

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«ДИСКРЕТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ В НЕПРЕРЫВНОЙ
СИСТЕМЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.
ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ КОМАНДНЫХ
ГЕНЕРАТОРОВ»**

Вариант 20

Выполнил: студент гр. Р3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Исследование влияния дискретного элемента на непрерывную систему	3
2 Исследование устойчивости дискретных систем	10
3 Построение дискретных командных генераторов	16
4 Вывод	23

1. Исследование влияния дискретного элемента на непрерывную систему

Исходные данные для задания:

$$T = 0.25 \text{ с},$$

$$K_{CO} = 8.8$$

T – период дискретизации, K_{CO} – коэффициент передачи ОУ.

Схема симуляции:

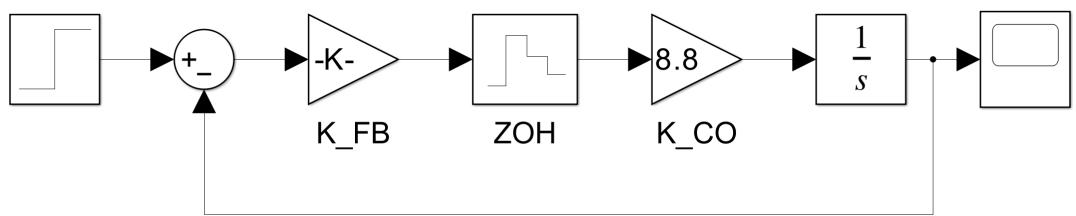


Рис. 1: Схема симуляции

Непрерывная система:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Возьмем $\tau \in [t_k = kT, t_{k+1} = (k + 1)T]$ – некоторый шаг дискретизации.

Приращение интеграла за этот интервал:

$$y((k + 1)T) - y(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} u(\tau) d\tau$$

Обозначения:

$$y_k = y(kT), \quad u_k = u(kT)$$

Дискретная система:

$$y_{k+1} - y_k = Tu_k,$$

$$Tu_k = \int_{kT}^{(k+1)T} u_k d\tau \approx \int_{kT}^{(k+1)T} u(\tau) d\tau,$$

$$u_k = K_{CO}K_{FB} e_k = K(r_k - y_k),$$

где r_k – вход системы.

Приведем систему к виду:

$$y_{k+1} = ay_k + br_k,$$

$$y_{k+1} = y_k + TK(r_k - y_k) = (1 - TK)y_k + TKr_k$$

Пусть вход – единичная ступень $r_k = 1 \forall k \geq 0$, тогда разностное уравнение:

$$y_{k+1} = ay_k + b$$

Соответствующая ему передаточная функция:

$$W(z) = \frac{b}{z - a}$$

Решение рекуррентного уравнения – сумма общего ((h)) и частного ((p)) решений:

$$y_{k+1}^{(h)} = ay_k^{(h)} \Rightarrow y_k^{(h)} = Ca^k,$$

$$y^{(p)} = ay^{(p)} + b \Rightarrow y^{(p)}(1 - a) = b \Rightarrow y^{(p)} = \frac{b}{1 - a} = \text{const.},$$

$$y_k = Ca^k + \frac{b}{1 - a}$$

При начальном условии $y_0 = 0$:

$$Ca^0 + \frac{b}{1 - a} = 0 \Rightarrow C = -\frac{b}{1 - a}$$

Тогда:

$$y_k = b \frac{1 - a^k}{1 - a}$$

Переходный процесс описывается a_k .

При $k \rightarrow \infty$, $|a| < 1$: $a^k \rightarrow 0$, остается установившееся значение:

$$y_\infty = \frac{b}{1-a}$$

Чем меньше $|a|$, тем быстрее убывает a^k – быстрее достигается установившееся значение.

Тогда, максимальная скорость сходимости будет при $a = 0$.

Система устойчива при $|a| < 1$:

$$|1 - TK| < 1 \Rightarrow 0 < K_{FB} < \frac{2}{TK_{CO}} \approx 0.909091$$

Рассмотрим границы устойчивости.

Нейтральная устойчивость:

$$a = 1 \Rightarrow 1 - TK = 1 \Rightarrow K_{FB} = 0$$

При нейтральной устойчивости выход повторяет начальное значение y_0 , задаваемое в интеграторе.

Колебательная устойчивость:

$$a = -1 \Rightarrow 1 - TK = -1 \Rightarrow K_{FB} = \frac{2}{TK_{CO}} \approx 0.909091$$

При колебательной устойчивости система будет максимально колебательной без затухания.

Рассмотрим подробнее поведение системы при различных a :

При $a = -1$ – колебательная устойчивость,

При $-1 < a < 0$ – затухающие колебания (каждый шаг знак a^k меняется),

При $a = 0$ – максимальная скорость сходимости,

При $0 \leq a < 1$ – монотонное сходящееся поведение,

При $a = 1$ – нейтральная устойчивость,

При $|a| > 1$ – неустойчивость.

Граница между отсутствием колебаний и их появлением при $a = 0$:

$$1 - TK = 0 \Rightarrow K_{FB} = \frac{1}{TK_{CO}} \approx 0.454545$$

Таким образом:

При $K_{FB} = 0$ – выход повторяет y_0 ,

При $0 < K_{FB} \leq 0.454545$ – монотонный выход,

При $K_{FB} = 0.454545$ – оптимальный по быстродействию процесс,

При $0.454545 < K_{FB} < 0.909091$ – затухающие колебания,

При $K_{FB} = 0.909091$ – максимальные незатухающие колебания,

При $K_{FB} > 0.909091$ – растущие колебания.

Экстраполятор нулевого порядка (ZOH) удерживает сигнал управления постоянным на протяжении каждого шага дискретизации T и переносит полюса системы из s -плоскости в z -плоскость по преобразованию:

$$z = e^{sT}$$

Устойчивость сохраняется, когда все дискретные корни (полюса) попадают внутрь единичного круга на z -плоскости.

Задержка уменьшает запас устойчивости системы и делает ее чувствительной к выбору шага дискретизации T – вероятность смещения полюсов из единичного круга увеличивается при увеличении T , следовательно система с большей вероятностью может стать неустойчивой.

Выполним моделирование системы при различных K_{FB} .

Положим $K_{FB} = 0, y_0 = 0$:

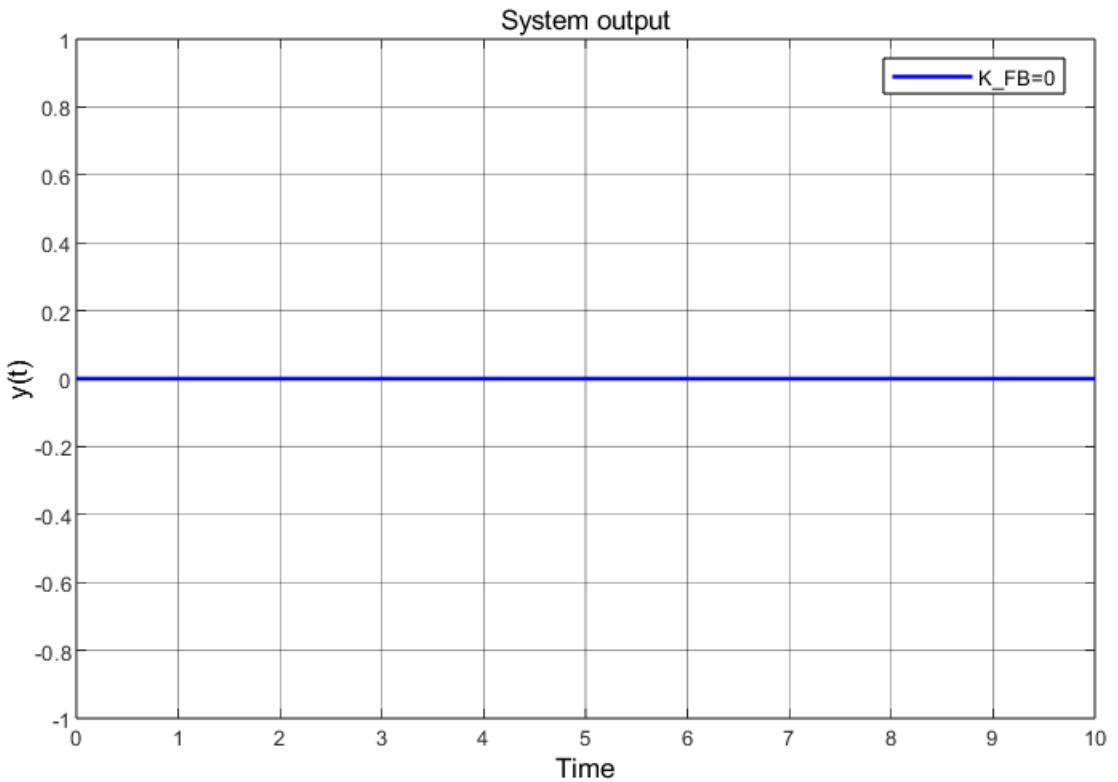


Рис. 2: Выход системы при $K_{FB} = 0, y_0 = 0$

Положим $K_{FB} = 0.3, y_0 = 0$:

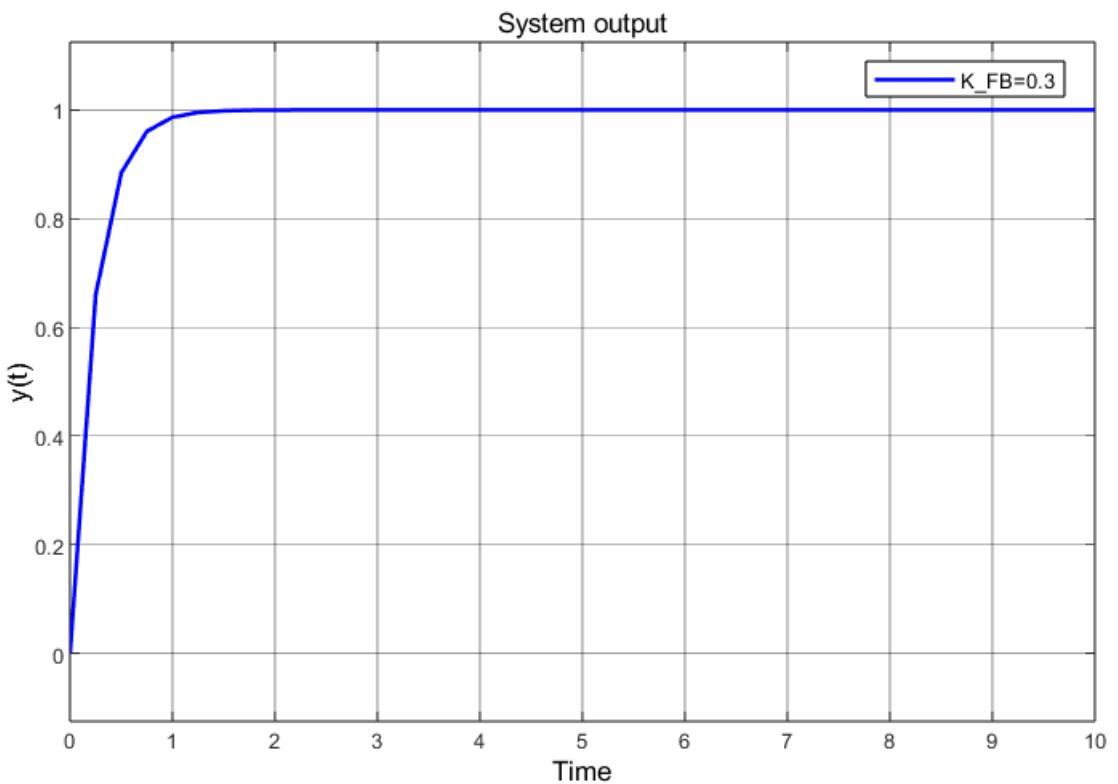


Рис. 3: Выход системы при $K_{FB} = 0.3, y_0 = 0$

Положим $K_{FB} = 1 / (TK_{CO})$, $y_0 = 0$:

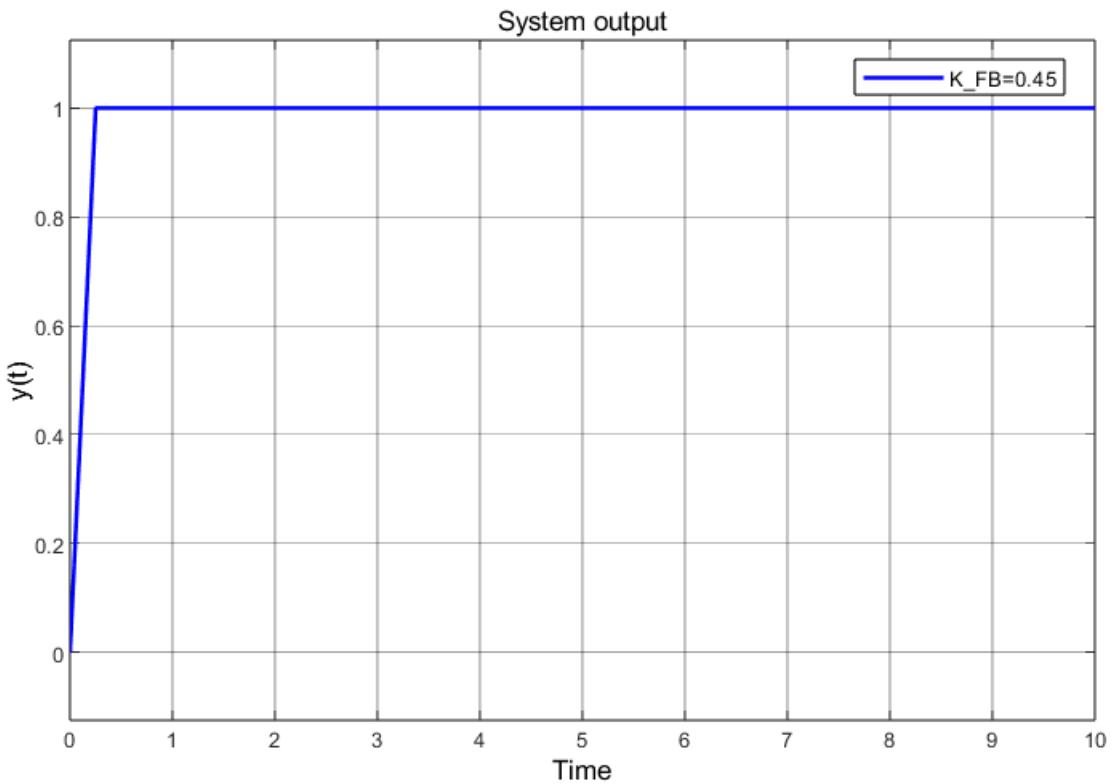


Рис. 4: Выход системы при $K_{FB} = 1 / (TK_{CO})$, $y_0 = 0$

Положим $K_{FB} = 0.6$, $y_0 = 0$:

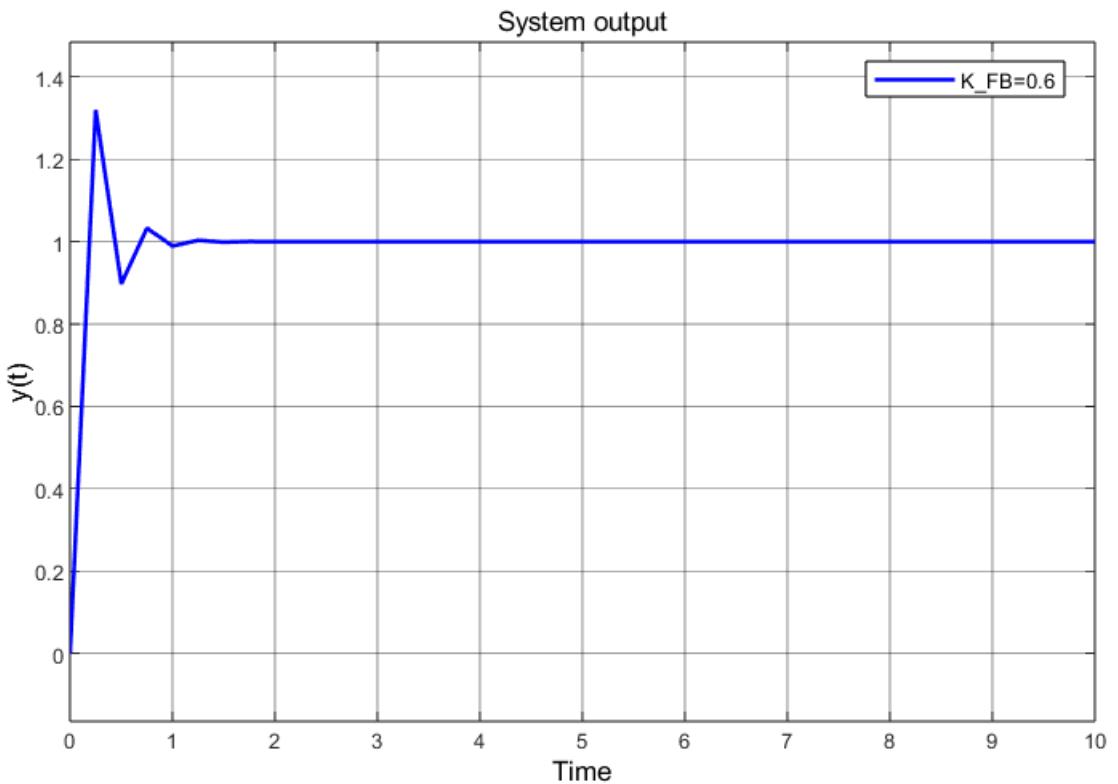


Рис. 5: Выход системы при $K_{FB} = 0.6$, $y_0 = 0$

Положим $K_{FB} = 2 / (TK_{CO})$, $y_0 = 0$:

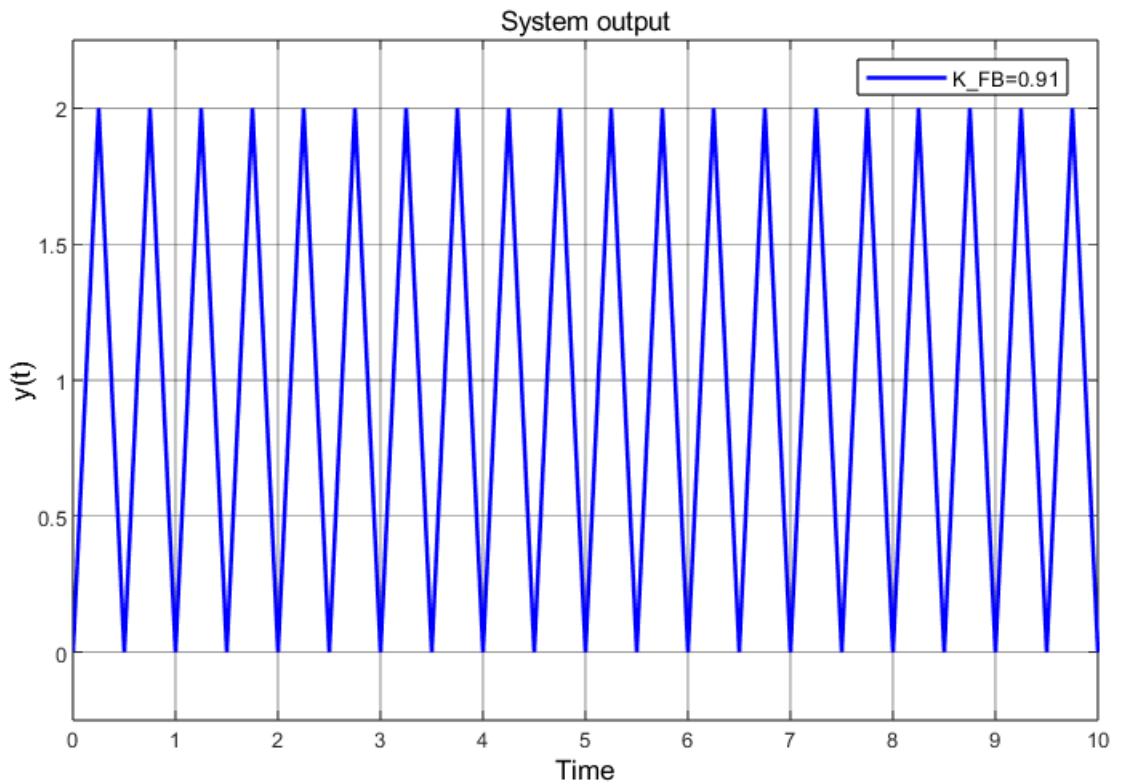


Рис. 6: Выход системы при $K_{FB} = 2 / (TK_{CO})$, $y_0 = 0$

Положим $K_{FB} = 1$, $y_0 = 0$:

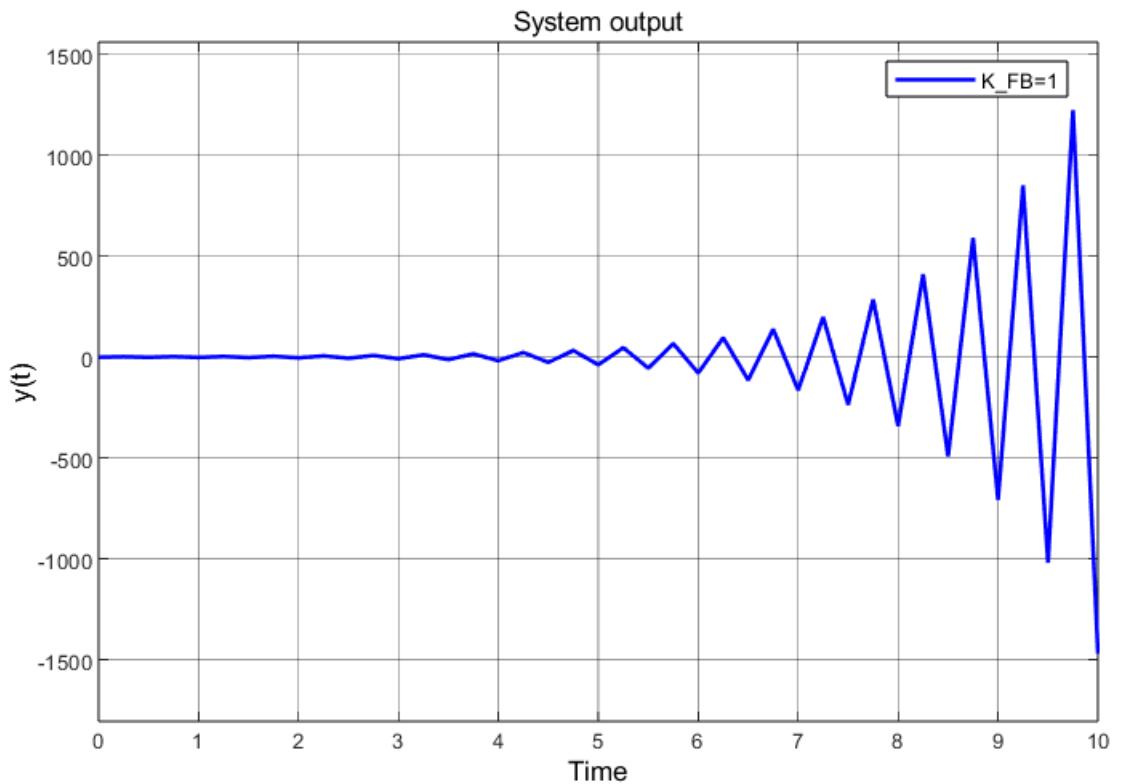


Рис. 7: Выход системы при $K_{FB} = 1$, $y_0 = 0$

2. Исследование устойчивости дискретных систем

Исходные данные:

$$\begin{aligned}T &= 0.25 \text{ с}, \\ \sigma_1 &= \{1.59, 1.02\}, \\ \sigma_2 &= \{-0.08, -0.69\}, \\ \sigma_3 &= \{0.29, -0.06\}, \\ \sigma_4 &= \{0.31j, -0.37j\}, \\ \sigma_5 &= \{-1.35 \pm 1.02j\}\end{aligned}$$

Рассмотрим непрерывный ОУ:

$$\ddot{y} = u,$$

где $u(t)$ – управляющее воздействие, $y(t)$ – выходная величина.

Положим:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

Тогда:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

Система имеет вид (B-C-B):

$$\dot{x} = A_{\text{H}}x + B_{\text{H}}u, \quad y = Cx + Du,$$

где:

$$A_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Приведем к дискретному виду:

$$A = e^{A_{\text{H}}T} = \sum_{i=0}^k \frac{A_{\text{H}}^i T^i}{i!}, \quad B = \int_0^T e^{A_{\text{H}}(T-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \cdot B_{\text{H}} = \sum_{i=1}^k \frac{A_{\text{H}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{H}}$$

Рассмотрим $i = 0, 1, 2$:

$$A_{\text{H}}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Достаточно взять $k = 2$:

$$A = I + A_{\text{H}}T + \frac{A_{\text{H}}^2 T^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = A_{\text{H}}^0 T B_{\text{H}} + \frac{A_{\text{H}}^1 T^2 B_{\text{H}}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Дискретная модель:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k,$$

где:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Зададим управляющее воздействие:

$$u(k) = -Kx(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Матрица динамики замкнутой системы:

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} \frac{-T^2 k_1 + 2}{2} & \frac{2T - T^2 k_2}{2} \\ -Tk_1 & -Tk_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Замкнутая дискретная система:

$$x_{k+1} = Fx_k$$

Характеристический полином:

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^2 + \lambda (T^2 k_1 / 2 + Tk_2 - 2) + (T^2 k_1 / 2 - Tk_2 + 1) = 0$$

Пусть желаемый полином:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Для спектра $\sigma_1 = \{1.59, 1.02\}$:

$$\lambda^2 - (1.59 + 1.02)\lambda + 1.59 \cdot 1.02 = \lambda^2 - 2.61\lambda + 1.6218$$

Следовательно:

$$\begin{cases} T^2k_1/2 + Tk_2 - 2 = -2.61, \\ T^2k_1/2 - Tk_2 + 1 = 1.6218 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2k_1/2 + Tk_2 = -0.61, \\ T^2k_1/2 - Tk_2 = 0.6218, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{0.0118}{T^2} = 0.1888, \\ k_2 = -\frac{0.6159}{T} = -2.4636 \end{cases}$$

Проверим:

$$\sigma(F) = \{1.02, 1.59\}$$

Повторим для спектра $\sigma_2 = \{-0.08, -0.69\}$:

$$\lambda^2 - (-0.08 - 0.69)\lambda + 0.08 \cdot 0.69 = \lambda^2 + 0.77\lambda + 0.0552,$$

$$\begin{cases} T^2k_1/2 + Tk_2 - 2 = 0.77, \\ T^2k_1/2 - Tk_2 + 1 = 0.0552 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2k_1/2 + Tk_2 = 2.77, \\ T^2k_1/2 - Tk_2 = -0.9448, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1.8252}{T^2} = 29.2032, \\ k_2 = \frac{0.6159}{T} = 7.4296 \end{cases}$$

Проверим:

$$\sigma(F) = \{-0.08, -0.69\}$$

Аналогично $\sigma_3 = \{0.29, -0.06\}$:

$$\lambda^2 - (0.29 - 0.06)\lambda - 0.29 \cdot 0.06 = \lambda^2 - 0.23\lambda - 0.0174,$$

$$\begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 - 2 = -0.23, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 + 1 = -0.0174 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 = 1.77, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 = -1.0174, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{0.7526}{T^2} = 12.0416, \\ k_2 = \frac{1.3937}{T} = 5.5748, \end{cases} \quad \sigma(F) = \{0.29, -0.06\}$$

Аналогично $\sigma_4 = \{0.31j, -0.37j\}$:

$$\lambda^2 - (0.31j - 0.37j)\lambda - 0.31j \cdot 0.37j = \lambda^2 + 0.06j\lambda + 0.1147,$$

$$\begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 - 2 = 0.06j, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 + 1 = 0.1147 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 = 2 + 0.06j, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 = -0.8853, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1.1147+0.06j}{T^2} = 17.8352 + 0.96j, \\ k_2 = \frac{1.44265+0.03j}{T} = 5.7706 + 0.12j, \end{cases} \quad \sigma(F) = \{0.31j, -0.37j\}$$

Аналогично $\sigma_5 = \{-1.35 \pm 1.02j\}$:

$$\lambda^2 - (-1.35 + 1.02j - 1.35 - 1.02j)\lambda + (-1.35 + 1.02j)(-1.35 - 1.02j),$$

$$\lambda^2 + 2.7\lambda + 2.8629$$

$$\begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 - 2 = 2.7, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 + 1 = 2.8629 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2 k_1 / 2 + Tk_2 = 4.7, \\ T^2 k_1 / 2 - Tk_2 = 1.8629, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{6.5629}{T^2} = 105.0064, \\ k_2 = \frac{1.41855}{T} = 5.6742, \end{cases} \quad \sigma(F) = \{-1.35 \pm 1.02j\}$$

Выполним моделирование систем при $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$.

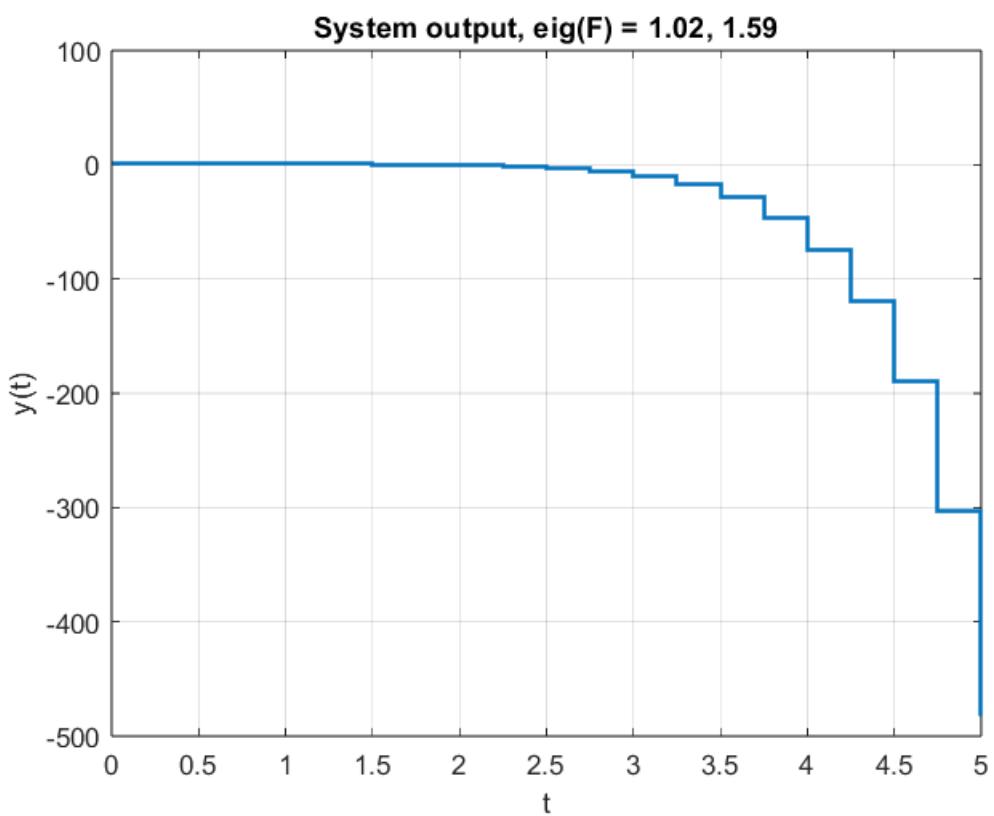


Рис. 8: Выход системы при $\sigma_1 = \{1.02, 1.59\}$

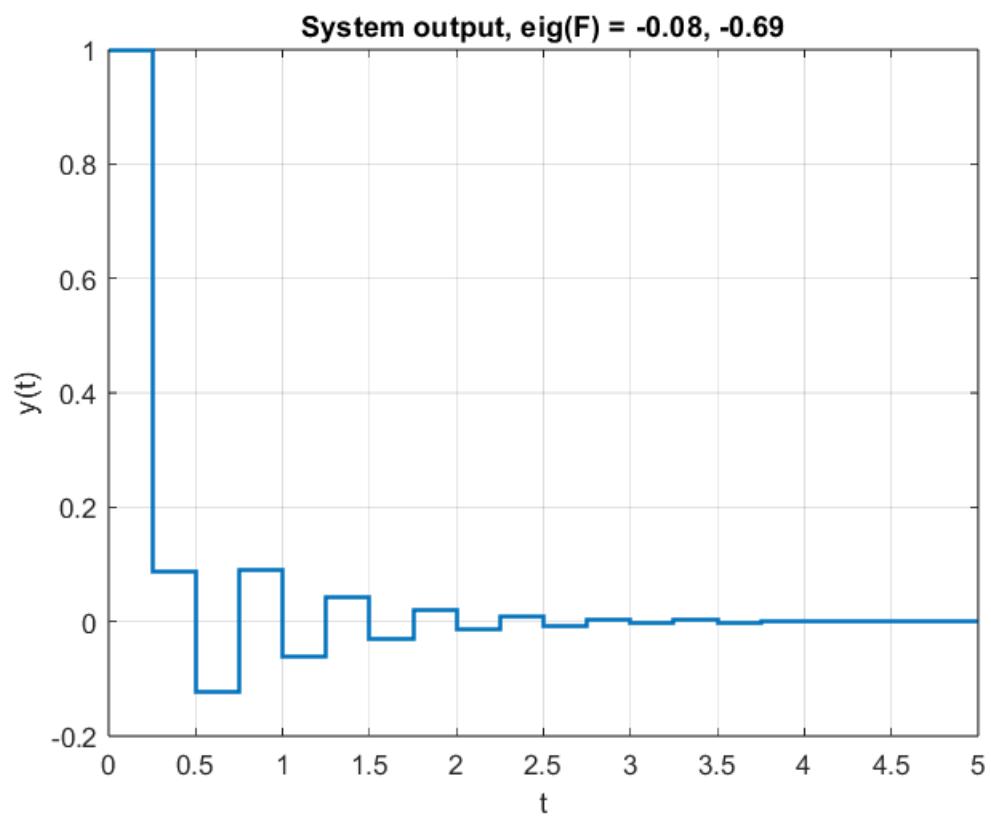


Рис. 9: Выход системы при $\sigma_2 = \{-0.08, -0.69\}$

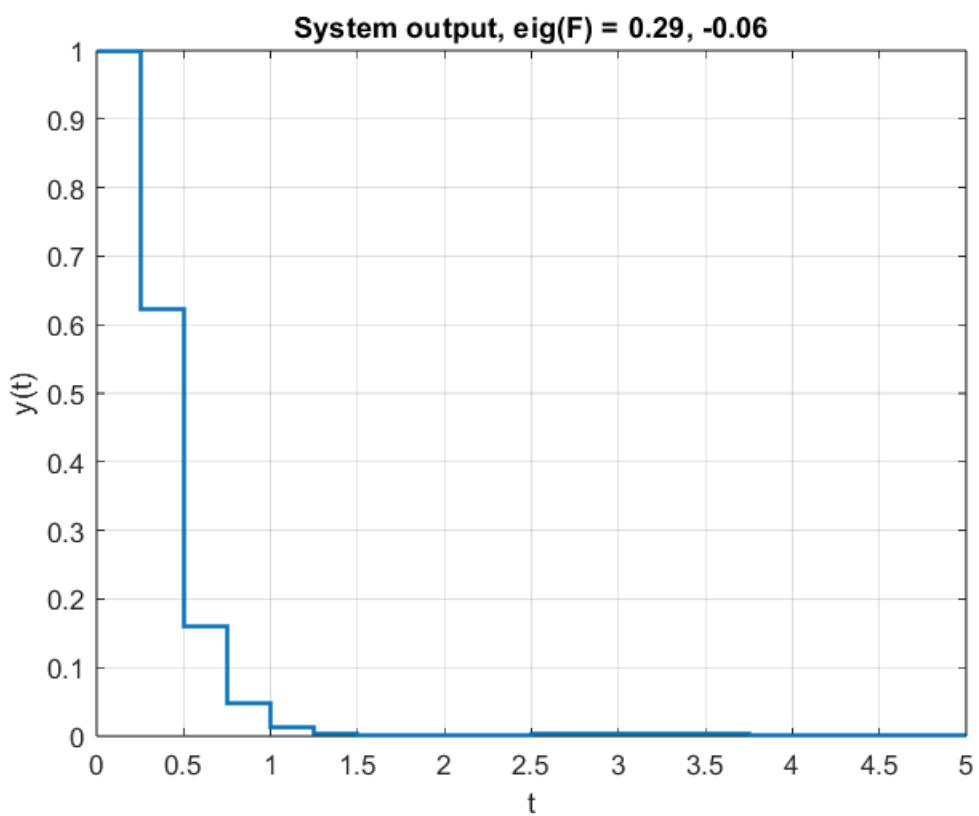


Рис. 10: Выход системы при $\sigma_3 = \{0.29, -0.06\}$

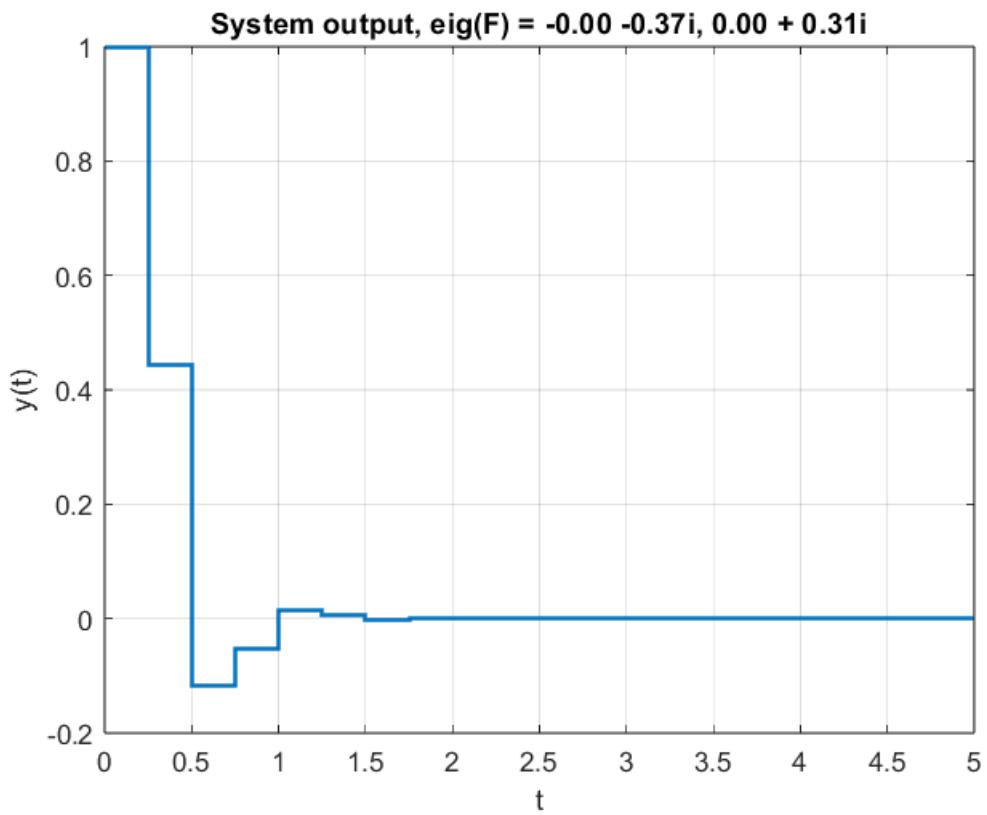


Рис. 11: Выход системы при $\sigma_4 = \{0.31j, -0.37j\}$

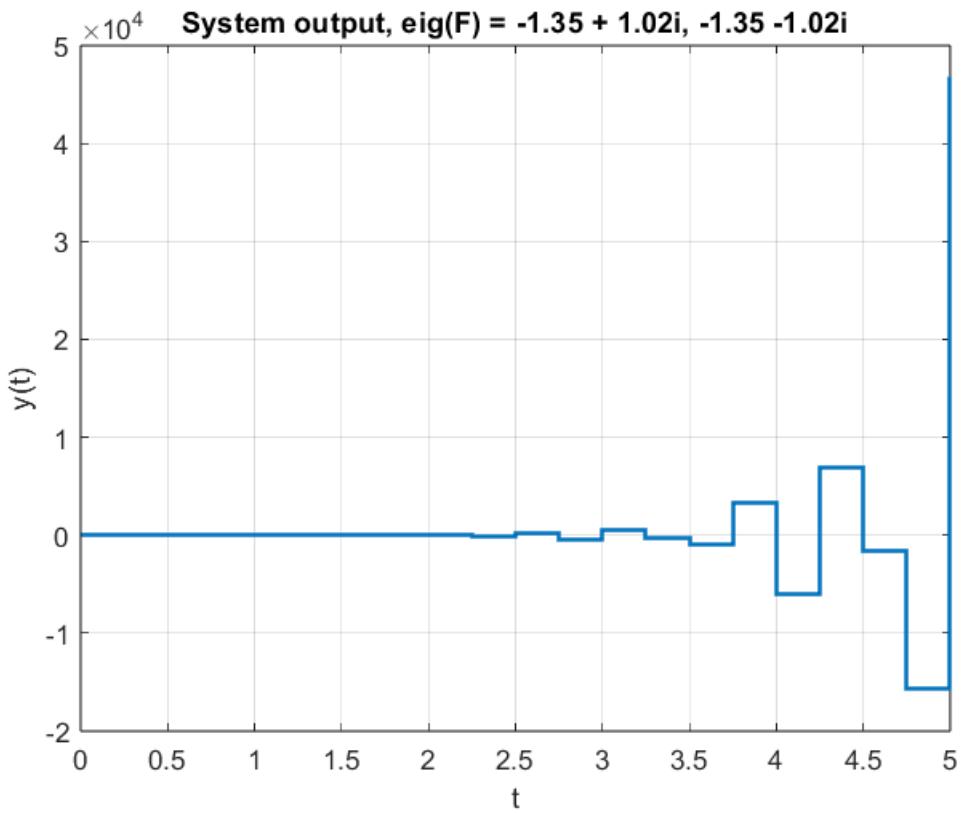


Рис. 12: Выход системы при $\sigma_5 = \{-1.35 \pm 1.02j\}$

Когда вещественная часть собственных чисел по модулю больше 1, то система расходится.

В обратном случае система сходится к устоявшемуся состоянию.

3. Построение дискретных командных генераторов

Исходные данные:

$$T = 0.25 \text{ с},$$

$$A = -8.5,$$

$$\omega = 0.7,$$

$$f(k) = 0.4 \sin(2kT) + 2.5 \cos(6kT),$$

где $f(k)$ – внешнее возмущение.

Синтезируем командный генератор гармонического сигнала:

$$g(k) = A \sin(kT\omega)$$

Выберем в качестве первой координаты вектора состояния дискретного генератора сам сигнал:

$$\xi_1(k) = g(k)$$

Возьмем первую разность (аналог производной) и выберем вторую переменную вектора состояния в виде этой разности:

$$\begin{aligned}\xi_2(k) &= \xi_1(k+1) = A \sin(kT\omega + T\omega) = \\ &= A [\sin(kT\omega) \cos(T\omega) + \cos(kT\omega) \sin(T\omega)] = \\ &= \xi_1(k) \cos(T\omega) + A \cos(kT\omega) \sin(T\omega)\end{aligned}$$

Возьмем вторую разность и выберем третью переменную вектора состояния в виде этой разности:

$$\begin{aligned}\xi_3(k) &= \xi_2(k+1) = \xi_2(k) \cos(T\omega) + A \cos(kT\omega + T\omega) \sin(T\omega) = \\ &= \xi_2(k) \cos(T\omega) + A \sin(T\omega) [\cos(kT\omega) \cos(T\omega) - \sin(kT\omega) \sin(T\omega)] = \\ &= \xi_2(k) \cos(T\omega) + \xi_2(k) \cos(T\omega) - \xi_1(k) \cos^2(T\omega) - \xi_1(k) \sin^2(T\omega) = \\ &= 2\xi_2(k) \cos(T\omega) - \xi_1(k)\end{aligned}$$

Третья строчка из второй получается путем выражения второго слагаемого из выражения для $\xi_2(k)$.

Достаточно двух разностей – для вычисления $g(k+2)$ достаточно знать $g(k+1)$ и $g(k)$ (разностное уравнение второго порядка).

Система выражений:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_2(k), \\ \xi_2(k+1) = -\xi_1(k) + 2 \cos(T\omega) \xi_2(k), \\ g(k) = \xi_1(k) \end{cases}$$

Вектор начальных условий при $k = 0$:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ A \sin(T\omega) \end{bmatrix}$$

Командный генератор:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \xi(k),$$

$$g(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} = H\xi(k)$$

Схема моделирования командного генератора:

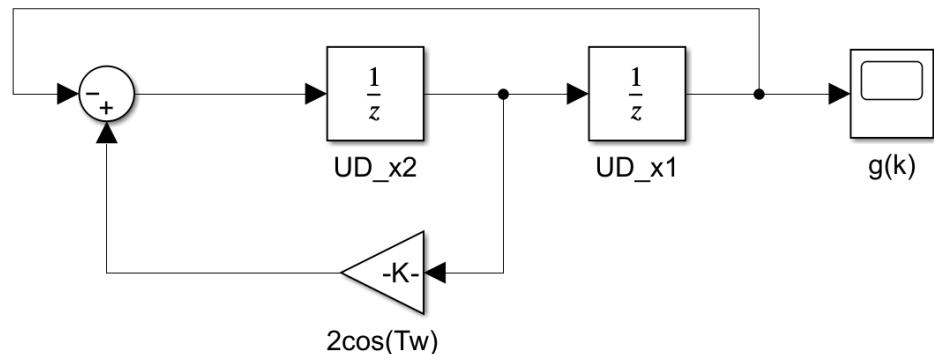


Рис. 13: Схема командного генератора

Выполним моделирование командного генератора:

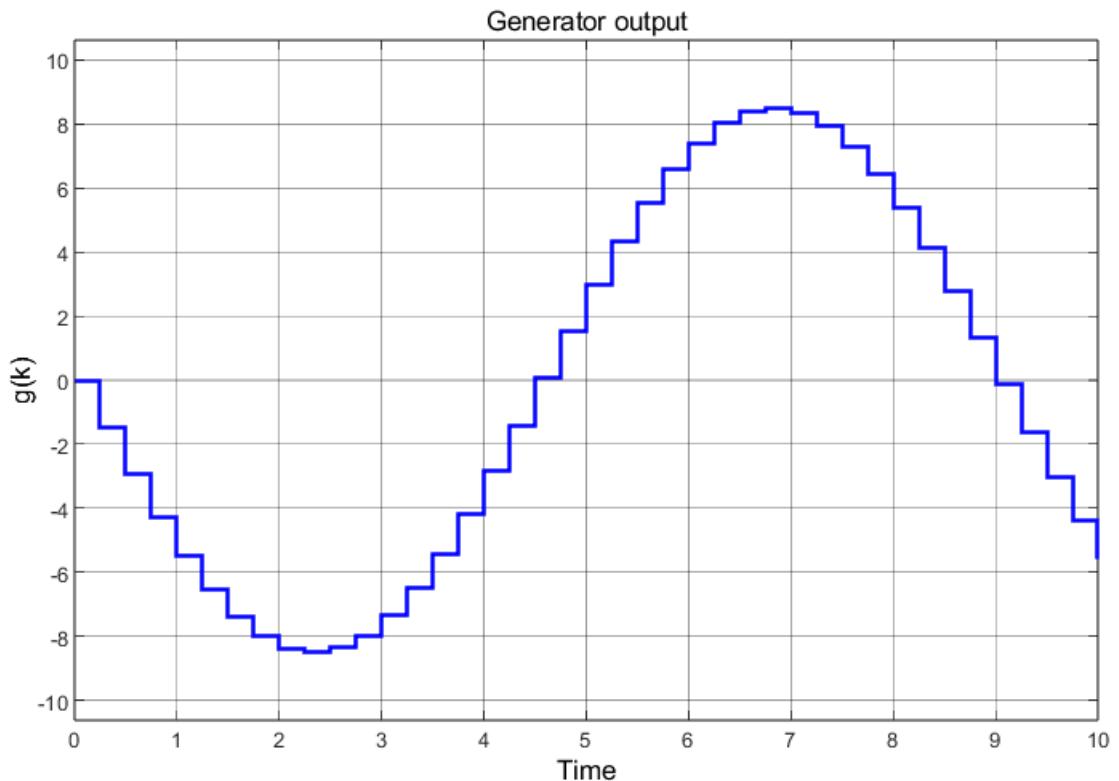


Рис. 14: Выход генератора

Синтезируем дискретную математическую модель возмущения «вход-состояние-выход» с параметрами:

$$g(k) = f(k) = 0.4 \sin(2kT) + 2.5 \cos(6kT)$$

Делим $g(k)$ на две подсистемы:

$$g(k) = g_1(k) + g_2(k)$$

Аналогично общему случаю:

$$\xi_1(k) = g_1(k), \quad \eta_1(k) = g_2(k);$$

$$\begin{aligned} \xi_2(k) &= \xi_1(k+1) = 0.4 \sin(2kT + 2T) = \\ &= \xi_1(k) \cos(2T) + 0.4 \cos(2kT) \sin(2T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(k) &= \eta_1(k+1) = 2.5 \cos(6kT + 6T) = \\ &= \eta_1(k) \cos(6T) - 2.5 \sin(6kT) \sin(6T); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_3(k) &= \xi_2(k+1) = \\ &= \xi_2(k) \cos(2T) + 0.4 \cos(2kT + 2T) \sin(2T) = \\ &= 2\xi_2(k) \cos(2T) - \xi_1(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_3(k) &= \eta_2(k+1) = \\ &= \eta_2(k) \cos(6T) - 2.5 \sin(6kT + 6T) \sin(6T) = \\ &= 2\eta_2(k) \cos(6T) - \eta_1(k); \end{aligned}$$

Система:

$$\begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_2(k), \\ \xi_2(k+1) = -\xi_1(k) + 2 \cos(2T)\xi_2(k), \\ \eta_1(k+1) = \eta_2(k), \\ \eta_2(k+1) = -\eta_1(k) + 2 \cos(6T)\eta_2(k), \\ g(k) = \xi_1(k) + \eta_1(k) \end{cases}$$

Начальные условия при $k = 0$:

$$\psi(0) = \begin{bmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \\ \eta_1(0) \\ \eta_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \sin(2T) \\ 2.5 \\ 2.5 \cos(6T) \end{bmatrix}$$

Генератор возмущений:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \\ \eta_1(k+1) \\ \eta_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 \cos(2T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \cos(6T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \eta_1(k) \\ \eta_2(k) \end{bmatrix} = \Gamma_d \psi(k),$$

$$g(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \eta_1(k) \\ \eta_2(k) \end{bmatrix} = H\psi(k)$$

Схема моделирования генератора возмущений:

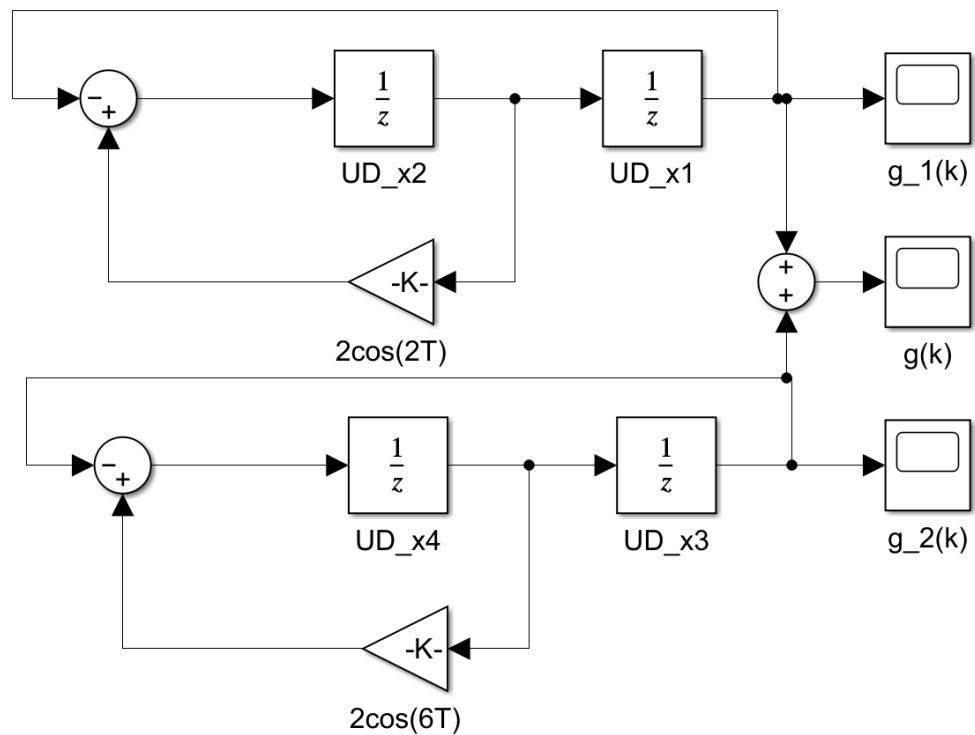


Рис. 15: Схема генератора возмущений

Выполним моделирование генератора возмущений:

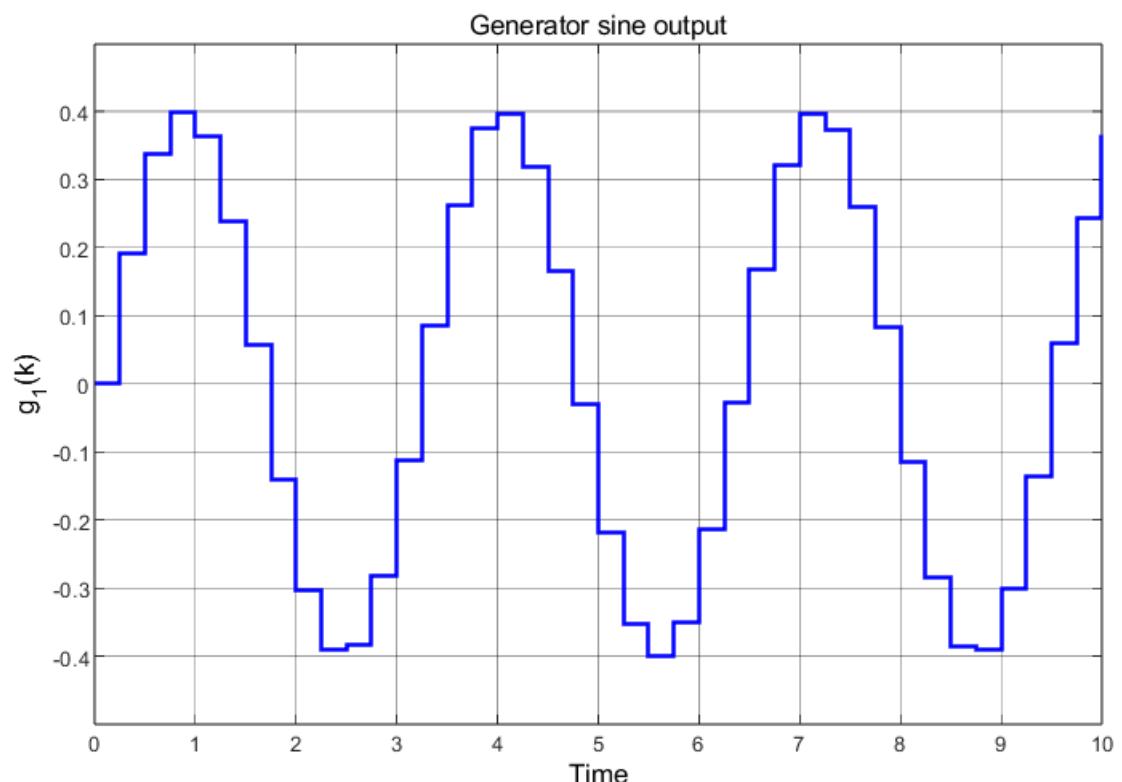


Рис. 16: Выход генератора $g_1(k)$

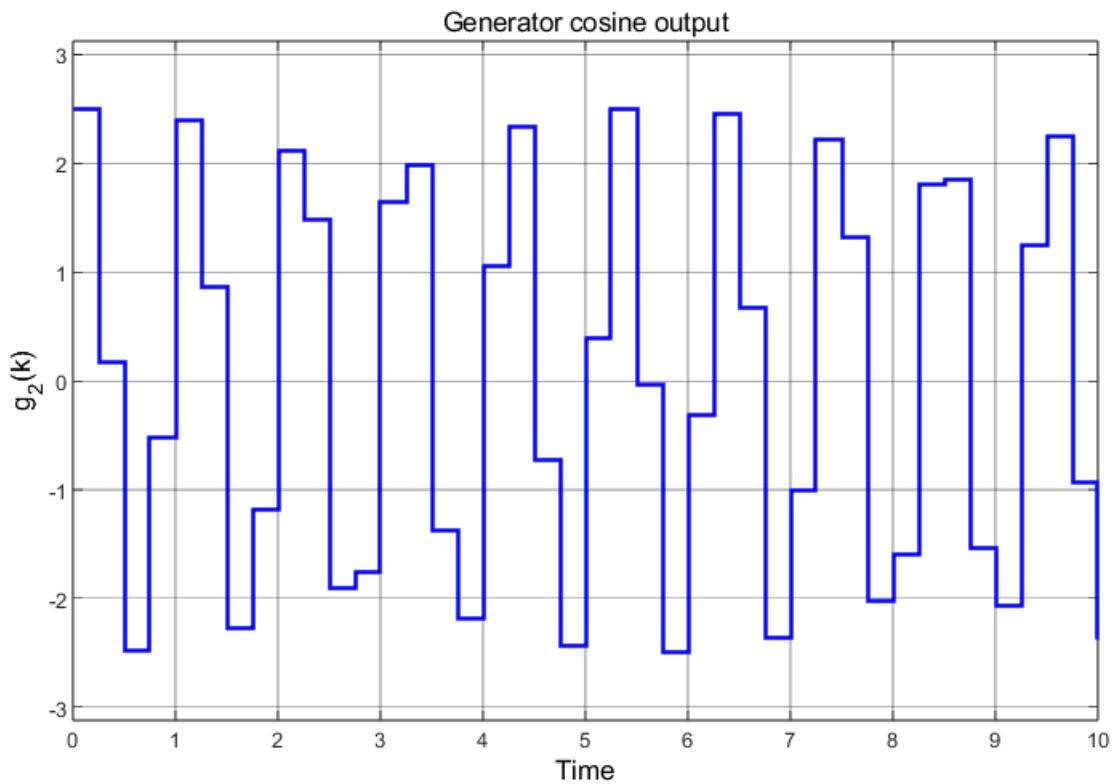


Рис. 17: Выход генератора $g_2(k)$

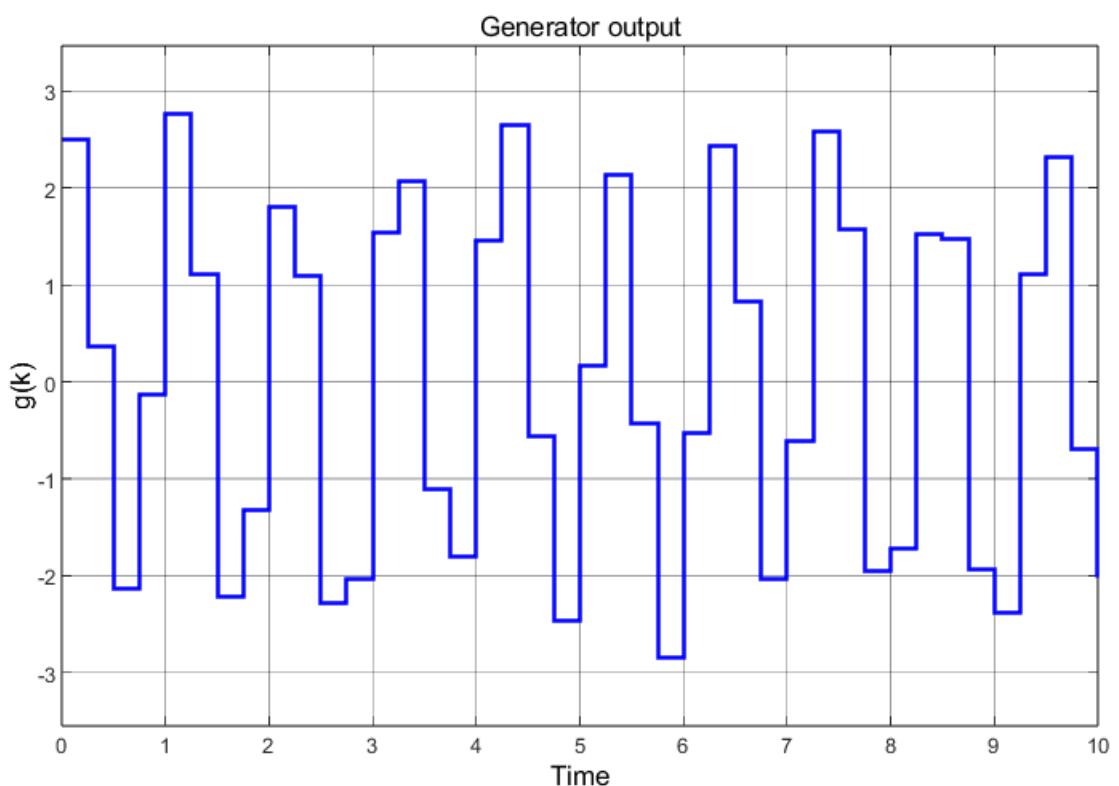


Рис. 18: Выход генератора $g(k)$

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы было исследовано влияние дискретного элемента на непрерывную систему – был сделан вывод о снижении запаса устойчивости. Исследование устойчивости дискретных систем показало, что все собственные числа системы внутри единичного круга гарантируют устойчивость системы. Был синтезирован командный генератор и генератор возмущений. Моделирование показало, что таким способом успешно получается моделировать гармонические сигналы без дифференцирования.