

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«АПЕРИОДИЧЕСКИЙ, ДАЛИНА И С ЗАДАННЫМ
РАСПОЛОЖЕНИЕМ ПОЛЮСОВ РЕГУЛЯТОРЫ»**

Вариант 20

Выполнил: студент гр. Р3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Исходные данные	3
2	Выполнение работы	3
2.1	Апериодический регулятор	3
2.2	Регулятор Далина	7
2.3	Регулятор с заданным расположением полюсов	11
3	Вывод	17

1. Исходные данные

Исходные данные варианта 20:

T	a	b	ζ	ω_d	K_v
0.55	1.1	10	0.35	4	0.1

2. Выполнение работы

ОУ задан непрерывной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e^{-as}}{1 + bs} = \frac{e^{-1.1s}}{1 + 10s}$$

2.1. Апериодический регулятор

Синтезируем для непрерывного ОУ апериодический регулятор при периоде дискретизации $T = 1$.

Желаемая передаточная функция системы:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = z^{-k}, \quad k \geq 1$$

Замкнутая система:

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)H}{1 + D(z)G(z)H}$$

Передаточная функция регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)} = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}$$

Экспонента e^{-as} описывает задержку в непрерывной системе.

При дискретизации представляем задержку через z^{-n_d} , где:

$$n_d = \frac{a}{T}$$

Если n_d целое, то задержка точная в дискретной модели.

Если n_d дробное, то округляем задержку до ближайшего целого.

Таким образом,

$$n_d = \frac{1.1}{1} = 1.1 \Rightarrow n_d \sim 1 \Rightarrow e^{-1.1s} \sim e^{-s} \Rightarrow Z\{e^{-1.1s}\} \sim Z\{e^{-s}\} = z^{-1}$$

Дискретная передаточная функция ОУ с ЭНП:

$$\begin{aligned} HG(z) &= Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{e^{-1.1s}}{s(1 + 10s)}\right\} = \\ &= (1 - z^{-1})z^{-1}Z\left\{\frac{1}{s(1 + 10s)}\right\} = (1 - z^{-1})z^{-1}Z\left\{\frac{0.1}{s(s + 0.1)}\right\} = \\ &= (1 - z^{-1})z^{-1}\frac{z(1 - e^{-0.1})}{(z - 1)(z - e^{-0.1})} = z^{-2}\frac{1 - e^{-0.1}}{1 - e^{-0.1}z^{-1}} = \frac{0.095z^{-2}}{1 - 0.905z^{-1}} = \\ &= \frac{0.095}{z^2 - 0.905z} \end{aligned}$$

Подставим в передаточную функцию регулятора:

$$D(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}} \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}}$$

Из условия физической реализуемости $k \geq 2$ выберем $k = 2$, тогда:

$$D(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}} \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2 - 0.905z}{0.095(z^2 - 1)}$$

Модель системы в симулинк:

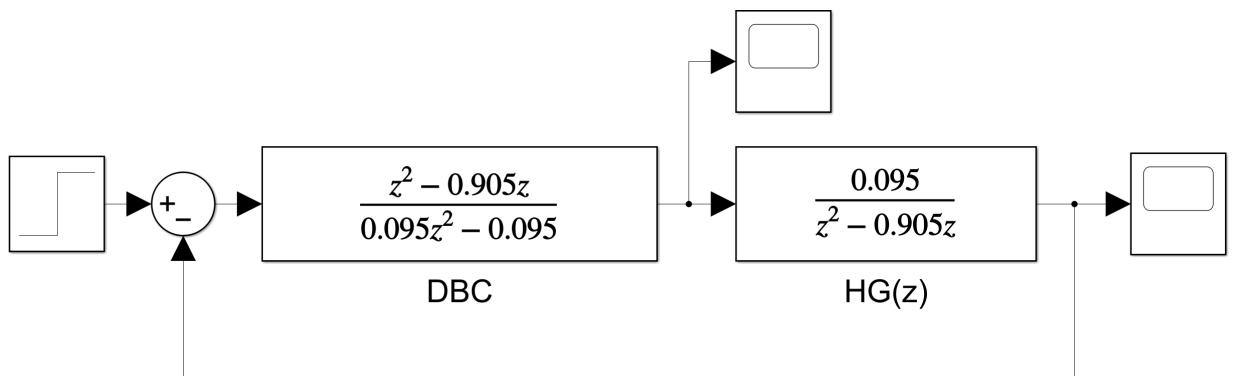


Рис. 1: Схема моделирования системы с апериодическим регулятором

Графики управления и выхода системы при ступенчатом задающем воздействии $r(m)$ при $T = 1, k = [2, 3]$:

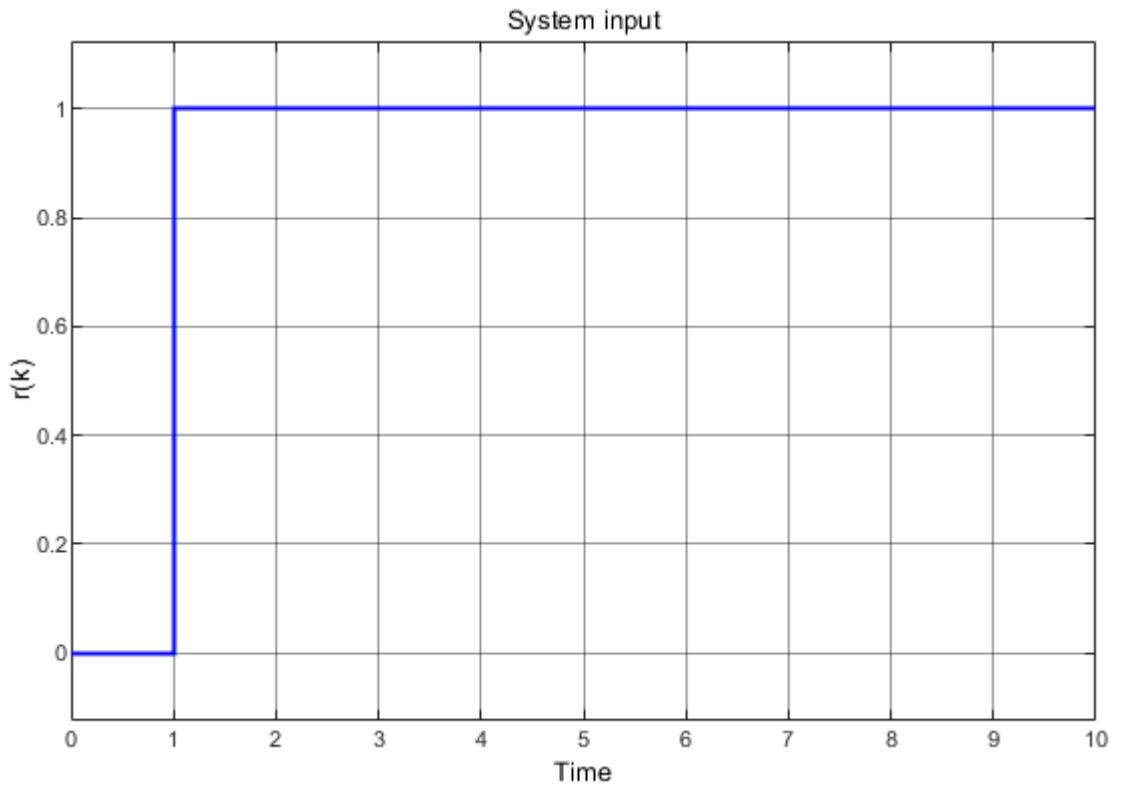


Рис. 2: Ступенчатое задающее воздействие $r(m)$

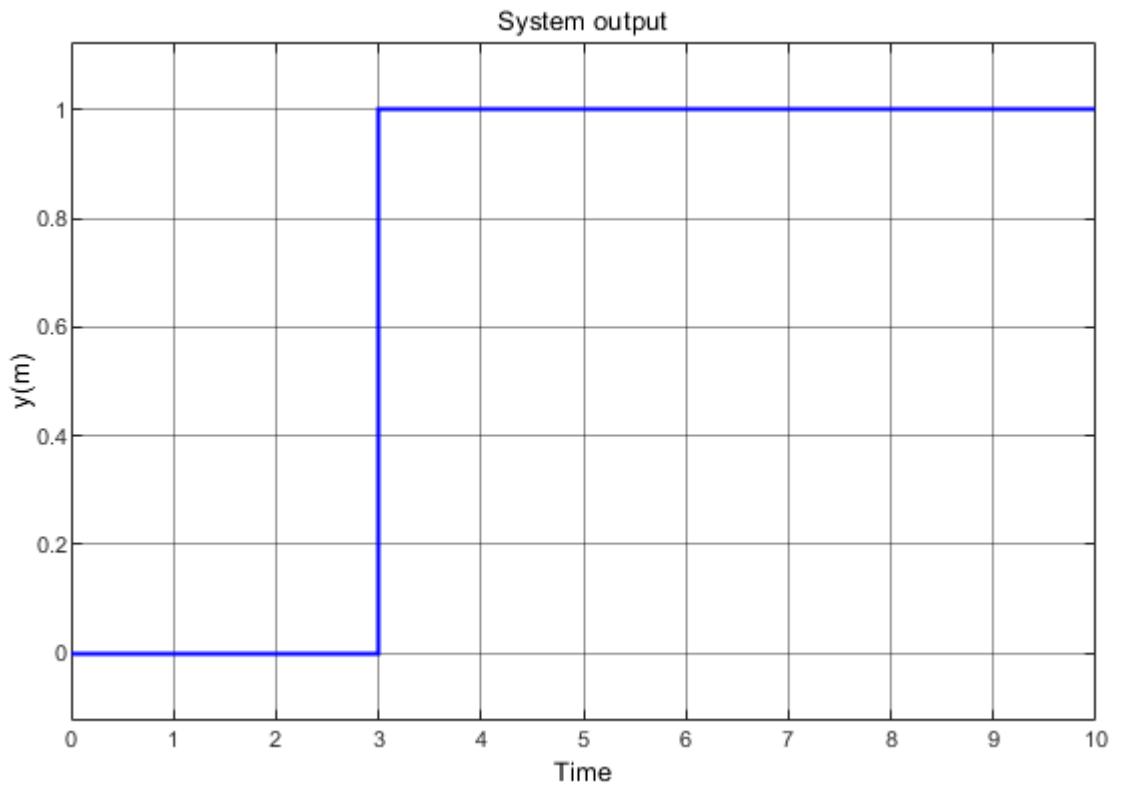


Рис. 3: Выход системы с апериодическим регулятором, $T = 1, k = 2$

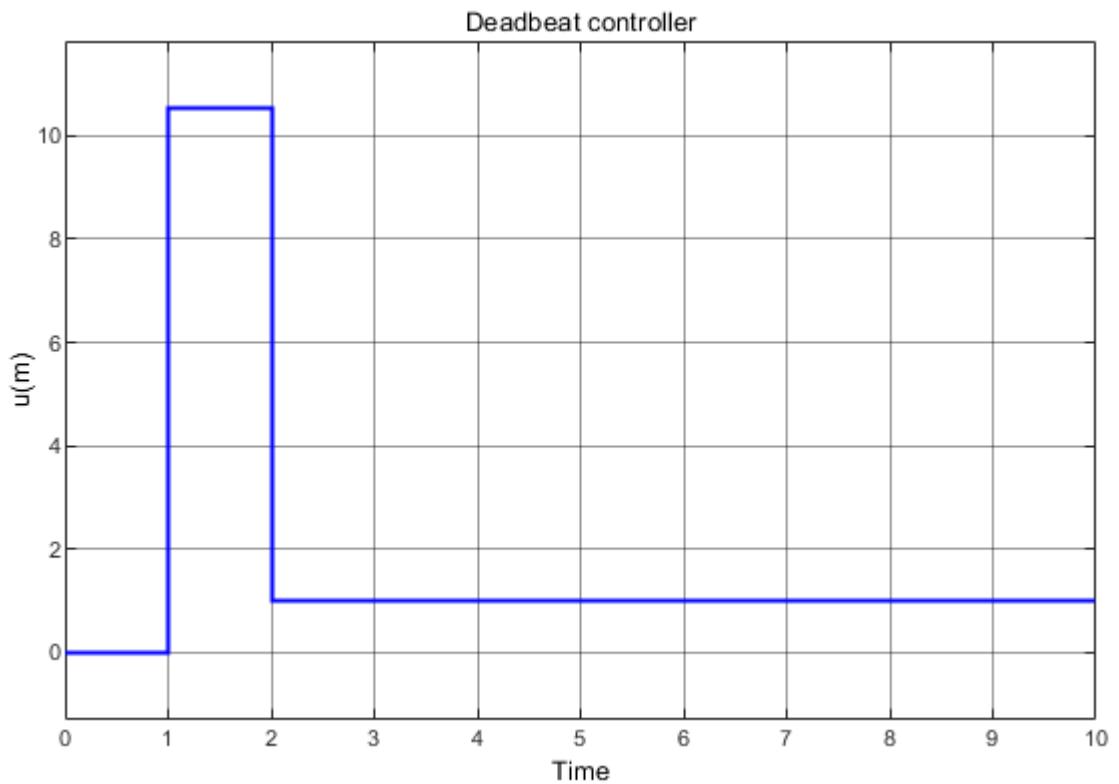


Рис. 4: Апериодический регулятор, $T = 1, k = 2$

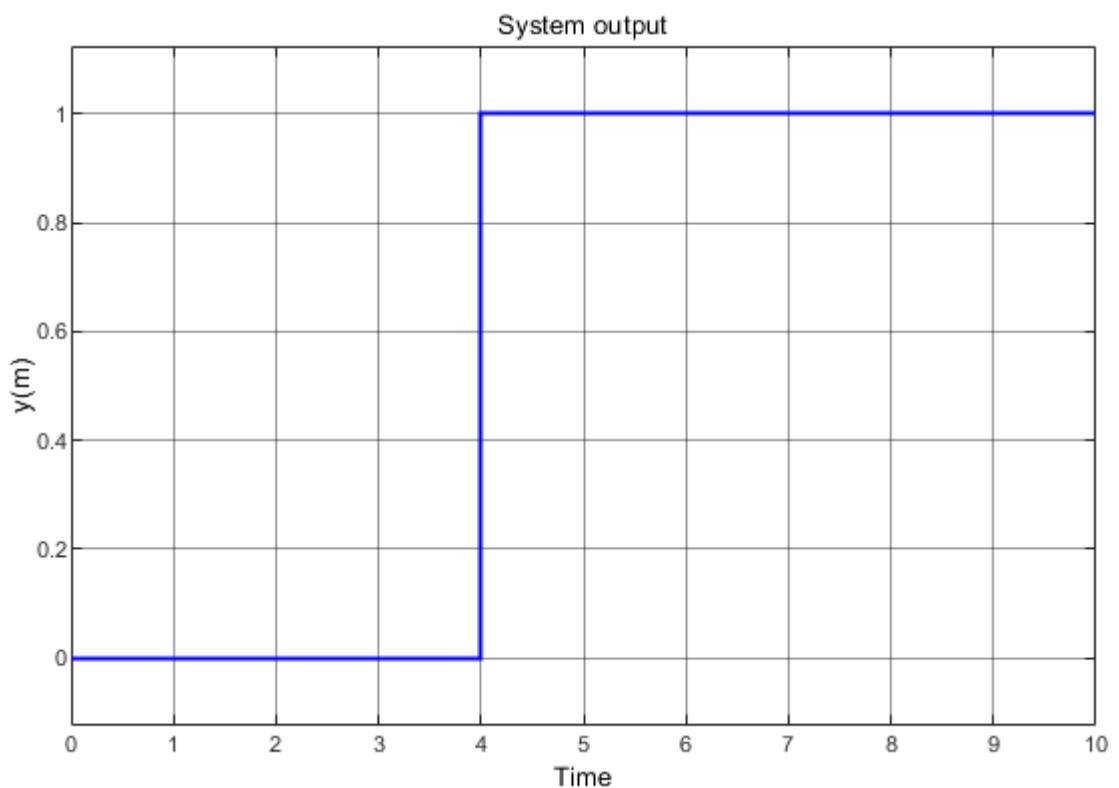


Рис. 5: Выход системы с апериодическим регулятором, $T = 1, k = 3$

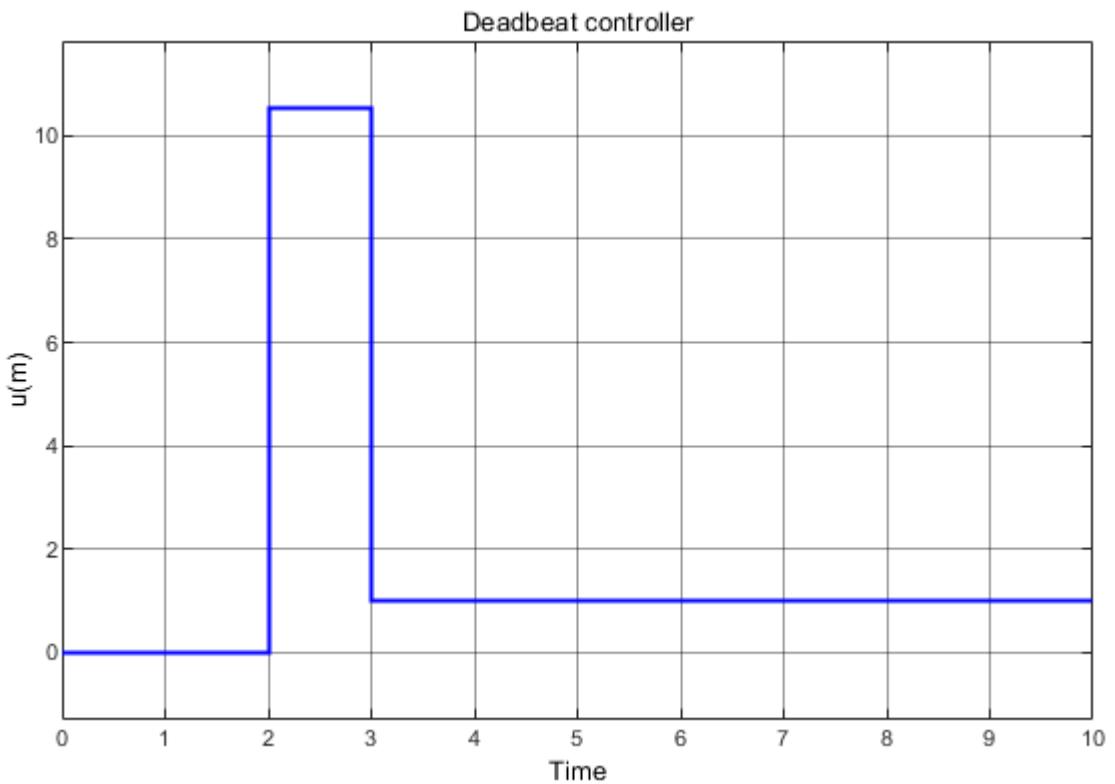


Рис. 6: Апериодический регулятор, $T = 1, k = 3$

Выход системы отстает на $m = 2$ шага от входа при $k = 2$, при $k = 3$ на $m = 3$ шага, т.е. отставание на k .

2.2. Регулятор Далина

Синтезируем для непрерывного ОУ регулятор Далина при периоде дискретизации $T = 1$.

Регулятор Далина – модификация апериодического регулятора, имеющая более плавный экспоненциальный отклик.

Желаемое поведение системы в s -плоскости:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-as}}{1 + bs} = \frac{1}{s} \frac{e^{-1.1s}}{1 + 10s}$$

Параметры a, b определяют численные параметры желаемого поведения выходной величины.

Z -преобразование желаемой реакции системы при $a = kT$:

$$Y(z) = \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T/b})}{(1 - z^{-1}) (1 - e^{-T/b} z^{-1})}$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T/b}) (1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1}) (1 - e^{-T/b} z^{-1})} = \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T/b})}{1 - e^{-T/b} z^{-1}}$$

Передаточная функция регулятора:

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-T/b})}{1 - e^{-T/b} z^{-1} - (1 - e^{-T/b}) z^{-k-1}}$$

Передаточная функция ОУ с ЭНП выражается аналогично пункту с апериодическим регулятором:

$$e^{-1.1s} \sim e^{-s}, HG(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} = \frac{0.095z^{-2}}{1 - 0.905z^{-1}} = \frac{0.095}{z^2 - 0.905z}$$

Передаточная функция регулятора:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}} \frac{z^{-k-1} (1 - e^{-0.1})}{1 - e^{-0.1} z^{-1} - (1 - e^{-0.1}) z^{-k-1}} = \\ &= \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}} \frac{0.095z^{-k-1}}{1 - 0.905z^{-1} - 0.095z^{-k-1}} \end{aligned}$$

С учетом требования физической реализуемости $k \geq 1$ положим $k = 1$:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.095z^{-2}} \frac{0.095z^{-2}}{1 - 0.905z^{-1} - 0.095z^{-2}} = \\ &= \frac{1 - 0.905z^{-1}}{1 - 0.905z^{-1} - 0.095z^{-2}} = \frac{0.095z^2 - 0.086z}{0.095z^2 - 0.086z - 0.009} \end{aligned}$$

Схема моделирования замкнутой системы:

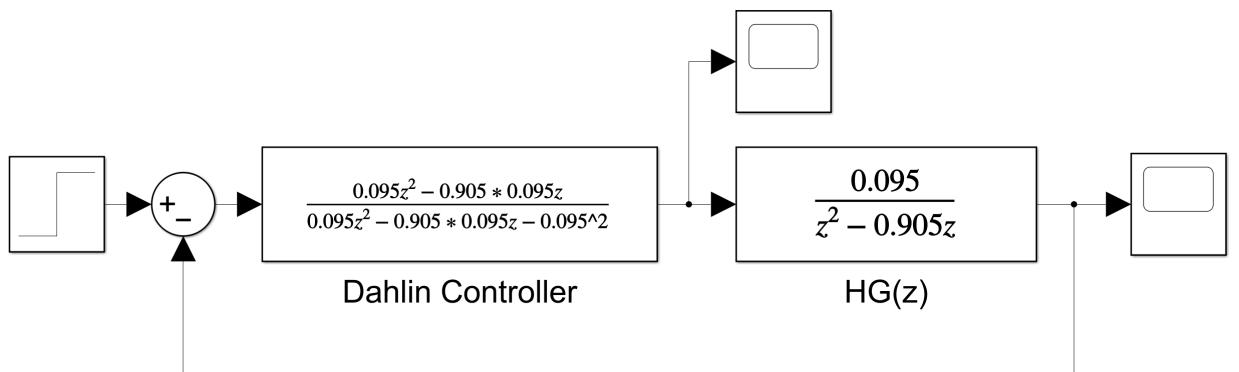


Рис. 7: Схема моделирования системы с регулятором Далина

Графики управления и выхода системы при ступенчатом задающем воздействии $r(m)$ (см. рис. (2)) при $T = 1$, $k = [1, 3]$:

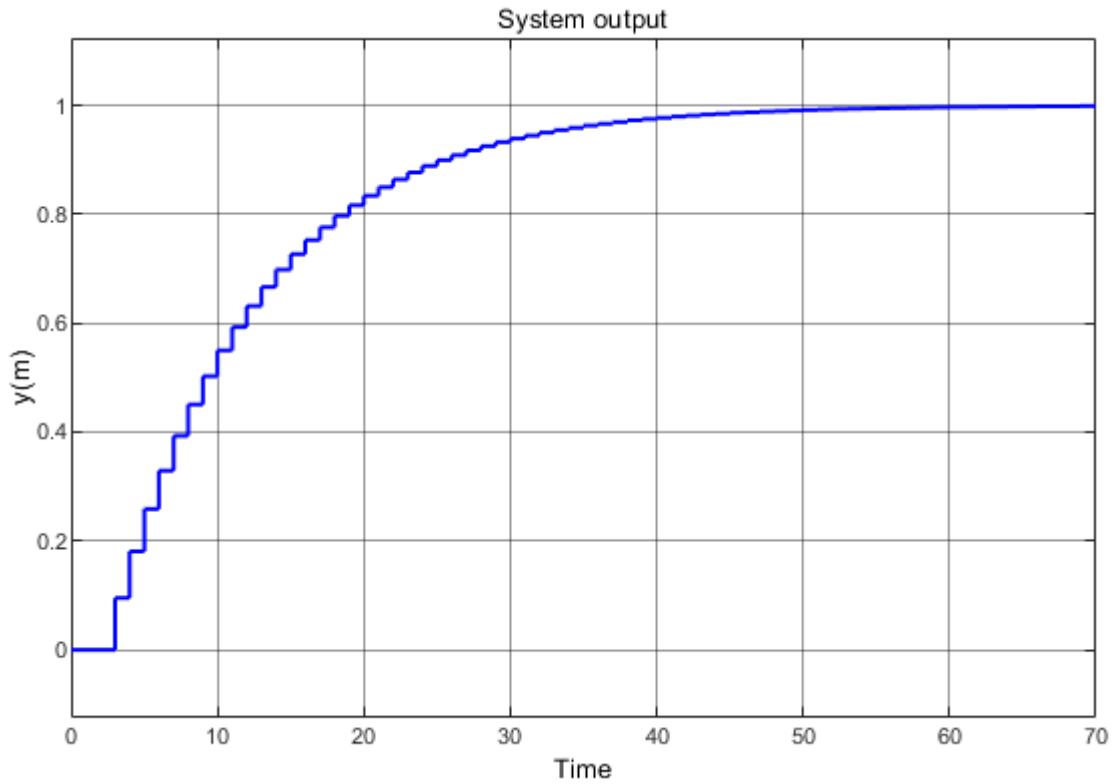


Рис. 8: Выход системы с регулятором Далина, $T = 1, k = 1$

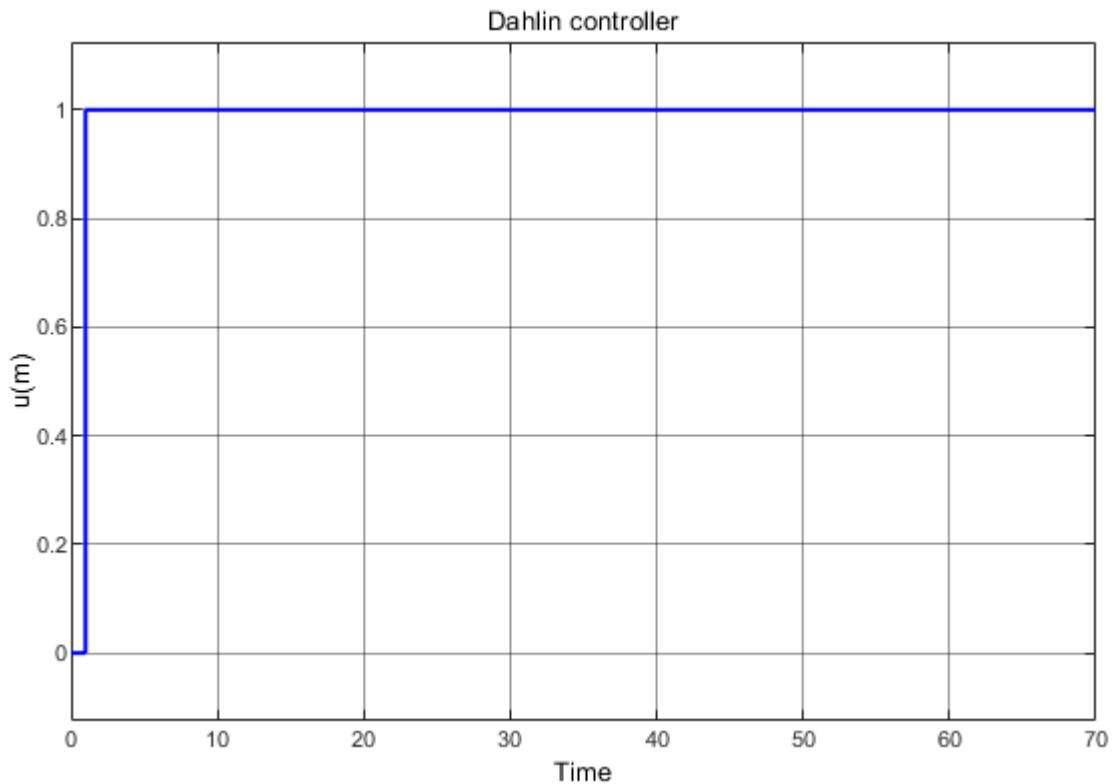


Рис. 9: Регулятор Далина, $T = 1, k = 1$

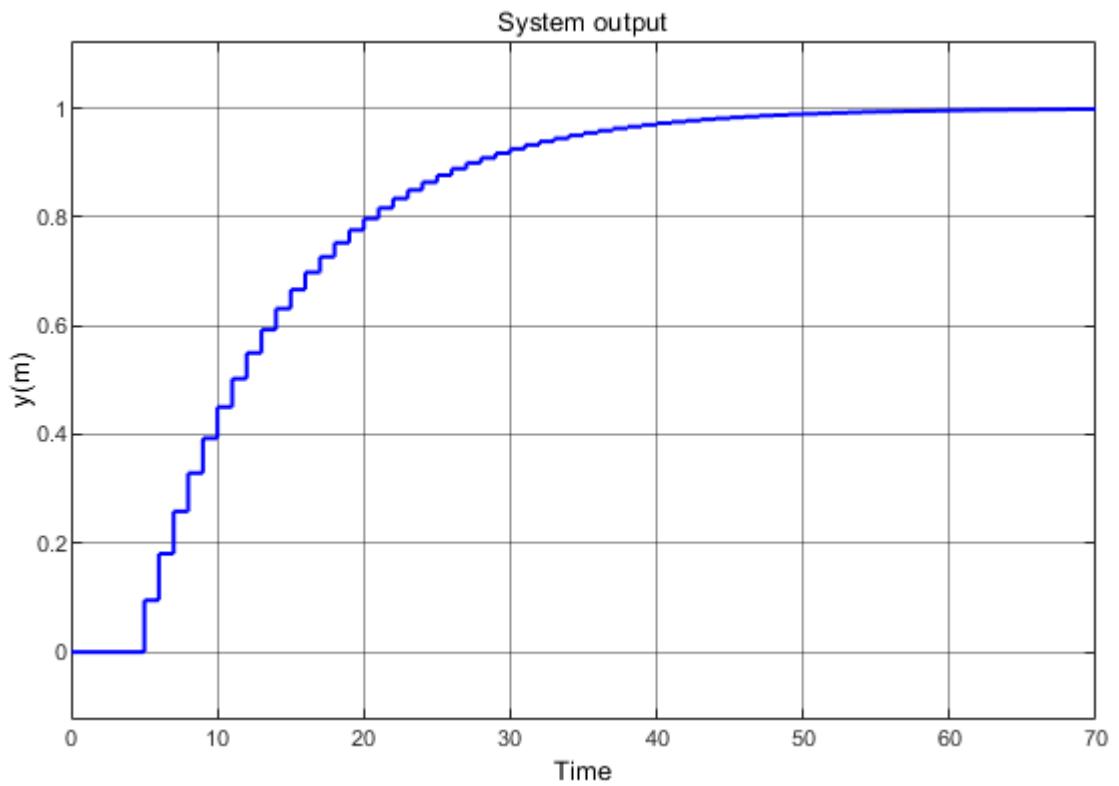


Рис. 10: Выход системы с регулятором Далина, $T = 1, k = 3$

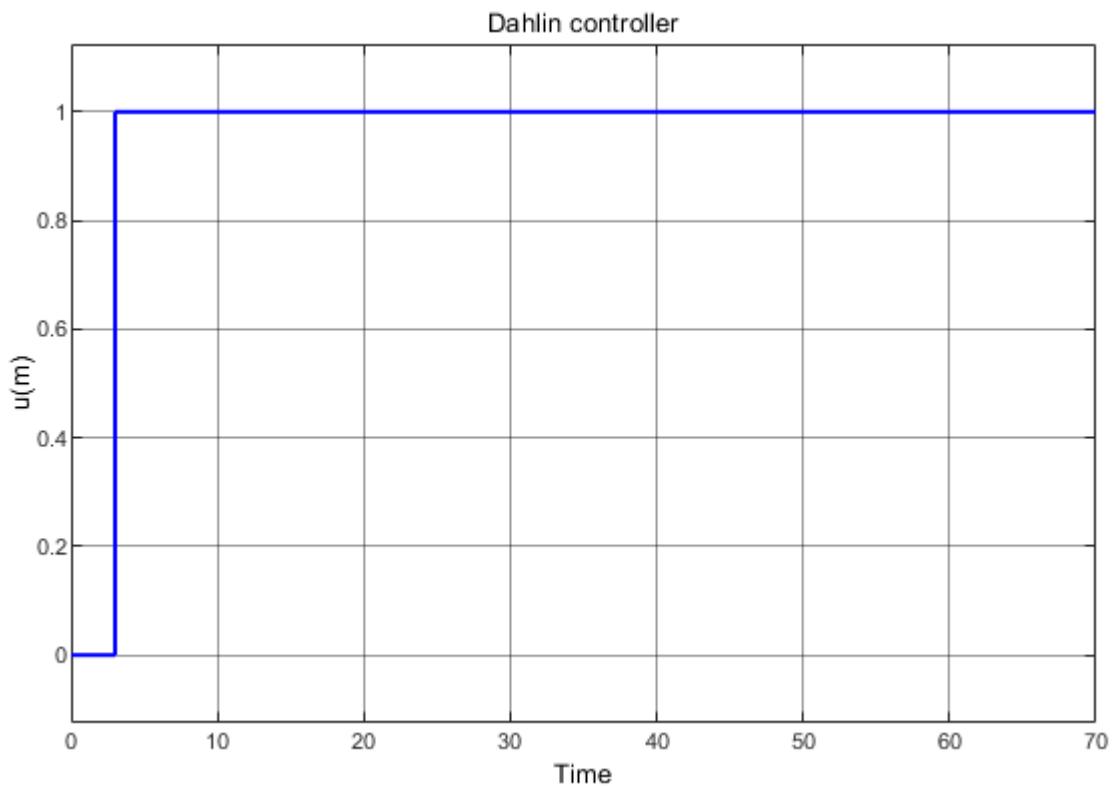


Рис. 11: Регулятор Далина, $T = 1, k = 3$

Величина управления меньше по сравнению с апериодическим регулятором, но выход сходится дольше к устоявшемуся значению. Отставание на $k + 1$.

2.3. Регулятор с заданным расположением полюсов

Дискретизованный ОУ с ЭНП задан передаточной функцией:

$$HG(z) = \frac{0.03(z + 0.75)}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

Разработаем дискретный регулятор, обеспечивающий заданное расположение полюсов замкнутой системы так, чтобы ее отклик был колебательным с декрементом затухания $\zeta = 0.35$ и частотой колебаний $\omega_d = 4$. Установившаяся ошибка для ступенчатого входа должна быть равна нулю. Установившаяся ошибка для линейно нарастающего входа должна быть равна $K_v = 0.1$. Период дискретизации $T = 0.55$.

Полюса передаточной функции:

$$z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\zeta\omega_n T} \left(\cos(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}) \pm j \sin(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}) \right)$$

Связь демпфированного синусоидального частотного компонента с собственной частотой:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - 0.35^2}} \approx 4.27$$

Тогда:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\zeta\omega_n T} (\cos(\omega_d T) \pm j \sin(\omega_d T)) = \\ &= e^{-0.35 \cdot 4.27 \cdot 0.55} (\cos(4 \cdot 0.55) \pm j \sin(4 \cdot 0.55)) = \\ &= -0.259 \pm 0.355j \end{aligned}$$

Желаемая передаточная функция замкнутой системы:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{(z - (-0.259 + 0.355j))(z - (-0.259 - 0.355j))} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}} \end{aligned}$$

Физическая реализуемость: $b_0 = 0, b_1, b_2 \neq 0$. Передаточная функция:

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}}$$

Найдем коэффициенты числителя.

Установившаяся ошибка:

$$E(z) = R(z)(1 - T(z))$$

Для единичного ступенчатого входного сигнала установившуюся ошибку можно определить с помощью теоремы о конечном значении:

$$E_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-1} [v] = 1 - T(1)$$

Установившаяся ошибка примет нулевое значение при $T(1) = 1$:

$$T(z=1) = \frac{b_1 + b_2}{1.711} = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 = 1.711,$$

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + 0.518z + 0.193}$$

Пусть K_v – добротность по скорости замкнутой системы, тогда установившаяся ошибка при линейно нарастающем входном воздействии:

$$E_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{Tz}{(z-1)^2} [1 - T(z)] = \frac{1}{K_v}$$

или, используя правило Лопиталя

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=1} = -\frac{1}{K_v T}$$

Получим:

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=1} = \left. \frac{b_1 (z^2 + 0.518z + 0.193) - (b_1 z + b_2) (2z + 0.518)}{(z^2 + 0.518z + 0.193)^2} \right|_{z=1} = -\frac{1}{K_v T}$$

Подставим значения:

$$\frac{-0.807b_1 - 2.518b_2}{2.928} = -18.182$$

Составим систему и найдем коэффициенты числителя:

$$\begin{cases} -0.807b_1 - 2.518b_2 = -53.236, \\ b_1 + b_2 = 1.711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1.711 - b_2, \\ -1.711b_2 = -51.855, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -28.596, \\ b_2 = 30.307 \end{cases}$$

Передаточная функция:

$$T(z) = \frac{-28.596z^{-1} + 30.307z^{-2}}{1 + 0.518z^{-1} + 0.193z^{-2}} = \frac{-28.596z + 30.307}{z^2 + 0.518z + 0.193}$$

Передаточная функция регулятора:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{HG(z)} \frac{T(z)}{1 - T(z)}, \\ D(z) &= \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{0.03(z + 0.75)} \cdot \frac{-28.596z + 30.307}{z^2 + 29.114z - 30.114}, \\ D(z) &= \frac{-28.596z^3 + 73.201z^2 - 59.759z + 15.154}{0.03z^3 + 0.896z^2 - 0.248z - 0.678} \end{aligned}$$

Схема моделирования системы с регулятором с заданным расположением полюсов:

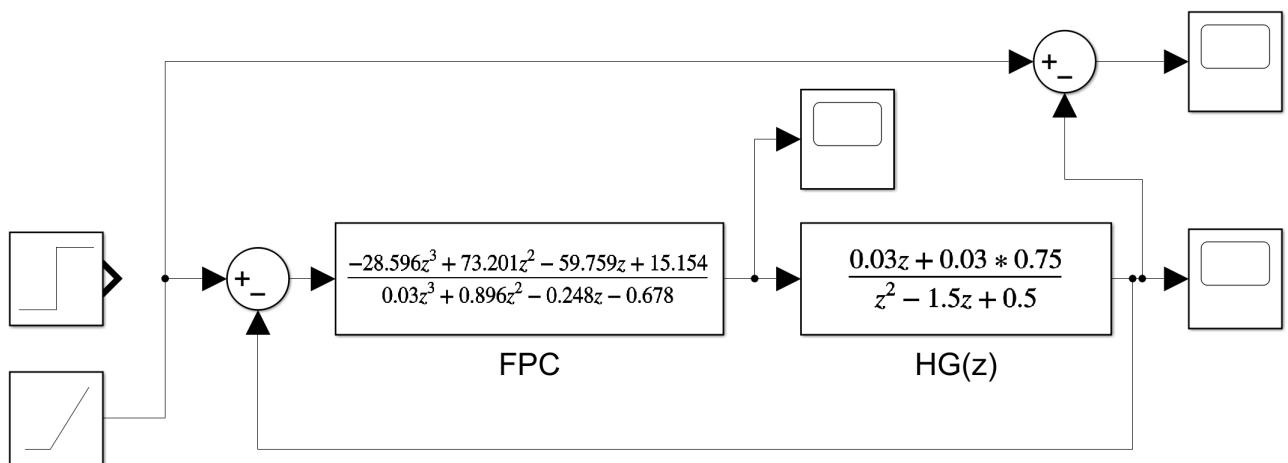


Рис. 12: Схема моделирования системы с fixed-pole регулятором

Графики управления, выхода системы и ошибки при ступенчатом (см. рис. (2)) и линейно нарастающем задающих воздействиях $r(m)$, $\tilde{r}(m)$ при $T = 0.55$:

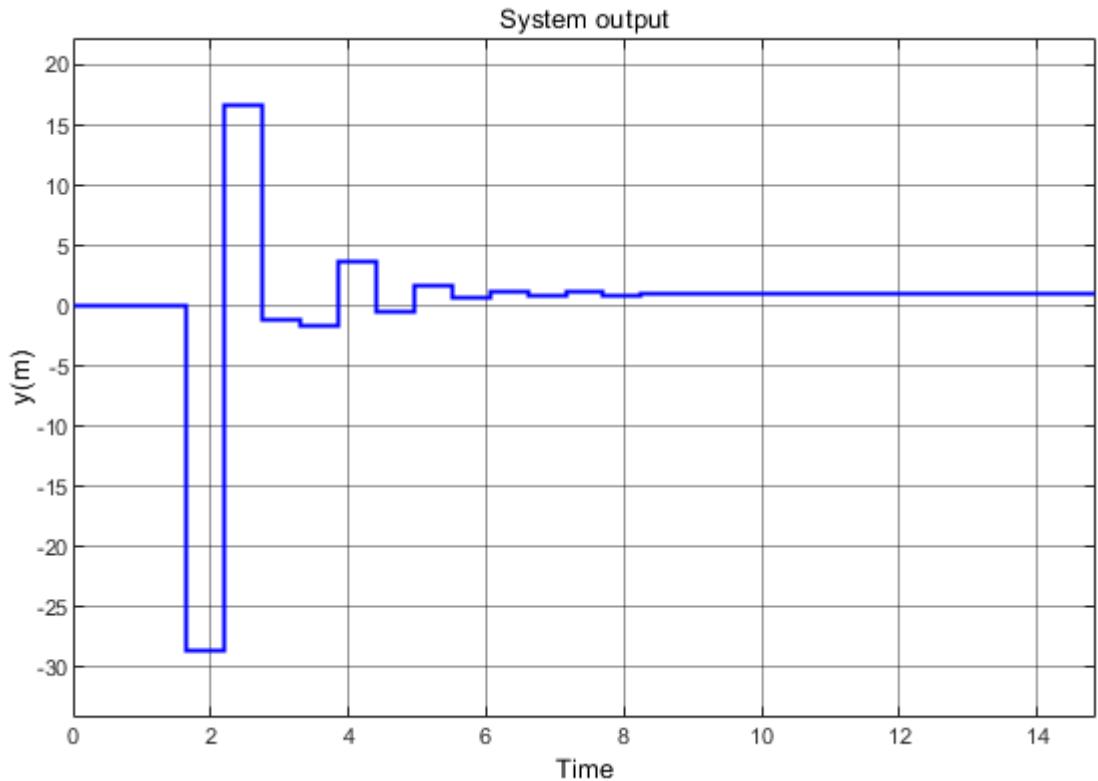


Рис. 13: Выход системы с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $r(m)$

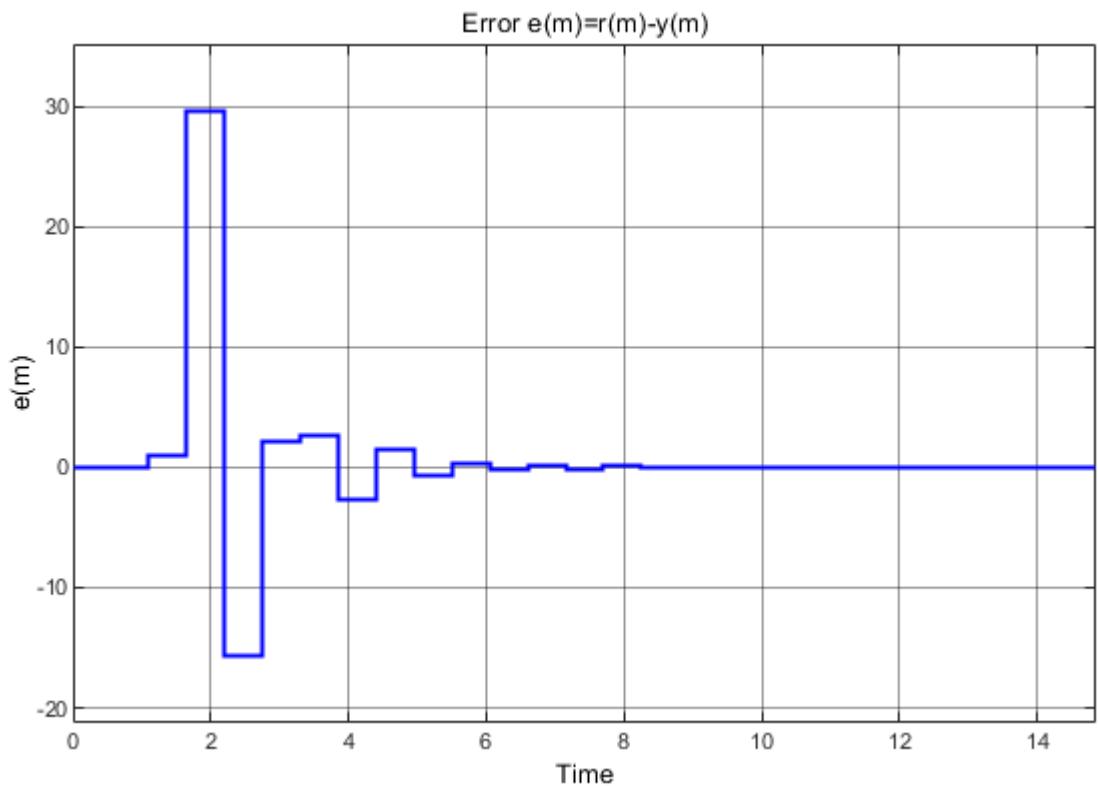


Рис. 14: Ошибка с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $r(m)$

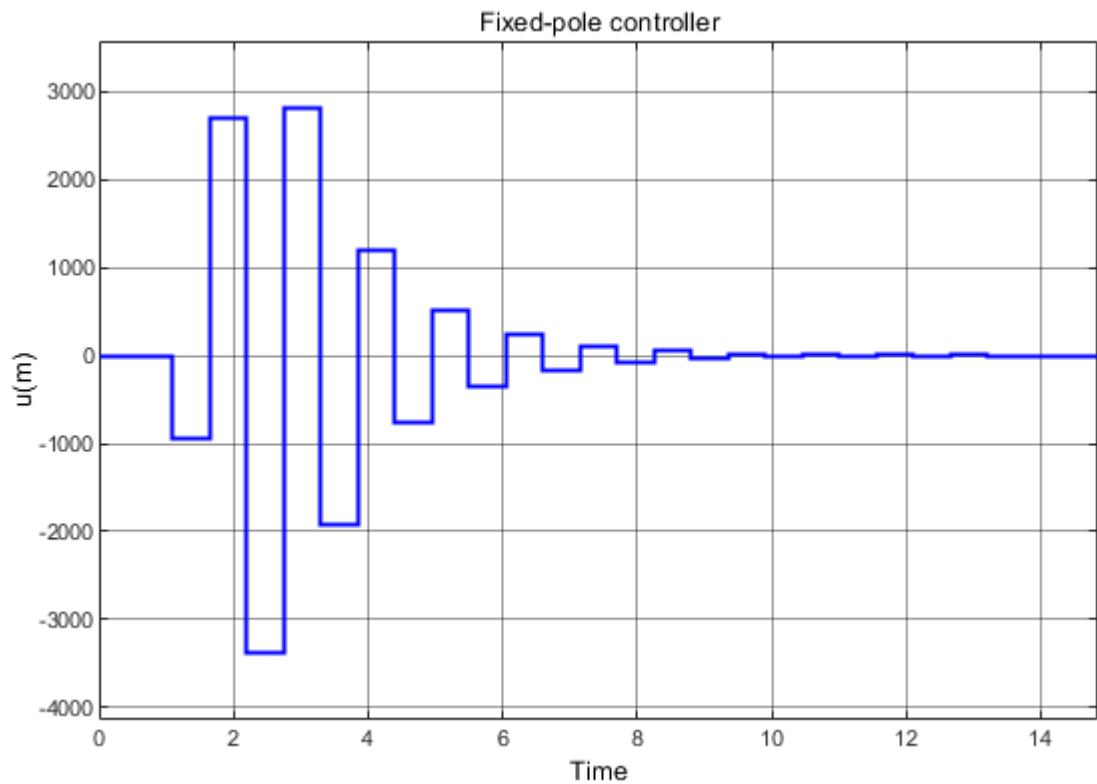


Рис. 15: Fixed-pole регулятор, $T = 0.55$, вход $r(m)$

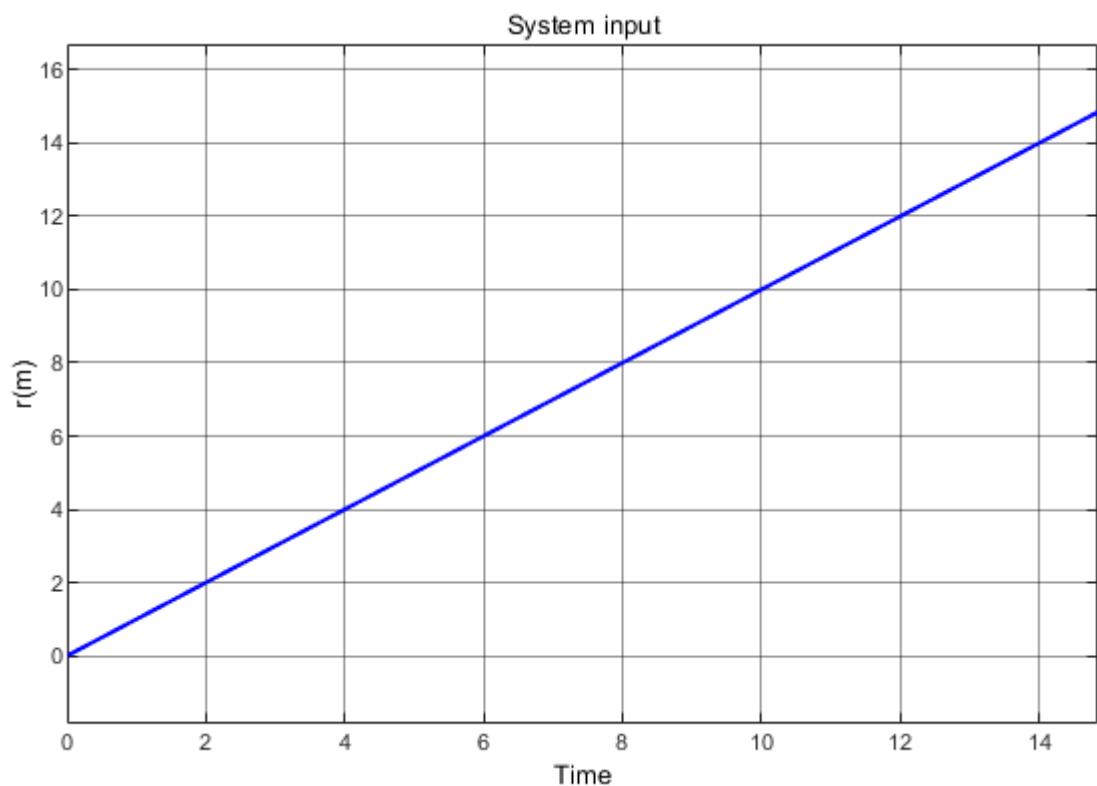


Рис. 16: Линейно нарастающее задающее воздействие $\tilde{r}(m)$

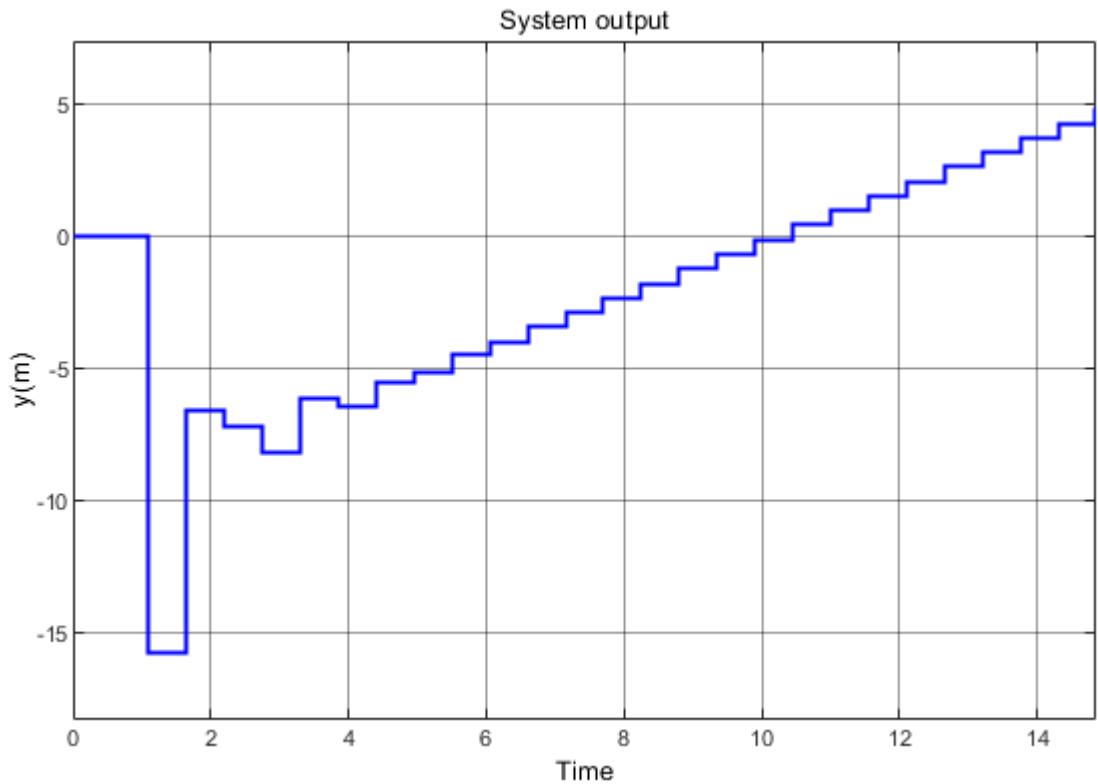


Рис. 17: Выход системы с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

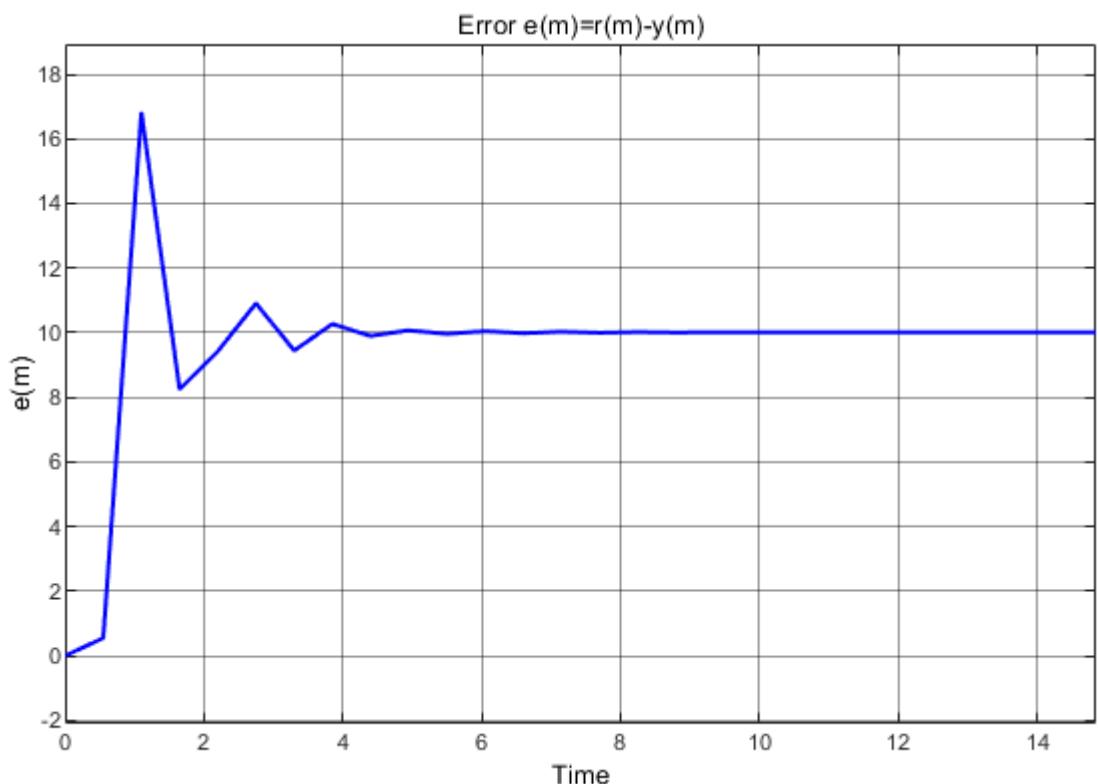


Рис. 18: Ошибка с fixed-pole регулятором, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

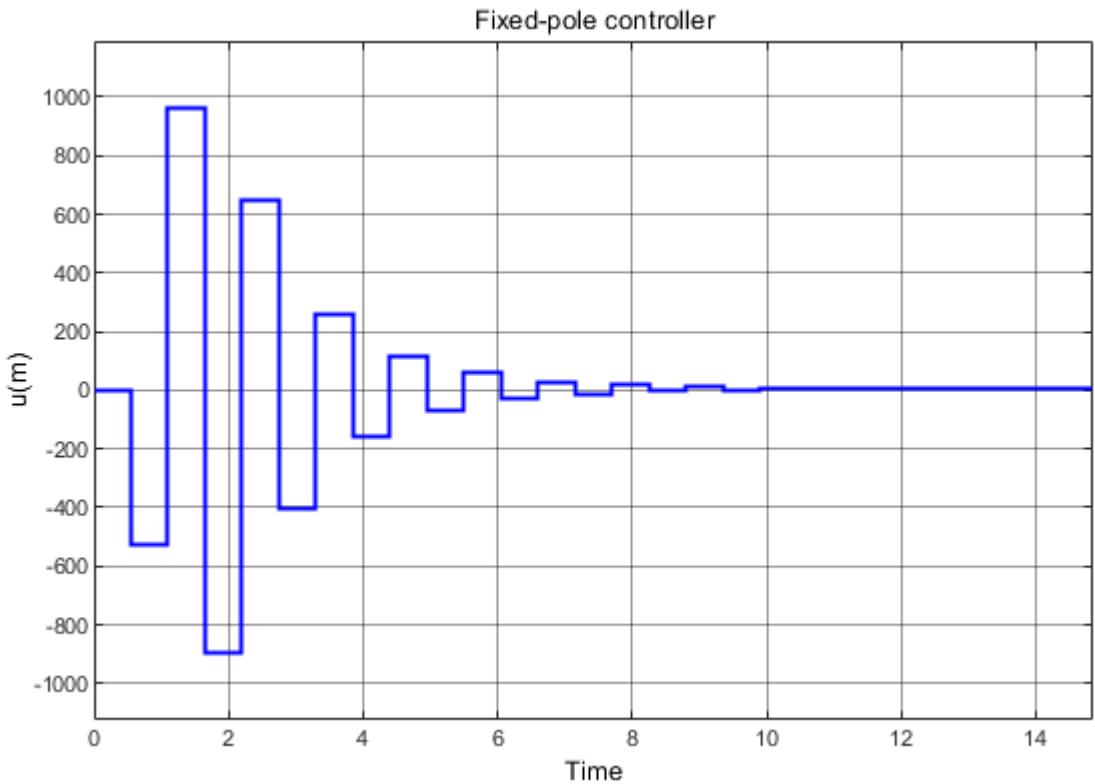


Рис. 19: Fixed-pole регулятор, $T = 0.55$, вход $\tilde{r}(m)$

Ошибка при ступенчатом входном воздействии стремится к нулю.

Ошибка при линейно нарастающем входном воздействии с $A = 1$ стремится к 10. Проверим теоретически:

$$E_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{1}{0.1} = 10$$

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы апериодический, Далина и с заданным расположением полюсов регуляторы. В каждом случае было проведено моделирование системы. Результаты подтверждают корректность выполненных расчетов.