1. Задание 1

1.1. Условие

Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида (вывести аналитически выражения закона управления и алгоритма адаптации):

$$\dot{x} = \theta_1 \cos x - \theta_2 \cos\left(x^4\right) + \theta_3 \sin\left(2x + 9\right) + \theta_2 x^3 + \cos\left(x^6\right) + 3u,$$

где θ_i – неизвестный параметр. Цель управления заключается в компенсации неопределенности θ_i и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t\to\infty} \left(x_m(t) - x(t)\right) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

где $\varepsilon = x_m - x$ – ошибка управления, x_m – эталонный сигнал, являющийся выходом динамической модели (эталонной модели):

$$\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda g,$$

где g – сигнал задания, $\lambda > 0$ – параметр, задающий время переходного процесса.

1.2. Решение

Запишем уравнение объекта в регрессионной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cos x \\ x^3 - \cos\left(x^4\right) \\ \sin\left(2x+9\right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \cos\left(x^6\right) + 3u = f(x)^T\theta + d(x) + 3u,$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix},\ \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix},\ d(x) = \cos\left(x^6\right)$$

Ошибка слежения:

$$\varepsilon(t) = x_m(t) - x(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x}$$

Подставим $\dot{x}_m$ и $\dot{x}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} =& -\lambda x_m + \lambda g - \big(\theta_1 \cos x - \theta_2 \cos\left(x^4\right) + \\
&+\theta_3 \sin\left(2x+9\right) + \theta_2 x^3 + \cos\left(x^6\right) + 3u\big) = \\
=& -\lambda x_m + \lambda g - \theta_1 \cos x - \theta_2 \left(x^3 - \cos\left(x^4\right)\right) + \\
&- \theta_3 \sin\left(2x+9\right) - \cos\left(x^6\right) - 3u = \\
=& -\lambda x_m + \lambda g - f(x)^T \theta - d(x) - 3u
\end{aligned}$$

Подставим $x_m = x + \varepsilon$ в $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\left(x + \varepsilon\right) + \lambda g - f(x)^T\theta - d(x) - 3u,$$

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - \left(\lambda x - \lambda g + f(x)^T\theta + d(x) + 3u\right)$$

Желаемая динамика ошибки $\varepsilon \to 0$:

$$\dot{\varepsilon} = -k\varepsilon,\ k > 0$$

Зададим такой закон управления, чтобы часть выражения $\dot{\varepsilon}$ в скобках обнулилась:

$$3u = -\lambda x + \lambda g - f(x)^T\theta - d(x) \Rightarrow u = \frac{1}{3}\left(-\lambda x + \lambda g - f(x)^T\theta - d(x)\right)$$

Так как θ неизвестна, зададим:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Тогда, адаптивный закон управления:

$$u = \frac{1}{3}\left(-\lambda x + \lambda g - f(x)^T\hat{\theta} - d(x)\right)$$

Определим вектор ошибки параметров:

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

Подставим u в $\dot{x}$:

$$\dot{x} = f(x)^T\theta + d(x) + \left(-\lambda x + \lambda g - f(x)^T\hat{\theta} - d(x)\right) = -\lambda x + \lambda g + f(x)^T\tilde{\theta}$$

Тогда:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x} = -\lambda x_m + \lambda g - \left(-\lambda x + \lambda g + f(x)^T\tilde{\theta}\right) = -\lambda\varepsilon - f(x)^T\tilde{\theta}$$

Квадратичная функция Ляпунова:

$$V = 0.5\varepsilon^2 + 0.5\tilde{\theta}^T P^{-1}\tilde{\theta},$$

где $P = P^T \succ 0$ – матрица скорости адаптации:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix},\ p_i > 0$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}}$$

Так как $\theta = const.$:

$$\dot{\tilde{\theta}} = 0 - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Подставим $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\tilde{\theta}}$ в $\dot{V}$:

$$\dot{V} = \varepsilon\left(-\lambda\varepsilon - f(x)^T\tilde{\theta}\right) - \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\hat{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \varepsilon f(x)^T\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\hat{\theta}}$$

Так как $\varepsilon f(x)^T\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T\left(\varepsilon f(x)\right)$:

$$\dot{V} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}^T\left(\varepsilon f(x) + P^{-1}\dot{\hat{\theta}}\right)$$

Для $\dot{V} \le -\lambda\varepsilon^2 \le 0$ достаточно:

$$\varepsilon f(x) + P^{-1}\dot{\hat{\theta}} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\theta}} = -P\varepsilon f(x)$$

Тогда, алгоритм адаптации:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -p_1 \varepsilon \cos x, \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = -p_2 \varepsilon \left(x^3 - \cos\left(x^4\right)\right), \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = -p_3 \varepsilon \sin\left(2x + 9\right) \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = \frac{1}{3}\left(-\lambda x + \lambda g - \hat{\theta}_1 \cos x - \hat{\theta}_2 \left(x^3 - \cos\left(x^4\right)\right) - \hat{\theta}_3 \sin\left(2x + 9\right) - \cos\left(x^6\right)\right)$$

2. Задание 2

2.1. Условие

Решить задачу адаптивного управления (вывести аналитически выражения закона управления и алгоритма адаптации) для объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2, \\ \dot{x}_2 = & \theta_1 \cos\left(x_1^2 - x_2^5\right) + \theta_2 \sin\left(6x_1^2 - 7x_2\right) + \\ & +\theta_3 \sin\left(x_2^2\right) - \theta_2 x_2^5 + \cos x_3 + 6u, \end{cases}$$

где θ_i – неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством:

$$\lim_{t\to\infty} ||e(t)|| = 0,$$

где $e = x_m - x$ – вектор ошибки управления, $x_m \in \mathbb{R}^n$ – вектор, генерируемый эталонной моделью:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + b_m g$$

с задающим воздействием $g(t)$.

2.2. Выполнение

Обозначим:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \; f(x) = \begin{bmatrix} \cos\left(x_1^2 - x_2^5\right) \\ \sin\left(6x_1 - 7x_2\right) - x_2^5 \\ \sin\left(x_2^2\right) \end{bmatrix}, \; d(x) = \cos x_3$$

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \theta^T f(x) + d(x) + 6u \end{cases}$$

Рассмотрим ошибку:

$$e = x_1 - x = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x},$$

$$\dot{e} = A_m x_m + b_m g - \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \right)$$

Обозначим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(x) = B_d d(x), \; \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u = Bu$$

Подставим $x_m = e + x$:

$$\dot{e} = A_m \left(e + x\right) + b_m g - \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} + B_d d(x) + Bu \right),$$

$$\dot{e} = A_m e + b_m g + A_m x - \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} - B_d d(x) - Bu$$

Цель:

$$\dot{e} = A_m e$$

Тогда:

$$Bu = b_m g + A_m x - \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} - B_d d(x)$$

Введем матрицы:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{m_{21}} & a_{m_{22}} \end{bmatrix},\ b_m = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{m_0} \end{bmatrix}$$

Итого:

$$6u = a_{m_{21}}x_1 + a_{m_{22}}x_2 + b_{m_0}g - \theta^T f(x) - d(x),$$

$$u = \frac{1}{6}\left(a_{m_{21}}x_1 + a_{m_{22}}x_2 + b_{m_0}g - \theta^T f(x) - d(x)\right)$$

Так как θ неизвестна:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix},\ \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

Управление:

$$u = \frac{1}{6}\left(a_{m_{21}}x_1 + a_{m_{22}}x_2 + b_{m_0}g - \hat{\theta}^T f(x) - d(x)\right)$$

Подставим в $\dot{e}$:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = a_{m_{21}}e_1 + a_{m_{22}}e_2 - \theta^T f(x) + \hat{\theta}^T f(x) \end{cases}$$

Так как $-\left(\theta^T - \hat{\theta}^T\right) f(x) = -\tilde{\theta}^T f(x)$:

$$\dot{e} = A_m e - B\tilde{\theta}^T f(x)$$

Функция Ляпунова:

$$V(e, \tilde{\theta}) = 0.5e^T P_1 e + 0.5\tilde{\theta}^T P_2^{-1}\tilde{\theta},$$

где $P_1 = P_1^T \succ 0$ – решение уравнения Ляпунова:

$$A_m^T P_1 + P_1 A_m = -Q,\ Q = Q^T \succ 0,$$

P_2 – диагональная матрица скоростей адаптации:

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \; p_i > 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = e^T P_1 \dot{e} + \tilde{\theta}^T P_2^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

Подставим $\dot{e}$:

$$\dot{V} = e^T P_1 \left(A_m e - B\tilde{\theta}^T f(x) \right) + \tilde{\theta}^T P_2^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = e^T P_1 A_m e - e^T P_1 B \tilde{\theta}^T f(x) + \tilde{\theta}^T P_2^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

Рассмотрим первый член:

$$e^T P_1 A_m e = 0.5 e^T \left(P_1 A_m + A_m^T P_1 \right) e = -0.5 e^T Q e$$

Рассмотрим второй член:

$$-e^T P_1 B \tilde{\theta}^T f(x) = -\tilde{\theta}^T \left(e^T P_1 B \right) f(x)$$

Тогда:

$$\dot{V} = -0.5 e^T Q e - \tilde{\theta}^T \left(e^T P_1 B \right) f(x) + \tilde{\theta}^T P_2^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

$\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$, т.к. $\theta = const.$:

$$\dot{V} = -0.5 e^T Q e - \tilde{\theta}^T \left(e^T P_1 B \right) f(x) - \tilde{\theta}^T P_2^{-1} \dot{\hat{\theta}},$$

$$\dot{V} = -0.5 e^T Q e - \tilde{\theta}^T \left(\left(e^T P_1 B \right) f(x) + P_2^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right)$$

Для $\dot{V} = -0.5 e^T Q e \leq 0$ достаточно:

$$\left(e^T P_1 B \right) f(x) + P_2^{-1} \dot{\hat{\theta}} = 0,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -P_2 \left(e^T P_1 B \right) f(x)$$

То есть:

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{\theta}}_1 = -p_1 \left(e^T P_1 B\right) \cos\left(x_1^2 - x_2^5\right), \\
\dot{\hat{\theta}}_2 = -p_2 \left(e^T P_1 B\right) \left(\sin\left(6x_1^2 - 7x_2\right) - x_2^5\right), \\
\dot{\hat{\theta}}_3 = -p_3 \left(e^T P_1 B\right) \sin\left(x_2^2\right)
\end{cases}
$$

Закон управления:

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{6} \Big(& a_{m_{21}} x_1 + a_{m_{22}} x_2 + b_{m_0} g - \theta_1 \cos\left(x_1^2 - x_2^5\right) + \\
& -\theta_2 \left(\sin\left(6x_1^2 - 7x_2\right) - x_2^5\right) - \theta_3 \sin\left(x_2^2\right) - \cos x_3\Big)
\end{aligned}
$$