

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«ДИСКРЕТНЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ И СЛЕДЯЩИЕ
РЕГУЛЯТОРЫ. НАБЛЮДАТЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ
СИСТЕМЫ»**
Вариант 20

Выполнил: студент гр. Р3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Проектирование дискретных стабилизирующих регуляторов	3
2	Проектирование дискретных следящих регуляторов	8
3	Построение регуляторов для объектов с неполной информацией	14
4	Вывод	21

1. Проектирование дискретных стабилизирующих регуляторов

Исходные данные:

Тип ОУ	k_1	a_0^1	T_1	ξ	k_2	a_0^2	T_2	T
4	9.71	0	1	0	1	0	4	1

Тип ОУ:

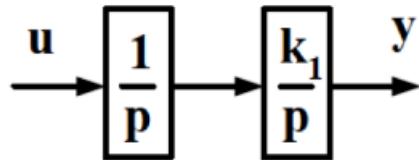


Рис. 1: Объект управления №4

В-С-В непрерывного ОУ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h u(t), \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Исходная передаточная функция:

$$W(p) = \frac{k_1}{p^2}$$

В операторной форме:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k_1}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{k_1}{p^2} U(p) \Rightarrow p^2 Y(p) = k_1 U(p)$$

Заменим p на d/dt :

$$\ddot{y}(t) = k_1 u(t)$$

Перейдем к канонической управляемой форме.

Замены:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

Каноническая управляемая форма:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = k_1 u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

Матрицы в форме состояния:

$$A_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Дискретные системы в пространстве состояний описываются разностными уравнениями:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Приведем к дискретному виду:

$$A = \sum_{i=0}^k \frac{A_{\text{H}}^i T^i}{i!}, \quad B = \sum_{i=1}^k \frac{A_{\text{H}}^{i-1} T^i}{i!} B_{\text{H}}$$

Рассмотрим $i = 0, 1, 2$:

$$A_{\text{H}}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\text{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Достаточно взять $k = 2$:

$$A = I + A_{\text{H}}T + \frac{A_{\text{H}}^2 T^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = A_{\text{H}}^0 T B_{\text{H}} + \frac{A_{\text{H}}^1 T^2 B_{\text{H}}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{T^2 k_1}{2} \\ Tk_1 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.855 \\ 9.71 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Корни характеристического полинома:

$$\det(zI - A) = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = 1$$

Система неустойчива по Ляпунову, т.к. собственные числа не удовлетворяют $|z_i| < 1$.

Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.855 & 14.565 \\ 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}$$

Ее ранг:

$$\text{rank}[U] = 2$$

Ранг матрицы управляемости равен размерности состояния $n = 2$ – система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ее ранг:

$$\text{rank}[V] = 2$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен размерности состояния $n = 2$ – система полностью наблюдаема.

Эталонная модель дискретной системы задается разностными уравнениями:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma \xi(k), \\ y(k) = H \xi(k), \end{cases}$$

где $\xi(k)$ – вектор состояния дискретной эталонной модели, матрицы Γ, H выбираются в соответствии с требуемыми показателями качества.

Возьмем оптимальную по быстродействию дискретную систему – когда $z_i^* = 0, i = \overline{1, n}$:

$$\Gamma_{n \times n} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{l=1 \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара (H, Γ) полностью наблюдаема по признаку Жордана – второй элемент состояния выражается через первый при умножении на Γ , который изменяется через H .

Эталонный характеристический полином:

$$D^*(z) = \det(zI - \Gamma) = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{vmatrix} = z^2$$

Оба полюса дискретной эталонной системы находятся в $z = 0$ (максимально быстрое затухание).

Уравнение типа Сильвестра:

$$M\Gamma - AM = -BH$$

Решение относительно M :

$$M = \begin{bmatrix} -4.855 & -14.565 \\ 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}$$

Матрица линейных стационарных обратных связей:

$$K = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.1545 \end{bmatrix}$$

Замкнутая система:

$$x(k+1) = Fx(k), \quad F = A - BK, \quad u = -Kx(k)$$

Схема моделирования системы:

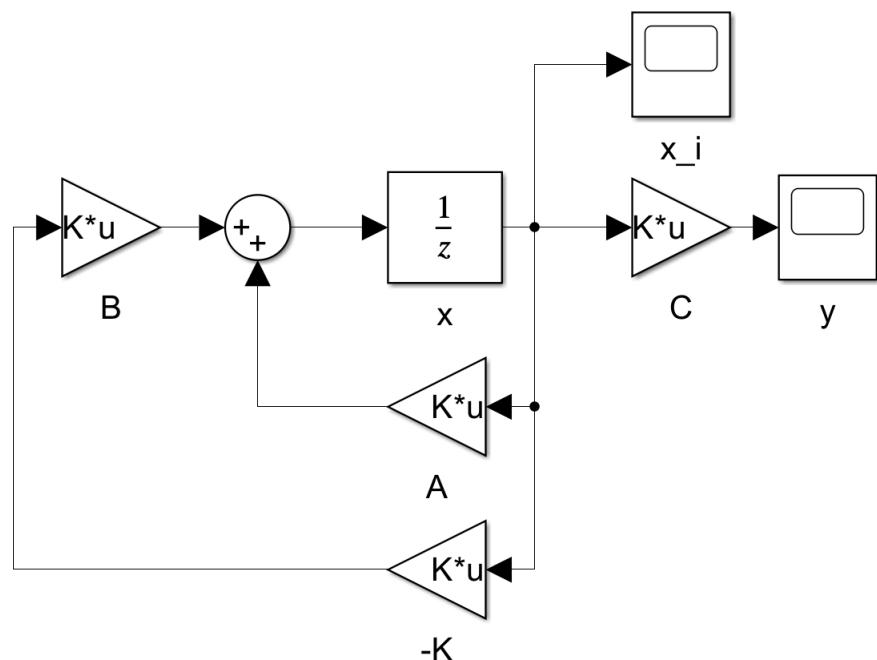


Рис. 2: Схема моделирования системы

Выполним моделирование замкнутой системы при $y(0) = 1, \dot{y} = 0$:

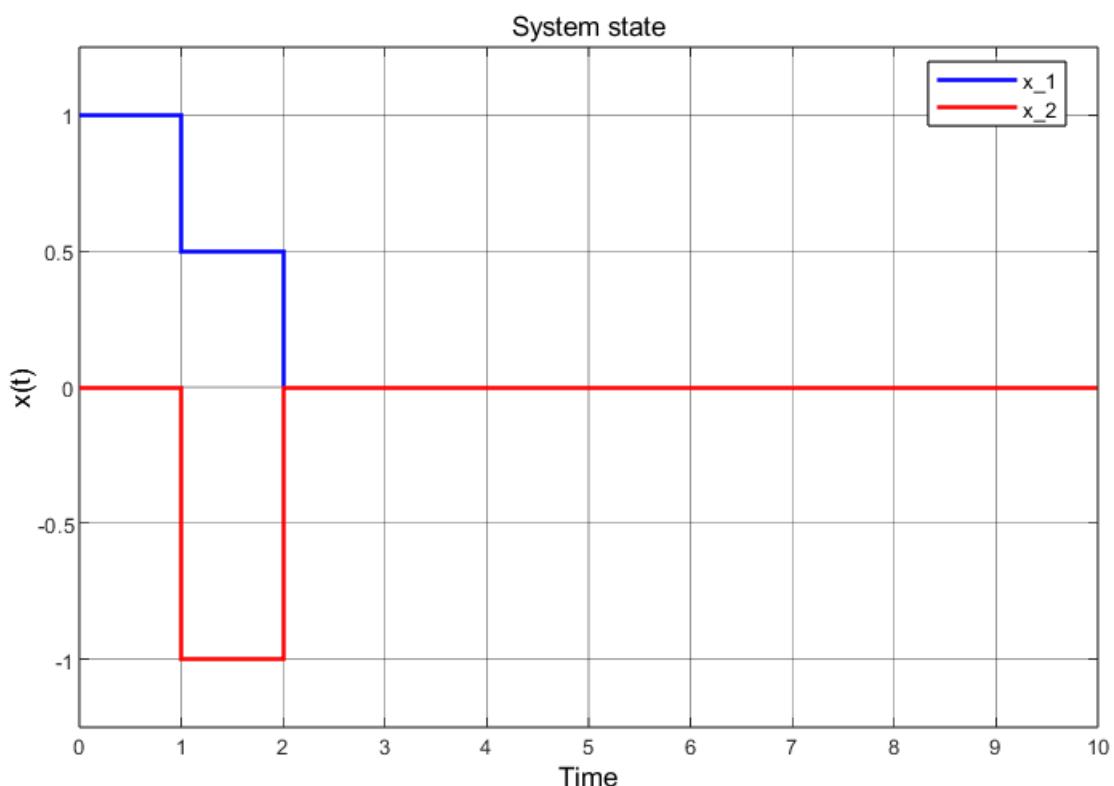


Рис. 3: Вектор состояния замкнутой системы

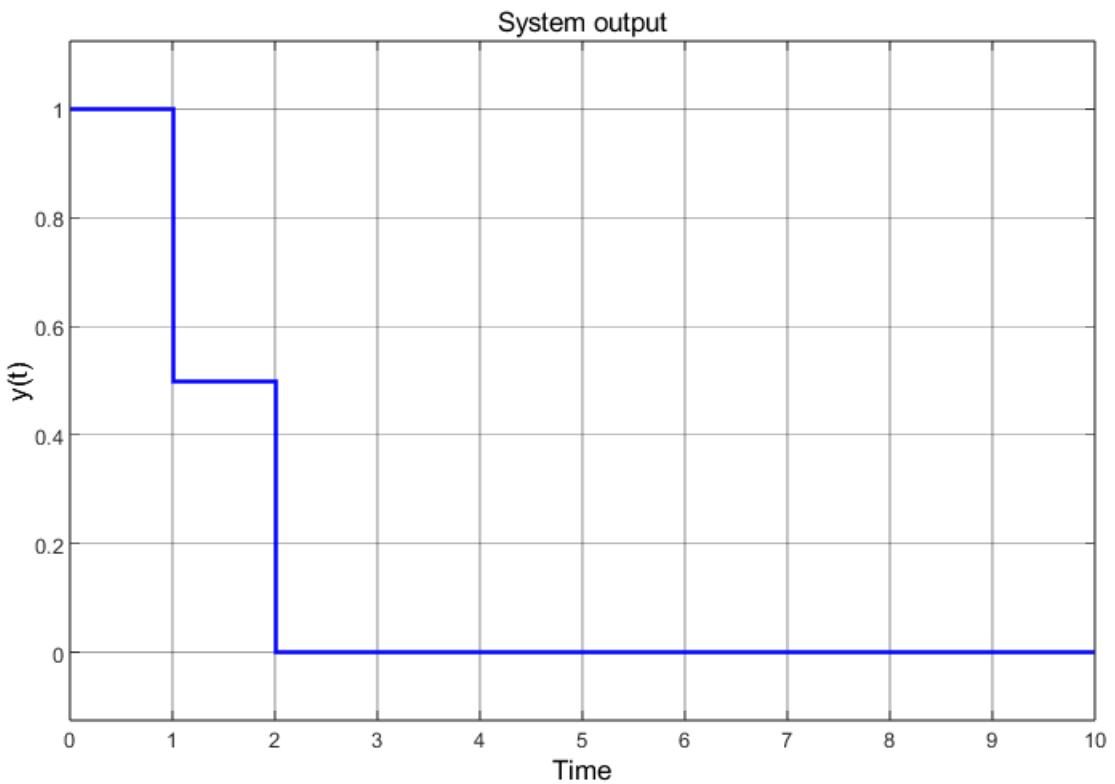


Рис. 4: Выход замкнутой системы

Время установления:

$$T_s = k_s T, \quad k_s = \min \{k : |y[m] - y_\infty| \leq \varepsilon \forall m \geq k\}$$

С момента $k = 2$ значения равны нулю:

$$\forall \varepsilon > 0, m \geq k : |x[m] - 0| \leq \varepsilon \Rightarrow T_s = 2T = 2$$

Условие оптимальности по времени выполнилось:

$$T_s = 2 \leq nT = 2,$$

где $n = 2$ – порядок системы.

2. Проектирование дискретных следящих регуляторов

Исходные данные:

g_0	g_1	A_g	ω_g
2.12	0	0	0

Дискретная модель внешнего воздействия описывается в пространстве состояний системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Gamma \xi(k), \\ y(k) = H \xi(k), \end{cases}$$

где $\xi(k)$ – n -мерный вектор состояния дискретного командного генератора, $\Gamma_{n \times n}$ – матрица динамических свойств дискретного генератора, $H_{m=1 \times n}$ – матрица выхода модели.

Так как $g(k) = g_0 + g_1 kT = 2.12 = \text{const.}$, то $n = 1$ – матрицы Γ, H – константы.

Пусть:

$$\Gamma = 1, H = 1, \xi(k) = g(k)$$

Тогда генератор задающего воздействия:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \xi(k), \\ g(k) = \xi(k) \end{cases}$$

Начальное условие:

$$\xi(0) = 2.12$$

Схема моделирования генератора:

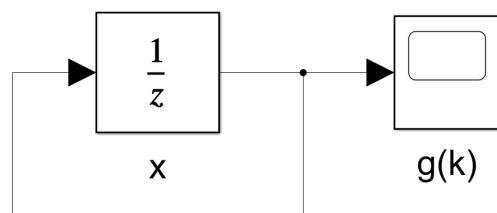


Рис. 5: Схема моделирования генератора

Выполним моделирование генератора:

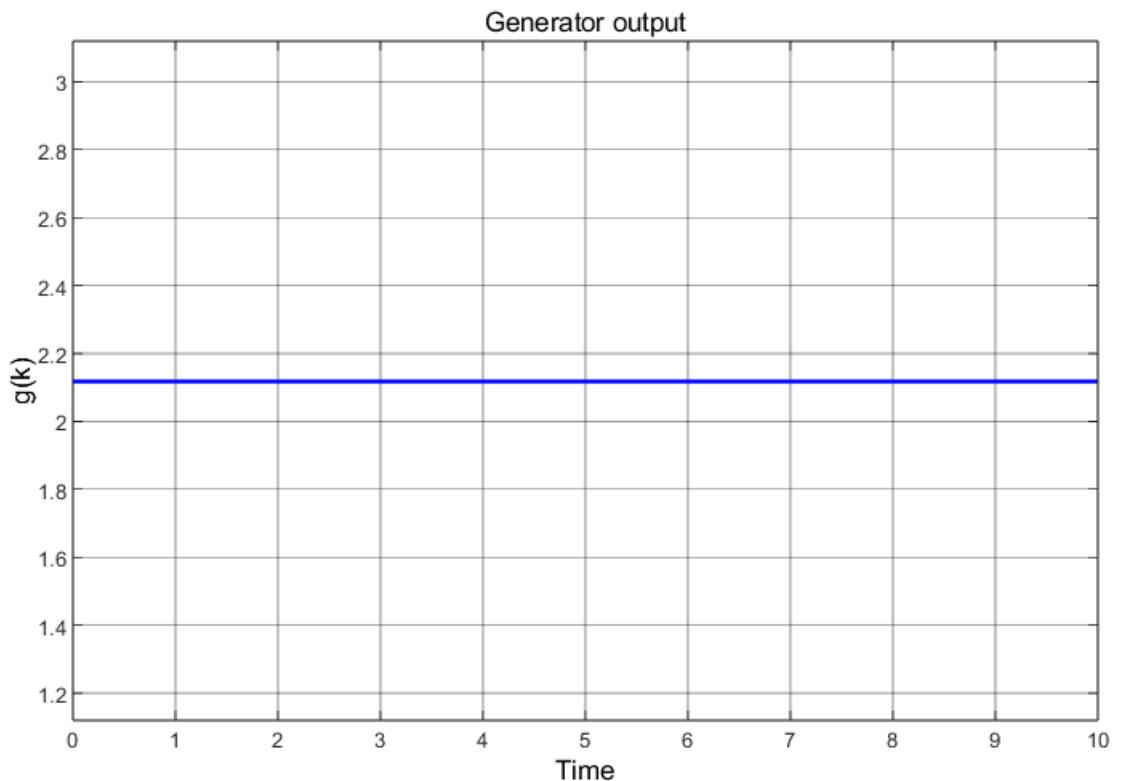


Рис. 6: Выход генератора

Регулятор со встроенной моделью:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta e(m), \\ u(m) = k_1e(m) + K_\eta\eta(m) - k_2x_2(m) - \dots - k_nx_n(m), \end{cases}$$

где $\eta \in \mathbb{R}^q$ – вектор состояния встроенной модели, имеющий размерность вектора состояния внешних воздействий; Γ – матрица размерности $q \times q$, совпадающая с матрицей модели внешних воздействий; B_η – матрица входов встроенной модели.

Расширенная модель ОУ (объединение уравнения движения объекта x, y с уравнением встроенной модели η):

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta g(m) - B_\eta y(m), \\ x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

Расширенный вектор состояния:

$$\bar{x}(m+1) = \begin{bmatrix} \eta(m+1) \\ x(m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(m) \\ x(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(m) + \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix} g(m)$$

Матрицы:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & -B_\eta C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_\eta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} -K_\eta & K \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \bar{x}(m+1) = \bar{A}\bar{x}(m) + \bar{B}u(m) + \bar{B}_1g(m), \\ u(m) = k_1g(m) - \bar{K}\bar{x}(m) \end{cases}$$

Замкнутая система:

$$\bar{x}(m+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{x}(m) + (\bar{B}_1 + k_1\bar{B})g(m) = \bar{F}\bar{x}(m) + \bar{B}_g g(m),$$

где \bar{F} – матрица размерности $(n+q) \times (n+q)$, определяющая динамические свойства замкнутой системы; \bar{B}_g – матрица входов по задающему воздействию размерности $(n+q) \times 1$.

Пара $(\Gamma = 1, B_\eta)$ управляема при любом ненулевом B_η :

$$B_\eta = 1$$

Условие управляемости (Γ, B_η) выполнено.

Так как пара (A, B) ОУ полностью управляема, пара (C, A) полностью наблюдаема и пара (Γ, B_η) полностью управляема, то пара (\bar{A}, \bar{B}) полностью управляема.

В таком случае выбором матрицы \bar{K} можно обеспечить произвольные желаемые корни характеристического полинома или коэффициенты уравнения замкнутой системы.

Оптимальная по быстродействию система при корнях характеристическо-

го полинома $z_i^* = 0$:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара $(\bar{H}, \bar{\Gamma})$ полностью наблюдаема по признаку Жордана.

Решим уравнение типа Сильвестра для расширенной системы:

$$\begin{cases} \bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} = -\bar{B}\bar{H}, \\ \bar{K} = \bar{H}\bar{M}^{-1} \end{cases}$$

Получим:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -4.855 & -19.42 & -43.695 \\ -4.855 & -14.565 & -24.275 \\ 9.71 & 9.71 & 9.71 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} -0.103 & 0.2575 & 0.1802 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\det(zI - \bar{F}) = 10^{-5} \cdot \{0.2384 \pm 0.4128i, -0.4767\}$$

Схема моделирования системы:

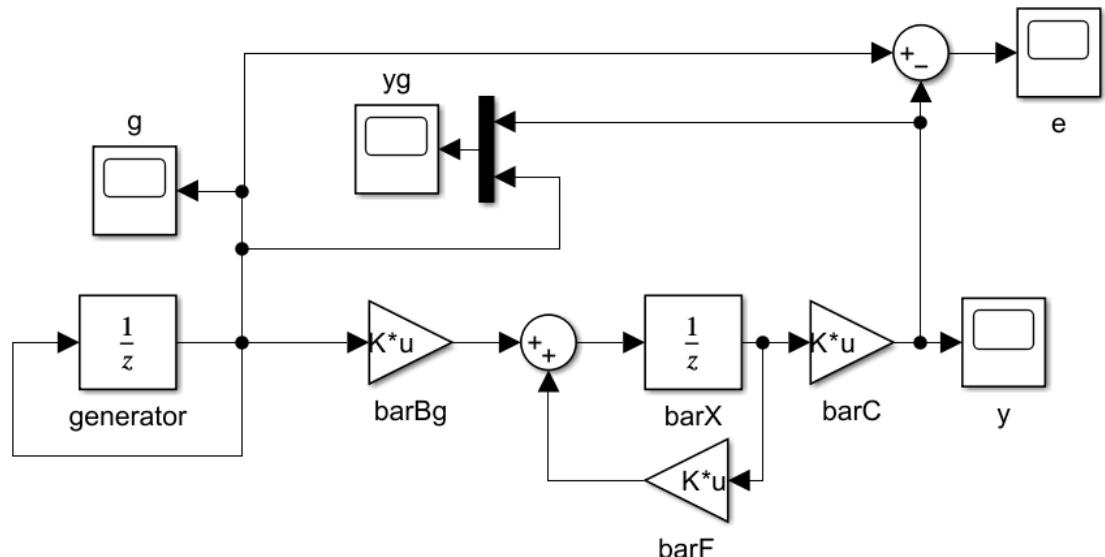


Рис. 7: Схема моделирования системы со следящим регулятором

Выполним моделирование системы при $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$:

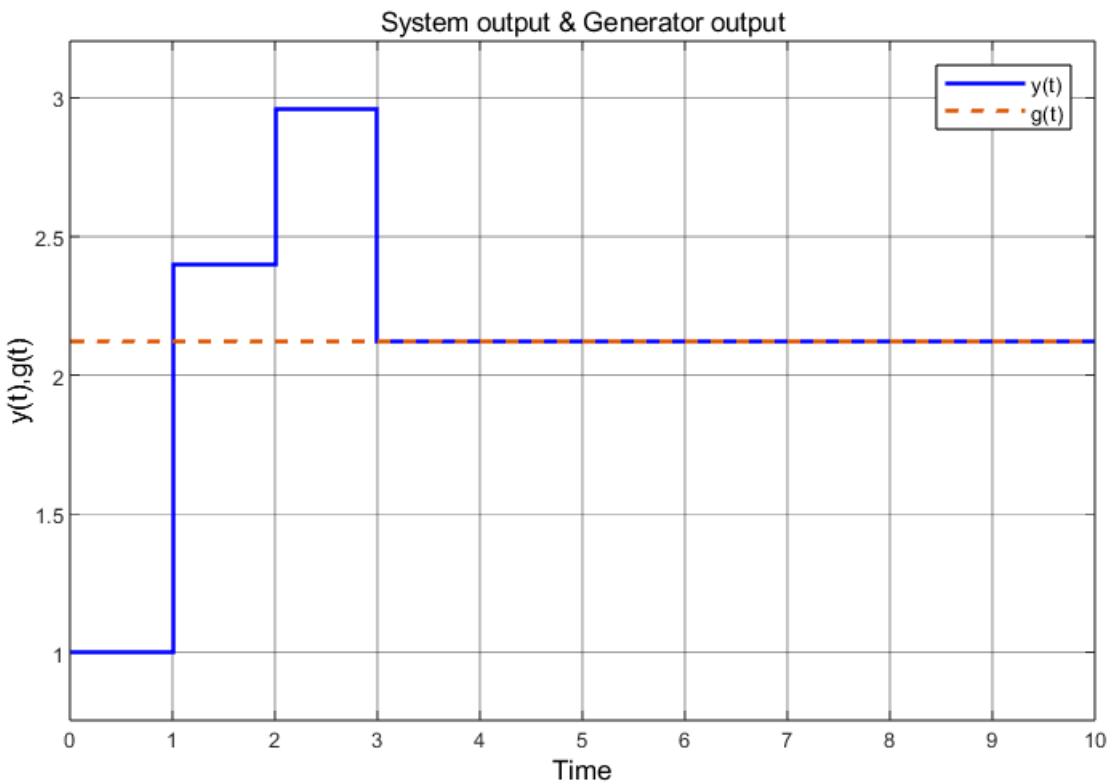


Рис. 8: Выход системы и генератора

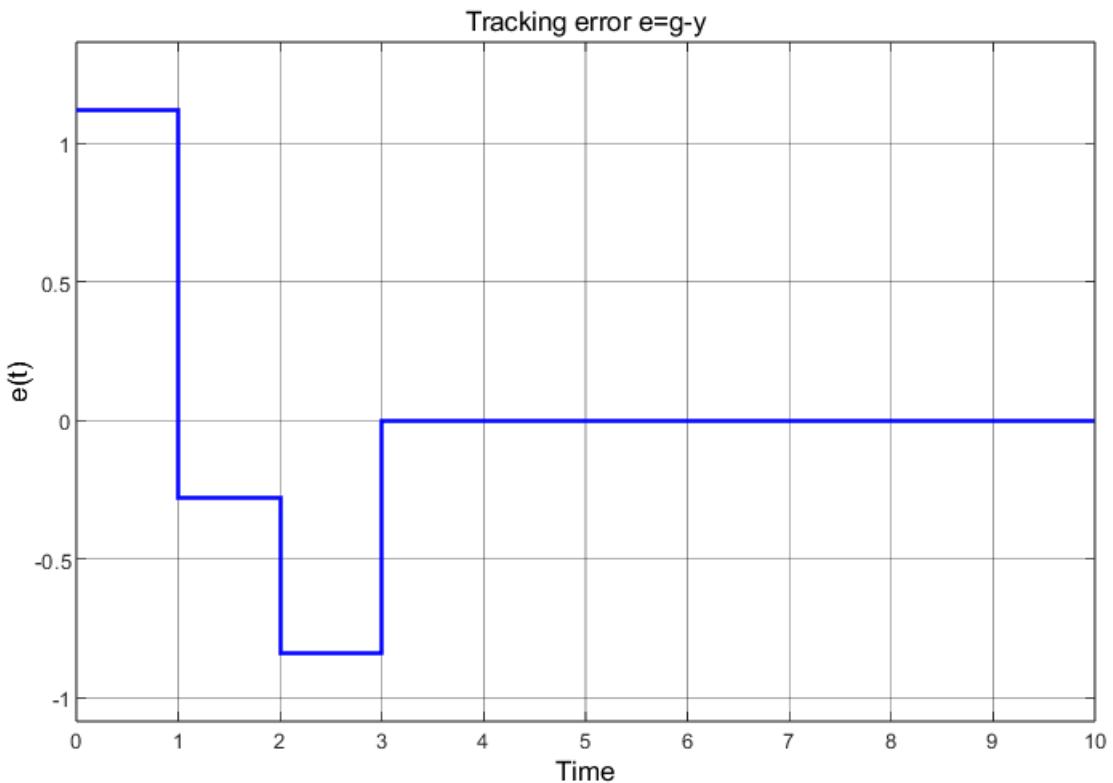


Рис. 9: Ошибка слежения

Выход системы сошелся к задающему сигналу за $m = 3$ шага при $T = 1$, ошибка слежения нулевая.

Условие оптимальности по времени выполнилось:

$$T_s = 3 \leq nT = 3,$$

где $n = 3$ – порядок расширенной системы.

3. Построение регуляторов для объектов с неполной информацией

Исходные данные: четный вариант – устройство оценки полной размерности.

Рассмотрим уравнение движения ОУ с неполной информацией:

$$\begin{cases} x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \\ y_i(m) = C_i x(m), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^k$ – вектор управляющих воздействий, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – вектор измеряемых величин, A – матрица динамики ОУ размерности $n \times n$, B – матрица входов ОУ размерности $n \times k$, C_i – матрица измерений ОУ размерности $l \times n$, при этом $l < n$, $\text{rank}(C_i) = l$.

Динамический регулятор с устройством оценки полной размерности:

$$\hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y_i - C_i\hat{x}(m)), \quad u(m) = -K\hat{x}(m),$$

где $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния устройства оценки, L – матрица входов устройства оценки размерности $n \times l$, K – матрица обратных связей размера $k \times n$.

Ранее была проверена наблюдаемость пары $(C = C_i, A)$ – система полностью наблюдаема.

Оптимальная по быстродействию модель при $z_{ih}^* = 0$:

$$\Gamma_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пара (H_h, Γ_h) полностью управляема по признаку Жордана.

Решим уравнение типа Сильвестра относительно M_H :

$$\begin{cases} M_H \Gamma_H - A^T M_H = -C^T H_H, \\ L = (H_H M_H^{-1})^T \end{cases}$$

Получим:

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Проверим спектр $F_H = A - LC$:

$$\sigma(F_H) = 10^{-7} \cdot \{0 \pm 0.1772i\}$$

Регулятор из пункта (2):

$$K = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.1545 \end{bmatrix}$$

Схема моделирования системы:

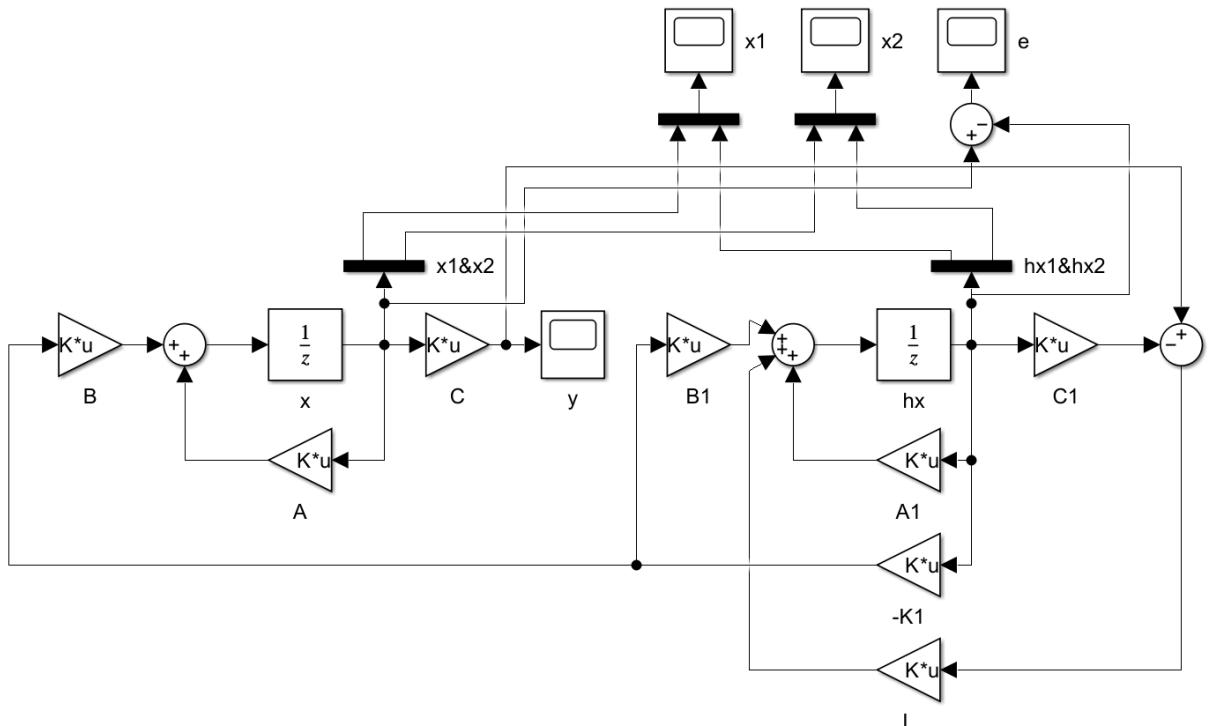


Рис. 10: Схема моделирования системы с регулятором и наблюдателем полной размерности

Выполним моделирование системы при $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

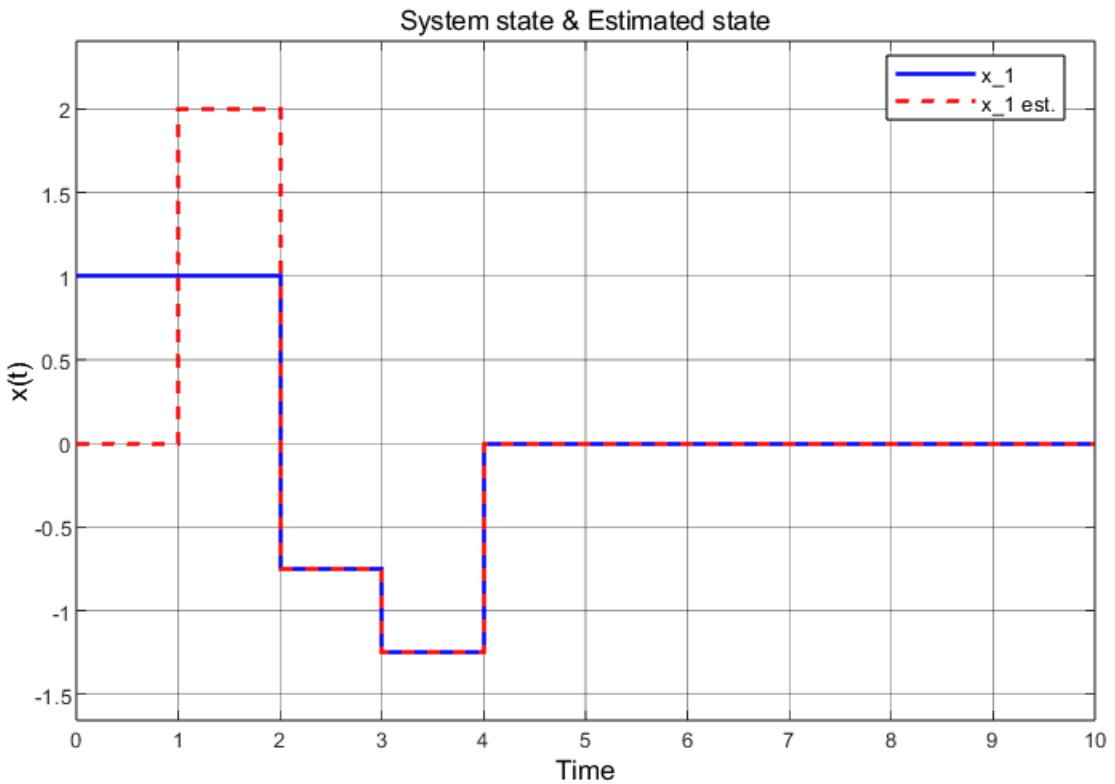


Рис. 11: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

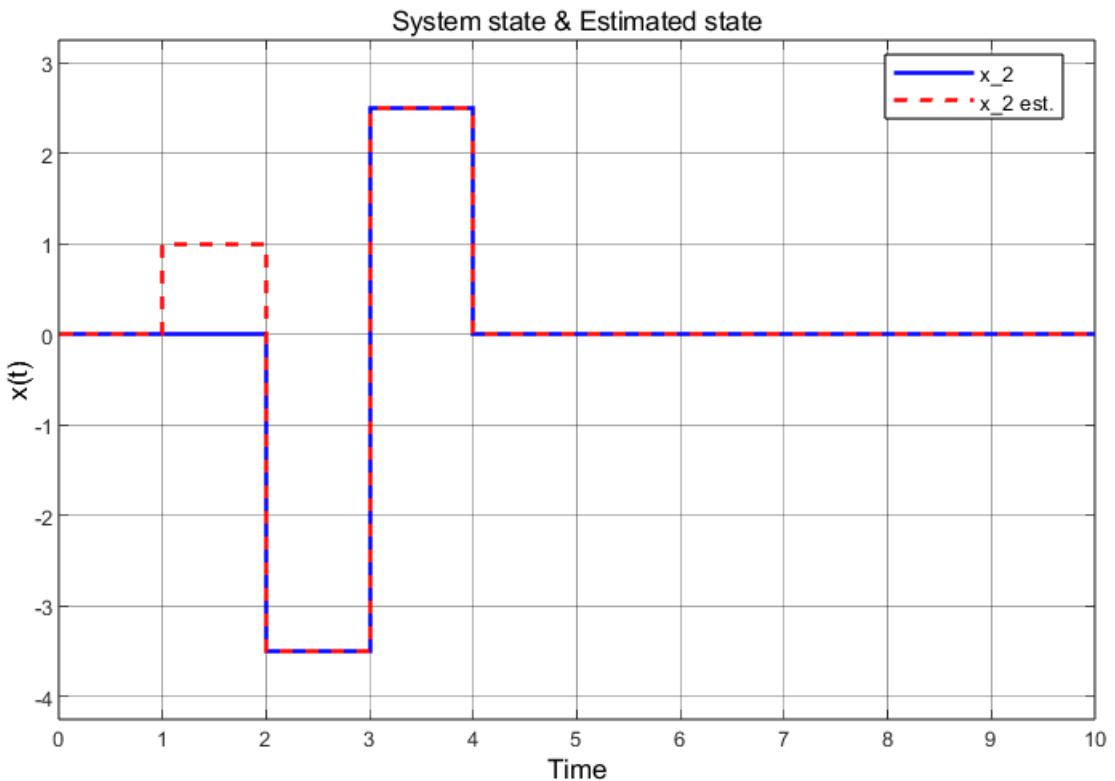


Рис. 12: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

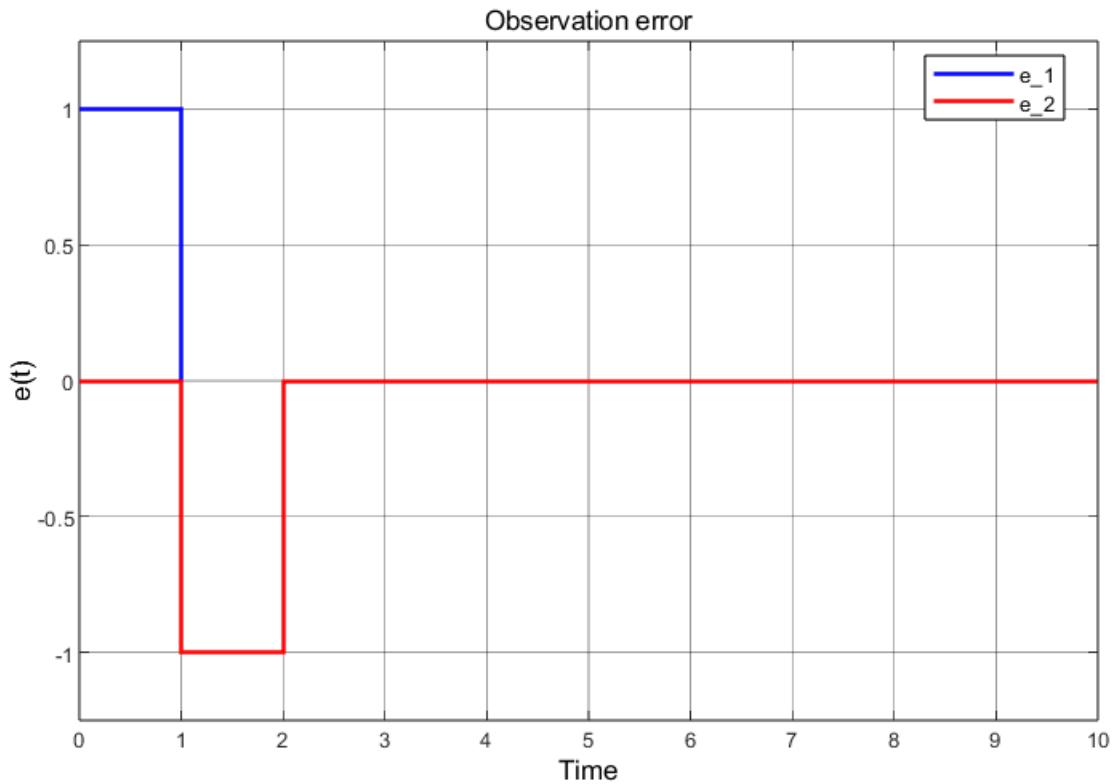


Рис. 13: Невязка наблюдателя $e = x - \hat{x}$

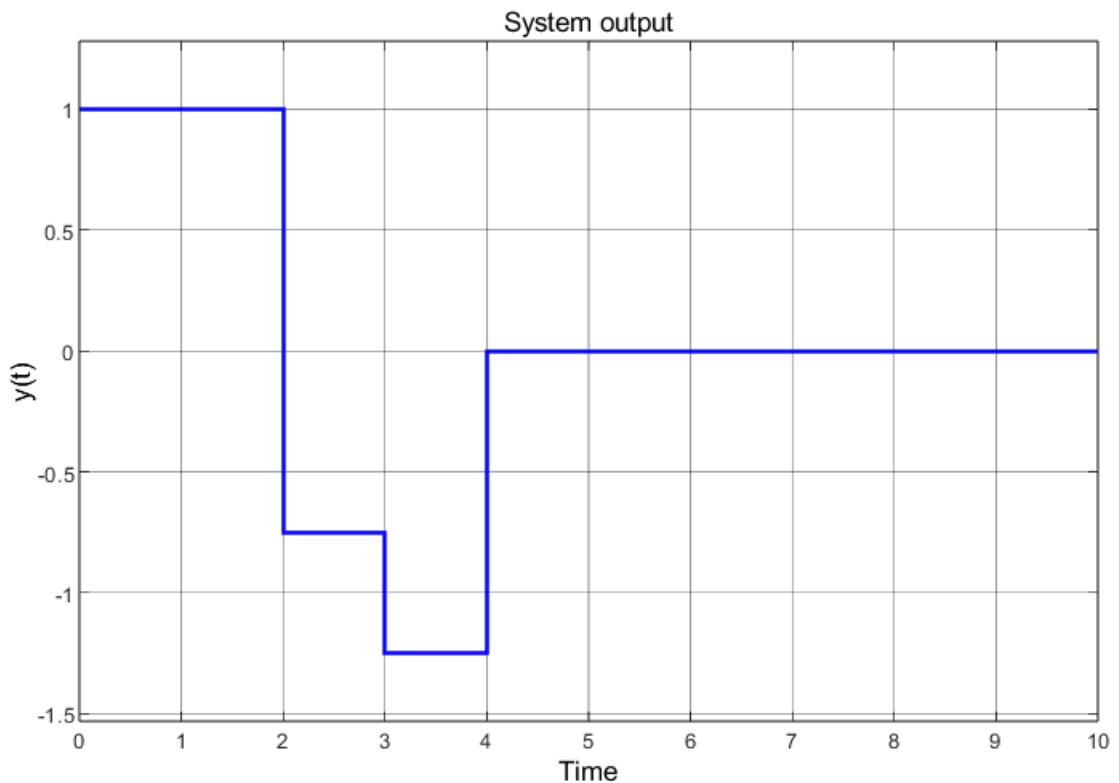


Рис. 14: Выход системы

Наблюдатель сошелся к истинным состояниям за $m = 2$ шага при $T = 1$

– это удовлетворяет условию оптимальной по быстродействию сходимости:

$$T_L = 2 \leq nT = 2,$$

где $n = 2$ – порядок системы.

Сходимость системы к устоявшемуся состоянию увеличилась с $m = 2$ до $m = 4$ шагов по сравнению с моделированием в пункте (2) – динамика стала на порядок больше из-за наблюдателя.

Расширенная система с наблюдателем:

$$\begin{cases} \eta(m+1) = \Gamma\eta(m) + B_\eta(g(m) - y(m)), \\ \hat{x}(m+1) = A\hat{x}(m) + Bu(m) + L(y - C\hat{x}(m)), \\ u(m) = k_1g(m) + K_\eta\eta(m) - K\hat{x}(m), \\ y(m) = Cx(m) \end{cases}$$

Следящий регулятор из пункта (3):

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -0.103 & 0.2575 & 0.1802 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_\eta & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Схема моделирования системы:

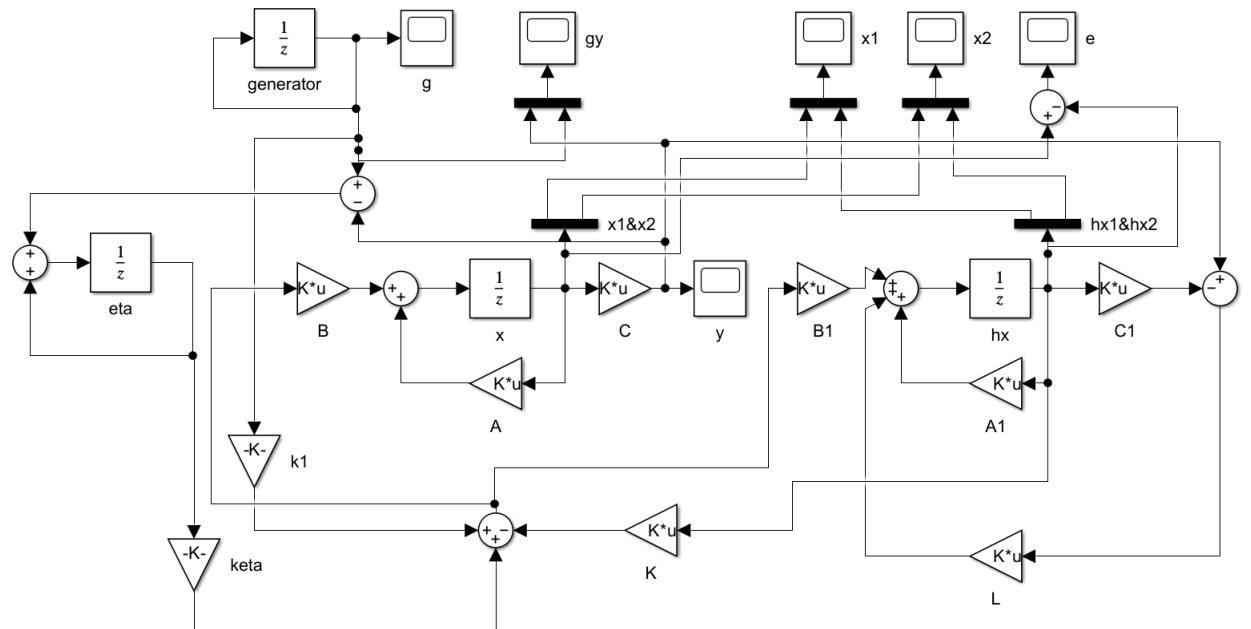


Рис. 15: Схема моделирования системы со следящим регулятором и наблюдателем полной размерности

Выполним моделирование системы при $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

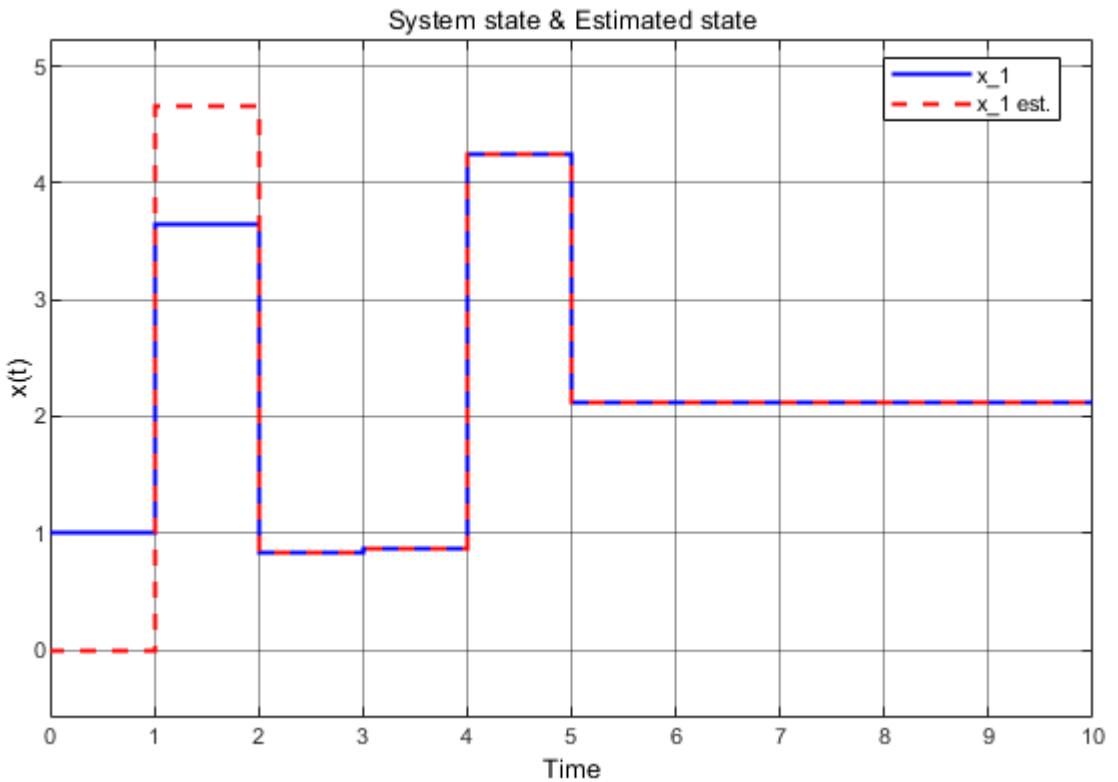


Рис. 16: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

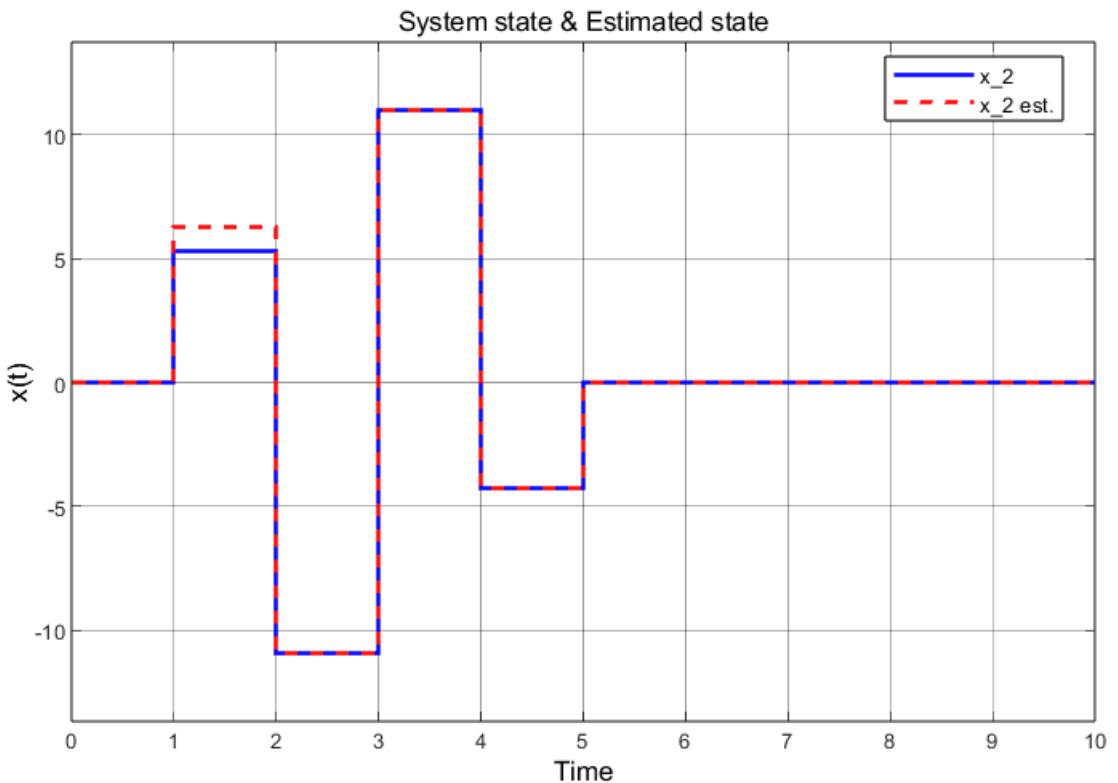


Рис. 17: Элемент вектора состояния ОУ и его оценка

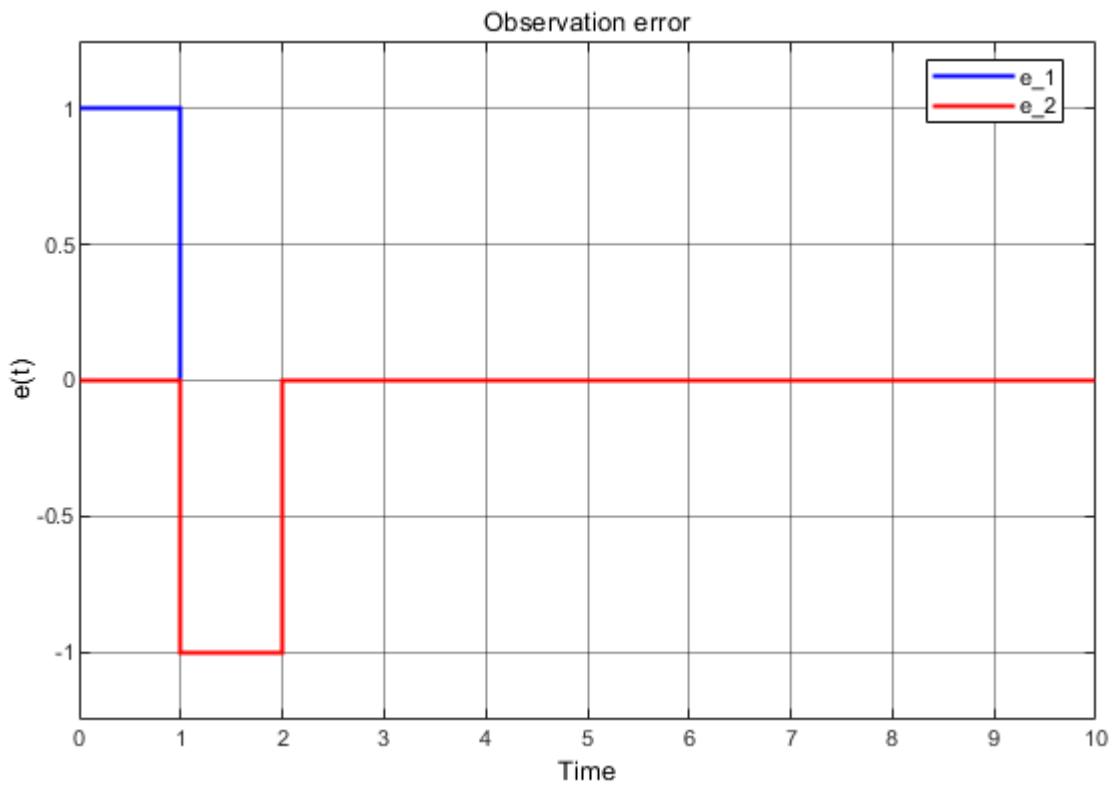


Рис. 18: Невязка наблюдателя $e = x - \hat{x}$

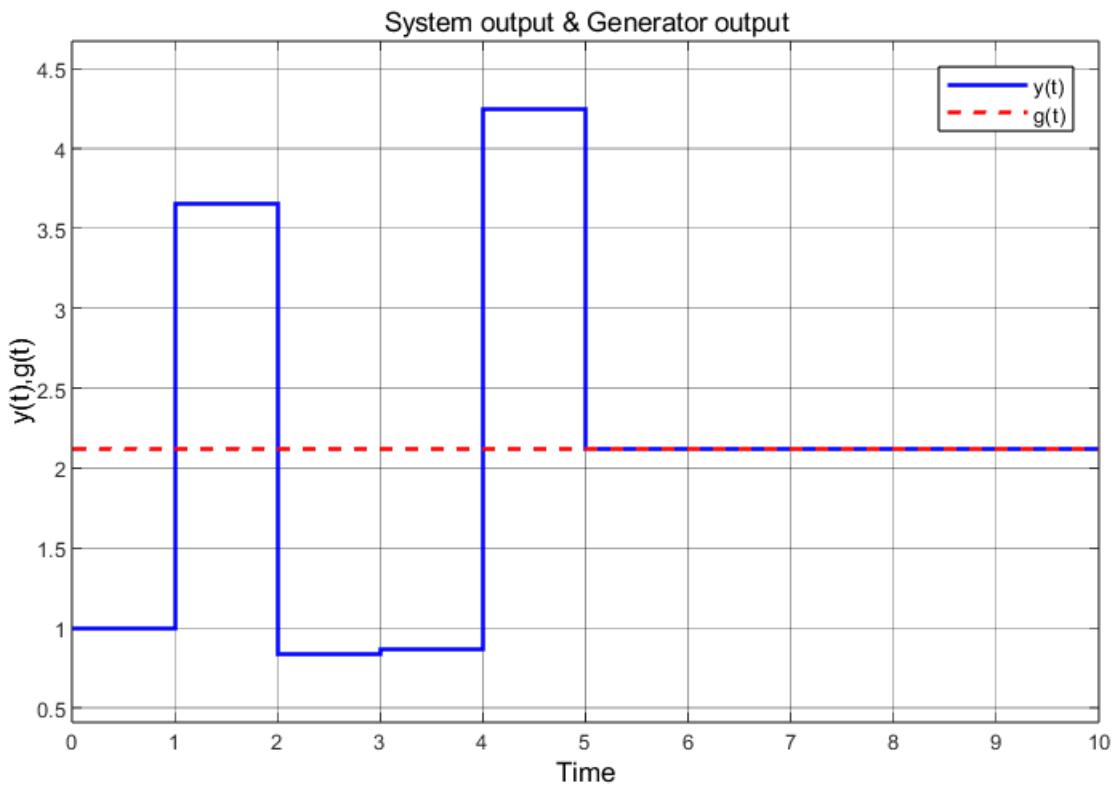


Рис. 19: Выход системы

Время сходимости системы к задающему сигналу увеличилось, так как динамика системы стала на порядок больше из-за наблюдателя.

Наблюдатель сходится к истинным состояниям за $m = 2$ шага при $T = 1$, как и в предыдущем моделировании – это удовлетворяет условию оптимальной по быстродействию сходимости.

4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были спроектированы дискретные стабилизирующий и следящий регуляторы. Моделирование систем с данными регуляторами подтвердило корректность синтезов. Были синтезированы наблюдатели полной размерности и смоделированы в случаях стабилизирующего и следящего регуляторов. Результаты подтвердили корректность расчетов – наблюдатели сходятся оптимально по быстродействию, регуляторы выполняют свои задачи.