

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2**  
по дисциплине  
**«ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«ДИСКРЕТНЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ И СЛЕДЯЩИЕ  
РЕГУЛЯТОРЫ. НАБЛЮДАТЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ  
СИСТЕМЫ»**

Вариант 20

Выполнил: студент гр. Р3441  
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель  
Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург  
2025

## **Содержание**

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Проектирование дискретных стабилизирующих регуляторов</b>      | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Проектирование дискретных следящих регуляторов</b>             | <b>8</b>  |
| <b>3</b> | <b>Построение регуляторов для объектов с неполной информацией</b> | <b>14</b> |
| <b>4</b> | <b>Вывод</b>  | <b>21</b> |

# 1. Проектирование дискретных стабилизирующих регуляторов

Исходные данные:

| Тип ОУ | $k_1$ | $a_0^1$ | $T_1$ | $\xi$ | $k_2$ | $a_0^2$ | $T_2$ | $T$ |
|--------|-------|---------|-------|-------|-------|---------|-------|-----|
| 4      | 9.71  | 0       | 1     | 0     | 1     | 0       | 4     | 1   |

Тип ОУ:

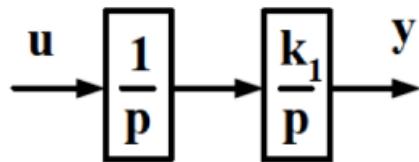


Рис. 1: Объект управления №4

В-С-В непрерывного ОУ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h u(t), \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Исходная передаточная функция:

$$W(p) = \frac{k_1}{p^2}$$

В операторной форме:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k_1}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{k_1}{p^2} U(p) \Rightarrow p^2 Y(p) = k_1 U(p)$$

Заменим  $p$  на  $d/dt$ :

$$\ddot{y}(t) = k_1 u(t)$$

Перейдем к канонической управляемой форме.

Замены:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

Каноническая управляемая форма:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = k_1 u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

Матрицы в форме состояния:

$$A_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Дискретные системы в пространстве состояний описываются разностными уравнениями:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Приведем к дискретному виду:

$$A = \sum_{i=0}^k \frac{A_{\text{H}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^k \frac{A_{\text{H}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{H}}$$

Рассмотрим  $i = 0, 1, 2$ :

$$A_{\text{H}}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Достаточно взять  $k = 2$ :

$$A = I + A_{\text{H}}T + \frac{A_{\text{H}}^2 T^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = A_{\text{H}}^0 T B_{\text{H}} + \frac{A_{\text{H}}^1 T^2 B_{\text{H}}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{T^2 k_1}{2} \\ Tk_1 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.855 \\ 9.71 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Корни характеристического полинома:

$$\det(zI - A) = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = 1$$

Система неустойчива по Ляпунову, т.к. собственные числа не удовлетворяют  $|z_i| < 1$ .

Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.855 & 14.565 \\ 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}$$

Ее ранг:

$$\text{rank}[U] = 2$$

Ранг матрицы управляемости равен размерности состояния  $n = 2$  – система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ее ранг:

$$\text{rank}[V] = 2$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности состояния  $n = 2$  – система полностью наблюдаема.

Эталонная модель дискретной системы задается разностными уравнениями:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma \xi(k), \\ y(k) = H \xi(k), \end{cases}$$

где  $\xi(k)$  – вектор состояния дискретной эталонной модели, матрицы  $\Gamma, H$  выбираются в соответствии с требуемыми показателями качества.

Возьмем оптимальную по быстродействию дискретную систему – когда  $z_i^* = 0, i = \overline{1, n}$ :

$$\Gamma_{n \times n} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{l=1 \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара  $(H, \Gamma)$  полностью наблюдаема по признаку Жордана – второй элемент состояния выражается через первый при умножении на  $\Gamma$ , который изменяется через  $H$ .

Эталонный характеристический полином:

$$D^*(z) = \det(zI - \Gamma) = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{vmatrix} = z^2$$

Оба полюса дискретной эталонной системы находятся в  $z = 0$  (максимально быстрое затухание).

Уравнение типа Сильвестра:

$$M\Gamma - AM = -BH$$

Решение относительно  $M$ :

$$M = \begin{bmatrix} -4.855 & -14.565 \\ 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}$$

Матрица линейных стационарных обратных связей:

$$K = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.1545 \end{bmatrix}$$

Замкнутая система:

$$x(k+1) = Fx(k), \quad F = A - BK, \quad u = -Kx(k)$$

Схема моделирования системы:

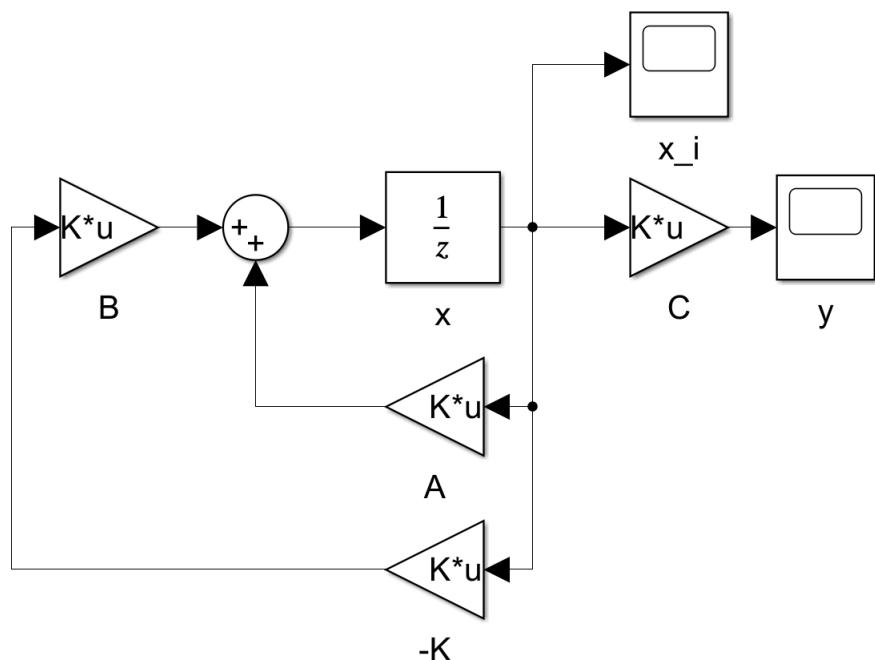


Рис. 2: Схема моделирования системы

Выполним моделирование замкнутой системы при  $y(0) = 1, \dot{y} = 0$ :

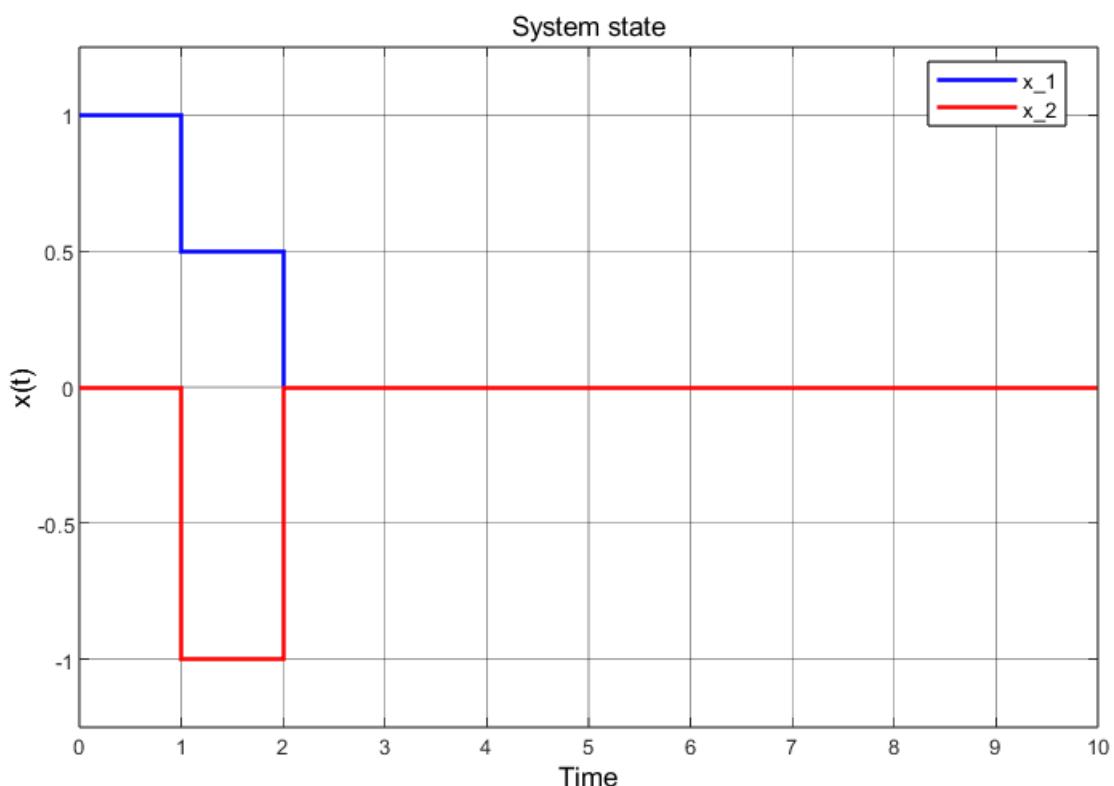


Рис. 3: Вектор состояния замкнутой системы

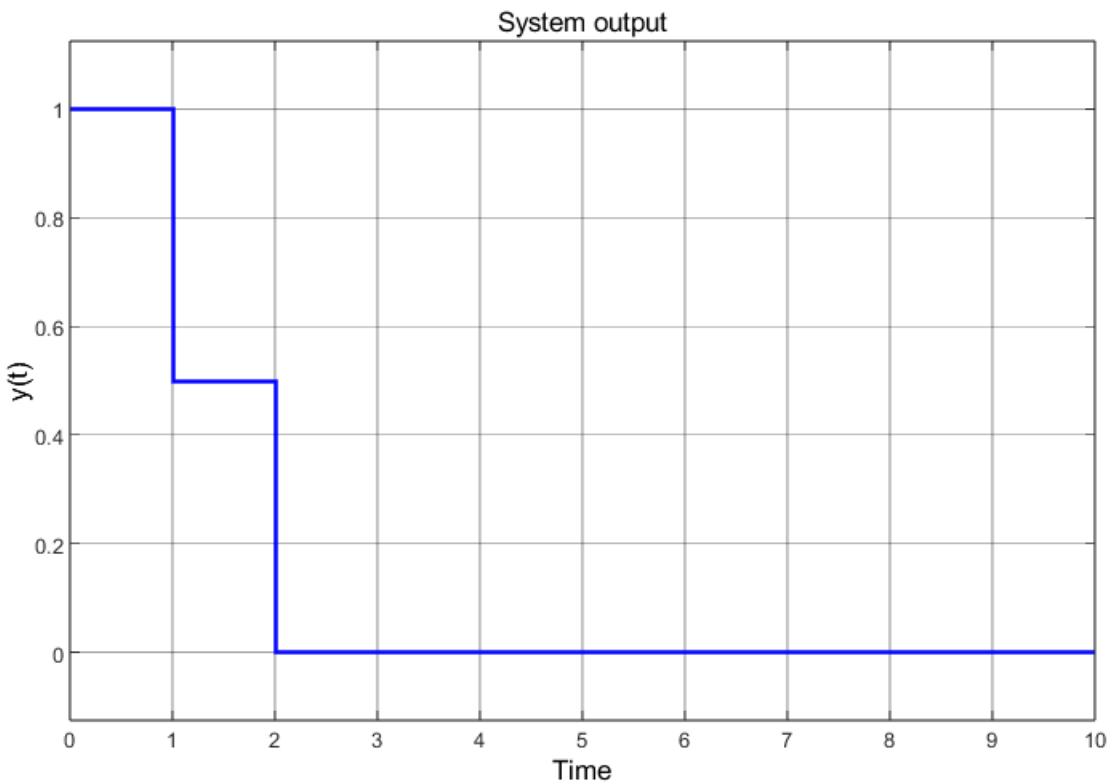


Рис. 4: Выход замкнутой системы

Время установления:

$$T_s = k_s T, \quad k_s = \min \{k : |y[m] - y_\infty| \leq \varepsilon \forall m \geq k\}$$

С момента  $k = 2$  значения равны нулю:

$$\forall \varepsilon > 0, m \geq k : |x[m] - 0| \leq \varepsilon \Rightarrow T_s = 2T = 2$$

Условие оптимальности по времени выполнилось:

$$T_s = 2 \leq nT = 2,$$

где  $n = 2$  – порядок системы.

## 2. Проектирование дискретных следящих регуляторов

Исходные данные:

| $g_0$ | $g_1$ | $A_g$ | $\omega_g$ |
|-------|-------|-------|------------|
| 2.12  | 0     | 0     | 0          |

Дискретная модель внешнего воздействия описывается в пространстве состояний системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma \xi(k), \\ y(k) = H \xi(k), \end{cases}$$

где  $\xi(k)$  –  $n$ -мерный вектор состояния дискретного командного генератора,  $\Gamma_{n \times n}$  – матрица динамических свойств дискретного генератора,  $H_{m=1 \times n}$  – матрица выхода модели.

Так как  $g(k) = g_0 + g_1 kT = 2.12 = \text{const.}$ , то  $n = 1$  – матрицы  $\Gamma, H$  – константы.

Пусть:

$$\Gamma = 1, H = 1, \xi(k) = g(k)$$

Тогда генератор задающего воздействия:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \xi(k), \\ g(k) = \xi(k) \end{cases}$$

Начальное условие:

$$\xi(0) = 2.12$$

Схема моделирования генератора:

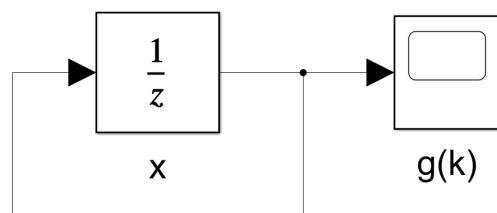


Рис. 5: Схема моделирования генератора

Выполним моделирование генератора:

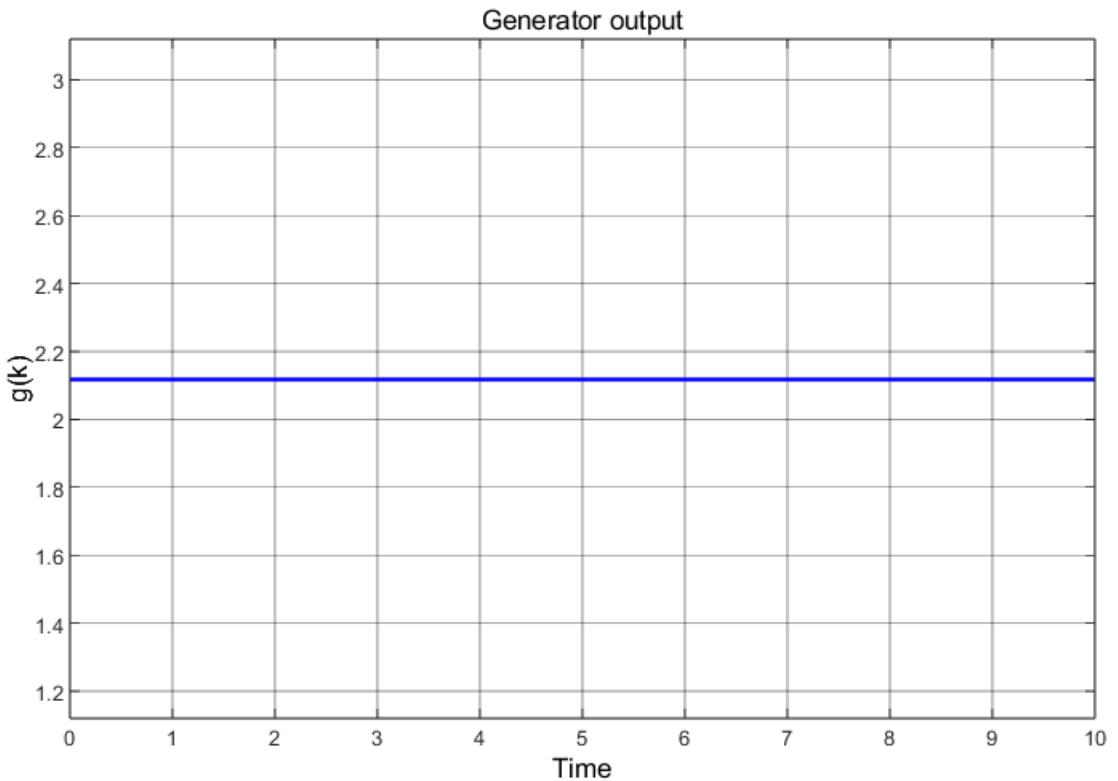


Рис. 6: Выход генератора

Регулятор со встроенной моделью:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta e(m), \\ u(m) = k_1e(m) + K_\eta\eta(m) - k_2x_2(m) - \dots - k_nx_n(m), \end{cases}$$

где  $\eta \in \mathbb{R}^q$  – вектор состояния встроенной модели, имеющий размерность вектора состояния внешних воздействий;  $\Gamma$  – матрица размерности  $q \times q$ , совпадающая с матрицей модели внешних воздействий;  $B_\eta$  – матрица входов встроенной модели.

Расширенная модель ОУ (объединение уравнения движения объекта  $x, y$  с уравнением встроенной модели  $\eta$ ):

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta g(m) - B_\eta y(m), \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

Расширенный вектор состояния:

$$\bar{x}(m+1) = \begin{bmatrix} \eta(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g(m)$$

Матрицы:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} -K_\eta & K \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1g(m), \\ u(m) = k_1g(m) - \bar{K}\bar{x}(m) \end{cases}$$

Замкнутая система:

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{x}(m) + (\bar{B}_1 + k_1\bar{B})g(m) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m),$$

где  $\bar{F}$  – матрица размерности  $(n+q) \times (n+q)$ , определяющая динамические свойства замкнутой системы;  $\bar{B}_g$  – матрица входов по задающему воздействию размерности  $(n+q) \times 1$ .

Пара  $(\Gamma = 1, B_\eta)$  управляема при любом ненулевом  $B_\eta$ :

$$B_\eta = 1$$

Условие управляемости  $(\Gamma, B_\eta)$  выполнено.

Так как пара  $(A, B)$  ОУ полностью управляема, пара  $(C, A)$  полностью наблюдаема и пара  $(\Gamma, B_\eta)$  полностью управляема, то пара  $(\bar{A}, \bar{B})$  полностью управляема.

В таком случае выбором матрицы  $\bar{K}$  можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы.

Оптимальная по быстродействию система при корнях характеристическо-

го полинома  $z_i^* = 0$ :

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара  $(\bar{H}, \bar{\Gamma})$  полностью наблюдаема по признаку Жордана.

Решим уравнение типа Сильвестра для расширенной системы:

$$\begin{cases} \bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} = -\bar{B}\bar{H}, \\ \bar{K} = \bar{H}\bar{M}^{-1} \end{cases}$$

Получим:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -4.855 & -19.42 & -43.695 \\ -4.855 & -14.565 & -24.275 \\ 9.71 & 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} -0.103 & 0.2575 & 0.1802 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\det(zI - \bar{F}) = 10^{-5} \cdot \{0.2384 \pm 0.4128i, -0.4767\}$$

Схема моделирования системы:

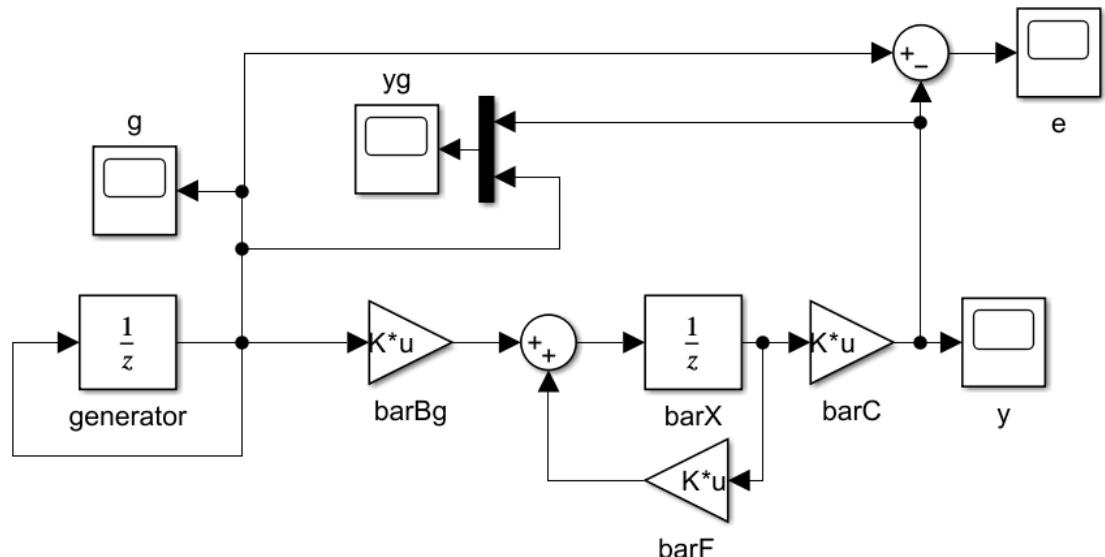


Рис. 7: Схема моделирования системы со следящим регулятором

Выполним моделирование системы при  $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ :

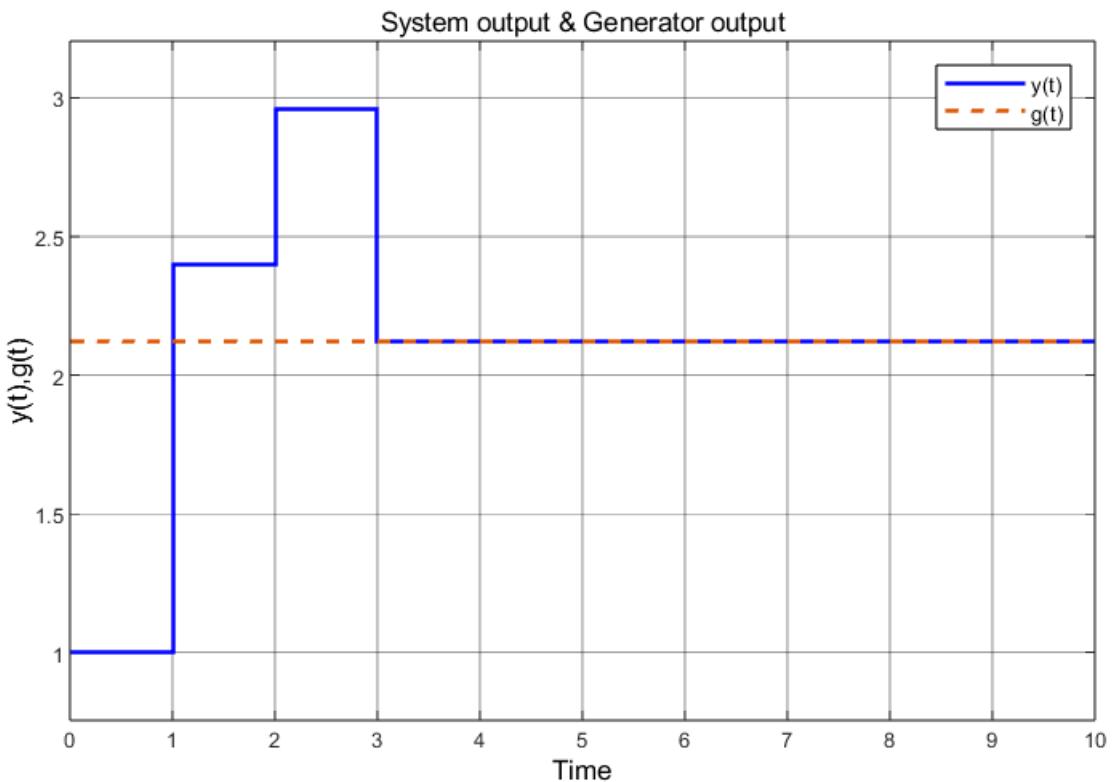


Рис. 8: Выход системы и генератора

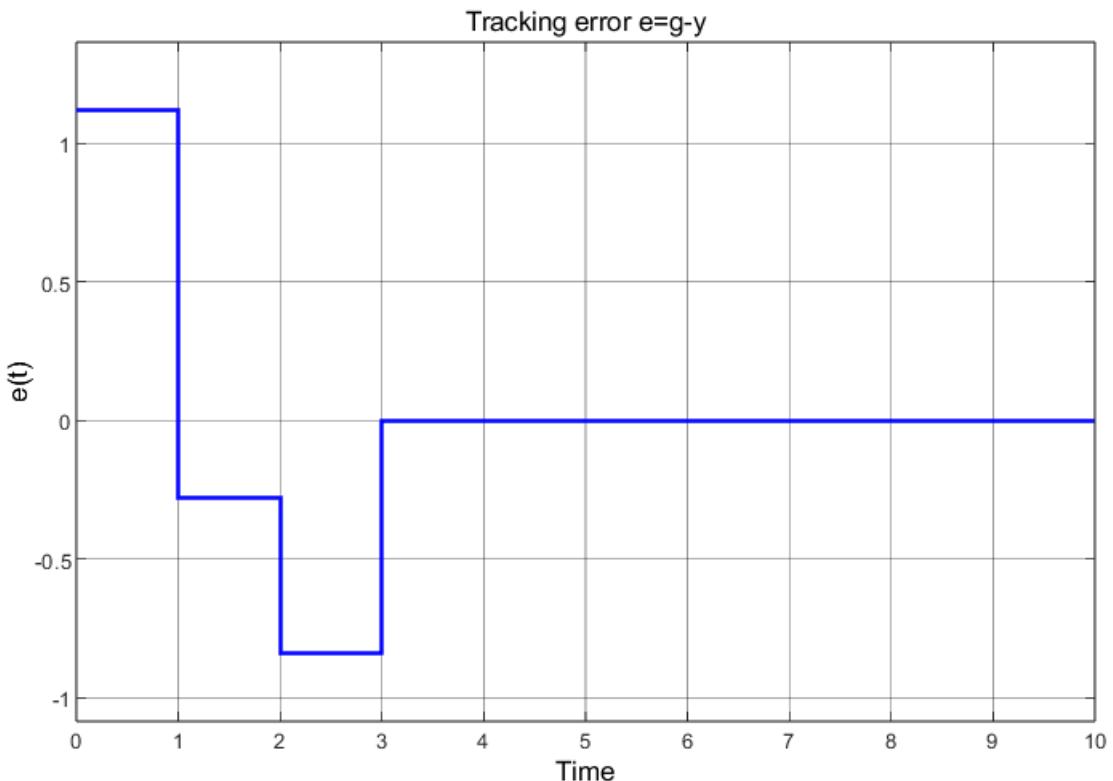


Рис. 9: Ошибка слежения

Выход системы сошелся к задающему сигналу за  $m = 3$  шага при  $T = 1$ , ошибка слежения нулевая.

Условие оптимальности по времени выполнилось:

$$T_s = 3 \leq nT = 3,$$

где  $n = 3$  – порядок расширенной системы.

### 3. Построение регуляторов для объектов с неполной информацией

Исходные данные: четный вариант – устройство оценки полной размерности.

Рассмотрим уравнение движения ОУ с неполной информацией:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \\ y_i(m) = C_i x(m), \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^k$  – вектор управляющих воздействий,  $y_i \in \mathbb{R}^l$  – вектор измеряемых величин,  $A$  – матрица динамики ОУ размерности  $n \times n$ ,  $B$  – матрица входов ОУ размерности  $n \times k$ ,  $C_i$  – матрица измерений ОУ размерности  $l \times n$ , при этом  $l < n$ ,  $\text{rank}(C_i) = l$ .

Динамический регулятор с устройством оценки полной размерности:

$$\hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_i - C_i\hat{x}(m)), \quad u(m) = -K\hat{x}(m),$$

где  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния устройства оценки,  $L$  – матрица входов устройства оценки размерности  $n \times l$ ,  $K$  – матрица обратных связей размера  $k \times n$ .

Ранее была проверена наблюдаемость пары  $(C = C_i, A)$  – система полностью наблюдаема.

Оптимальная по быстродействию модель при  $z_{ih}^* = 0$ :

$$\Gamma_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара  $(H_h, \Gamma_h)$  полностью управляема по признаку Жордана.

Решим уравнение типа Сильвестра относительно  $M_H$ :

$$\begin{cases} M_H \Gamma_H - A^T M_H = -C^T H_H, \\ L = (H_H M_H^{-1})^T \end{cases}$$

Получим:

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверим спектр  $F_H = A - LC$ :

$$\sigma(F_H) = 10^{-7} \cdot \{0 \pm 0.1772i\}$$

Регулятор из пункта (2):

$$K = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.1545 \end{bmatrix}$$

Схема моделирования системы:

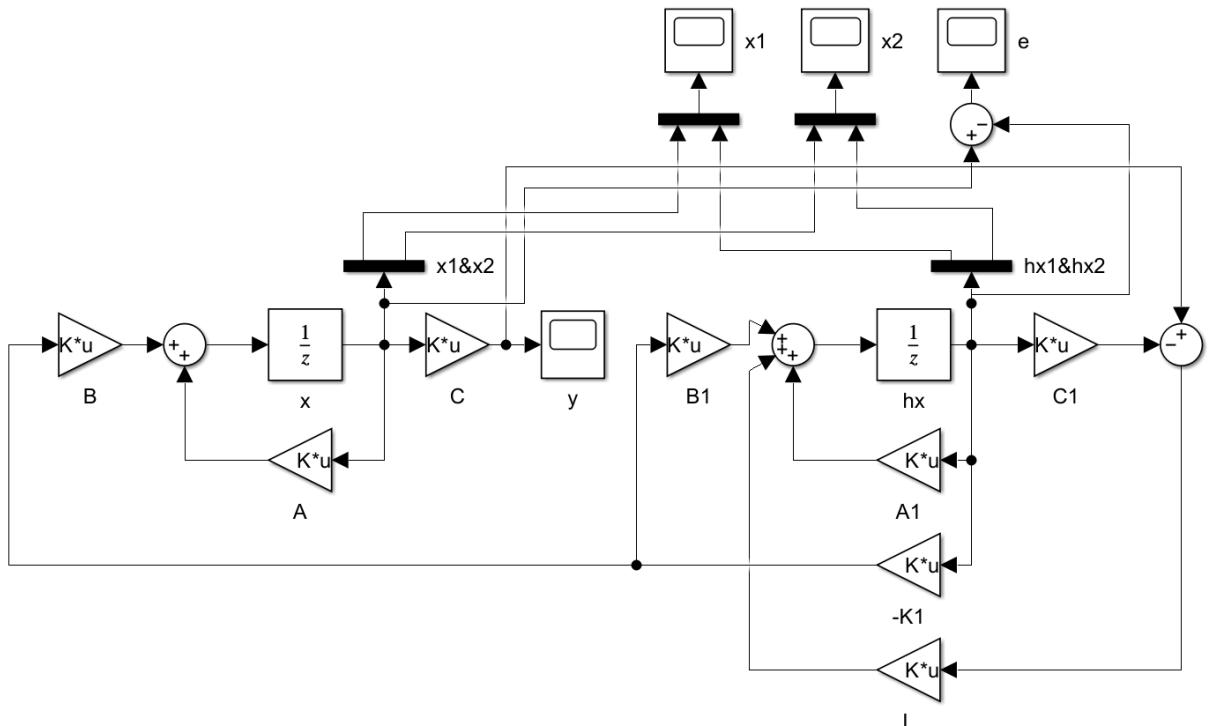


Рис. 10: Схема моделирования системы с регулятором и наблюдателем полной размерности

Выполним моделирование системы при  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ :

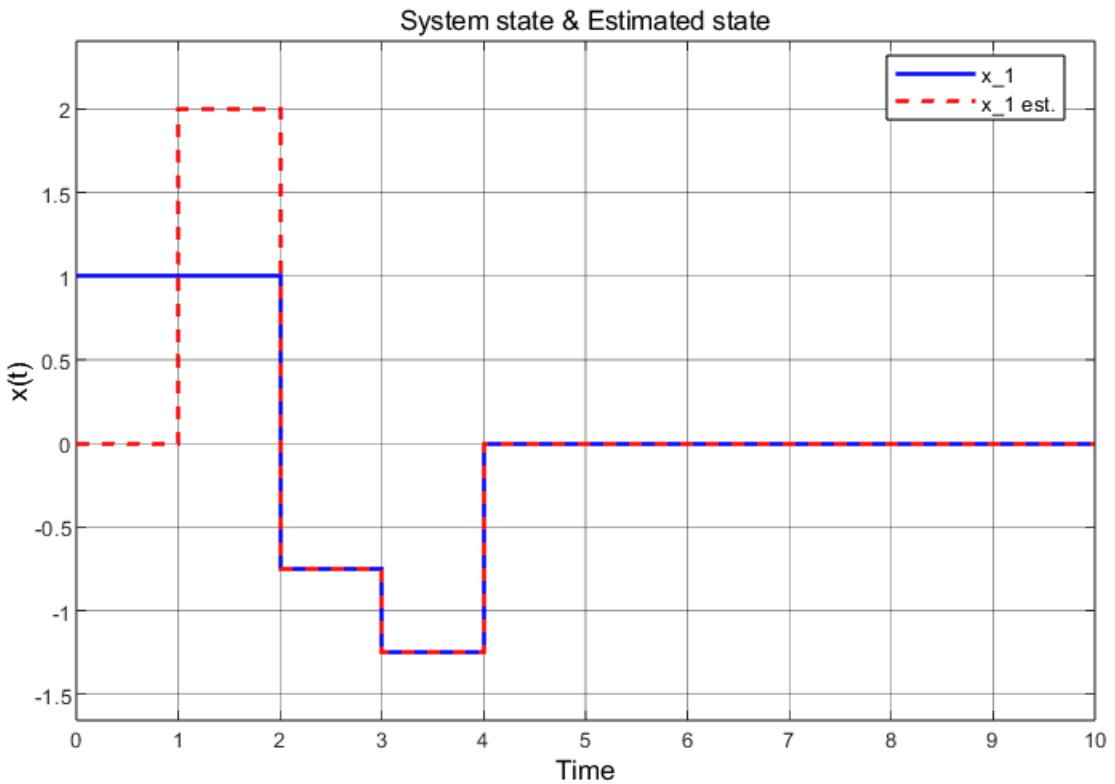


Рис. 11: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

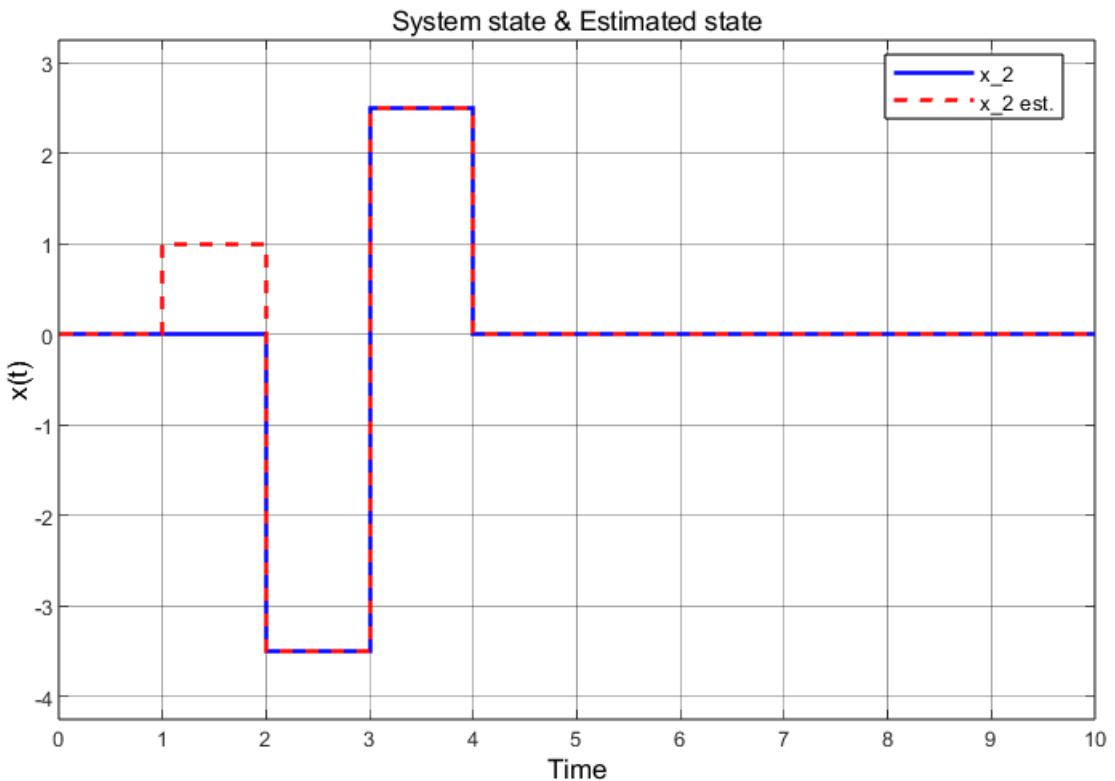


Рис. 12: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

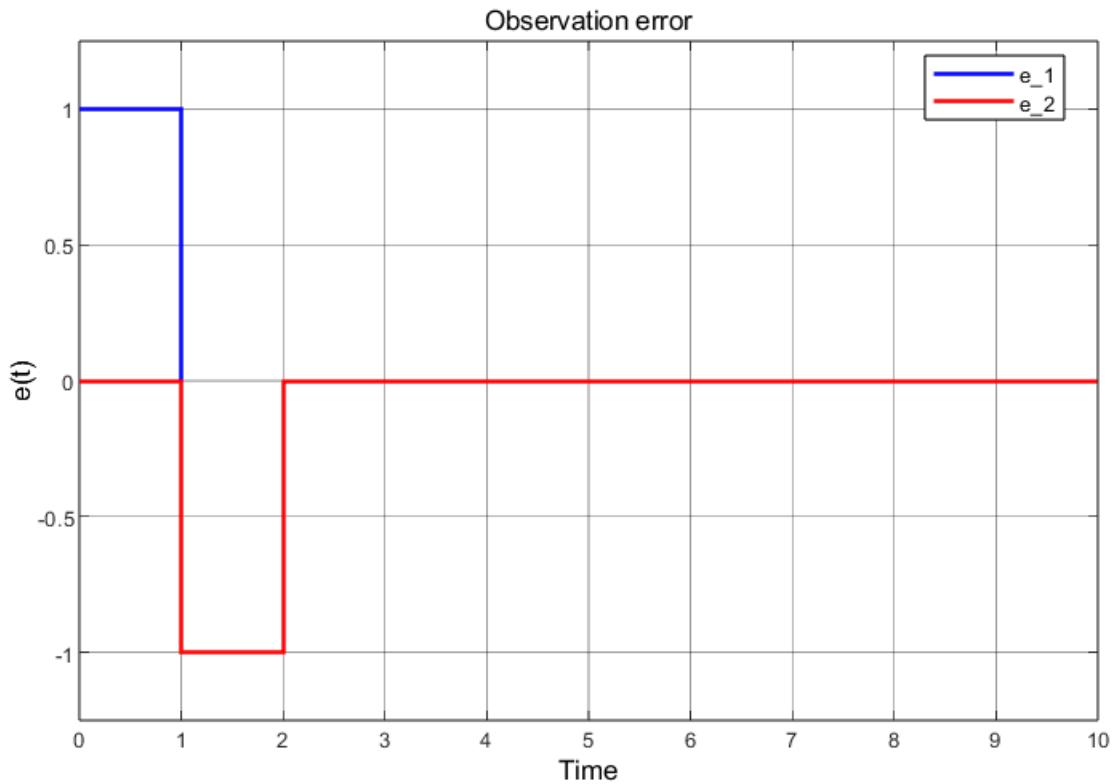


Рис. 13: Невязка наблюдателя  $e = x - \hat{x}$

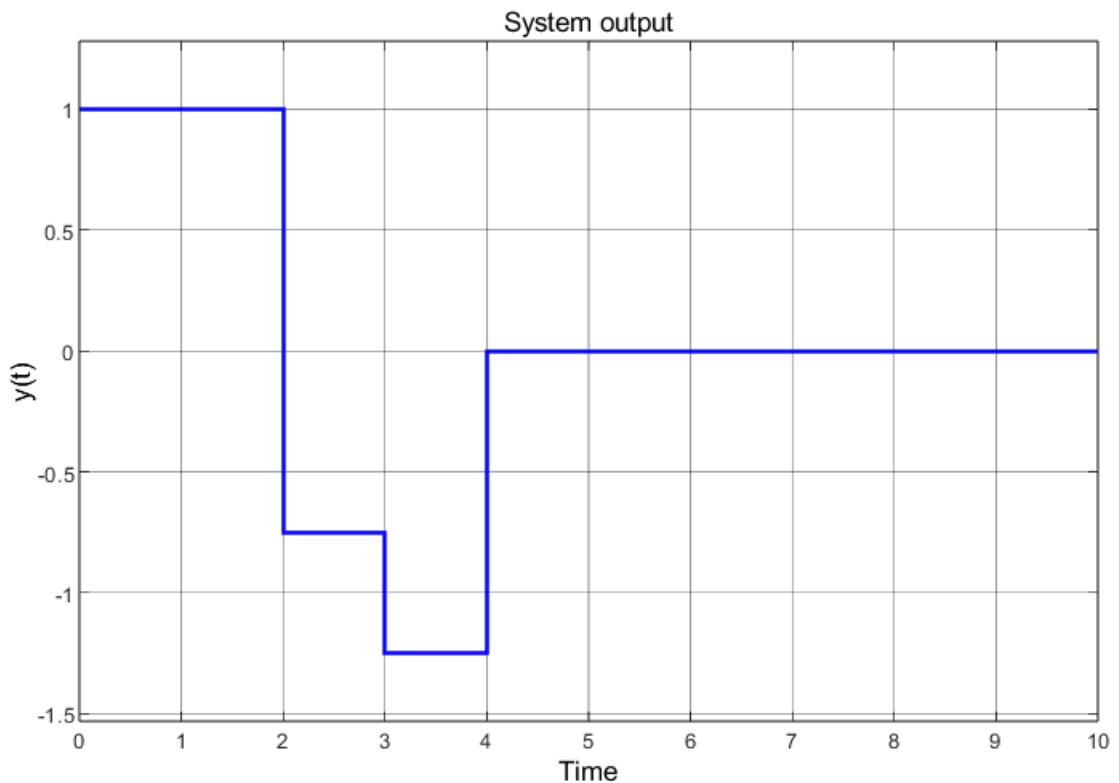


Рис. 14: Выход системы

Наблюдатель сошелся к истинным состояниям за  $m = 2$  шага при  $T = 1$

– это удовлетворяет условию оптимальной по быстродействию сходимости:

$$T_L = 2 \leq nT = 2,$$

где  $n = 2$  – порядок системы.

Сходимость системы к устоявшемуся состоянию увеличилась с  $m = 2$  до  $m = 4$  шагов по сравнению с моделированием в пункте (2) – динамика стала на порядок больше из-за наблюдателя.

Расширенная система с наблюдателем:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta(g(m) - y(m)), \\ \hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y - C\hat{x}(m)), \\ u(m) = k_1g(m) + K_\eta\eta(m) - K\hat{x}(m), \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

Следящий регулятор из пункта (3):

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0.103 & 0.2575 & 0.1802 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_\eta & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Схема моделирования системы:

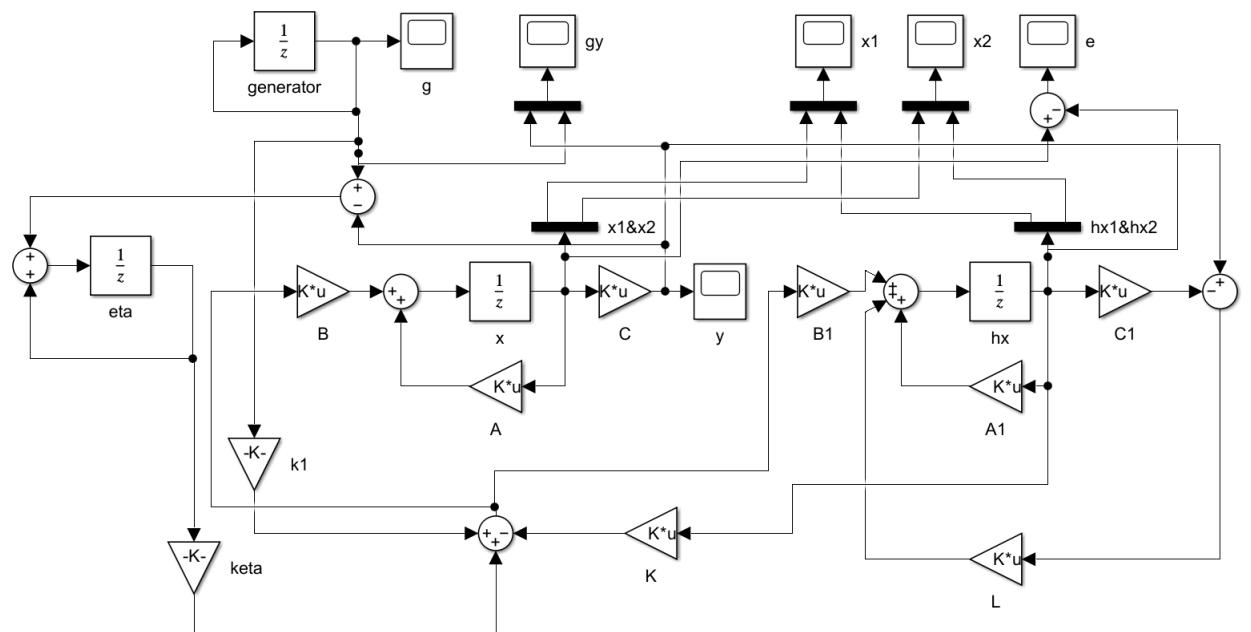


Рис. 15: Схема моделирования системы со следящим регулятором и наблюдателем полной размерности

Выполним моделирование системы при  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ :

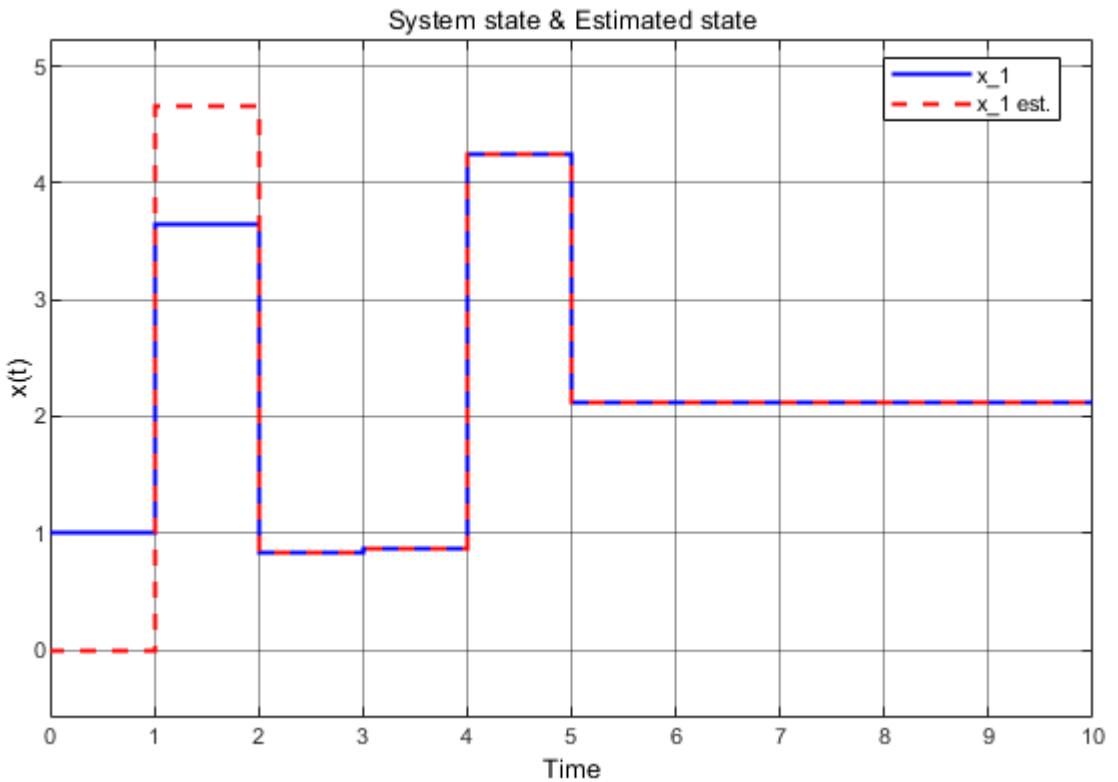


Рис. 16: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

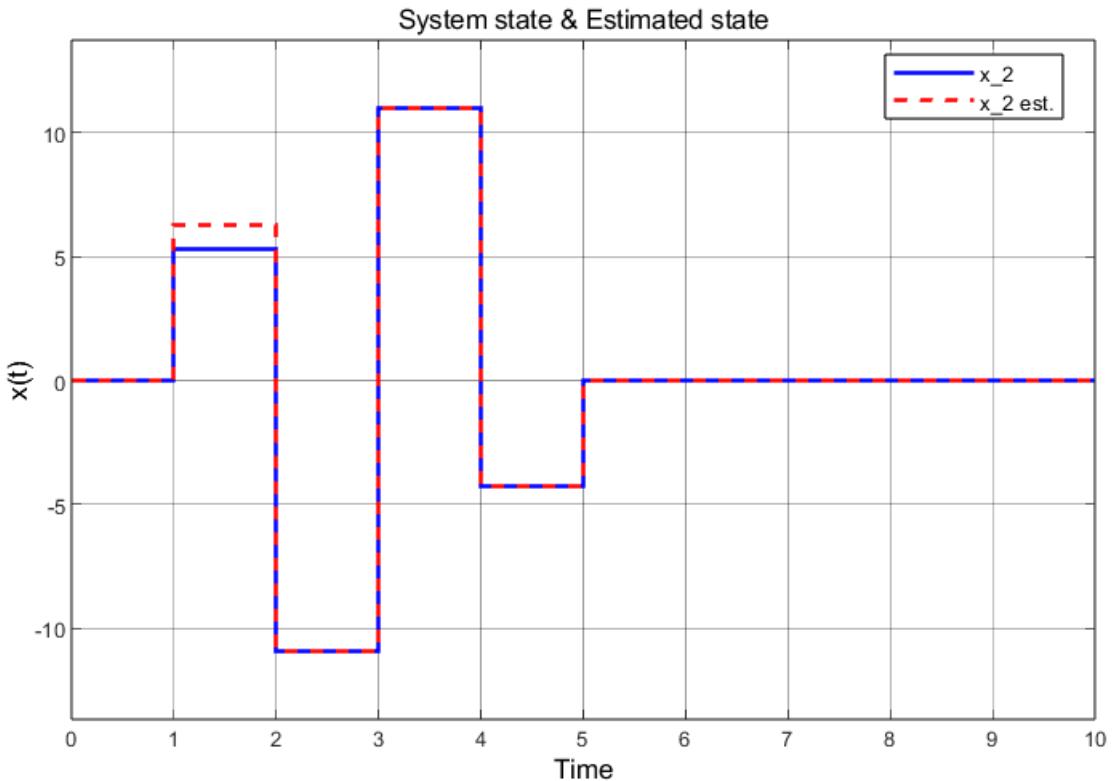


Рис. 17: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

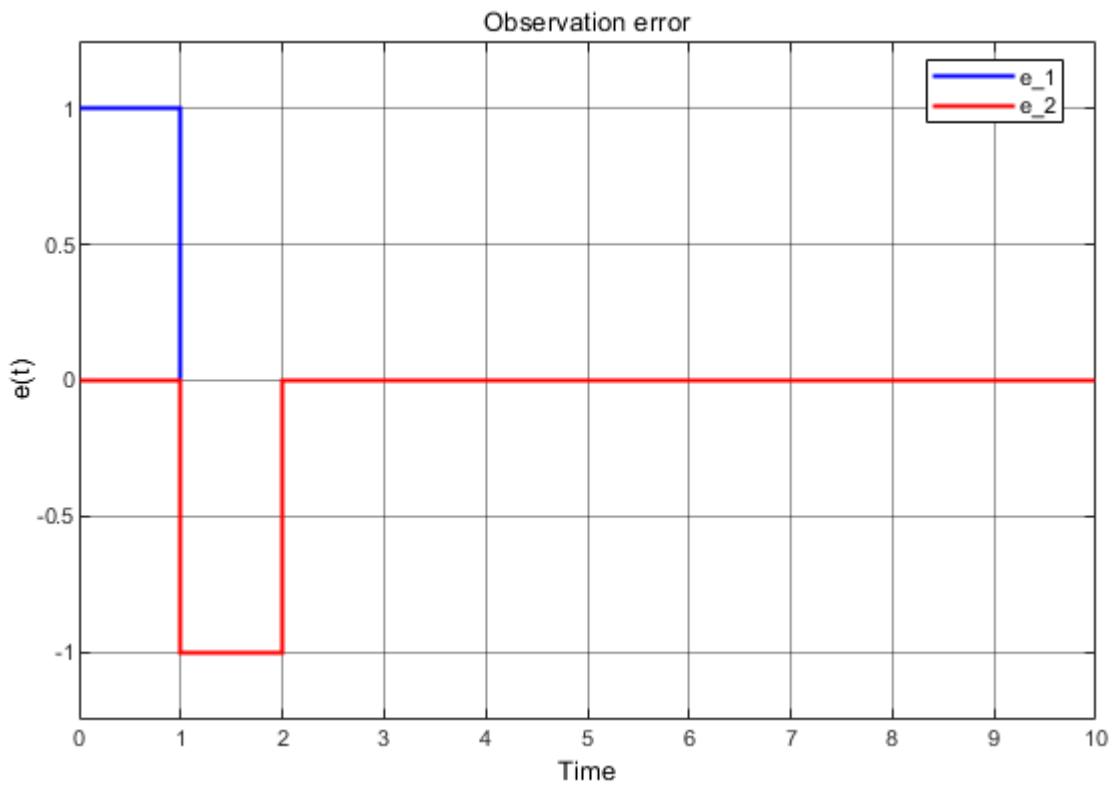


Рис. 18: Невязка наблюдателя  $e = x - \hat{x}$

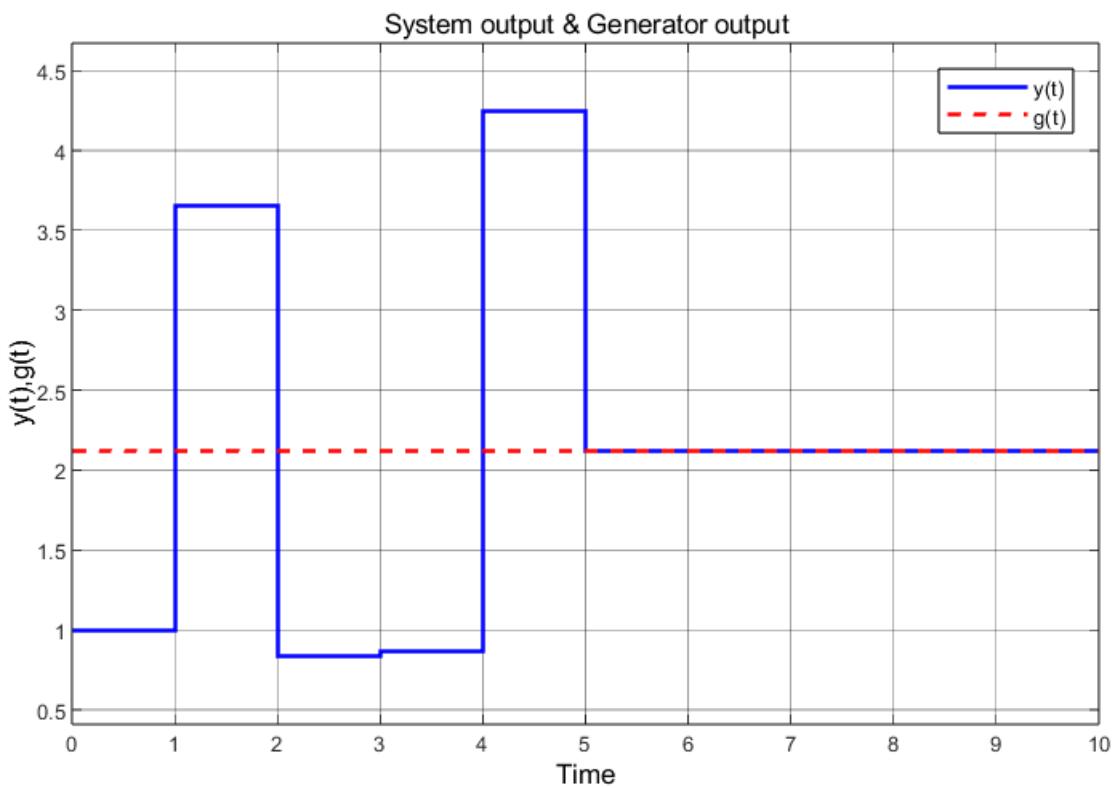


Рис. 19: Выход системы

Время сходимости системы к задающему сигналу увеличилось, так как динамика системы стала на порядок больше из-за наблюдателя.

Наблюдатель сходится к истинным состояниям за  $m = 2$  шага при  $T = 1$ , как и в предыдущем моделировании – это удовлетворяет условию оптимальной по быстродействию сходимости.

#### 4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были спроектированы дискретные стабилизирующий и следящий регуляторы. Моделирование систем с данными регуляторами подтвердило корректность синтезов. Были синтезированы наблюдатели полной размерности и смоделированы в случаях стабилизирующего и следящего регуляторов. Результаты подтвердили корректность расчетов – наблюдатели сходятся оптимально по быстродействию, регуляторы выполняют свои задачи.