МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«АПЕРИОДИЧЕСКИЙ, ДАЛИНА И С ЗАДАННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ПОЛЮСОВ РЕГУЛЯТОРЫ»
Вариант 20

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Исходные данные

Исходные данные варианта 20:

T	a	b	ζ	ω_d	K_v
0.55	1.1	10	0.35	4	0.1

2. Выполнение работы

ОУ задан непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e^{-as}}{1+bs} = \frac{e^{-1.1s}}{1+10s}$$

2.1. Апериодический регулятор

Синтезируем для непрерывного ОУ апериодический регулятор при периоде дискретизации $T = 1$.

Желаемая передаточная функция системы:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = z^{-k},\ k \geq 1$$

Замкнутая система:

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)H}{1 + D(z)G(z)H}$$

Передаточная функция регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}$$

Экспонента e^{-as} описывает задержку в непрерывной системе.

При дискретизации представляем задержку через z^{-n_d}, где:

$$n_d = \frac{a}{T}$$

Если n_d целое, то задержка точная в дискретной модели.

Если n_d дробное, то округляем задержку до ближайшего целого.

Таким образом,

$$n_d = \frac{1.1}{1} = 1.1 \Rightarrow n_d \sim 1 \Rightarrow e^{-1.1s} \sim e^{-s} \Rightarrow Z\left\{e^{-1.1s}\right\} \sim Z\left\{e^{-s}\right\} = z^{-1}$$

Дискретная передаточная функция ОУ с ЭНП:

$$\begin{aligned}
HG(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} &= \left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{e^{-1.1s}}{s\left(1+10s\right)}\right\} = \\
&= \left(1-z^{-1}\right)z^{-1}Z\left\{\frac{1}{s\left(1+10s\right)}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)z^{-1}Z\left\{\frac{0.1}{s\left(s+0.1\right)}\right\} = \\
&= \left(1-z^{-1}\right)z^{-1}\frac{z\left(1-e^{-0.1}\right)}{\left(z-1\right)\left(z-e^{-0.1}\right)} = z^{-2}\frac{1-e^{-0.1}}{1-e^{-0.1}z^{-1}} = \frac{0.095z^{-2}}{1-0.905z^{-1}} = \\
&= \frac{0.095}{z^2-0.905z}
\end{aligned}$$

Подставим в передаточную функцию регулятора:

$$D(z) = \frac{1-0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}}\frac{z^{-k}}{1-z^{-k}}$$

Из условия физической реализуемости $k \geq 2$ выберем $k = 2$, тогда:

$$D(z) = \frac{1-0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}}\frac{z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{z^2-0.905z}{0.095\left(z^2-1\right)}$$

Модель системы в симулинк:

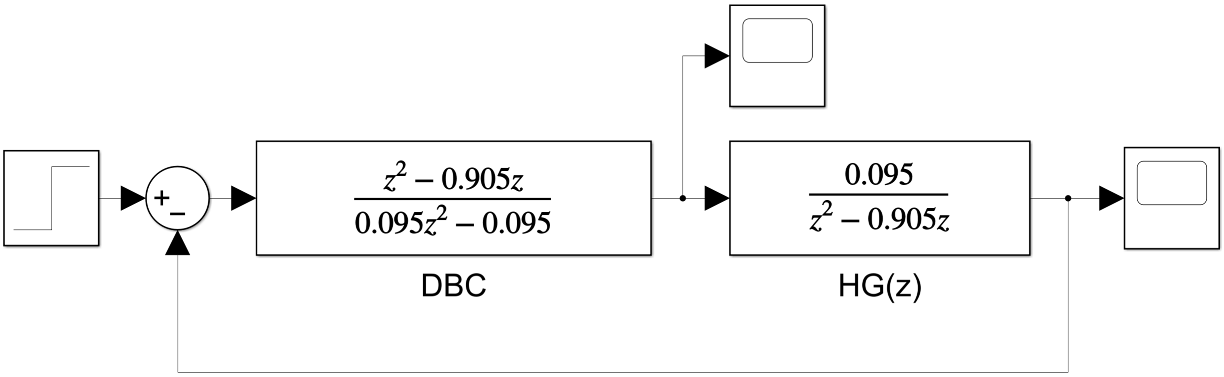

Рис. 1: Схема моделирования системы с апериодическим регулятором

Графики управления и выхода системы при ступенчатом задающем воздействии $r(m)$ при $T = 1, k = 2$:

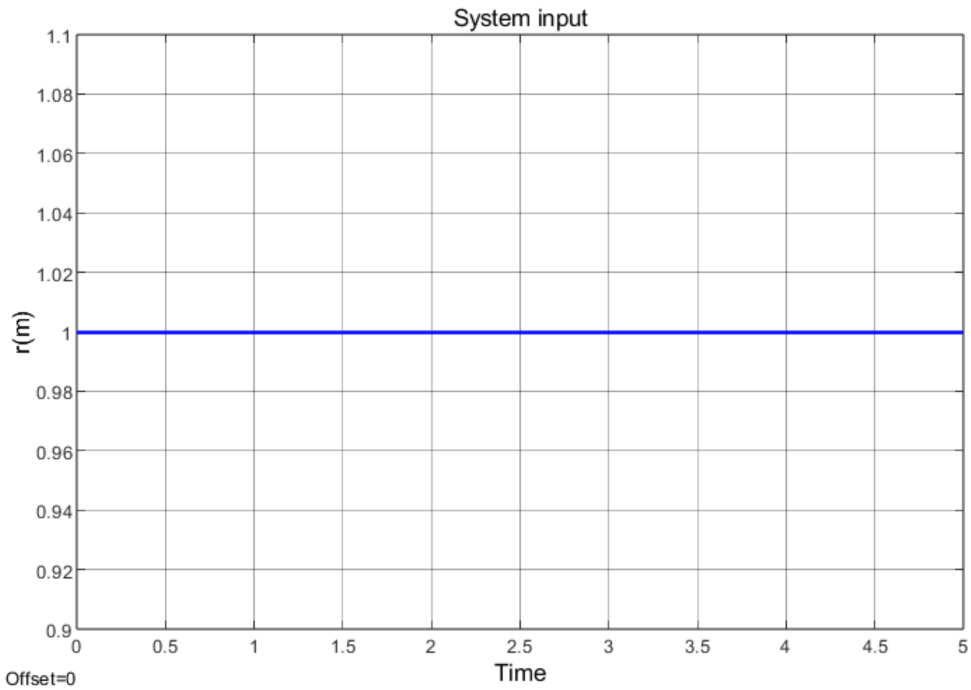

Рис. 2: Ступенчатое задающее воздействие $r(m)$

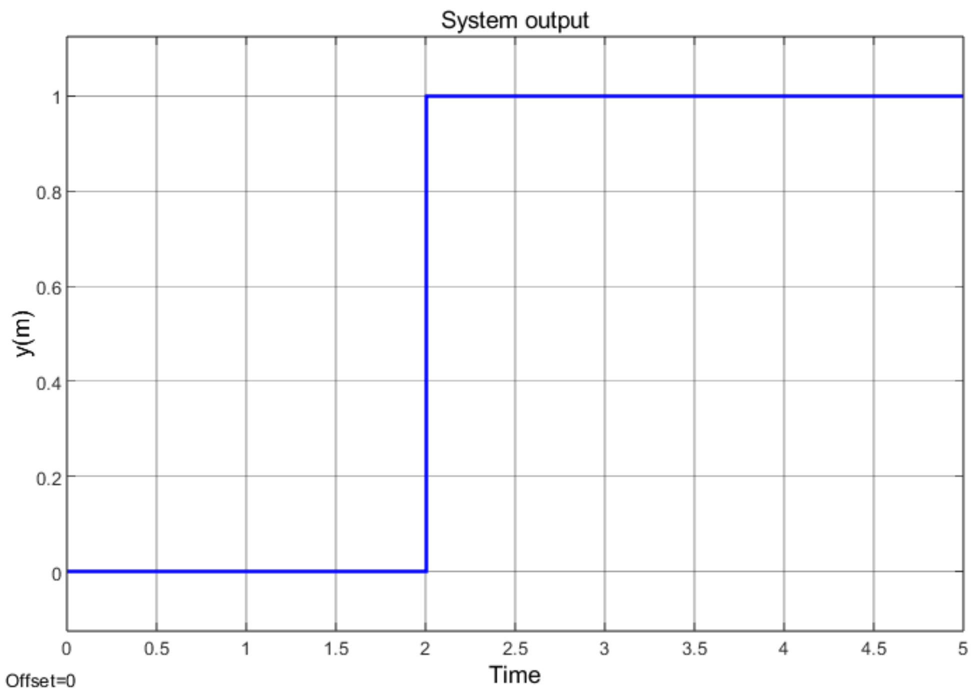

Рис. 3: Выход системы с апериодическим регулятором, $T = 1, k = 2$

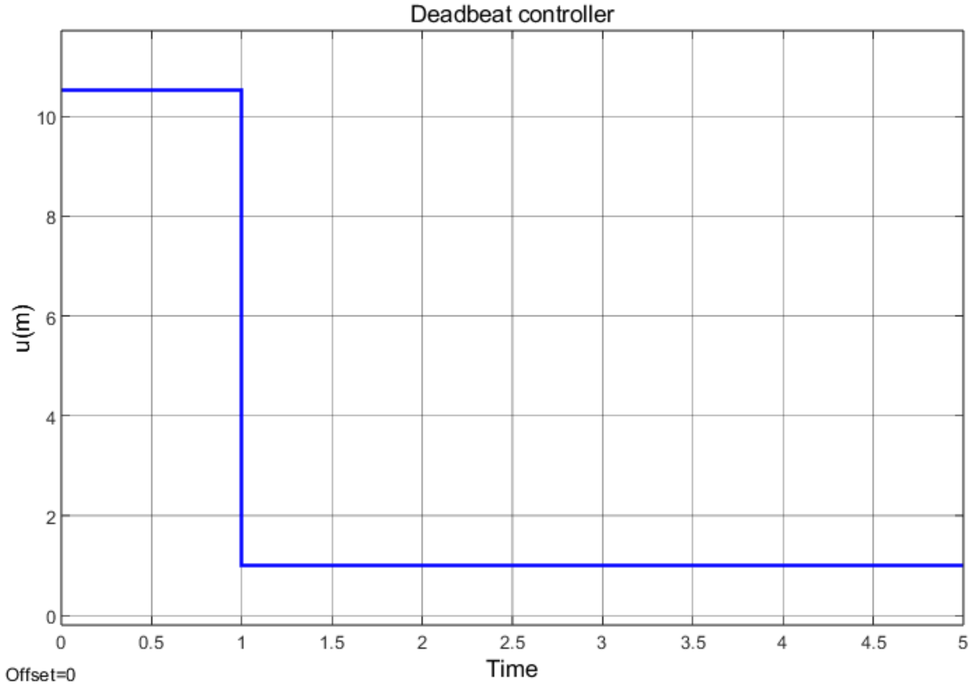

Рис. 4: Апериодический регулятор, $T = 1, k = 2$

Выход системы отстает на $m = 2$ шага от входа при $k = 2$, т.е. отставание на k.

2.2. Регулятор Далина

Синтезируем для непрерывного ОУ регулятор Далина при периоде дискретизации $T = 1$.

Регулятор Далина – модификация апериодического регулятора, имеющая более плавный экспоненциальный отклик.

Желаемое поведение системы в s-плоскости:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{e^{-as}}{1+bs} = \frac{1}{s}\frac{e^{-1.1s}}{1+10s}$$

Параметры a, b определяют численные параметры желаемого поведения выходной величины.

Z-преобразование желаемой реакции системы при $a = kT$:

$$Y(z) = \frac{z^{-k-1}\left(1 - e^{-T/b}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - e^{-T/b}z^{-1}\right)}$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-k-1}\left(1-e^{-T/b}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-e^{-T/b}z^{-1}\right)} = \frac{z^{-k-1}\left(1-e^{-T/b}\right)}{1-e^{-T/b}z^{-1}}$$

Передаточная функция регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)}\frac{z^{-k-1}\left(1-e^{-T/b}\right)}{1-e^{-T/b}z^{-1}-\left(1-e^{-T/b}\right)z^{-k-1}}$$

Передаточная функция ОУ с ЭНП выражается аналогично пункту с апериодическим регулятором:

$$e^{-1.1s} \sim e^{-s},\ HG(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = \frac{0.095z^{-2}}{1-0.905z^{-1}} = \frac{0.095}{z^2-0.905z}$$

Передаточная функция регулятора:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1-0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}}\frac{z^{-k-1}\left(1-e^{-0.1}\right)}{1-e^{-0.1}z^{-1}-\left(1-e^{-0.1}\right)z^{-k-1}} = \\ &= \frac{1-0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}}\frac{0.095z^{-k-1}}{1-0.905z^{-1}-0.095z^{-k-1}} \end{aligned}$$

С учетом требования физической реализуемости $k \geq 1$ положим $k = 1$:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1-0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}}\frac{0.095z^{-2}}{1-0.905z^{-1}-0.095z^{-2}} = \\ &= \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.905z^{-1}-0.095z^{-2}} = \frac{0.095z^2-0.086z}{0.095z^2-0.086z-0.009} \end{aligned}$$

Схема моделирования замкнутой системы:

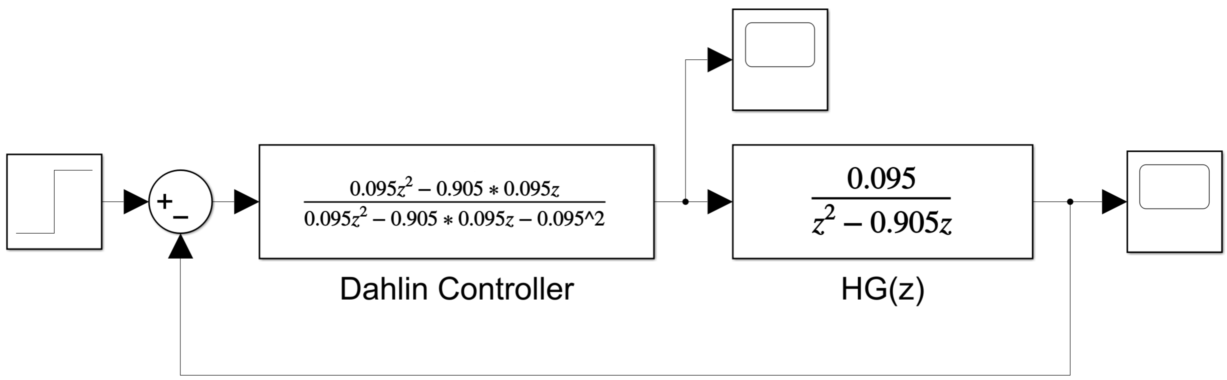

Рис. 5: Схема моделирования системы с регулятором Далина

Графики управления и выхода системы при ступенчатом задающем воздействии при $T = 1, k = 1$:

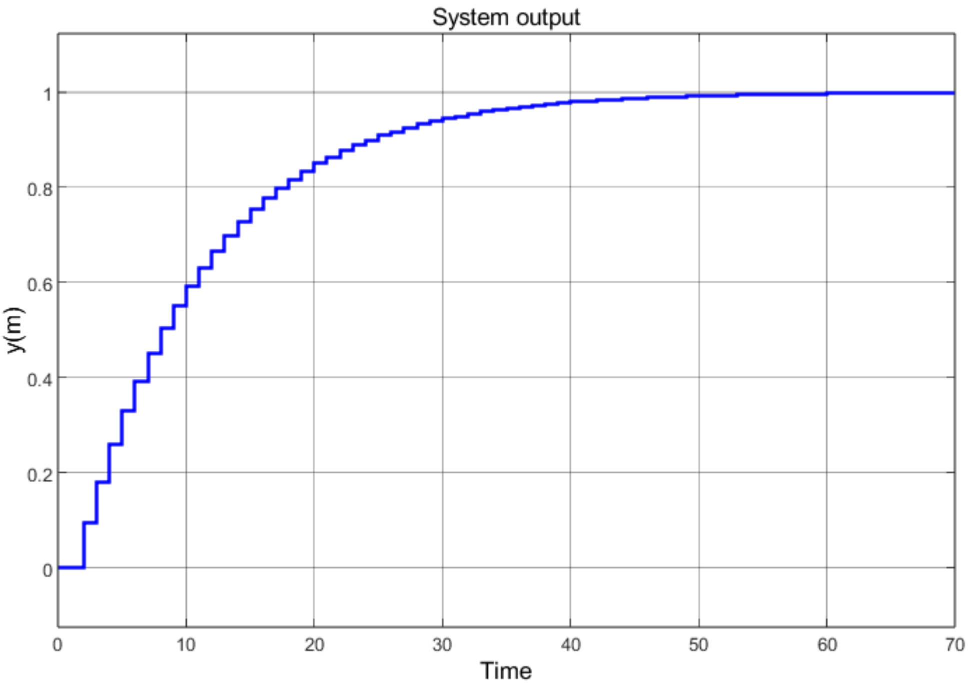

Рис. 6: Выход системы с регулятором Далина, $T = 1, k = 1$

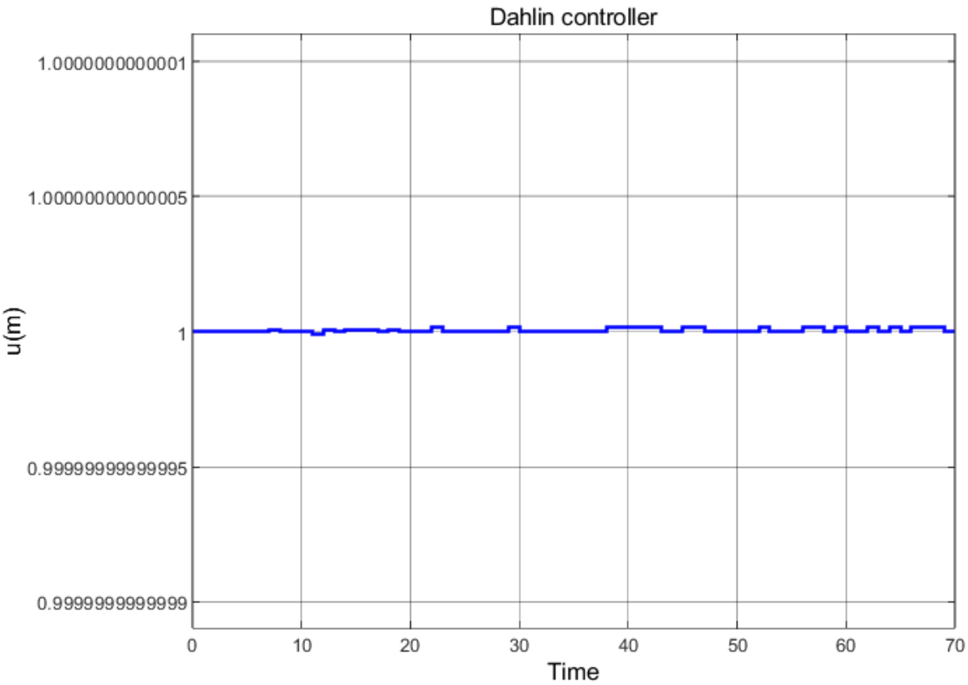

Рис. 7: Регулятор Далина, $T = 1, k = 1$

Величина управления меньше по сравнению с апериодическим регулятором, но выход сходится дольше к устоявшемуся значению. Отставание на $k+1$.

2.3. Регулятор с заданным расположением полюсов

Дискретизованный ОУ с ЭНП задан передаточной функцией:

$$HG(z) = \frac{0.03\,(z+0.75)}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Разработаем дискретный регулятор, обеспечивающий заданное расположение полюсов замкнутой системы так, чтобы ее отклик был колебательным с декрементом затухания $\zeta = 0.35$ и частотой колебаний $\omega_d = 4$. Установившаяся ошибка для ступенчатого входа должна быть равна нулю. Установившаяся ошибка для линейно нарастающего входа должна быть равна $K_v = 0.1$. Период дискретизации $T = 0.55$.

Полюса передаточной функции:

$$z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\zeta\omega_n T}\left(\cos\left(\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}\right) \pm j\sin\left(\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right)$$

Связь демпфированного синусоидального частотного компонента с собственной частотой:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-0.35^2}} \approx 4.27$$

Тогда:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\zeta\omega_n T}\left(\cos\left(\omega_d T\right) \pm j\sin\left(\omega_d T\right)\right) = \\ &= e^{-0.35\cdot 4.27\cdot 0.55}\left(\cos\left(4\cdot 0.55\right) \pm j\sin\left(4\cdot 0.55\right)\right) = \\ &= -0.259 \pm 0.355j \end{aligned}$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{\left(z - (-0.259 + 0.355j)\right)\left(z - (-0.259 - 0.355j)\right)} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}} \end{aligned}$$

Физическая реализуемость: $b_0 = 0, b_1, b_2 \neq 0$. Передаточная функция:

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}}$$

Найдем коэффициенты числителя.

Установившаяся ошибка:

$$E(z) = R(z)\left(1 - T(z)\right)$$

Для единичного ступенчатого входного сигнала установившуюся ошибку можно определить с помощью теоремы о конечном значении:

$$E_{ss} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} [v] = 1 - T(1)$$

Установившаяся ошибка примет нулевое значение при $T(1) = 1$:

$$T(z=1) = \frac{b_1 + b_2}{1.711} = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 = 1.711,$$

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + 0.518z + 0.193}$$

Пусть K_v – добротность по скорости замкнутой системы, тогда установившаяся ошибка при линейно нарастающем входном воздействии:

$$E_{ss} = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} \left[1 - T(z)\right] = \frac{1}{K_v}$$

или, используя правило Лопиталя

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{z=1} = -\frac{1}{K_v T}$$

Получим:

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{z=1} = \left.\frac{b_1\left(z^2 + 0.518z + 0.193\right) - (b_1 z + b_2)(2z + 0.518)}{\left(z^2 + 0.518z + 0.193\right)^2}\right|_{z=1} = -\frac{1}{K_v T}$$

Подставим значения:

$$\frac{-0.807b_1 - 2.518b_2}{2.928} = -18.182$$

Составим систему и найдем коэффициенты числителя:

$$\begin{cases} -0.807b_1 - 2.518b_2 = -53.236, \\ b_1 + b_2 = 1.711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.711 - b_2, \\ -1.711b_2 = -51.855, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -28.596, \\ b_2 = 30.307 \end{cases}$$

Передаточная функция:

$$T(z) = \frac{-28.596z^{-1} + 30.307z^{-2}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}} = \frac{-28.596z + 30.307}{z^2 + 0.518z + 0.193}$$

Передаточная функция регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)},$$

$$D(z) = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{0.03\,(z + 0.75)} \cdot \frac{-28.596z + 30.307}{z^2 + 29.114z - 30.114},$$

$$D(z) = \frac{-28.596z^3 + 73.201z^2 - 59.759z + 15.154}{0.03z^3 + 0.896z^2 - 0.248z - 0.678}$$

Схема моделирования системы с регулятором с заданным расположением полюсов:

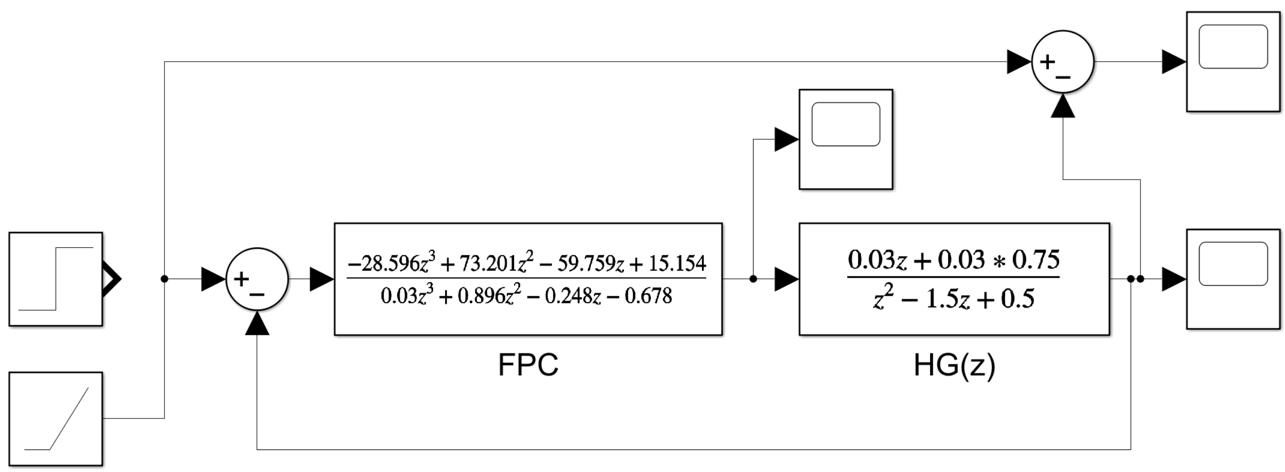

Рис. 8: Схема моделирования системы с fixed-pole регулятором

Графики управления, выхода системы и ошибки при ступенчатом и линейно нарастающем задающих воздействиях $r(m), \tilde{r}(m)$ при $T = 0.55$:

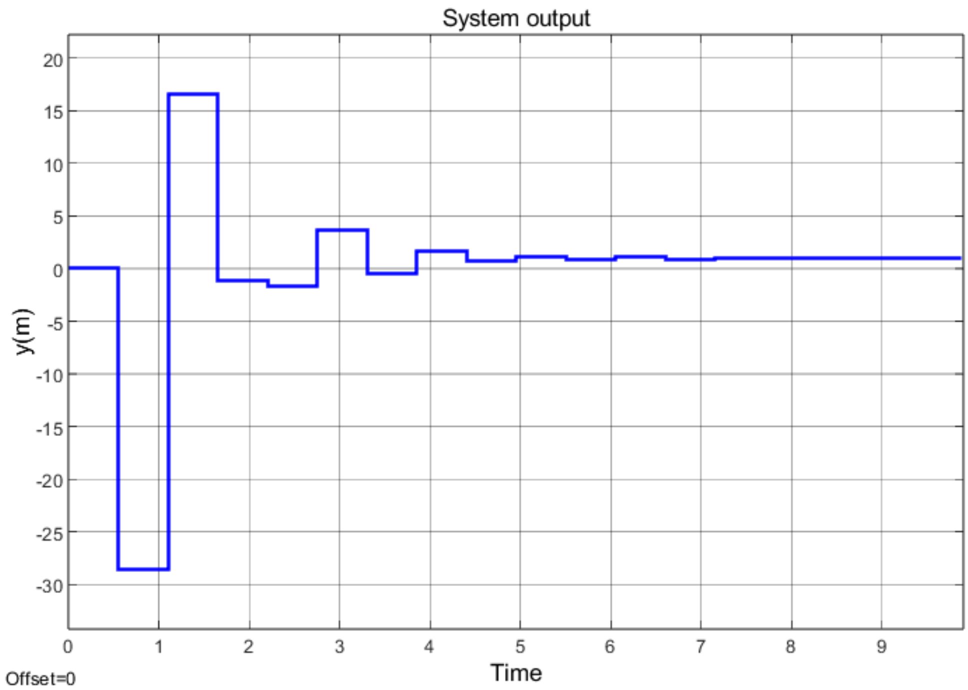

Рис. 9: Выход системы с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $r(m)$

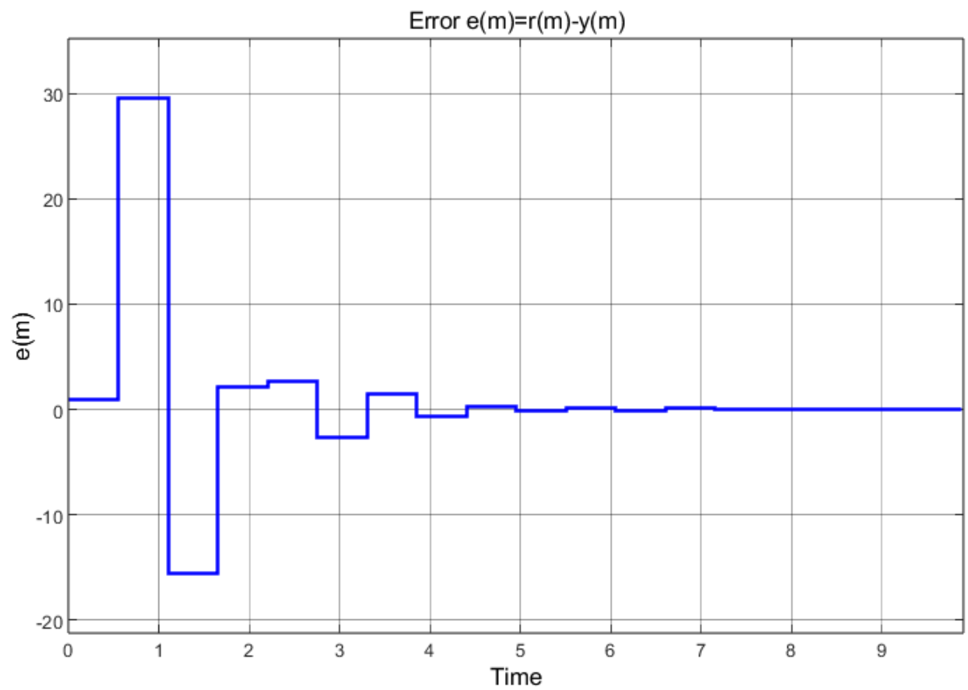

Рис. 10: Ошибка с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $r(m)$

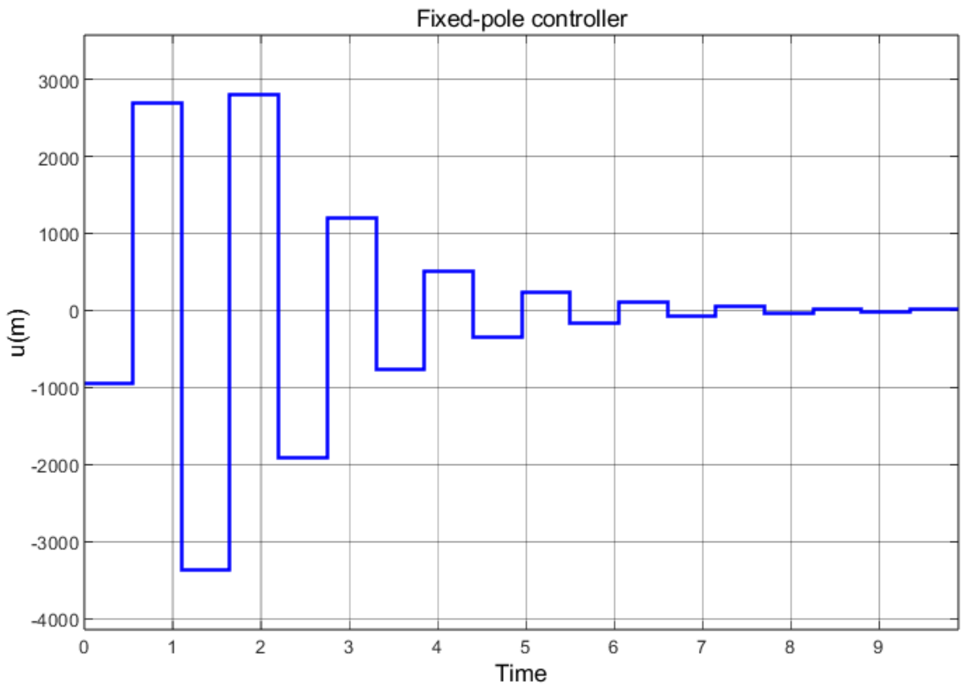

Рис. 11: Fixed-pole регулятор, $T = 0.55$, вход $r(m)$

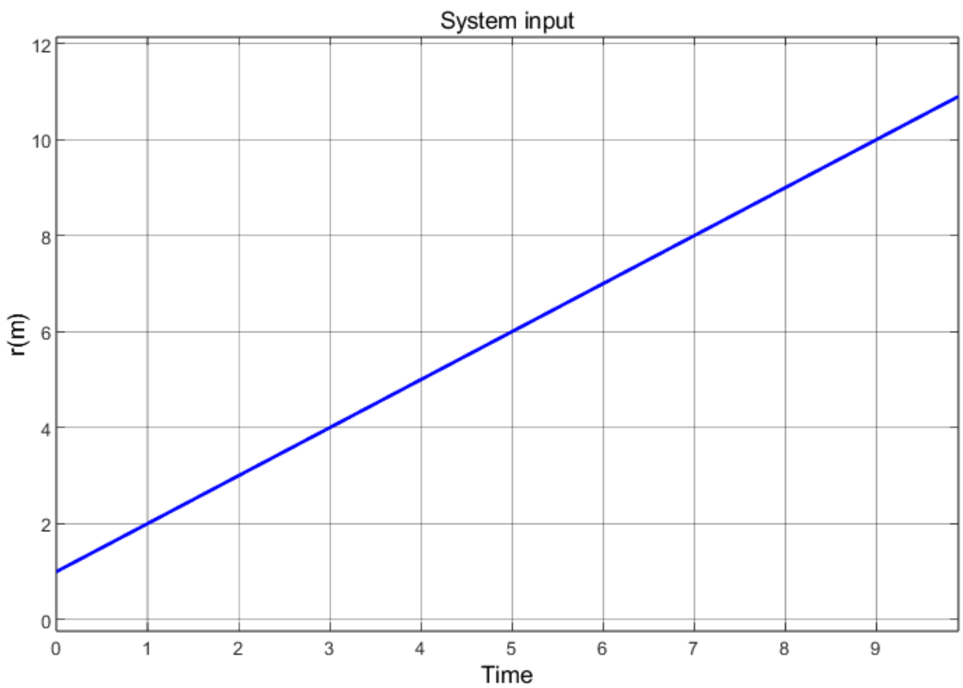

Рис. 12: Линейно нарастающее задающее воздействие $\tilde{r}(m)$

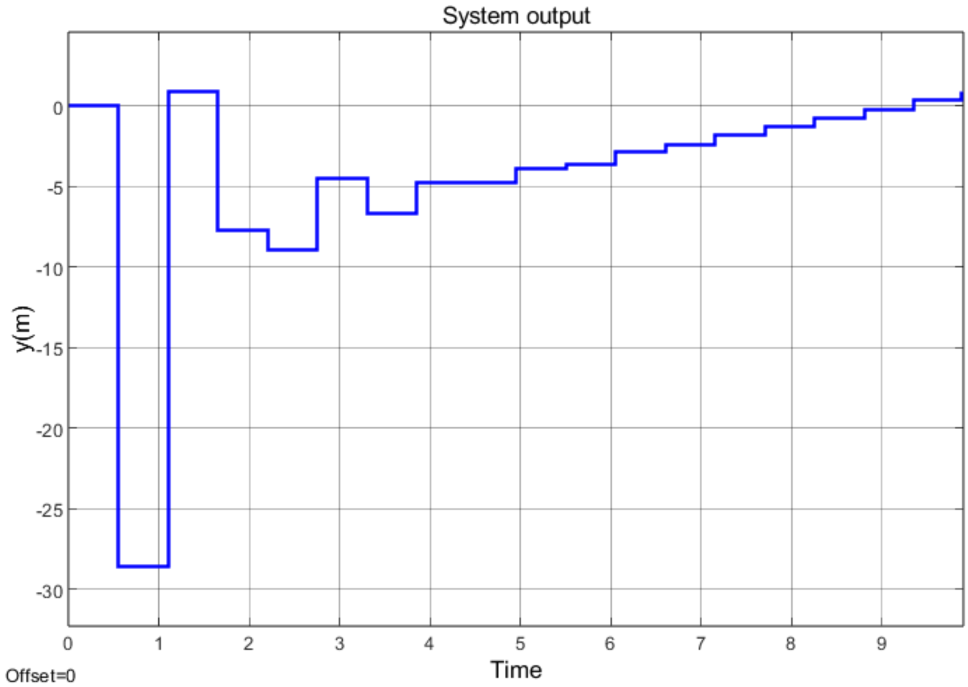

Рис. 13: Выход системы с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

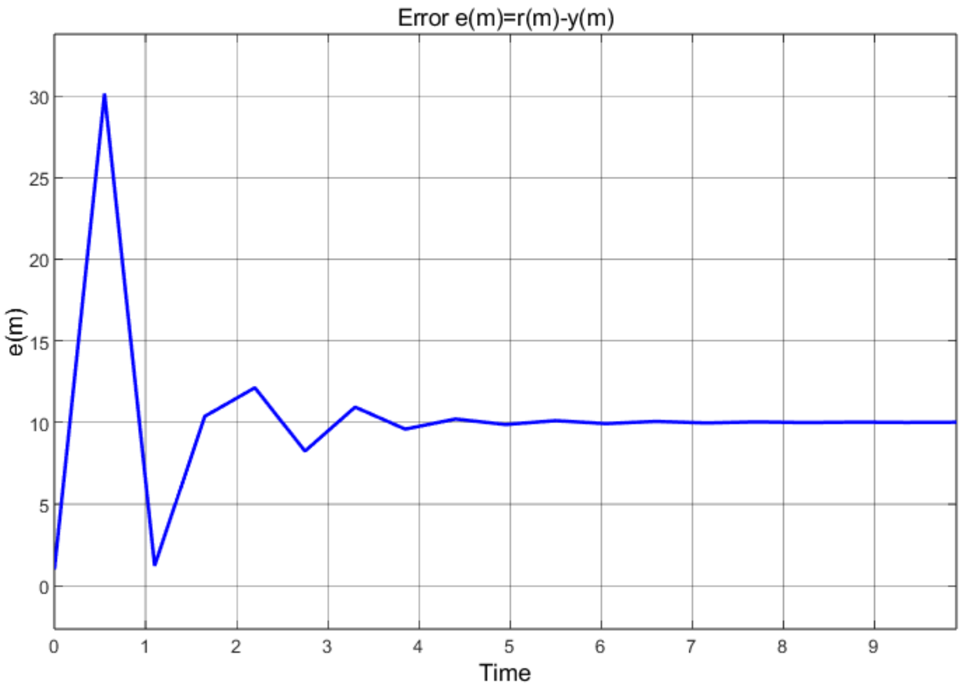

Рис. 14: Ошибка с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

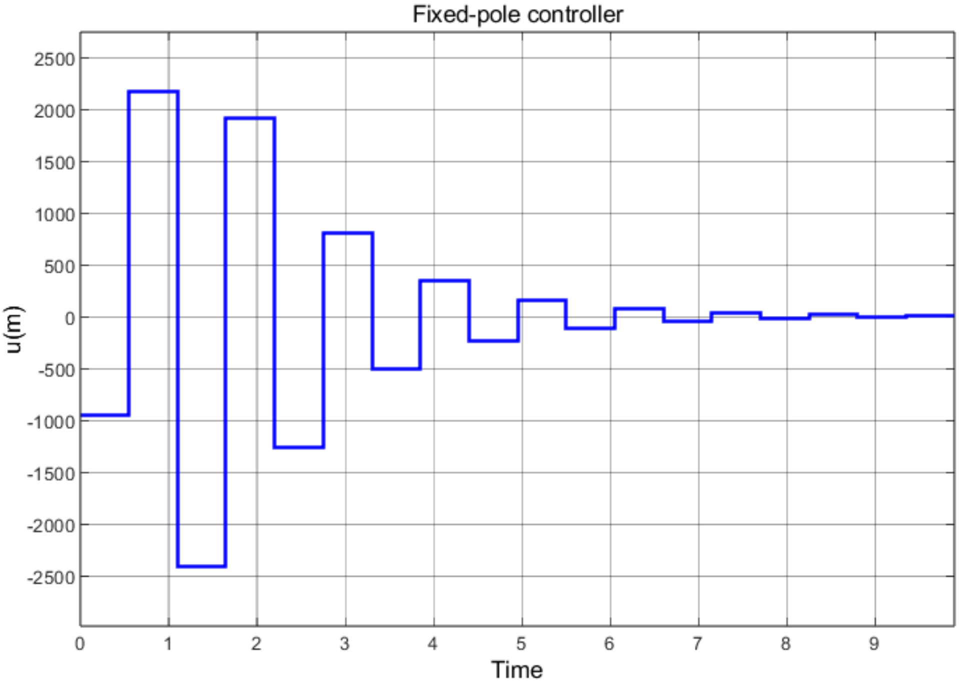

Рис. 15: Fixed-pole регулятор, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

Ошибка при ступенчатом входном воздействии стремится к нулю.

Ошибка при линейно нарастающем входном воздействии с $A = 1$ стремится к 10. Проверим теоретически:

$$E_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{1}{0.1} = 10$$

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы апериодический, Далина и с заданным расположением полюсов регуляторы. В каждом случае было проведено моделирование системы. Результаты подтверждают корректность выполненных расчетов.