МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА БЭКСТЕППИНГА»

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Задание 1

1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + (2 + \sin(x_1))\, u \end{cases} \tag{1}$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

1.2. Выполнение

Компонента x_2 является виртуальным управлением подсистемы $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + \varphi(x_1),\ f(x_1) = \sin(x_1) + x_1^2,\ \varphi(x_1) = x_2$$

Функция Ляпунова:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2,\ V_1(x_1) > 0\,\forall x_1 \neq 0,\ V_1(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1\left(x_2 + \sin(x_1) + x_1^2\right) = x_1x_2 + x_1\sin(x_1) + x_1^3$$

Необходимо, чтобы $\dot{V}_1(x_1) < 0\,\forall x_1 \neq 0$. В таком случае нужно компенсировать неопределенные по знаку слагаемые $x_1\sin(x_1), x_1^3$ и сделать слагаемое x_1x_2 отрицательным четной степени через $x_2 = \varphi(x_1)$:

$$\varphi(x_1) = -\sin(x_1) - x_1^2 - k_1x_1,\ k_1 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = -k_1x_1$$

Тогда, производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}_1(x_1) = -k_1x_1^2 < 0\,\forall x_1 \neq 0, k_1 > 0$$

Сделаем замену, чтобы определить ошибку между реальным x_2 и виртуальным управлением:

$$z = x_2 - \varphi(x_1) = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1$$

Тогда:

$$x_2 = z - \sin(x_1) - x_1^2 - k_1 x_1$$

Подставим x_2 в подсистему $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 = z - k_1 x_1$$

Найдем $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_t(x_1)$$

Найдем $\dot{\varphi}_t(x_1)$:

$$\dot{\varphi}_t(x_1) = (-\cos(x_1) - 2x_1 - k_1)\,\dot{x}_1 = -\left(\cos(x_1) + 2x_1 + k_1\right)(z - k_1 x_1)$$

Тогда:

$$\dot{z} = x_1^2 + (2 + \sin(x_1))\,u + (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1)$$

Полная функция Ляпунова:

$$V = V_1 + 0.5z^2,\ V_1 = 0.5x_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + z\dot{z},$$

$$\dot{V} = x_1(z - k_1 x_1) + z\left(x_1^2 + (2 + \sin(x_1))\,u + (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1)\right),$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 + z(2 + \sin(x_1))\,u + z x_1 + z x_1^2 + z(\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1),$$

Выберем управление $u(t)$ так, чтобы компенсировать неопределенные по знаку слагаемые и добавить отрицательно определенное слагаемое с z:

$$u = \frac{1}{2 + \sin(x_1)}\left(-x_1 - x_1^2 - (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1) - k_2 z\right),\ k_2 > 0,$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z^2 < 0\,\forall (x_1, z) \neq (0, 0), k_1, k_2 > 0$$

Начало координат глобально асимптотически устойчиво с таким законом управления u.

Подставляя $z = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1$ в u, итоговый закон управления:

$$u = \frac{1}{2 + \sin(x_1)} \left(-x_1 - x_1^2 - (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)\left(x_2 + \sin(x_1) + x_1^2\right) + \right.$$
$$\left. - k_2 \left(x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1\right)\right)$$

Выполним моделирование системы при $k_1 = 2, k_2 = 3, x_0 = (1, -0.5)$:

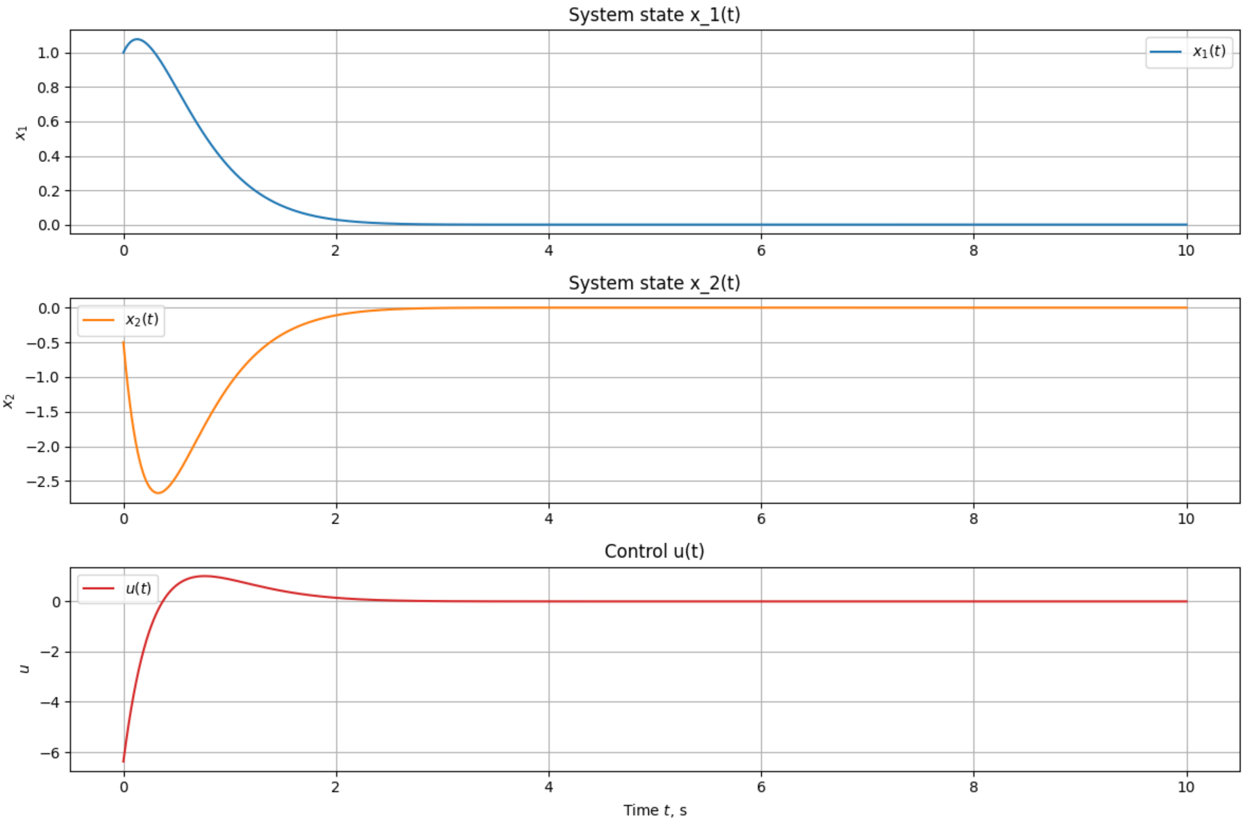

Рис. 1: Графики $x_i(t), u(t)$

Вектор состояния и управление стремятся к нулю с течением времени.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \tag{2}$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

2.2. Выполнение

Компонента x_2 – виртуальное управление подсистемы $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + \varphi(x_1),\ f(x_1) = -x_1^3,\ \varphi(x_1) = x_2$$

Функция Ляпунова и ее производная:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2,\ \dot{V}_1(x_1) = x_1\left(x_2 - x_1^3\right) = x_1x_2 - x_1^4$$

Чтобы $\dot{V}_1 \leq 0$, нужно сделать слагаемое x_1x_2 отрицательно определенным через $\varphi(x_1) = x_2$:

$$\varphi(x_1) = -k_1x_1,\ k_1 > 0$$

Тогда:

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1\left(-k_1x_1 - x_1^3\right) = -k_1x_1^2 - x_1^4 < 0\,\forall x_1 \neq 0, k_1 > 0$$

Замена:

$$z = x_2 - \varphi(x_1) = x_2 + k_1x_1$$

Тогда:

$$x_2 = z - k_1x_1$$

Подставим x_2 в подсистему $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 = z - k_1 x_1 - x_1^3$$

Найдем $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_t(x_1)$$

Найдем $\dot{\varphi}_t(x_1)$:

$$\dot{\varphi}_t(x_1) = -k_1 \dot{x}_1 = -k_1 \left(z - k_1 x_1 - x_1^3\right)$$

Тогда:

$$\dot{z} = x_1 + u + k_1 \left(z - k_1 x_1 - x_1^3\right)$$

Полная функция Ляпунова и ее производная:

$$V = V_1 + 0.5z^2,\ V_1 = 0.5x_1^2,$$

$$\dot{V} = x_1 \left(z - k_1 x_1 - x_1^3\right) + z \left(x_1 + u + k_1 \left(z - k_1 x_1 - x_1^3\right)\right),$$
$$\dot{V} = 2zx_1 - k_1 x_1^2 - x_1^4 + zu + z^2 k_1 - z k_1^2 x_1 - z k_1 x_1^3$$

Закон управления:

$$u = -2x_1 - k_1 z + k_1^2 x_1 + k_1 x_1^3 - k_2 z$$

Тогда:

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - x_1^4 - k_2 z^2 < 0\, \forall (x_1, z) \neq (0, 0), k_1, k_2 > 0$$

Начало координат глобально асимптотически устойчиво.
Итоговый закон управления:

$$u = -2x_1 - k_1 \left(x_2 + k_1 x_1\right) + k_1^2 x_1 + k_1 x_1^3 - k_2 \left(x_2 + k_1 x_1\right),$$

$$u = -2x_1 - k_1 x_2 + k_1 x_1^3 - k_2 x_2 - k_2 k_1 x_1$$

Моделирование системы при $k_1 = 2, k_2 = 3, x_0 = (1, -0.5)$:

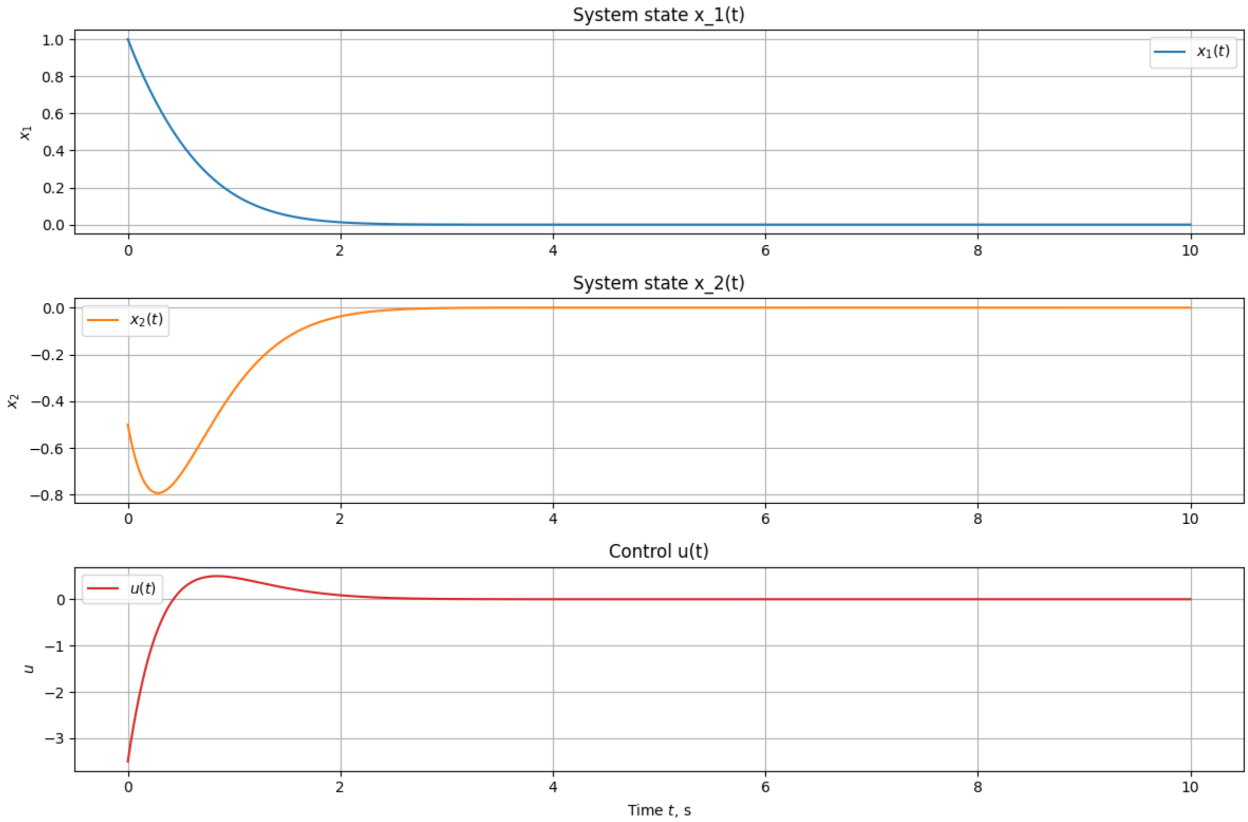

Рис. 2: Графики $x_i(t), u(t)$

Вектор состояния и управление стремятся к нулю с течением времени.

3. Задание 3

3.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(x_1) - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + (2 - \sin(x_3))\, x_4, \\ \dot{x}_4 = x_2 x_3 + 2u \end{cases} \tag{3}$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

3.2. Выполнение

Система четвёртого порядка в строгой обратносвязной форме:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1 x_2, && f_1(x_1) = \cos(x_1), g_1 = -1,\\
&\dot{x}_2 = f_2(x_1) + g_2 x_3, && f_2(x_1) = x_1, g_2 = 1,\\
&\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_3) + g_3(x_3) x_4, && f_3(x_1, x_3) = x_1 x_3, g_3(x_3) = 2 - \sin(x_3),\\
&\dot{x}_4 = f_4(x_2, x_3) + g_4 u && f_4(x_2, x_3) = x_2 x_3, g_4 = 2
\end{aligned}
$$

Так как $g_3(x_3) = 2 - \sin(x_3) \geq 1 > 0, g_4 = 2 > 0$, то управление эффективно.

Сделаем рекурсивный бэкстеппинг.

Функция Ляпунова и ее производная:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2,\ \dot{V}_1(x_1) = x_1(\cos(x_1) - x_2) = x_1\cos(x_1) - x_1 x_2$$

Виртуальное управление:

$$\varphi_1(x_1) = \cos(x_1) + k_1 x_1,\ k_1 > 0$$

Тогда, при $x_2 = \varphi_1(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 \Rightarrow \dot{V}_1(x_1) = -k_1 x_1^2 < 0\,\forall x_1 \neq 0, k_1 > 0$$

Ошибка отслеживания:

$$z_1 = x_2 - \varphi_1(x_1) = x_2 - \cos(x_1) - k_1 x_1$$

Тогда:

$$x_2 = z_1 + \cos(x_1) + k_1 x_1,$$

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) - x_2 = -z_1 - k_1 x_1$$

Найдем $\dot{z}_1$:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_{1,t}(x_1),$$

$$\dot{\varphi}_{1,t}(x_1) = \left(-\sin(x_1) + k_1\right)\dot{x}_1 = \left(\sin(x_1) - k_1\right)\left(z_1 + k_1 x_1\right),$$

$$\dot{z}_1 = x_1 + x_3 - (\sin(x_1) - k_1)(z_1 + k_1 x_1)$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V_2 = V_1 + 0.5 z_1^2,\ V_1 = 0.5 x_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_1 \dot{z}_1 = -x_1 (z_1 + k_1 x_1) + z_1 (x_1 + x_3 - (\sin(x_1) - k_1)(z_1 + k_1 x_1)),$$

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 + z_1 x_3 - z_1^2 \sin(x_1) - z_1 k_1 x_1 \sin(x_1) + z_1^2 k_1 + z_1 k_1^2 x_1$$

Виртуальное управление $x_3 = \varphi_2(x_1, x_2)$:

$$x_3 = z_1 \sin(x_1) + k_1 x_1 \sin(x_1) - z_1 k_1 - k_1^2 x_1 - z_1 k_2,\ k_2 > 0$$

Тогда, после подстановки $z_1 x_3$:

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 < 0\, \forall (x_1, z_1) \neq (0, 0), k_2 > 0$$

Подставим z_1 в $\varphi_2(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x_1, x_2) =& x_2 \sin(x_1) - \sin(x_1)\cos(x_1) - k_1 x_2 + \\ &+ k_1 \cos(x_1) - k_2 x_2 + k_2 \cos(x_1) + k_2 k_1 x_1\end{aligned}$$

Введем следующую ошибку отслеживания и проведем аналогичные действия:

$$z_2 = x_3 - \varphi_2(x_1, x_2) \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{x}_3 - \dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2) =& \dot{x}_2 \sin(x_1) - k_1 \dot{x}_2 - k_2 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2 \cos(x_1) + \\ &- \dot{x}_1 \cos(2x_1) - k_1 \dot{x}_1 \sin(x_1) - k_2 \dot{x}_1 \sin(x_1) + k_2 k_1 \dot{x}_1\end{aligned}$$

Подставим $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ в $\dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2) =& x_1 \sin(x_1) + x_3 \sin(x_1) + x_2 \cos^2(x_1) - x_2^2 \cos(x_1) + \\ & - \cos(x_1)\cos(2x_1) + x_2 \cos(2x_1) - k_1 x_1 - k_1 x_3 + \\ & - \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) + k_1 x_2 \sin(x_1) - k_2 x_1 - k_2 x_3 + \\ & - \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) + k_2 x_2 \sin(x_1) + k_2 k_1 \cos(x_1) - k_2 k_1 x_2\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 =& x_1 x_3 + (2 - \sin(x_3))\, x_4 - x_1 \sin(x_1) - x_3 \sin(x_1) + \\ & - x_2 \cos^2(x_1) + x_2^2 \cos(x_1) + \cos(x_1)\cos(2x_1) - x_2 \cos(2x_1) + \\ & + k_1 x_1 + k_1 x_3 + \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) - k_1 x_2 \sin(x_1) + k_2 x_1 + k_2 x_3 + \\ & + \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) - k_2 x_2 \sin(x_1) - k_2 k_1 \cos(x_1) + k_2 k_1 x_2\end{aligned}$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V_3 = V_2 + 0.5 z_2^2,\ V_2 = 0.5 x_1^2 + 0.5 z_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 + z_2 \dot{z}_2$$

При умножении z_2 на $\dot{z}_2$ все слагаемые, кроме $z x_4 (2 - \sin(x_3))$, получатся неопределенными по знаку. Нужно компенсировать их с помощью виртуального управления $x_4 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)$, а также добавить отрицательно определенное слагаемое с z_2:

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_1, x_2, x_3) =& \frac{1}{2 - \sin(x_3)} \left(-x_1 x_3 + x_1 \sin(x_1) + x_3 \sin(x_1) + \right. \\ & + x_2 \cos^2(x_1) - x_2^2 \cos(x_1) - \cos(x_1)\cos(2x_1) + x_2 \cos(2x_1) + \\ & - k_1 x_1 - k_1 x_3 - \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) + k_1 x_2 \sin(x_1) - k_2 x_1 - k_2 x_3 + \\ & \left. - \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) + k_2 x_2 \sin(x_1) + k_2 k_1 \cos(x_1) - k_2 k_1 x_2 - k_3 z_2 \right), \\ & k_3 > 0\end{aligned}$$

Тогда:

$$\dot{V}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 < 0 \, \forall (x_1, z_1, z_2) \neq (0,0,0), k_1, k_2, k_3 > 0$$

Введем следующую ошибку и выполним аналогичные действия:

$$z_3 = x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \dot{z}_3 = \dot{x}_4 - \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3)$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V(x_1, z_1, z_2, z_3) = V_3 + 0.5 z_3^2, \; V_3 = 0.5 x_1^2 + 0.5 z_1^2 + 0.5 z_2^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}(x_1, z_1, z_2, z_3) = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 + z_3 \dot{z}_3$$

Рассмотрим $z_3 \dot{z}_3$:

$$z_3 \dot{z}_3 = z_3 \left(x_2 x_3 + 2u - \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3) \right)$$

Достаточно компенсировать реальным управлением влияние $x_2 x_3$ и $\dot{\varphi}_{3,t}$ и добавить слагаемое с z_3, которое в производной функции Ляпунова будет отрицательно определенным:

$$u = \frac{1}{2} \left(-x_2 x_3 + \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3) - k_4 \left(x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \; k_4 > 0$$

Таким образом:

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 - k_4 z_3 \left(x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \right),$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 - k_4 z_3^2 < 0 \, \forall (x_1, z_1, z_2, z_3) \neq (0,0,0,0), k_i > 0$$

Начало координат глобально асимптотически устойчиво с законом управления:

$$u = \frac{1}{2} \left(-x_2 x_3 + \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3) - k_4 \left(x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \; k_i > 0$$

Моделирование системы при $k_i = 1, x_0 = (0.5, 0, 0, 0)$:

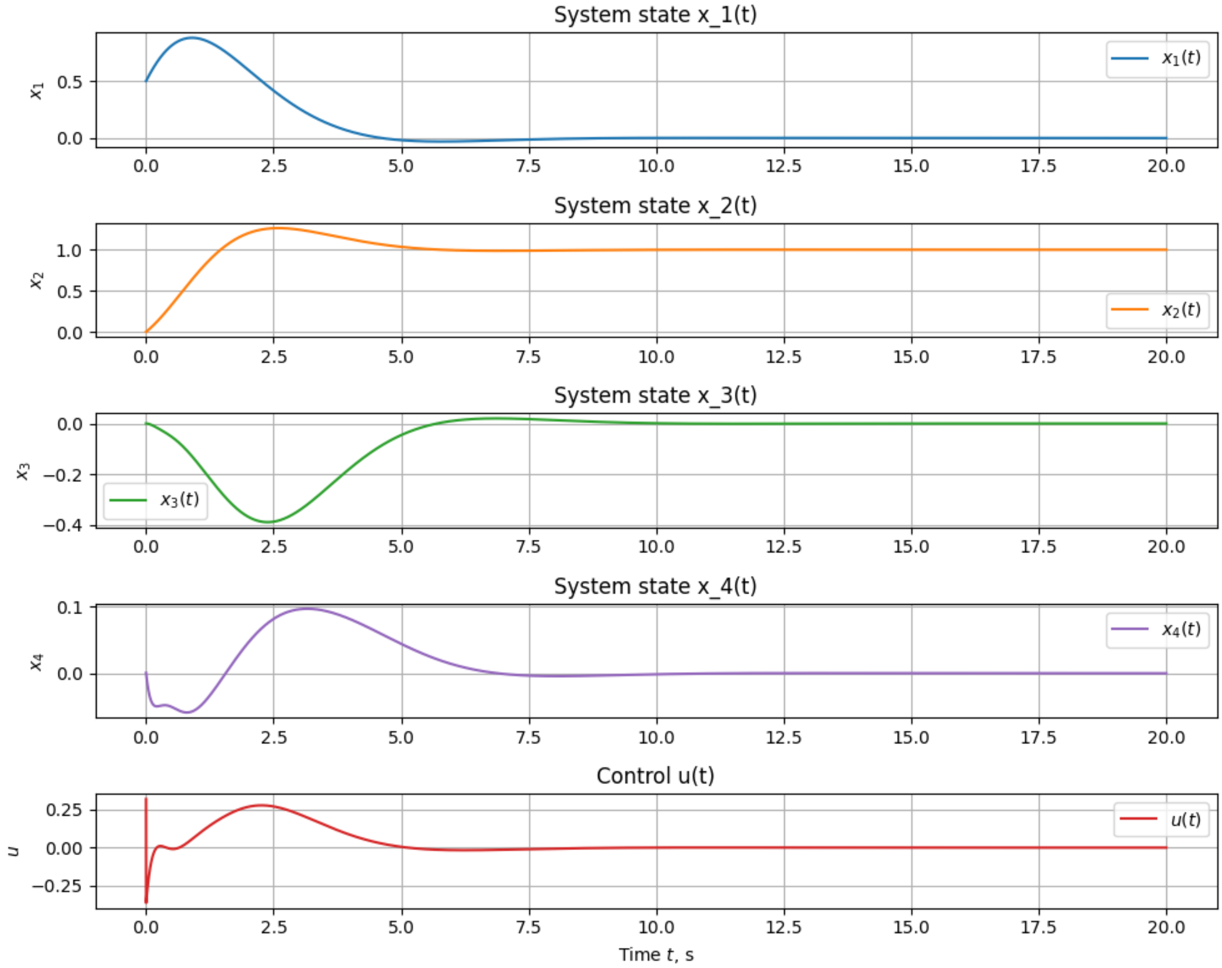

Рис. 3: Графики $x_i(t), u(t)$

Система с данным законом управления стремится к положению равновесия $x = (0, 1, 0, 0)$, управление стремится к нулю.

Рассмотрим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \varphi_1(x_1(t)) + z_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \varphi_1(0), z_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

$$\varphi_1(x_1(t) = 0) = \cos(0) + k_1 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

Чтобы $x_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ необходимо, чтобы ошибка $z_1(t)$ была ненулевой для $\varphi_1(x_1)$, однако синтез бэкстеппинг регулятора подразумевает стремление всех ошибок к нулю в устойчивом состоянии.

4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были синтезированы регуляторы на основе метода бэкстеппинга для различных нелинейных систем. Было выполнено моделирование систем, показывающее, что регуляторы синтезированы корректно.