

1. Задание 1

1.1. Условие

Решить задачу адаптивного слежения для объекта вида (вывести аналитически выражения закона управления и алгоритма адаптации):

$$\dot{x} = \theta_1 \cos x - \theta_2 \cos(x^4) + \theta_3 \sin(2x + 9) + \theta_2 x^3 + \cos(x^6) + 3u,$$

где θ_i – неизвестный параметр. Цель управления заключается в компенсации неопределенности θ_i и обеспечении следующего целевого равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_m(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,$$

где $\varepsilon = x_m - x$ – ошибка управления, x_m – эталонный сигнал, являющийся выходом динамической модели (эталонной модели):

$$\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda g,$$

где g – сигнал задания, $\lambda > 0$ – параметр, задающий время переходного процесса.

1.2. Решение

Запишем уравнение объекта в регрессионной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cos x \\ x^3 - \cos(x^4) \\ \sin(2x + 9) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \cos(x^6) + 3u = f(x)\theta + d(x) + 3u,$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}^T, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad d(x) = \cos(x^6)$$

Ошибка слежения:

$$\varepsilon(t) = x_m(t) - x(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x}$$

Подставим \dot{x}_m и \dot{x} :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= -\lambda x_m + \lambda g - (\theta_1 \cos x - \theta_2 \cos(x^4) + \\ &\quad + \theta_3 \sin(2x + 9) + \theta_2 x^3 + \cos(x^6) + 3u) = \\ &= -\lambda x_m + \lambda g - \theta_1 \cos x - \theta_2 (x^3 - \cos(x^4)) + \\ &\quad - \theta_3 \sin(2x + 9) - \cos(x^6) - 3u = \\ &= -\lambda x_m + \lambda g - f(x)\theta - d(x) - 3u\end{aligned}$$

Подставим $x_m = x + \varepsilon$ в $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda(x + \varepsilon) + \lambda g - f(x)\theta - d(x) - 3u,$$

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon - (\lambda x - \lambda g + f(x)\theta + d(x) + 3u)$$

Желаемая динамика ошибки $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$:

$$\dot{\varepsilon} = -k\varepsilon, k > 0$$

Зададим такой закон управления, чтобы часть выражения $\dot{\varepsilon}$ в скобках обнулилась:

$$3u = -\lambda x + \lambda g - f(x)\theta - d(x) \Rightarrow u = \frac{1}{3}(-\lambda x + \lambda g - f(x)\theta - d(x))$$

Так как θ неизвестна, зададим:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Тогда, адаптивный закон управления:

$$u = \frac{1}{3}(-\lambda x + \lambda g - f(x)\hat{\theta} - d(x))$$

Определим вектор ошибки параметров:

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

Подставим u в \dot{x} :

$$\dot{x} = f(x)\theta + d(x) + \left(-\lambda x + \lambda g - f(x)\hat{\theta} - d(x) \right) = -\lambda x + \lambda g + f(x)\tilde{\theta}$$

Тогда:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_m - \dot{x} = -\lambda x_m + \lambda g - \left(-\lambda x + \lambda g + f(x)\tilde{\theta} \right) = -\lambda\varepsilon - f(x)\tilde{\theta}$$

Квадратичная функция Ляпунова:

$$V = 0.5\varepsilon^2 + 0.5\tilde{\theta}^T P^{-1}\tilde{\theta},$$

где $P = P^T \succ 0$ – матрица скорости адаптации:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, \quad p_i > 0$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} + \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}}$$

Так как $\theta = const.:$

$$\dot{\tilde{\theta}} = 0 - \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$$

Подставим $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\tilde{\theta}}$ в \dot{V} :

$$\dot{V} = \varepsilon \left(-\lambda\varepsilon - f(x)\tilde{\theta} \right) - \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda\varepsilon^2 - \varepsilon f(x)\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T P^{-1}\dot{\tilde{\theta}}$$

Так как $\varepsilon f(x)\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T (\varepsilon f(x)^T)$:

$$\dot{V} = -\lambda\varepsilon^2 - \tilde{\theta}^T \left(\varepsilon f(x)^T + P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} \right)$$

Для $\dot{V} \leq -\lambda\varepsilon^2 \leq 0$ достаточно:

$$\varepsilon f(x)^T + P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\theta}} = -P\varepsilon f(x)^T$$

Тогда, алгоритм адаптации:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -p_1 \varepsilon \cos x, \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = -p_2 \varepsilon (x^3 - \cos(x^4)), \\ \dot{\hat{\theta}}_3 = -p_3 \varepsilon \sin(2x + 9) \end{cases}$$

Закон управления:

$$u = \frac{1}{3} \left(-\lambda x + \lambda g - \hat{\theta}_1 \cos x - \hat{\theta}_2 (x^3 - \cos(x^4)) - \hat{\theta}_3 \sin(2x + 9) - \cos(x^6) \right)$$

2. Задание 2

2.1. Условие

Решить задачу адаптивного управления (вывести аналитически выражения закона управления и алгоритма адаптации) для объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 \cos(x_1^2 - x_2^5) + \theta_2 \sin(6x_1^2 - 7x_2) + \\ \quad + \theta_3 \sin(x_2^2) - \theta_2 x_2^5 + \cos x_3 + 6u, \end{cases}$$

где θ_i – неизвестные коэффициенты. Цель управления задается равенством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0,$$

где $e = x_m - x$ – вектор ошибки управления, $x_m \in \mathbb{R}^n$ – вектор, генерируемый эталонной моделью:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + b_m g$$

с задающим воздействием $g(t)$.

2.2. Выполнение

Обозначим:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} \cos(x_1^2 - x_2^5) \\ \sin(6x_1 - 7x_2) - x_2^5 \\ \sin(x_2^2) \end{bmatrix}, \quad d(x) = \cos x_3$$

Система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \theta^T f(x) + d(x) + 6u \end{cases}$$

Рассмотрим ошибку:

$$e = x_1 - x = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x},$$

$$\dot{e} = A_m x_m + b_m g - \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \right)$$

Обозначим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(x) = B_d d(x), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u = B u$$

Подставим $x_m = e + x$:

$$\dot{e} = A_m (e + x) + b_m g - \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} + B_d d(x) + B u \right),$$

$$\dot{e} = A_m e + b_m g + A_m x - \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta^T f(x) \end{bmatrix} - B_d d(x) - B u$$