos estable (Figuras 4.16d y 4.16c), pero esto se debe simplemente a la baja presencia de helicidad en estas simulaciones.

En esta sección y las anteriores hemos caracterizado la energía y la helicidad mediante espectros y flujos, haciendo promedios temporales para obtener  $E(k)$ ,  $H(k)$ ,  $\Pi_X(k)$ , y lo mismo en los modos  $\pm$ . De esta manera vimos como varían estas cantidades al variar la velocidad angular de rotación y al introducir helicidad mediante el forzado. Sin embargo, si queremos comprender los resultados en términos de las ondas iniciales propias de fluidos en rotación, no alcanza con considerar el espectro de frecuencias espaciales, sino que debemos estudiar también el espectro de frecuencias temporales, es decir, calcular el espectro espacio-temporal del flujo. Mediante este análisis, en la siguiente sección podremos observar cuanta energía se concentra alrededor de la relación de dispersión de las ondas, y por ende cuanta energía se concentra en las ondas iniciales. Al hacer esto mismo sobre  $E^\pm$  obtendremos resultados muy interesantes para comprender la dinámica espacio-temporal del flujo.

### 4.3. Análisis de frecuencias espaciales y temporales

Hasta aquí analizamos espectros y flujos de energía y helicidad en los modos  $\pm$  tomando promedios temporales para independizarnos de las variaciones en el tiempo. Si queremos ver cuanta energía se concentra en las ondas iniciales propias de un fluido en rotación, necesitamos calcular el espectro espacio-temporal  $E(\mathbf{k}, \omega)$ , lo cual nos permitirá en particular ver cuanta energía se concentra alrededor de la relación de dispersión (ver la

ecuación 2.30). De esta manera podremos cuantificar también cuanta energía se encuentra en las ondas inerciales del fluido para distintos números de onda  $k$ . Este análisis se realizó para la energía previamente en [5]. En esta tesis calcularemos además los espectros  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$ , y mostraremos cómo estas cantidades nos permiten realizar un análisis muy interesante sobre la forma en que se descompone la energía en sus modos  $+$  y  $-$ , y cuanta  $E^+$  o  $E^-$  se encuentra en modos ciclónicos (en el mismo sentido de la rotación) o en modos anticiclónicos (sentido contrario a la rotación). Los espectros espacio-temporales  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$  y  $H^\pm(\mathbf{k}, \omega)$  se calcularon a partir de  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$  y  $H^\pm(\mathbf{k}, \omega)$  utilizando las relaciones

$$E^\pm(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \left( E(\mathbf{k}, \omega) \pm \frac{H(\mathbf{k}, \omega)}{2k} \right), \quad (4.24)$$

$$H^\pm(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} (2kE(\mathbf{k}, \omega) \pm H(\mathbf{k}, \omega)), \quad (4.25)$$

que se siguen inmediatamente del análisis presentado en los capítulos anteriores.

La Figura 4.17 muestran la densidad de energía  $E(\mathbf{k}, \omega)/E(\mathbf{k})$  para las distintas simulaciones realizadas en esta tesis, donde

$$E(\mathbf{k}) = \int E(\mathbf{k}, \omega) d\omega,$$

es el espectro espacial usual. En línea con trazo continuo se grafica la relación de dispersión de las ondas inerciales (ver ecuación 2.30). En estas figuras podemos ver una fuerte acumulación de energía alrededor de la relación de dispersión, lo cual indica que un alto porcentaje de la energía total se concentra en las ondas inerciales. Notemos también cómo a medida que aumenta el valor de  $k_z$ , la energía se dispersa cada vez más alrededor de la relación de dispersión. Si comparamos las figuras 4.17a y 4.17b correspondientes a las simulaciones sin helicidad, vemos como el aumento de la velocidad de rotación de  $\Omega = 4$  a  $\Omega = 8$  provoca que la energía se concentre más fuertemente alrededor de la relación de dispersión. El mismo comportamiento se observa si comparamos las Figuras 4.17c y 4.17d (simulaciones con helicidad B1 y B2).

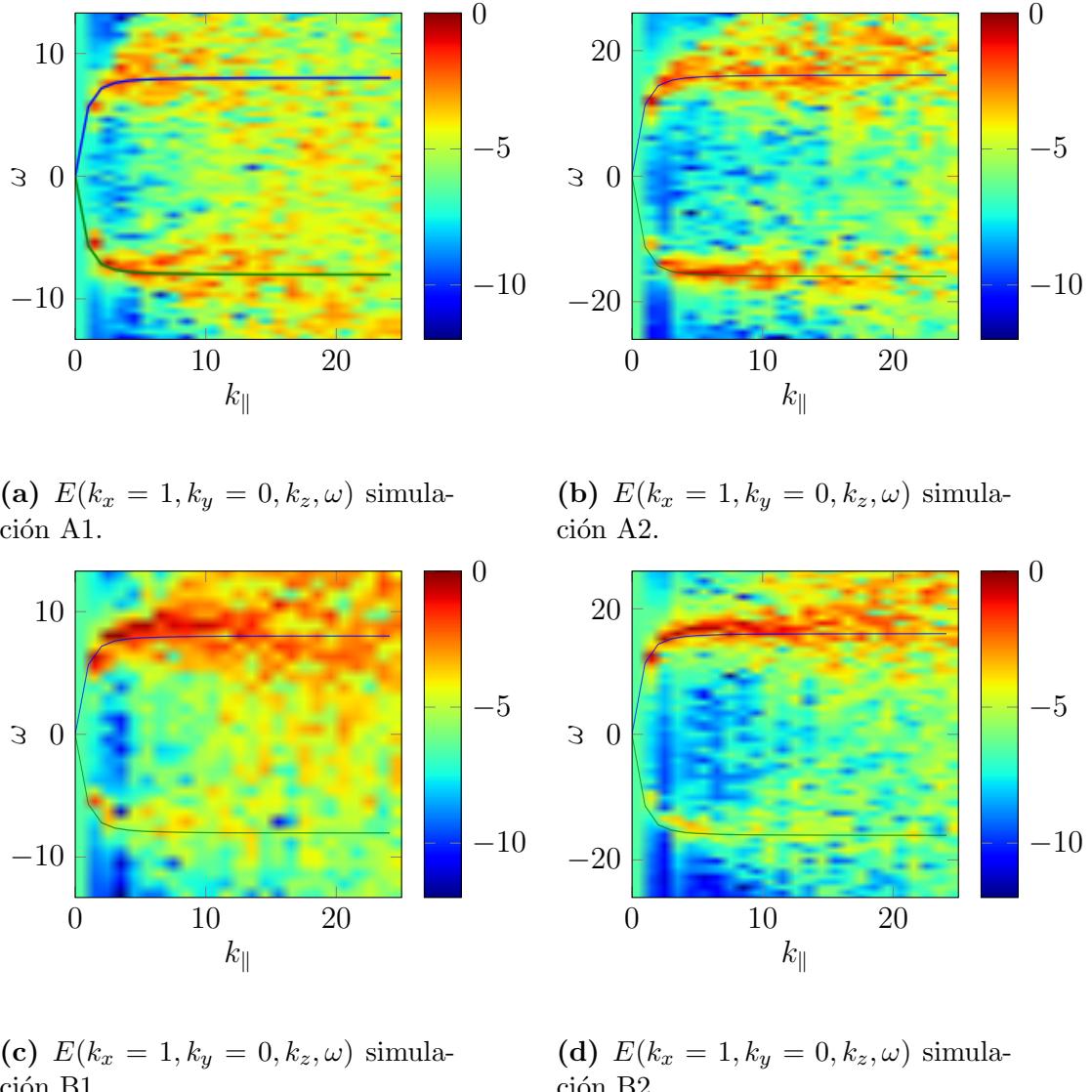
Comparemos ahora las simulaciones sin helicidad con las simulaciones con helicidad. En las primeras (figuras 4.17a y 4.17b) la rama que corresponde a ondas inerciales con dirección de propagación  $+\hat{z}$  (es decir, con frecuencia positiva), y la que corresponde a  $-\hat{z}$  (con frecuencia negativa) están balanceadas. Es decir, la densidad de energía que se concentra alrededor de ambas ramas es similar. Sin embargo, si observamos lo que ocurre en las simulaciones

con helicidad positiva (figuras 4.17c y 4.17d) existe un fuerte desbalance entre ambas ramas. Vemos que la rama con dirección de propagación  $+\hat{z}$  concentra una densidad de energía mucho mayor que la rama que representa ondas inerciales que se propagan en  $-\hat{z}$ . Para analizar qué genera este desbalance en el caso helicoidal es conveniente recurrir a los espectros  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$ .

En las Figuras 4.18 y 4.19 podemos ver cuanta densidad de energía en los modos  $+$  y  $-$  por separado se concentra alrededor de la relación de dispersión. Análogamente al análisis realizado con la energía, se muestran en las figuras los espectros normalizados  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)/E(\mathbf{k})$ . Al observar estas imágenes hay que tener en cuenta dos aspectos diferentes que son fáciles de confundir. Por un lado, el hecho de que la helicidad sea positiva en el flujo, simplemente indica que si integramos el gráfico de  $E^+$  sobre  $\mathbf{k}$  y  $\omega$ , y hacemos lo propio con el gráfico de  $E^-$ , obtendríamos una mayor cantidad de  $E^+$ , mientras que en las simulaciones sin helicidad ambas cantidades serán similares. Esto ya podíamos observarlo en la Figura 4.9, donde se muestra la cantidad relativa de  $E^+$  sobre el total de  $E$ . Por otro lado, vemos que  $E^+$  esta concentrado principalmente en el entorno de la relación de dispersión de las ondas con dirección de propagación  $+\hat{z}$ , mientras que  $E^-$  está principalmente presente en el entorno de las ondas con dirección de propagación en  $-\hat{z}$ . Ambos resultados están relacionados, pero no indican lo mismo. Analicemos más en detalle estas dos características de los espectros.

Tomemos los gráficos de  $E^+(\mathbf{k}, \omega)/E(\mathbf{k})$  para cualquiera de las simulaciones. Sabemos que las contribuciones a la parte positiva de la helicidad vienen de movimientos helicoidales que siguen el sentido de la regla de la mano derecha. Dado un vector  $\mathbf{k}$  con  $k_z$  positiva, las hélices que siguen el sentido de la rotación ( $\Omega\hat{z}$ ) y que contribuyen a  $E^+$  se propagan en la dirección  $+\hat{z}$ . También contribuyen a  $E^+$  las hélices que rotan en sentido anticiclónico y se propagan en la dirección  $-\hat{z}$ . Estas son las que tienen velocidad de fase negativa, es decir, corresponden a la parte del gráfico del espectro espacio-temporal con  $\omega$  negativo. Como vemos, apenas hay contribución a  $E^+$  de parte de estos modos. Esto se debe a que en los flujos rotantes los movimientos ciclónicos están fuertemente favorecidos frente a los anticiclónicos.

La prevalencia de movimientos ciclónicos es el resultado de un mayor estiramiento de los vórtices ciclónicos por la rotación rígida, y de una inestabilidad selectiva de los vórtices anticiclónicos frente a la fuerza de Coriolis [17]. Notar que la vorticidad total en el sistema de laboratorio es  $\boldsymbol{\omega} + \Omega\hat{z}$ , y cuando el signo de  $\omega_z$  coincide con el de  $\Omega$ , la vorticidad es mayor y también el estiramiento. Puede observarse que en los gráficos de  $E^-(\mathbf{k}, \omega)/E(\mathbf{k})$ , predominan en cambio los modos que se propagan en la dirección  $-\hat{z}$ . Notemos que las contribuciones a  $E^-$  vienen de hélices que siguen el sentido de la mano izquierda. Esto nos deja dos posibilidades: movimientos ciclónicos que



**Figura 4.17:** Energía normalizada en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  en las distintas simulaciones realizadas en la tesis, fijando  $k_y = 0$  y  $k_x = 1$ . En las figuras  $k_{\parallel} = k_z$  (en la dirección del eje de rotación), y la linea continua indica la relación de dispersión de ondas inerciales. Notar la acumulación de energía en el entorno de esta curva, y la asimetría en las simulaciones con helicidad.

avanzan en  $-\hat{z}$  o bien movimientos anticiclónicos que avanzan en la dirección  $+\hat{z}$ . Nuevamente, debido a que los movimientos ciclónicos se ven favorecidos en los flujos rotantes, la principal contribución a  $E^-$  viene de modos con dirección de propagación  $-\hat{z}$ . Este análisis vale tanto en los flujos con helicidad como en los flujos sin helicidad. El resultado tiene que ver con la presencia de rotación y no con la presencia o no de helicidad neta en el fluido.

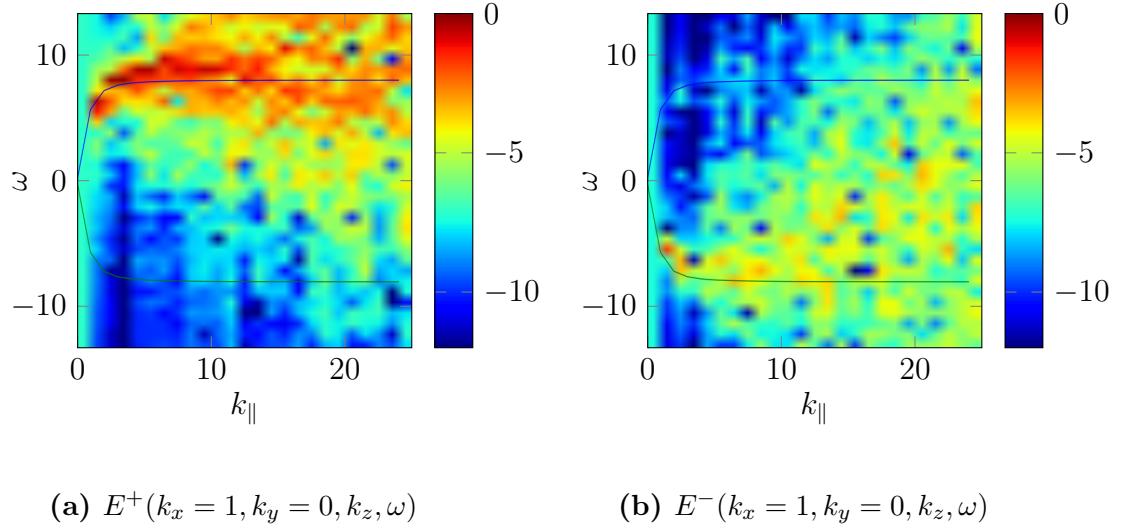
La presencia o ausencia de helicidad se ve en cambio en la comparación entre la cantidad total de  $E^+$  y la cantidad total de  $E^-$ . Si miramos  $E = E^+ + E^-$ , volviendo a las Figuras 4.17c y 4.17d, en presencia de helicidad neta hay un claro predominio de los modos con velocidad de fase positiva, que son los que predominan también en las Figuras 4.18a y 4.19a. Entonces este desbalance se debe a que al tener mayor cantidad de  $E^+$ , cuando la sumamos con  $E^-$  para obtener la energía total  $E$  vemos un gráfico más similar al de  $E^+$ , lo que confirma que  $E^-$  tiene menor peso en la  $E$  total. Si nos remitimos en cambio a las simulaciones sin helicidad (volviendo a las Figuras 4.17a y 4.17b) vemos que como los modos con velocidad de fase positiva y negativa contribuyen de manera similar a la energía total, ambas ramas de la relación de dispersión están balanceadas. Esto se debe a que las cantidades totales de  $E^+$  y  $E^-$  son similares debido a que no hay helicidad neta, y al sumarlas tienen aproximadamente igual peso.

Las figuras 4.18 y 4.19 también nos muestran que cuando hay helicidad positiva, es decir que hay mayor cantidad de  $E^+$  que de  $E^-$ , la energía en el modo  $+$  está mucho más concentrada alrededor de la relación de dispersión que la energía en el modo  $-$ . La rama positiva en 4.18a es mucho más angosta que la rama negativa en la Figura 4.18b, y lo mismo observamos para la simulación B2, en la Figura 4.19. Notemos también que al igual que para la energía, para  $E^\pm$  también vemos que al aumentar la velocidad de rotación la densidad de energía se concentra más fuertemente alrededor de la relación de dispersión (comparar las figuras 4.18 y 4.19 para el caso helicoidal, o bien 4.20 y 4.21 para el caso sin helicidad).

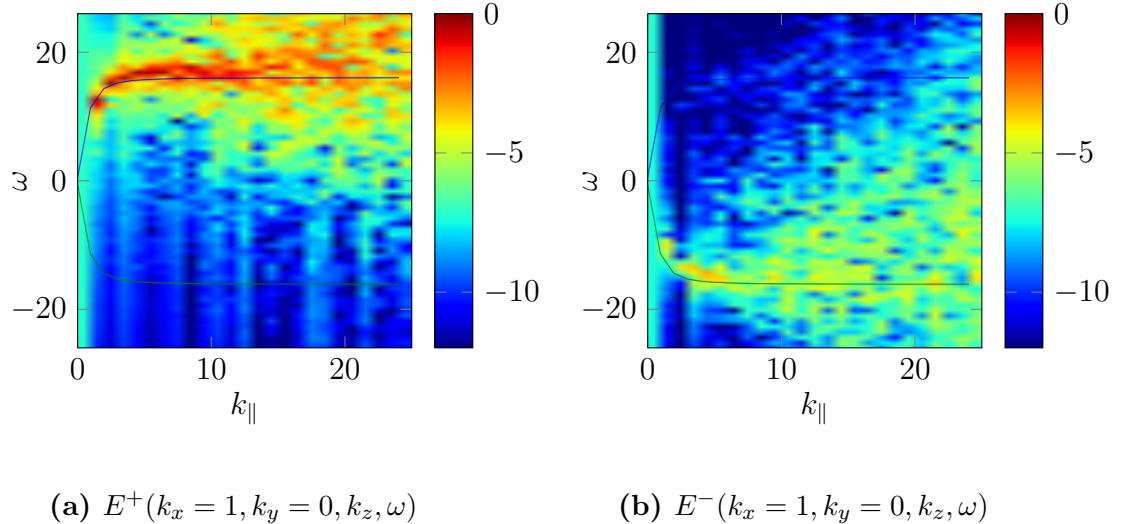
Todos estos resultados pueden resumirse en el diagrama que se muestra en la Figura 4.22. En el diagrama se muestran los dos modos helicoidales con las polarizaciones  $+$  y  $-$ , y los dos posibles sentidos de propagación de las ondas inerciales respecto a la dirección del eje de rotación. Aunque en principio estas dos magnitudes no tienen ninguna correlación, la preferencia del sistema por movimientos ciclónicos en la velocidad resulta en que los modos con helicidad  $H > 0$  (modos en la energía  $E^+$ ) se propaguen preferencialmente en la dirección del eje de rotación, y los modos con  $H < 0$  (modos en la energía  $E^-$ ) se propaguen preferencialmente en sentido contrario. Los demás modos, que involucran movimientos anticiclónicos, son desfavorecidos. Como resultado, se genera una correlación entre el signo de la helicidad y la dirección

de propagación de las ondas. Cuando la helicidad del fluido es nula, coexisten ondas que viajan en ambos sentidos a lo largo del eje de rotación. Y cuando la helicidad del fluido es diferente de cero, solo una de las ondas (en uno de los cuadrantes del diagrama) están presentes en el flujo.

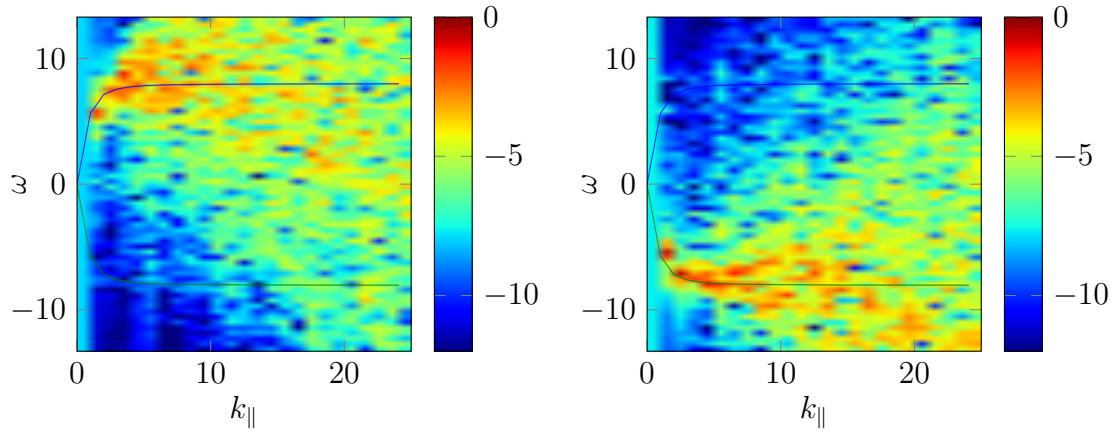
Finalmente, en la Figura 4.23 observamos el comportamiento de la energía en la simulación B2, a medida que aumenta el valor de  $k_x$  seleccionado para formar el vector  $\mathbf{k}$ . Vemos que a medida que aumenta  $k_x$  la energía se vuelve más dispersa, y se observa una fuerte concentración en los modos con  $\omega \approx 0$ , a pesar de que el forzado no inyecta energía en esos modos. Este comportamiento fue observado previamente en [5] y es el resultado de la excitación de modos vorticosos (en lugar de ondas) en las escalas más pequeñas del flujo rotante. Como resultado podemos concluir que existen dos tipos diferentes de flujos turbulentos rotantes. En ausencia de helicidad, la turbulencia rotante corresponde a una superposición de vórtices y de ondas inerciales “balanceadas”, es decir, de ondas inerciales viajando en ambas direcciones a lo largo del eje de rotación del fluido. En cambio, en presencia de helicidad, las ondas inerciales están “desbalanceadas”, y la turbulencia corresponde mayormente a ondas inerciales con una polarización privilegiada viajando en la dirección que es estable frente a la fuerza de Coriolis.



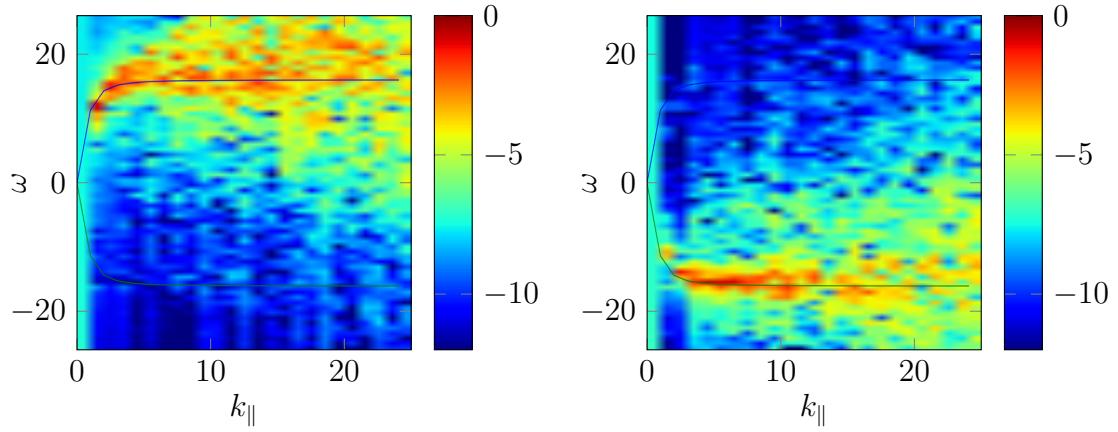
**Figura 4.18:** Espectros espacio-temporales normalizados de  $E^+$  y  $E^-$  en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  para la simulación B1, fijando  $k_x = 1$  y  $k_y = 0$ . Vemos que para  $E^+$  la mayor parte de la energía corresponde a ondas con velocidad de fase positiva, mientras que para  $E^-$  ocurre lo contrario: la energía se acumula en ondas con velocidad de fase negativa.



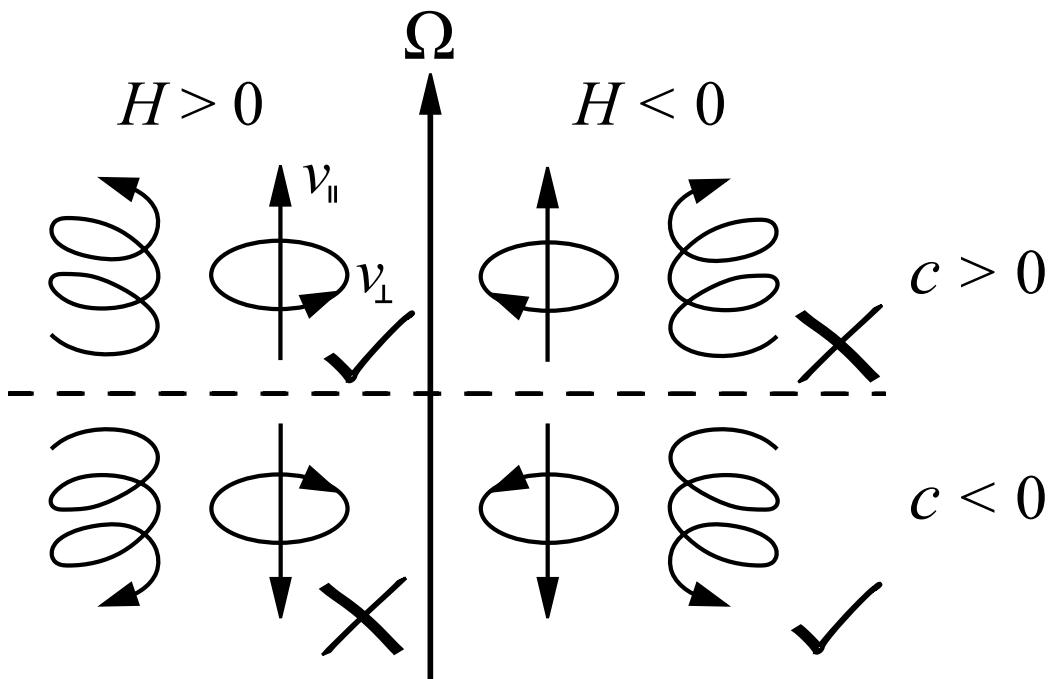
**Figura 4.19:** Espectros espacio-temporales normalizados de  $E^+$  y  $E^-$  en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  para la simulación B2, fijando  $k_x = 1$  y  $k_y = 0$ . Vemos que para  $E^+$  la mayor parte de la energía corresponde a ondas con velocidad de fase positiva, mientras que para  $E^-$  ocurre lo contrario: la energía se acumula en ondas con velocidad de fase negativa.

(a)  $E^+(k_x = 1, k_y = 0, k_z, \omega)$ (b)  $E^-(k_x = 1, k_y = 0, k_z, \omega)$ 

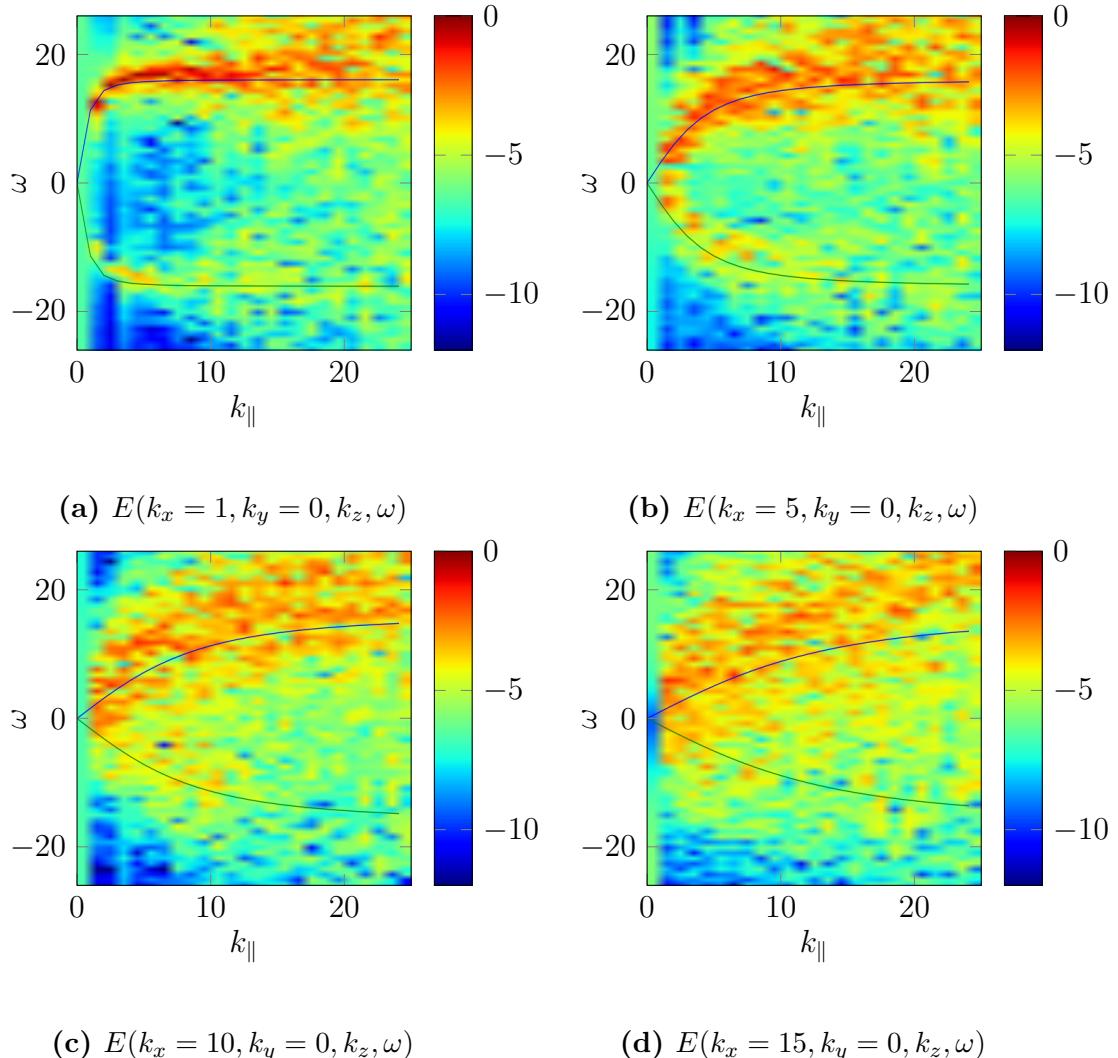
**Figura 4.20:** Espectros espacio-temporales normalizados de  $E^+$  y  $E^-$  en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  para la simulación A1, fijando  $k_x = 1$  y  $k_y = 0$ . Vemos que para  $E^+$  la mayor parte de la energía pertenece a ondas con velocidad de fase positiva, mientras que para  $E^-$  ocurre lo contrario: la energía se acumula en ondas con velocidad de fase negativa.

(a)  $E^+(k_x = 1, k_y = 0, k_z, \omega)$ (b)  $E^-(k_x = 1, k_y = 0, k_z, \omega)$ 

**Figura 4.21:** Espectros espacio-temporales de  $E^+$  y  $E^-$  en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  para la simulación A2, fijando  $k_x = 1$  y  $k_y = 0$ . Vemos que para  $E^+$  la mayor parte de la energía pertenece a ondas con velocidad de fase positiva, mientras que para  $E^-$  ocurre lo contrario: la energía se acumula en ondas con velocidad de fase negativa.



**Figura 4.22:** Diagrama que muestra las dos posibles polarizaciones de las ondas inerciales (con helicidad + o -), y las posibles direcciones de propagación (indicadas por la velocidad de fase  $c = \omega/k_{\parallel}$  positiva o negativa respecto al eje de rotación  $\Omega$ ). Aunque en principio el signo de la helicidad  $H$  no tiene una correlación con el signo de la velocidad de fase, la preferencia de movimientos ciclónicos resulta en que las ondas con helicidad positiva se propaguen mayormente en el sentido del eje de rotación, y que las ondas con helicidad negativa se propaguen en sentido contrario (ambos casos se indican con un tilde). Las ondas que corresponden a movimientos anticiclónicos, en cambio, están fuertemente suprimidas (indicadas con una cruz).



**Figura 4.23:** Espectro espacio-temporal normalizado de la energía en función del vector de onda  $\mathbf{k}$  y de la frecuencia  $\omega$  para la simulación B2, fijando  $k_y = 0$ , y variando el valor de  $k_x$  en las distintas figuras. Podemos ver como para números de onda pequeños (escalas grandes), la energía se concentra alrededor de la relación de dispersión, lo cual indica que la mayor parte de la energía en esas escalas está en las ondas iniciales. A medida que aumenta el valor de  $k_x$  la energía se vuelve más dispersa y el flujo corresponde a una superposición de ondas iniciales y modos vorticosos.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se realizó un estudio de flujos turbulentos rotantes mediante herramientas teóricas y simulaciones numéricas, con especial énfasis en el comportamiento de la energía y la helicidad en los modos helicoidales. El problema se analizó en distintas situaciones, variando la velocidad de rotación y la cantidad de helicidad presente en los flujos.

Uno de los principales resultados de esta tesis es la extensión del estudio teórico realizado en [4] para turbulencia isótropa y homogénea, al caso de turbulencia rotante. El análisis nos permitió descomponer la helicidad, la energía, y sus flujos, en sus componentes con helicidad + y - por separado. En el caso de turbulencia rotante esta descomposición cobra particular importancia ya que dichas componentes corresponden a las dos ramas de las ondas inerciales, que son soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento con diferente polaridad. La descomposición permitió realizar buena parte del análisis numérico, obtener expresiones para el balance de las tasas de inyección, de disipación, derivadas temporales y flujos de las cantidades de interés, y estimar las escalas de disipación de la energía y la helicidad.

El trabajo numérico consistió en realizar y posteriormente analizar dos series de simulaciones, la primera de ellas sin helicidad neta, y la segunda introduciendo un forzado helicoidal. Estas simulaciones se iniciaron sin rotación hasta alcanzar el régimen turbulento. A partir de ese momento se impusieron dos velocidades de rotación distintas ( $\Omega = 4$  y  $\Omega = 8$ ) en cada simulación, resultando en un total de cuatro simulaciones principales, todas con una resolución de  $512^3$  puntos. Se estudiaron los espectros y los flujos de energía y helicidad en todas las simulaciones. También se estudiaron espectros y flujos de la energía y helicidad en sus modos helicoidales. Se analizaron los rangos inerciales de todos los flujos y se encontraron resultados similares a los hallados por [4] en el caso de turbulencia sin rotación. Sin embargo, una diferencia importante con los estudios previos realizados para turbulen-

cia isótropa, es que las simulaciones mostraron la necesidad de preservar las derivadas temporales en todas las ecuaciones de balance, debido a la presencia de la cascada inversa de energía en turbulencia rotante que evita que el sistema llegue a un estado estacionario.

Posteriormente se analizó el espectro espacio-temporal de la energía total, y de sus componentes helicoidales, es decir, las cantidades  $E(\mathbf{k}, \omega)$ , y  $E^\pm(\mathbf{k}, \omega)$ . Debido a que la relación de dispersión de las ondas iniciales características de los fluidos en rotación nos da la conocida relación  $\omega(\mathbf{k})$ , fue posible utilizar los resultados para determinar cuanta energía se concentra alrededor de las ondas iniciales. Asimismo, se analizó cómo varía este resultado para distintos números de onda. Observamos que al aumentar el valor de los números de onda  $k_\perp$ , la banda de energía alrededor de la relación de dispersión se vuelve más ancha. También se observó que al tener helicidad positiva, las bandas de  $E^+(\mathbf{k}, \omega)$  alrededor de la relación de dispersión son más angostas que las bandas de  $E^-(\mathbf{k}, \omega)$  cuando el flujo tiene helicidad neta positiva. Por otro lado, las cantidades analizadas nos permitieron determinar cuanta energía se concentra en ondas que se propagan en sentido ascendente y cuanta en ondas que se propagan en sentido descendente (siendo  $\hat{z}$  el eje de rotación). Encontramos que en las simulaciones con helicidad positiva, las ondas con dirección de propagación en  $+\hat{z}$  concentran casi toda la energía. Esto se debe a que en turbulencia rotante los movimientos ciclónicos están favorecidos, y por lo tanto para que la helicidad sea positiva y el sentido de giro predominante sea el de la rotación, las ondas que contribuyen a la helicidad positiva se propagan en  $+\hat{z}$  (formando hélices con el sentido de la regla de la mano derecha). En cambio, cuando la helicidad del fluido es pequeña o nula, ambas ramas de la relación de dispersión (y los espectros espacio-temporales de  $E^+$  y  $E^-$ ) están igualmente poblados. Así, podemos concluir que existen dos regímenes muy diferentes de turbulencia rotante. En el caso no helicoidal las ondas están “balanceadas” y la turbulencia rotante es la superposición de vórtices y de ondas que viajan en ambos sentidos a lo largo del eje de rotación, con ambas polarizaciones. Pero en el caso helicoidal las ondas están “desbalanceadas”, y la mayor parte de las ondas corresponde a una única polarización viajando en la dirección privilegiada por la fuerza de Coriolis.

# Bibliografía

- [1] A. ALEXAKIS (2016). Helically Decomposed Turbulence. arXiv:1606.02540.
- [2] C. CAMBON, R. RUBINSTEIN, AND F. S. GODEFERD (2004). Advances in wave turbulence: rapidly rotating flows. *New J. Phys.*, **6**, 73.
- [3] C. CAMBON, N. N. MANSOUR, AND F. S. GODEFERD (1997). Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.*, **337**, 303.
- [4] Q. CHEN, S. CHEN, G. L. EYINK (2003). The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **15**, 361.
- [5] P. CLARK DI LEONI, P. J. COBELLI, P. D. MININNI, P. DMITRUK, W. H. MATTHAEUS (2014). Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow. *Phys. Fluids*, **26** (3), 035106.
- [6] P. A. DAVIDSON (2008). Turbulence in rotating, stratified and electrically conducting fluids. *Cambridge University Press*.
- [7] P. D. DITLEVSEN AND P. GIULIANI (2001). Cascades in helical turbulence. *Phys. Fluids*, **13**, 3508.
- [8] U. FRISCH (1995). Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. *Cambridge University Press*.
- [9] H. GOLDSTEIN (1980). Classical mechanics. *Addison-Wesley*.
- [10] D. O. GÓMEZ, P. D. MININNI, AND P. DMITRUK (2005). MHD simulations and astrophysical applications. *Adv. Sp. Res.*, **35**, 899.
- [11] R. H. KRAICHNAN, D. MONTGOMERY (1980). Two-dimensional turbulence. *Rep. Prog. Phys.*, **43**, 547–619.
- [12] D.K. LILLY (1986). *Atm. Sc.*, **40**, 126.

- [13] P. D. MININNI, A. POUQUET (2009). Helicity cascades in rotating turbulence. *Phys. Rev. E*, **79**, 026304.
- [14] P. D. MININNI, A. POUQUET (2010). The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **368**, 1635–1662.
- [15] P. D. MININNI, D. ROSENBERG, R. REDDY, AND A. POUQUET (2011). A hybrid mpi-openmp scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence. *Parallel Comput.*, **37**, 316.
- [16] H. K. MOFFAT (1969). The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, **35**, 117–129.
- [17] C. MORIZE, F. MOISY, M. RABAUD (2005). Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank. *Phys. Fluids*, **17**, 095105.
- [18] A. POUQUET, G. S. PATTERSON (1978). Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **85**, 305–323.
- [19] P. C. RODRÍGUEZ IMAZIO (2014). Transporte anisótropo de escalares pasivos en turbulencia rotante. Biblioteca Digital FCEN, UBA.
- [20] A. SEN, P. D. MININNI, D. ROSENBERG, AND A. POUQUET (2012). Anisotropy and nonuniversality in scaling laws of the large-scale energy spectrum in rotating turbulence. *Phys. Rev. E*, **86**, 036319.
- [21] T. TEITELBAUM (2012). El decaimiento libre de flujos turbulentos rotantes. Biblioteca Digital FCEN, UBA.
- [22] T. TEITELBAUM, P. D. MININNI (2009). Effect of Helicity and Rotation on the Free Decay of Turbulent Flows. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 014501.
- [23] P. C. VALENTE, V. DALLAS (2016). Spectral imbalance in the inertial range dynamics of decaying rotating turbulence. arXiv:1610.05032.
- [24] F. WALEFFE (1992). The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, A **4**, 350.
- [25] F. WALEFFE (1993). Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids*, A **5**, 677.