

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ
О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

По дисциплине «Адаптивное и робастное управление»
на тему:
«Адаптивное управление линейным многомерным объектом по состоянию»

Вариант №21.

Студенты:
Дьячихин Данила Никитич, R3480
Румянцев Алексей Александрович, R3441

Проверил:
Парамонов Алексей Владимирович,
ФСУиР, Ведущий научный сотрудник, Доцент

г. Санкт-Петербург
2025

Оглавление

ЦЕЛЬ РАБОТЫ	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	3
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	4
ХОД РАБОТЫ.....	7
Пункт 1. Формирование эталонной модели.....	7
Пункт 2. Моделирование системы с регулятором (параметры известны)	9
Пункт 3. Моделирование адаптивной системы с регулятором и алгоритмом адаптации	15
ВЫВОДЫ.....	27

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоение принципов построения адаптивной системы управления многомерным объектом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дан объект

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) \quad (3.1)$$

$$y = Cx, \quad (3.2)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, u — управление, $y \in R$ — регулируемая переменная,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix},$$
$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0],$$

$a_i, i = \overline{0, n-1}$ — неизвестные параметры, b_0 — известный коэффициент.

Задача управления заключается в компенсации параметрической неопределенности объекта и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \quad (3.3)$$

где $e = x_M - x$ — вектор ошибки управления, $x_M \in R^n$ — вектор, генерируемый эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \quad (3.4)$$

$$y_M = C_M x_M, \quad (3.5)$$

с задающим воздействием $g(t)$ и матрицами

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{M0} & -a_{M1} & -a_{M2} & \cdots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{M0} \end{bmatrix},$$

$$C_M = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0],$$

Параметры эталонной модели $a_{Mi}, i = \overline{1, n-1}$ строятся на основе метода стандартных характеристических полиномов [4, 5] для обеспечения желаемого качества воспроизведения задающего воздействия $g(t)$. Другими словами, модель (3.4), (3.5) определяет желаемое качество замкнутой системы после завершения процессов настройки адаптивного управления.

Отметим, что в задаче класс объектов (3.1), (3.2) ограничен следующим допущением.

Допущение (Условие согласования). Для некоторого n -мерного вектора θ и скаляра κ матрицы A, b, A_M и b_M связаны соотношениями,

$$A_M = A + b\theta^T, \quad b = \kappa b_M. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Решение задачи. Предполагая параметры объекта известными, синтезируем регулятор, который обеспечит условие (3.3) с заданными динамическими показателями качества — временем переходного процесса t_n и перерегулированием σ .

Для синтеза регулятора сформируем ошибку слежения $e = x_M - x$, рассчитаем ее производную в силу (3.1), (3.4) и условия (3.6):

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_M - \dot{x} = A_M x_M + b_M g - Ax - bu = \\ A_M x_M + \frac{1}{\kappa} b g - (A_M - b\theta^T)x - bu &= A_M e + b \left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa} g \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ — вектор постоянных параметров, определяемый параметрическими рассогласованиями между матрицами A и A_M ,

$$\theta_1 = \frac{-a_{M0} + a_0}{b_0}, \quad \theta_2 = \frac{-a_{M1} + a_1}{b_0}, \quad \dots, \quad \theta_n = \frac{-a_{Mn-1} + a_{n-1}}{b_0},$$

$$\kappa = \frac{b_0}{a_{M0}}$$

— коэффициенты, рассчитываемые из условия (3.6).

Выражение (3.7) сводится к виду

$$\dot{e} = A_M e + b \left(\theta^T x - u + \frac{1}{\kappa} g \right), \quad (3.8)$$

позволяющему синтезировать управление

$$u = \theta^T x + \frac{1}{\kappa} g. \quad (3.9)$$

После подстановки (3.9) в (3.8) получаем закон экспоненциальной сходимости ошибки управления неадаптивной системы:

$$\dot{e} = A_M e.$$

Однако в исходной постановке задачи параметры матрицы A неизвестны. Следовательно, закон (3.9) физически нереализуем. Так как параметры a_i неизвестны, то вектор θ также неизвестен. Заменим в (3.9) этот вектор на оценку $\hat{\theta}$ и получим настраиваемый закон управления:

$$u = \hat{\theta}^T x + \frac{1}{\kappa} g. \quad (3.10)$$

Подставим последнее выражение в (3.8) и получим модель ошибок

$$\dot{e} = A_M e + b \tilde{\theta}^T x, \quad (3.11)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ — вектор параметрических ошибок.

Расширяя подход на многомерный случай, выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta},$$

где $P = P^T > 0$ — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_M^T P + P A_M = -Q \quad (3.12)$$

с произвольно выбранной симметричной положительно определенной матрицей Q . Далее, вычисляя производную функции Ляпунова в силу модели ошибок (3.11), получаем:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e^T Q e + \tilde{\theta}^T x b^T P e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}$$

Из анализа последнего выражения видно, что если алгоритм адаптации выбрать в виде

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x b^T P e, \quad \hat{\theta}(0) = 0 \quad (3.13)$$

то производная функции Ляпунова будет удовлетворять неравенству

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}e^T Q e \leq 0,$$

откуда следует выполнение целевого условия (3.3).

Отметим, что в выражении (3.13) коэффициент $\gamma > 0$ носит название коэффициента адаптации, и его величина определяет скорость настройки коэффициентов регулятора (3.10).

Таким образом, алгоритм адаптивного управления состоит из настраиваемого регулятора (3.10), алгоритма адаптации (3.13), в котором матрица P находится из (3.12).

Адаптивный регулятор (3.10), (3.13) для любых начальных условий $x(0), \hat{\theta}(0)$ и ограниченного g обеспечивает [20]:

С.1. ограниченность всех сигналов в замкнутой системе;

С.2. асимптотическое стремление ошибки e к нулю;

С.3. ограниченность сигнала $\hat{\theta}$. Вектор $\hat{\theta}$ экспоненциально стремится к θ , если вектор x удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения:

$$\int_t^{t+T} x(\tau) x^T(\tau) d\tau > \alpha I, \quad (3.14)$$

где $\alpha > 0, T > 0$ - постоянные величины.

Условие (3.14) эквивалентно условию наличия не менее $n / 2$ гармоник (спектральных линий) в векторе x . Отметим, что в рамках решаемой задачи слежения характер поведения регрессора x целиком определяется характером задающего воздействия g . Поэтому условие неисчезающего возбуждения может быть переформулировано в терминах сигнала g ;

С.4. если вектор x удовлетворяет условию (3.14), то существует оптимальное значение коэффициента γ , при котором скорость сходимости параметрических ошибок $\tilde{\theta}$ к нулю максимальна.

ХОД РАБОТЫ

Дано по варианту:

Вар.	Матрица A	Коэфф. передачи b_0	Время переходного процесса, t_n	Максимальное перерегулирование $\bar{\sigma}, \%$	Сигнал задания $g(t)$
21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$	3	1.5 с	0	$\text{sign}(\sin 0.5t) + 3$

Пункт 1. Формирование эталонной модели

По условию варианта даны переходный процесс $t_n = 1.5$ с и максимальное перерегулирование $\sigma = 0$. Нужно сформировать эталонную модель вида (3.4), (3.5). Для этого, согласно методу стандартных характеристических полиномов воспользуемся биномом Ньютона.

$$a(p) = p^n + a_1 \omega_0 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega_0^{n-1} p + \omega_0^n = (p + \omega_0)^n, \quad (1.1)$$

Применение бинома Ньютона обеспечивает в системе монотонные переходные процессы без перерегулирования. Порядок данной системы $n = 2$. Нормированное время переходного процесса для системы 2 порядка $t_n^1 = 4.8$ с, время переходного процесса связано с нормированным через соотношение

$$t_n = \frac{t_n^1}{\omega_0}, \quad (1.2)$$

откуда можно найти ω_0 и получить полином с коэффициентами:

$$\omega_0 = \frac{t_n^1}{t_n} = \frac{4.8}{1.5} = 3.2$$

$$a(p) = (p + 3.2)^2 = p^2 + 6.4p + 10.24$$

И тогда матрицы эталонной модели примут вид

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10.24 & -6.4 \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.24 \end{bmatrix}.$$

Построим график переходного процесса и продемонстрируем на нем время переходного процесса и перерегулирование:

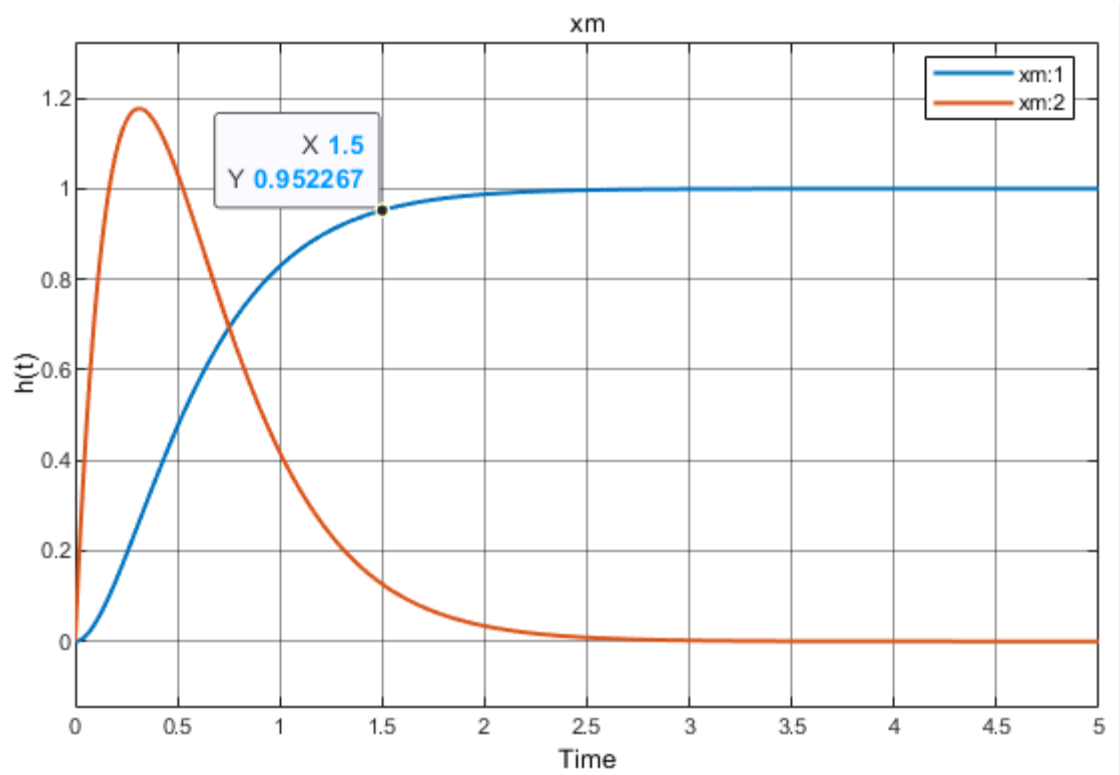


Рисунок 1 - График переходной функции эталонной модели

По рисунку 1 видно, что первая компонента вектора состояния достигает 95% установившегося значения в момент времени 1.5 с, и имеет монотонный характер без перерегулирования. Можно сделать вывод, что использование бинома Ньютона позволило получить эталонную модель без ошибок.

Пункт 2. Моделирование системы с регулятором (параметры известны)

На основе предположения, что параметры объекта известны, построим и промоделируем систему управления с регулятором (3.9).

Для моделирования построим схему в MATLAB:

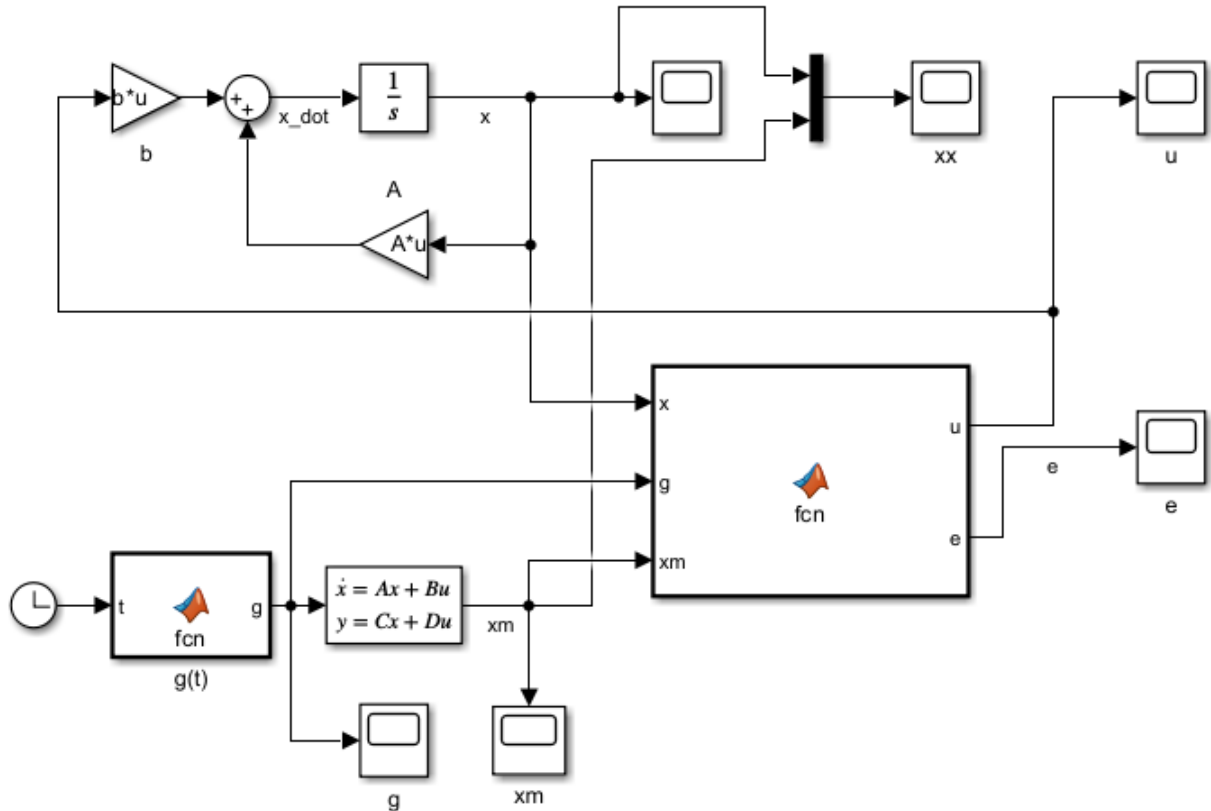


Рисунок 2 - Схема моделирования

Проведем эксперименты:

1. Используем расчетные значения параметров объекта, заложенные в θ_1 и θ_2 :

$$\theta_1 = \frac{-a_{M0} + a_0}{b_0} = \frac{-10.24 - 11}{3} = -7.08,$$

$$\theta_2 = \frac{-a_{M1} + a_1}{b_0} = \frac{-6.4 - 1}{3} = -2.4667,$$

$$\kappa = \frac{b_0}{a_{M0}} = \frac{3}{10.24} = 0.29297$$

Они также вычисляются внутри модели MATLAB (рис. 2) в меню Model Properties (листинг 1):

Листинг 1 - Расчет параметров модели

```
a0=-11; a1=-1; b0=3;  
A=[0 1; -a0 -a1];  
b=[0; b0];  
am0=10.24; am1=6.4;  
Am=[0 1; -am0 -am1];  
bm=[0; am0];  
theta1=(a0-am0)/b0;  
theta2=(a1-am1)/b0;  
theta=[theta1; theta2];  
kappa=b0/am0;  
Q=eye(2);  
P=lyap(Am',Q);
```

В данном случае мы не производим оценку параметра $\hat{\theta}$.

Построим графики траекторий $x(t)$ и $x_M(t)$ на одном графике и $e(t)$

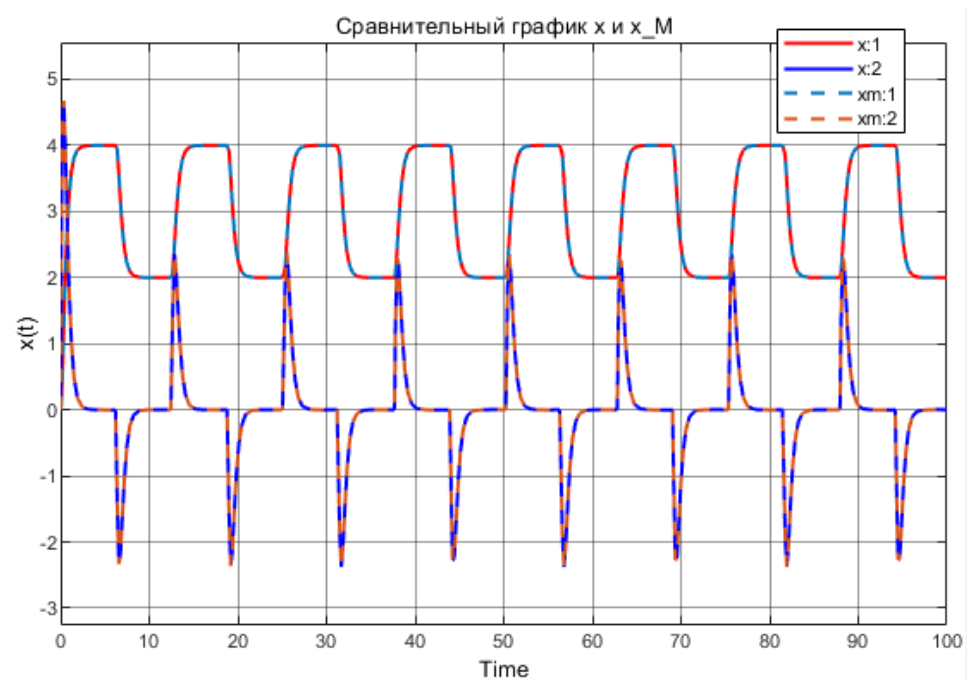


Рисунок 3 - График траекторий x и x_M

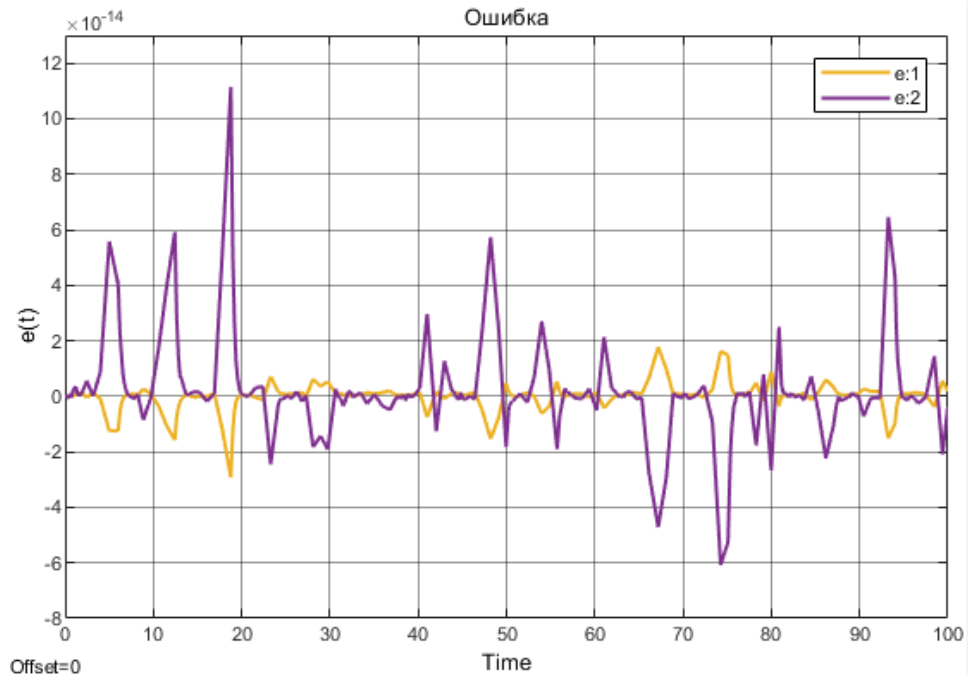


Рисунок 4 - График ошибки

Визуально траектории совпадают, ошибка близка к нулю (порядок $\times 10^{-14}$), можно принять за погрешность численных методов. Это говорит о том, что система работает как эталонная модель.

2. Незначительно отклоним параметры объекта так, чтобы система не потеряла устойчивость;

Первую компоненту θ_1 увеличим на 5%, а θ_2 на 5% уменьшим.

Листинг 2 - Незначительное отклонение параметров

```
theta_new = theta;
theta_new(1) = theta(1) * 1.05;
theta_new(2) = theta(2) * 0.95;
```

Получим следующие графики:

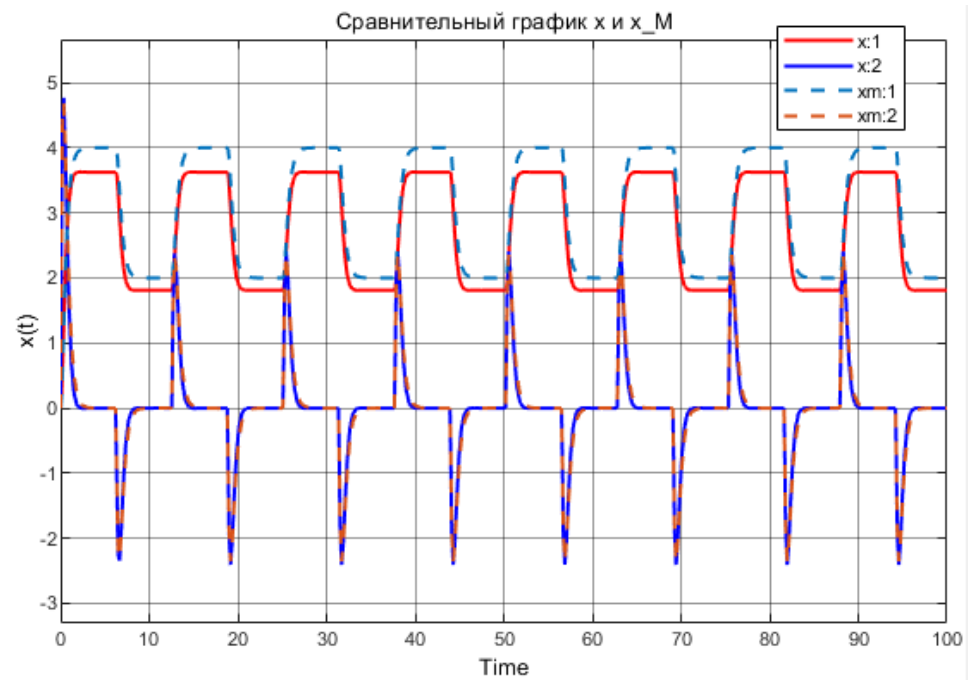


Рисунок 5 - Сравнительный график траекторий

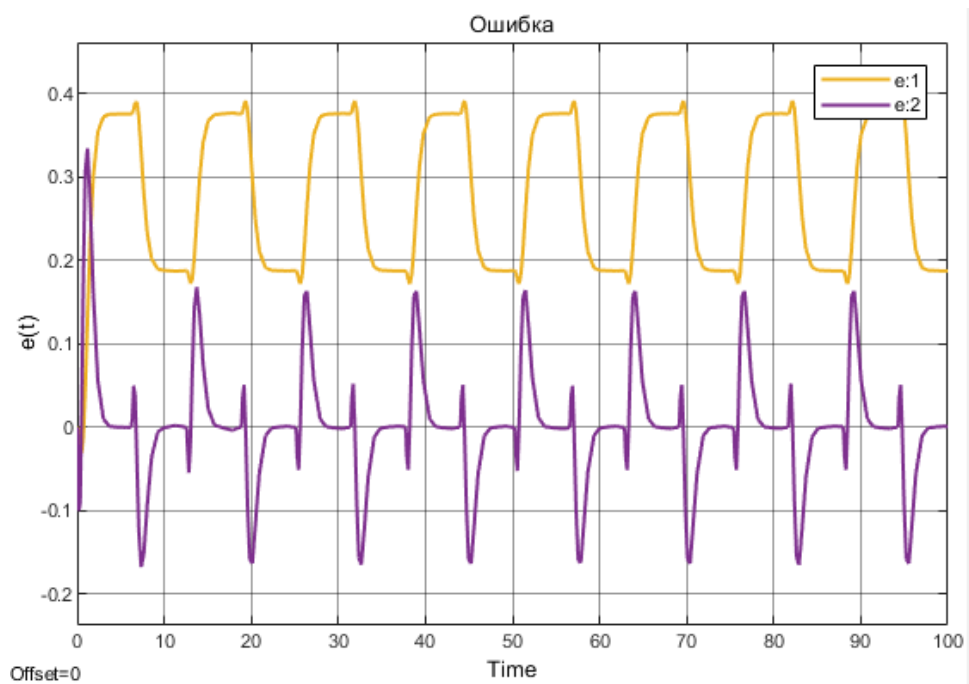


Рисунок 6 - График ошибки

Устойчивость не теряется, поскольку ни траектории $x(t)$ ни ошибка не расходятся. Напротив, график ошибки имеет гармонический характер, а траектория x следует за эталонной с гармонической погрешностью (ошибкой).

3. Отклоним параметры объекта так, чтобы система потеряла устойчивость.

Первую компоненту θ_1 увеличим на 5%, а θ_2 умножим на -0.5 .

Листинг 3 - Значительное отклонение параметров

```
theta_new = theta;  
theta_new(1) = theta(1) * 1.05;  
theta_new(2) = theta(2) * -0.5;
```

Получим следующие графики:

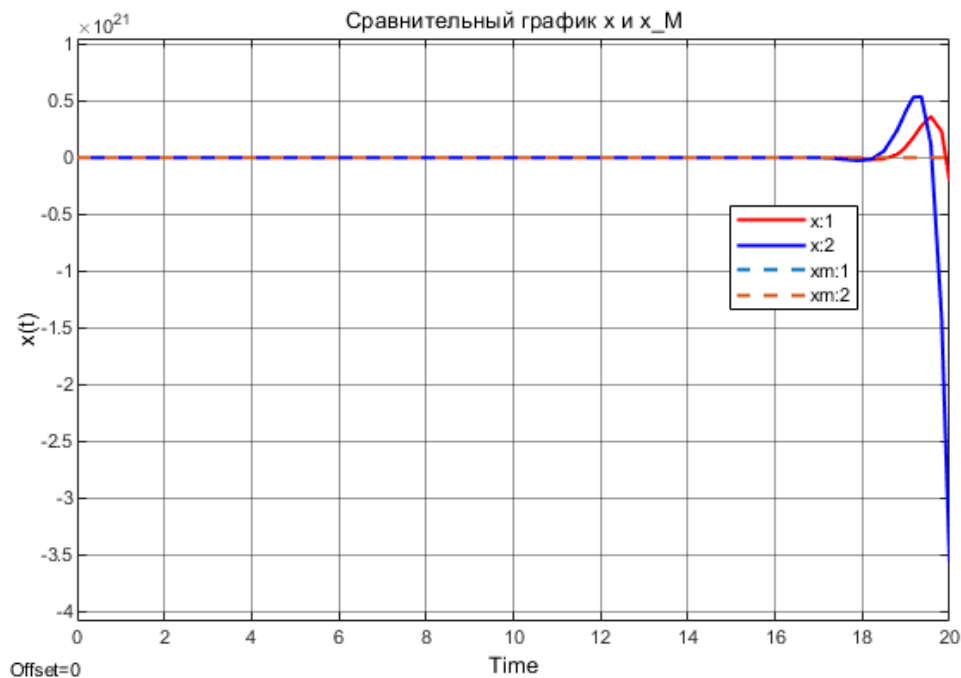


Рисунок 7 - Сравнительный график траекторий

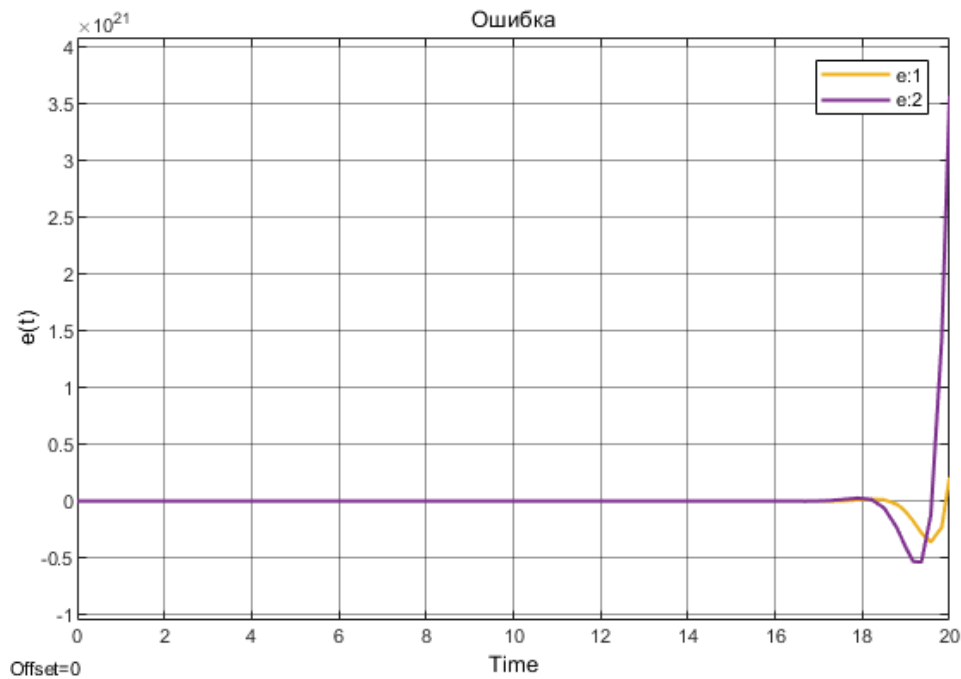


Рисунок 8 - График ошибки

Изменением параметров мы добились потери устойчивости, траектории $x(t)$ расходятся, ошибка бесконечно возрастает.

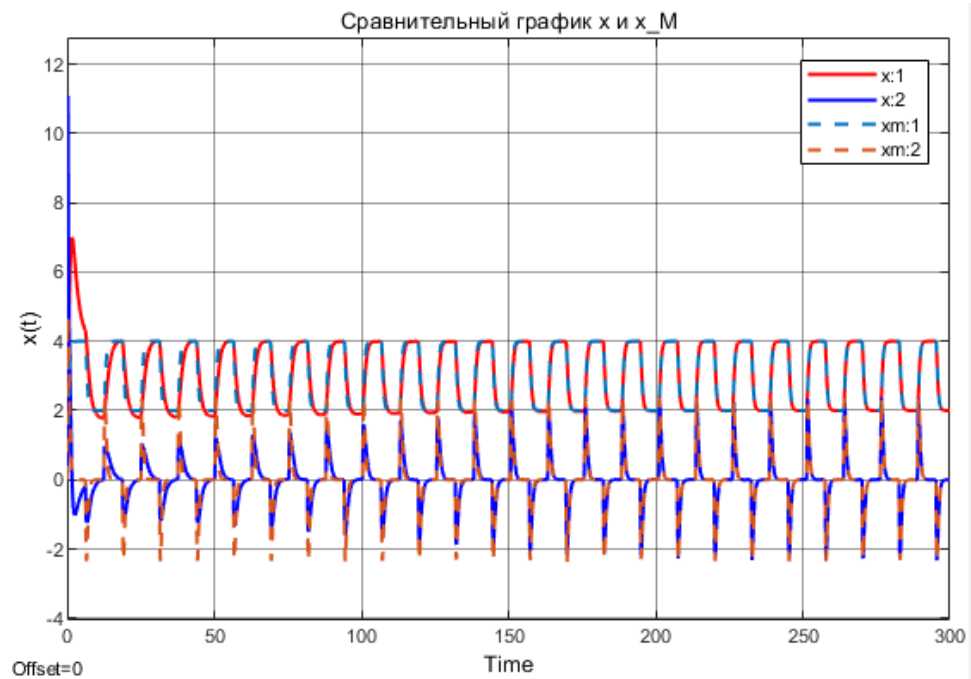


Рисунок 10 - График траекторий $x(t)$

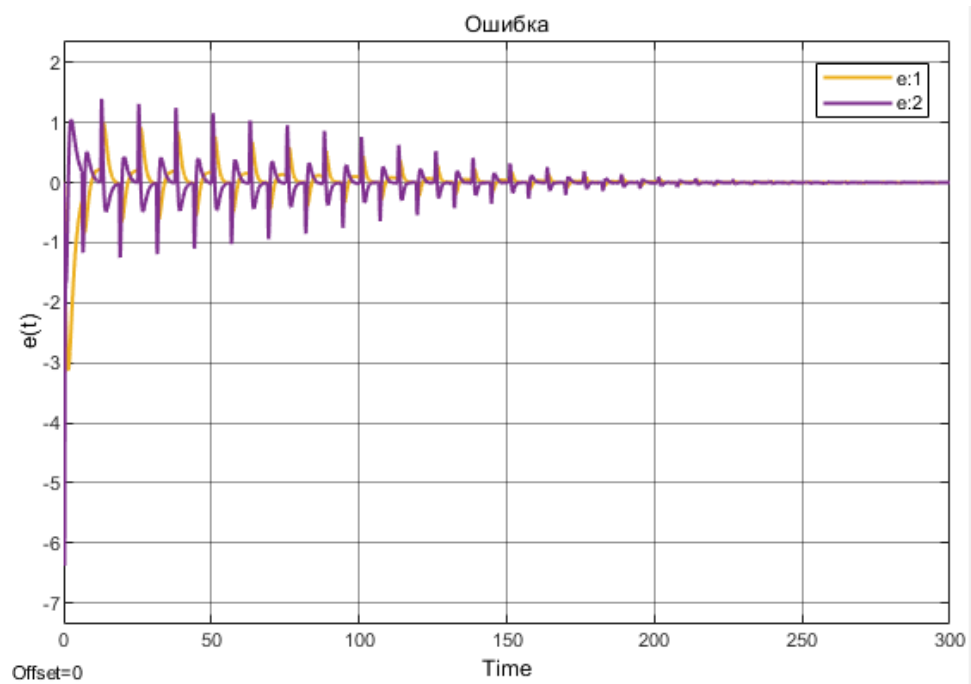


Рисунок 11 - График ошибки

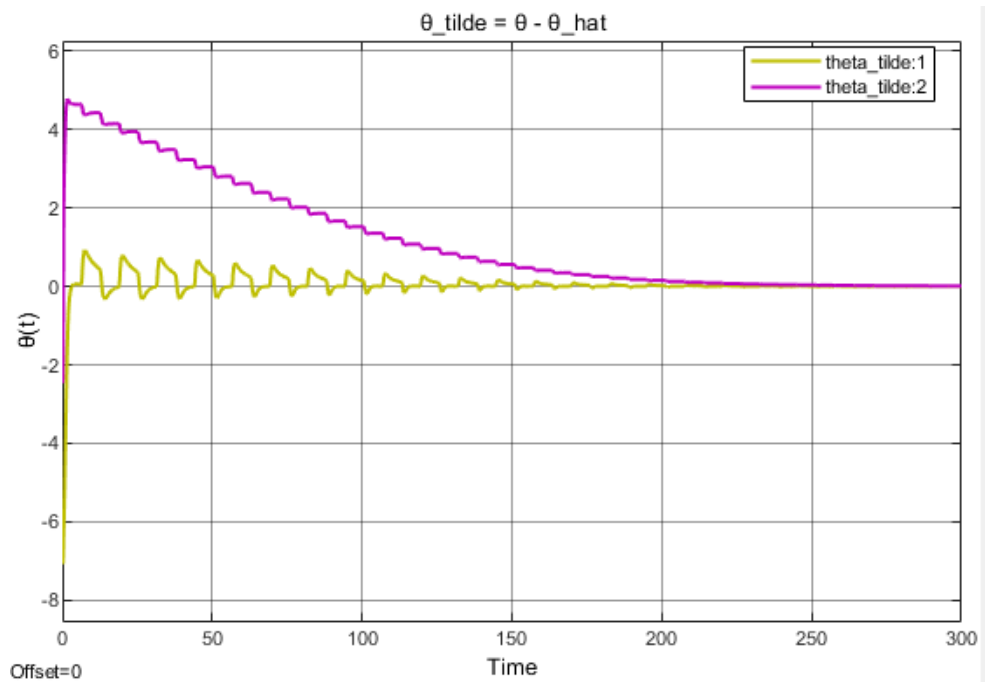


Рисунок 12 - График параметрической ошибки

По рисункам 10-12 можно увидеть, как адаптивная система сходится к эталонной модели, графики ошибок также сходятся к нулю.

Теперь немного отклоним параметры модели

$$a_0 = -11 \rightarrow a_0 = -12$$

$$a_1 = -1 \rightarrow a_1 = -0.8$$

$$b_0 = 3 \rightarrow b_0 = 2.8$$

Снова выполним моделирование:

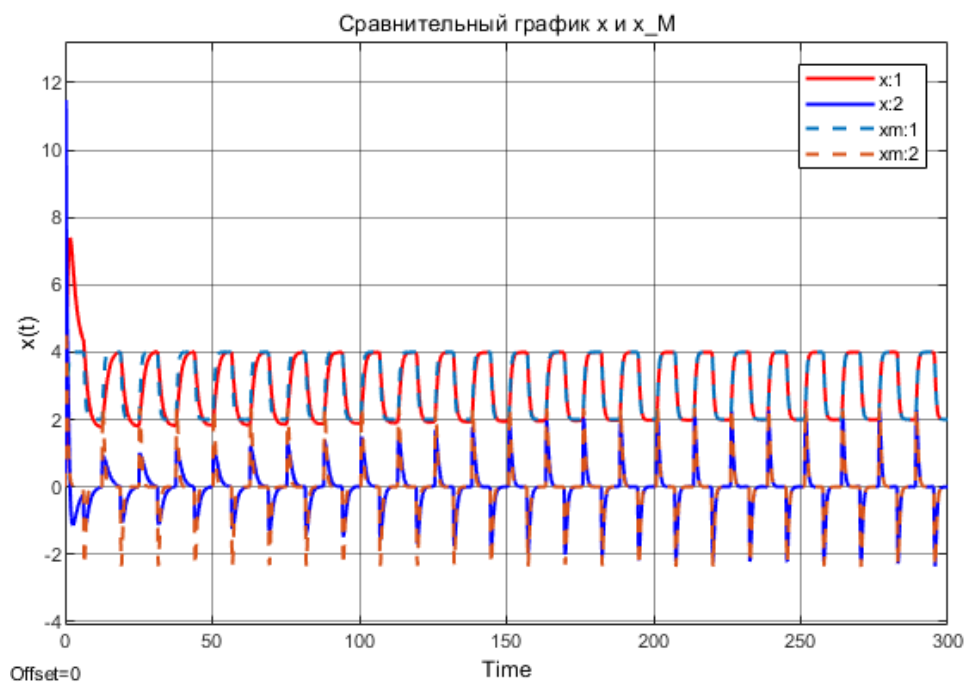


Рисунок 13 - График траекторий

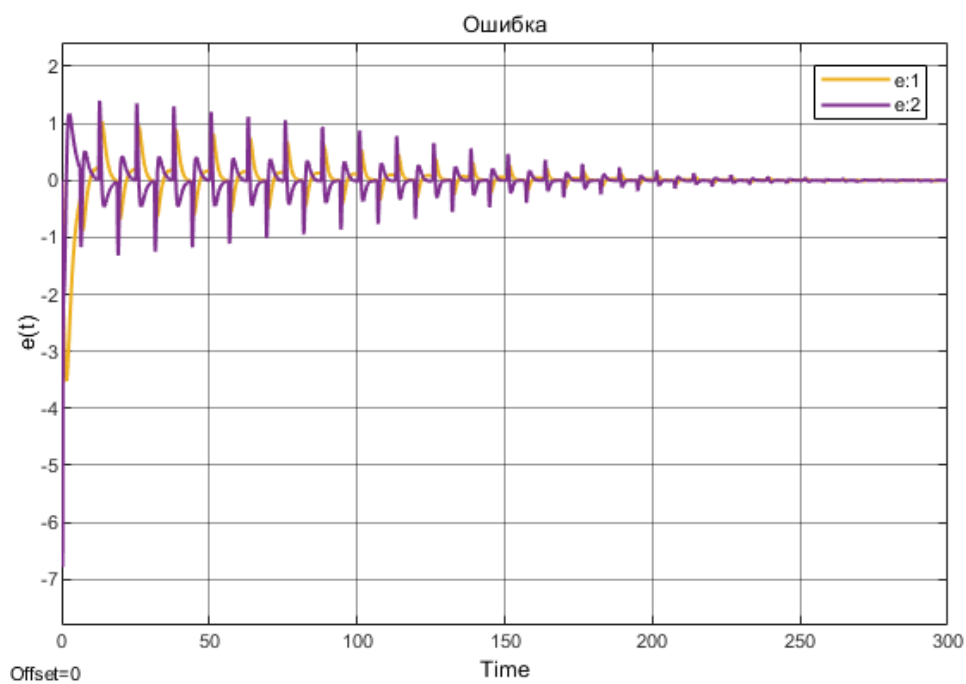


Рисунок 14 - График ошибки

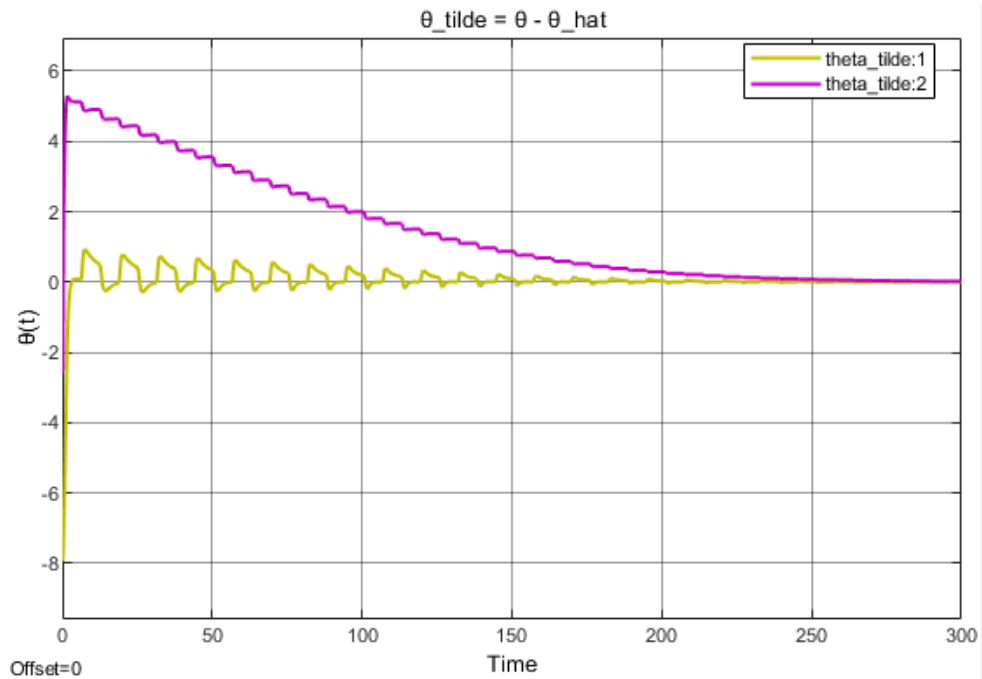


Рисунок 15 - График параметрической ошибки

Как можно заметить по рисункам 13-15, небольшое отклонение параметров не сильно повлияло на характер поведения системы. Она по-прежнему ведет себя хорошо, алгоритм адаптации справляется.

Теперь сильно отклоним параметры модели

$$a_0 = -11 \rightarrow a_0 = -30$$

$$a_1 = -1 \rightarrow a_1 = 20$$

$$b_0 = 3 \rightarrow b_0 = 2$$

Выполним аналогичное моделирование:

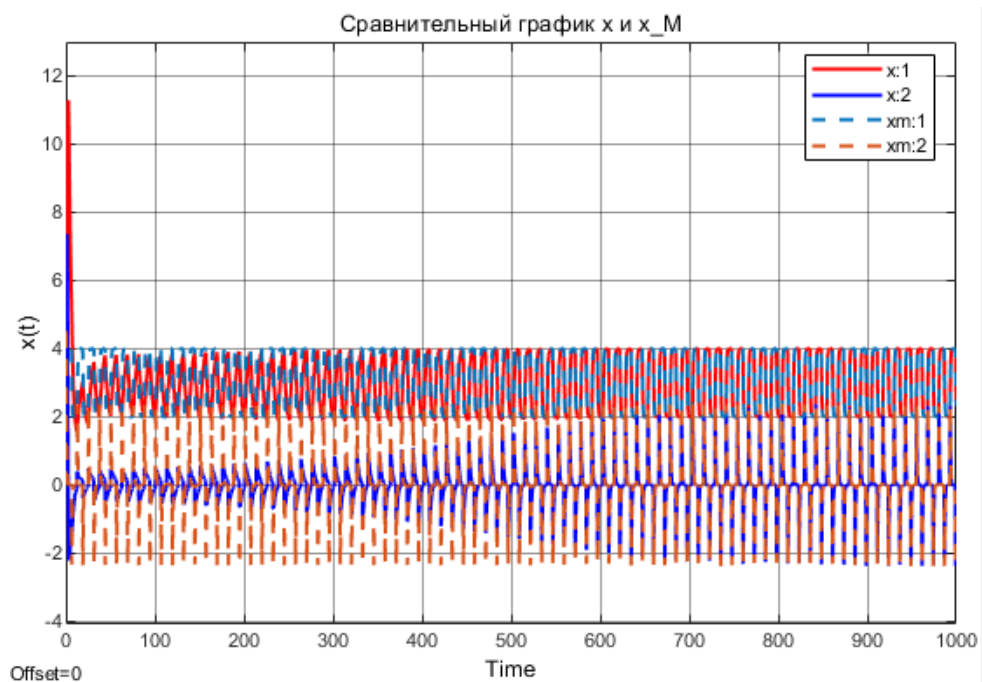


Рисунок 16 - График траекторий

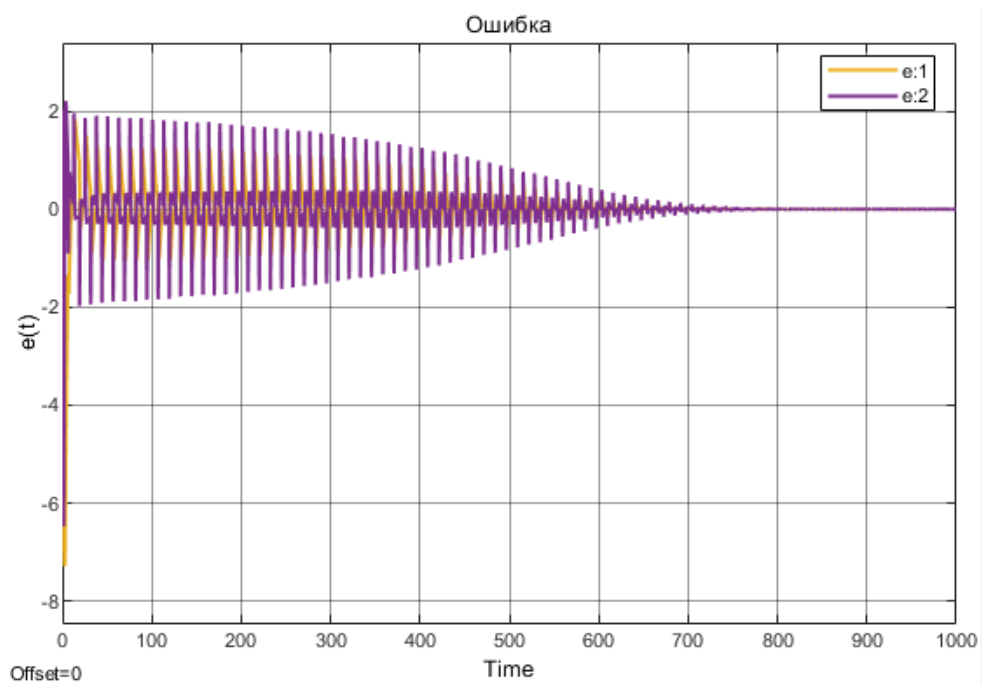


Рисунок 17 - График ошибки

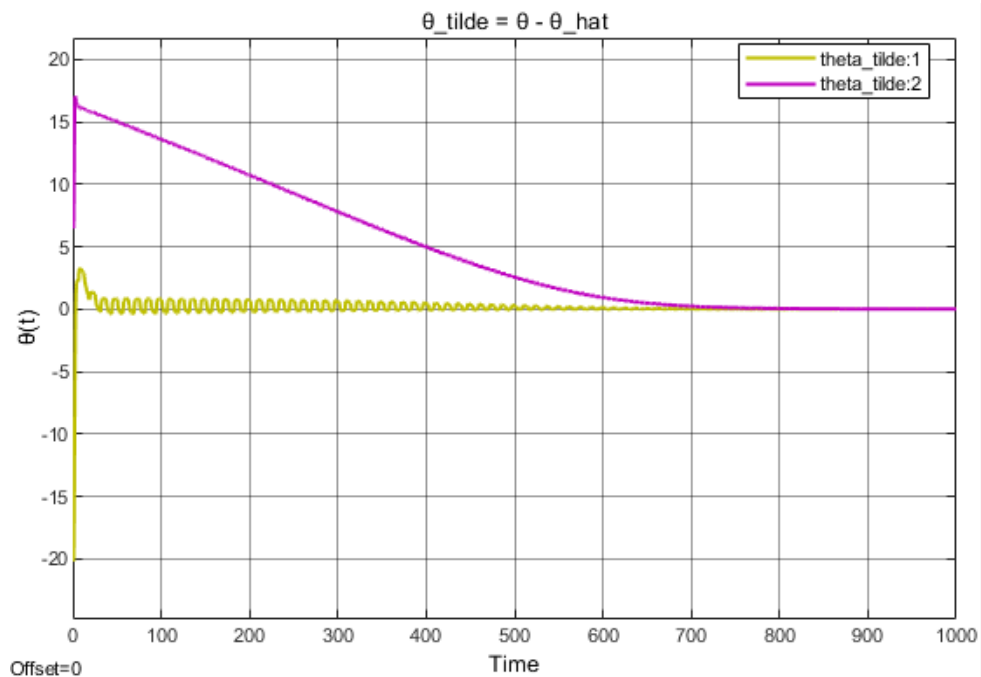


Рисунок 18 - График параметрической ошибки

Как можно наблюдать на рисунках 16-18, даже при больших отклонениях системы алгоритм адаптации справляется с выполнением целевого условия, при этом время сходимости увеличивается (и то только потому, что b_0 соразмерно не увеличили, а наоборот уменьшили).

Результаты этих экспериментов демонстрируют выполнение *Свойств 1 и 2*.

2. Используя расчетные значения параметров объекта, проведем эксперимент с тремя различными значениями γ ;

Вернем обратно исходные значения параметров матриц системы (данные по варианту). Будем изменять параметр $\gamma = [0.1, 1, 10]$

Выполним моделирование при $\gamma = 0.1$:

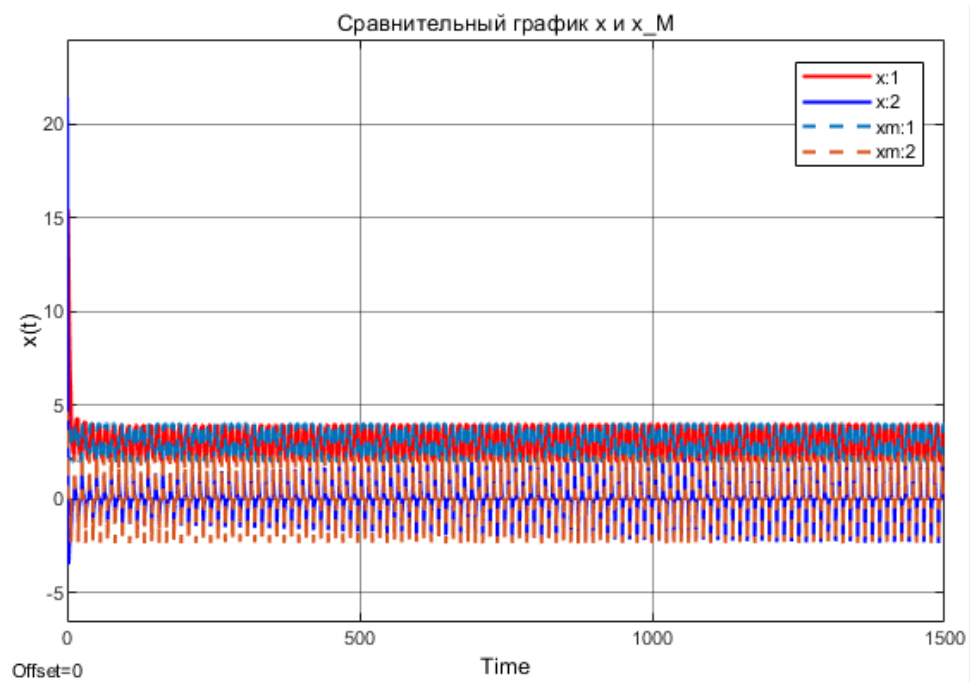


Рисунок 19 - График траекторий

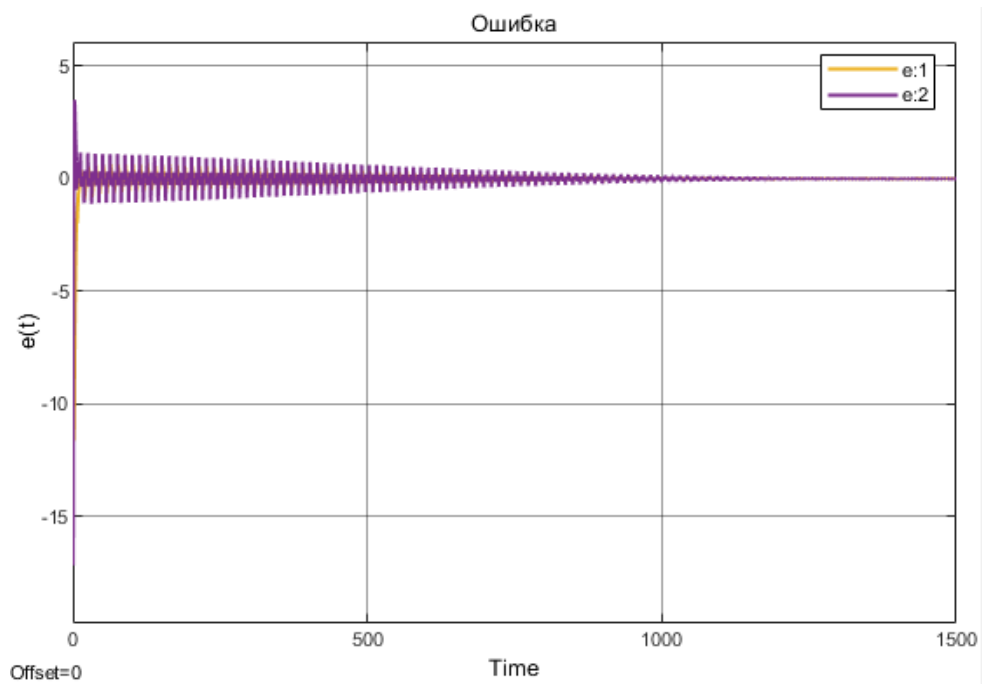


Рисунок 20 - График ошибки

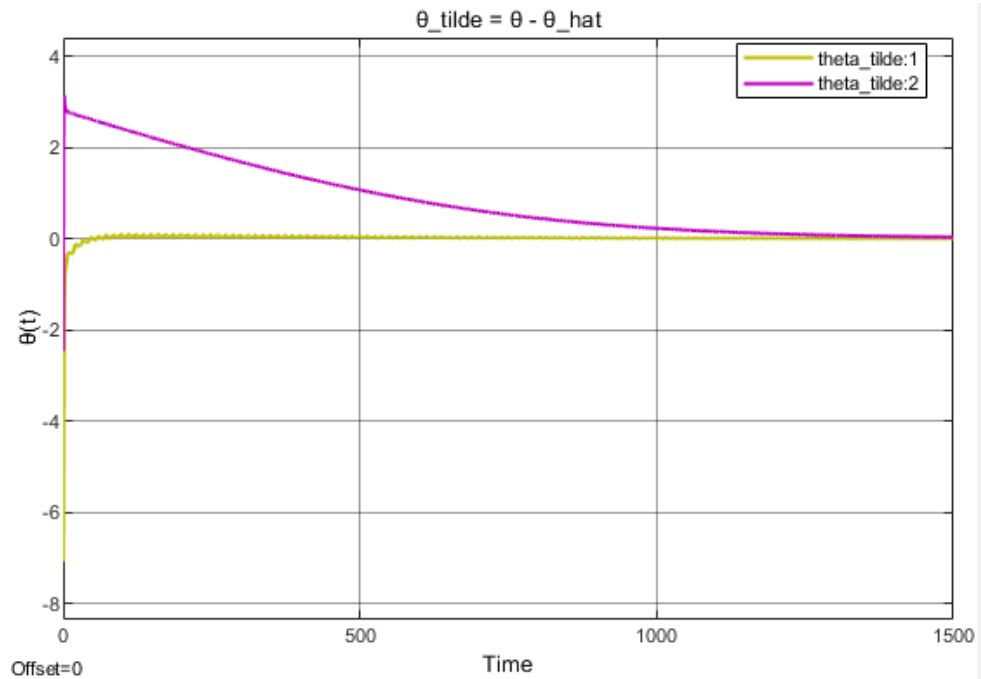


Рисунок 21 - График параметрической ошибки

Моделирование для $\gamma = 1$ представлено на рис. 10-12

Выполним моделирование для $\gamma = 10$:

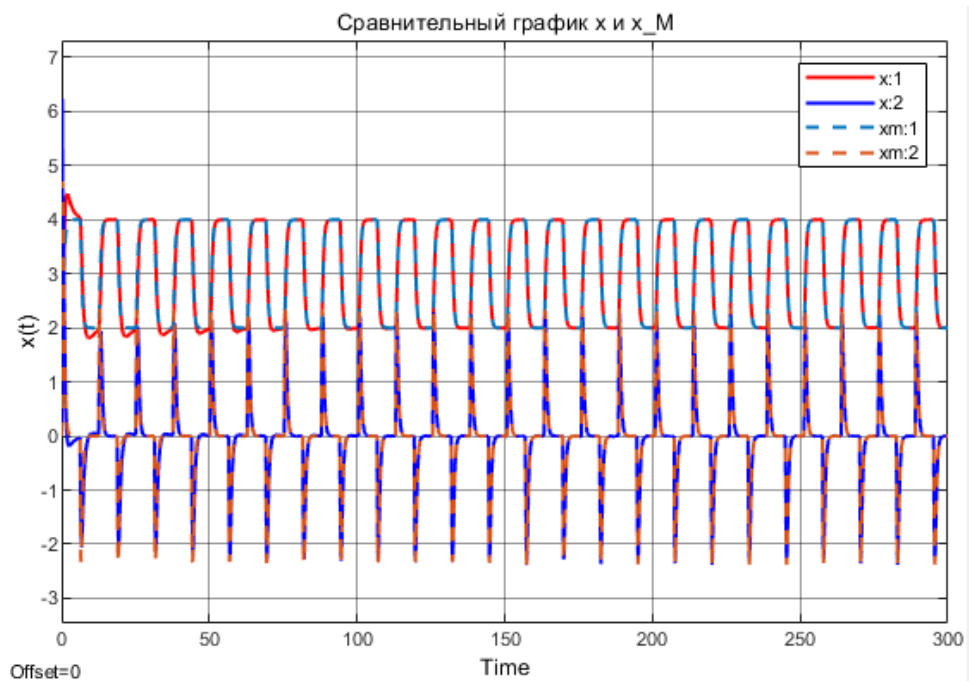


Рисунок 22 - График траекторий

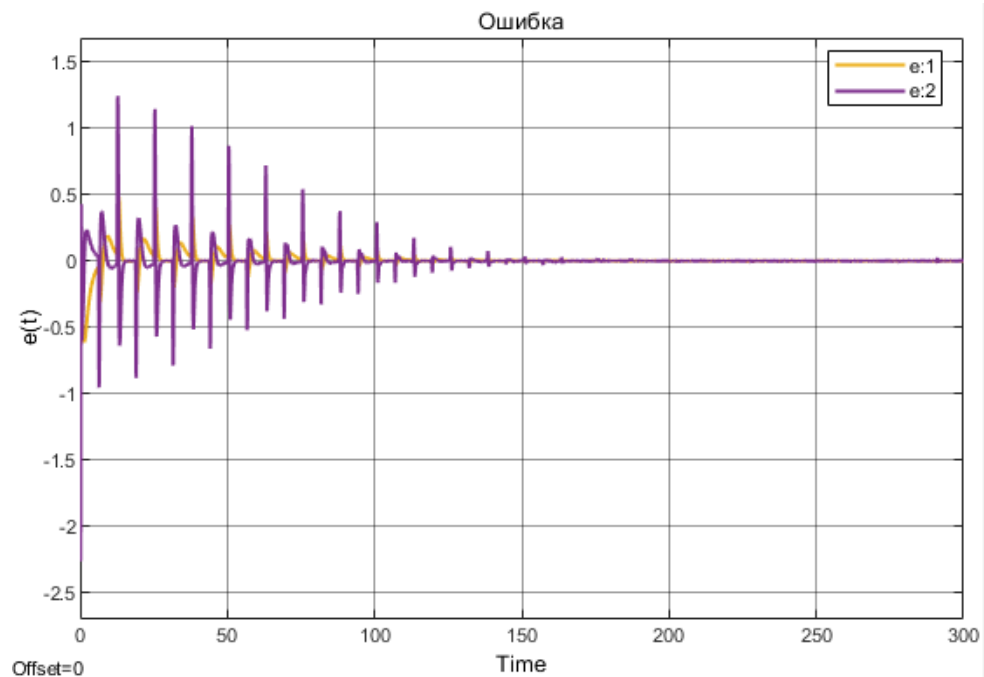


Рисунок 23 - График ошибки

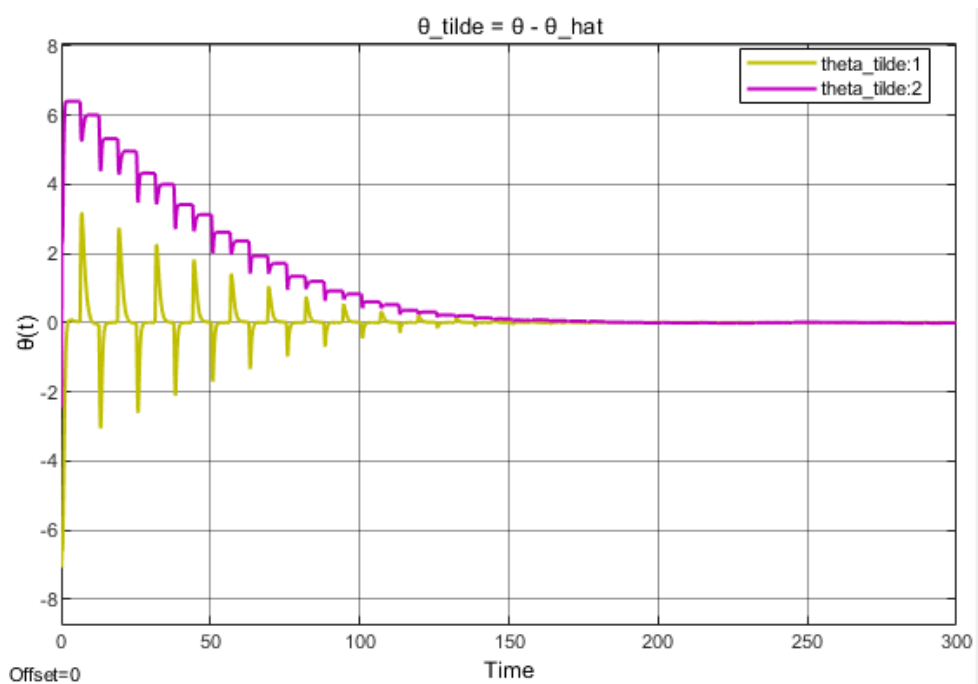


Рисунок 24 - График параметрической ошибки

Результатом изменения параметра γ , носящего название коэффициент адаптации, напрямую влияет на скорость сходимости траектории к эталону и ошибок к нулю. Чем значение меньше, тем дольше длится процесс сходимости. Свойство 4 говорит о том, что существует также оптимальное

значение коэф. Сходимости, при котором скорость схождения к нулю параметрических ошибок максимальна. Из рассмотренных значений γ , максимальная скорость сходимости параметрической ошибки к нулю было в случае $\gamma = 10$.

3. Проведем один из предыдущих экспериментов данного пункта при $g(t) = 1$.

Рассмотрим самый первый эксперимент с номинальными значениями матриц. В данном случае нужно продемонстрировать *Свойство 3*.

Выполним моделирование:

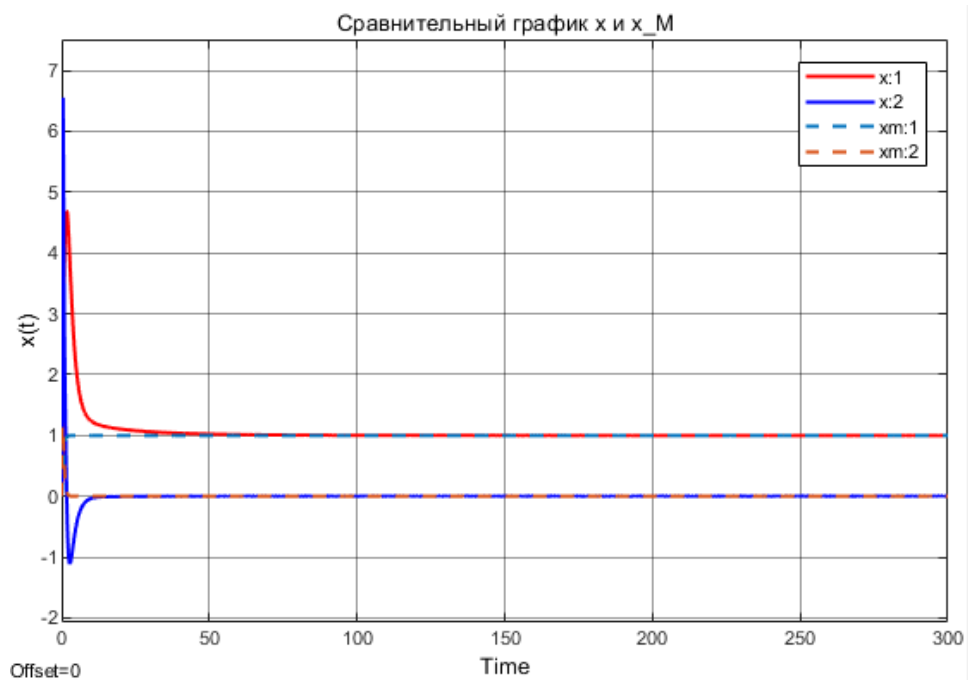


Рисунок 25 - График траекторий

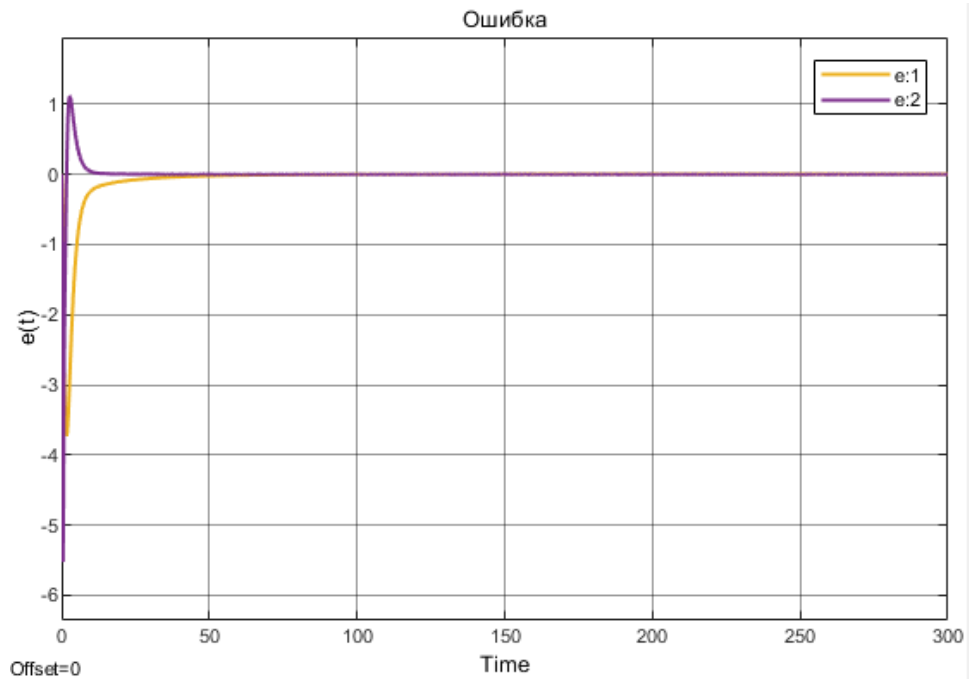


Рисунок 26 - График ошибки

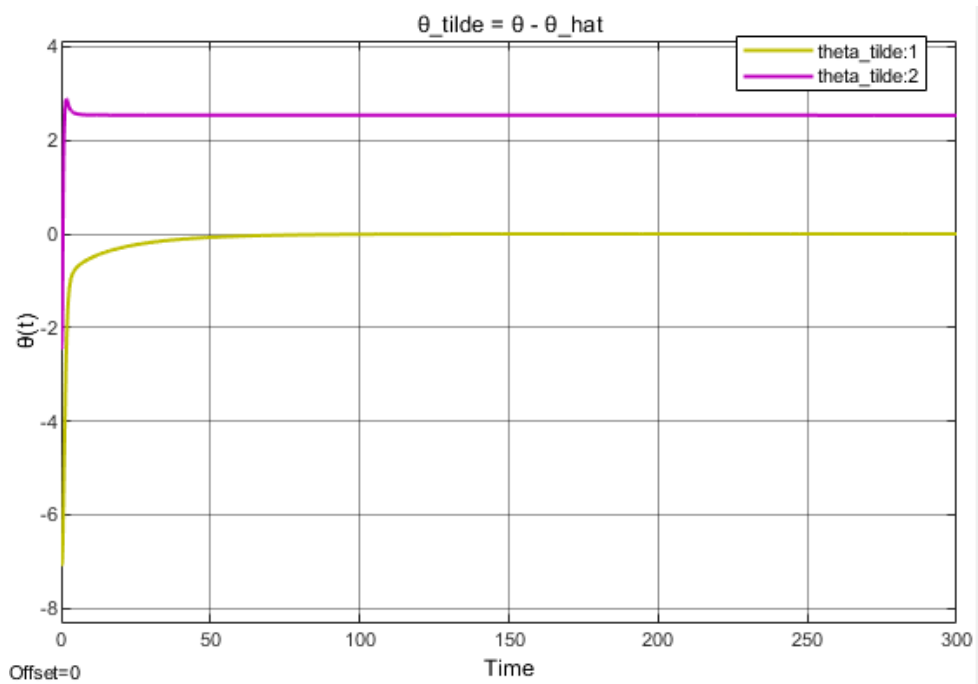


Рисунок 27 - График параметрической ошибки

Поскольку теперь мы задаем вместо гармонического возбуждения константу, равную 1, то $\hat{\theta}$ не будет экспоненциально сходить к θ – это видно по рисунку 27. Параметрическая ошибка не сходится в ноль. Но тем не менее, это не мешает выполняться целевому равенству.

ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы была успешно синтезирована эталонная модель, проведено исследование линейного многомерного объекта при известных (неадаптивная модель) и неизвестных (адаптивная модель с алгоритмом адаптации) параметрах исходной модели. Основным отличием адаптивного подхода можно назвать сохранение устойчивости системы при больших отклонениях параметров. Проведенные исследования позволили продемонстрировать выполнения теоретических свойств адаптивной модели.