

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«АНАЛИЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1	Условие . . . . .	3
1.2	Выполнение . . . . .	3
1.2.1	Первая система . . . . .	3
1.2.2	Вторая система . . . . .	5
1.2.3	Третья система . . . . .	7
1.2.4	Четвертая система . . . . .	7
1.2.5	Пятая система . . . . .	7
1.2.6	Шестая система . . . . .	7
1.2.7	Седьмая система . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>8</b>
2.1	Условие . . . . .	8
2.2	Выполнение . . . . .	8
2.2.1	Первая система . . . . .	8
2.2.2	Вторая система . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Вывод</b>	<b>8</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Для каждой из данных систем найти все точки равновесия. На основе метода линеаризации в точке определить тип каждого изолированного состояния равновесия. С использованием перехода к полярным координатам определить устойчивость предельного цикла для системы 4.

Численно построить фазовый портрет каждой системы и сравнить с полученными результатами (кроме системы 7).

### 1.2. Выполнение

#### 1.2.1. Первая система

Найдем точки равновесия системы (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Приравняем выражения к нулю и найдем корни системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2(1 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; -1), \\ (-1; 1) \end{bmatrix}$$

Определим тип каждого изолированного состояния равновесия.

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы  $A_i$  и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\},$$

$$A_2 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{4.8284, -0.8284\},$$

$$A_3 = J|_{(-1;1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_3 1,2} = \lambda_{A_2 1,2}$$

Таким образом,

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\}$  – устойчивый фокус,

$(1; -1), (-1; 1) : \lambda_{A_{2,3} 1,2} = \{4.8284, -0.8284\}$  – седло

Седловые точки находятся рядом с устойчивым фокусом, из-за чего некоторые фазовые траектории будут уходить на бесконечность вдоль седловых направлений.

Таким образом, любой контур вокруг фокуса не может полностью замкнуться, а значит предельного цикла не существует.

Численно построим фазовый портрет системы.

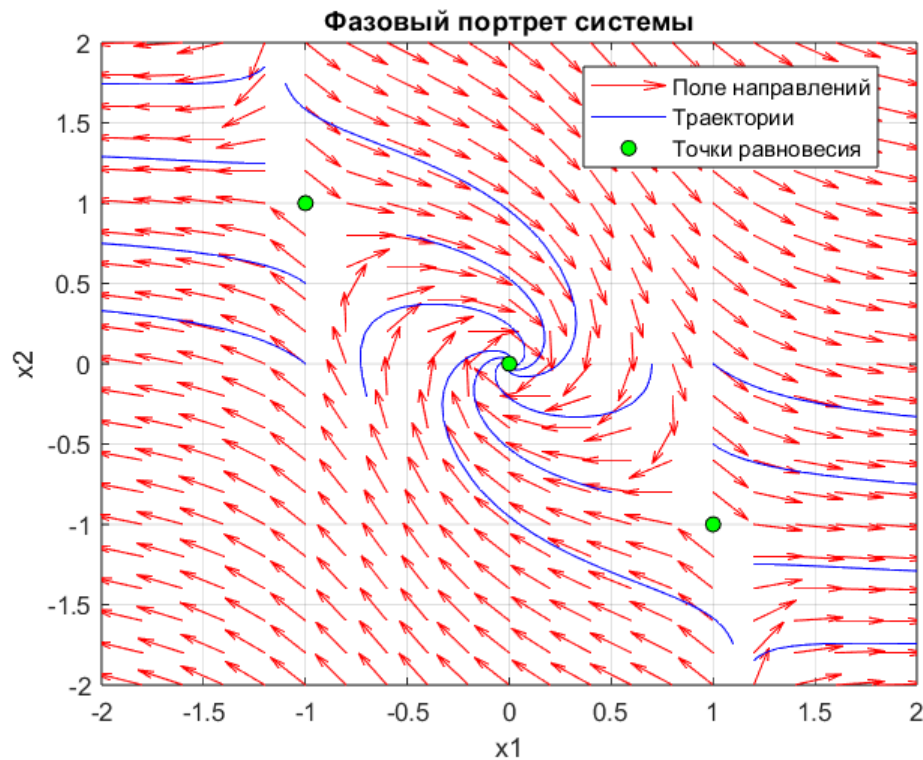


Рис. 1: Фазовый портрет системы (1)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились устойчивый фокус и два седла.

### 1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему (2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases} \quad (2)$$

Проведем аналогичные действия

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 = 0, \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (x_2 + 1) = 0, \\ -x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Получим две системы

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 (x_2 - 1) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Подставив  $x_1 = 1$  во вторую систему, получим равенство нулю. После деления полинома  $x_1^3 + x_1 - 2$  на  $x_1 - 1$  получим

$$\begin{cases} x_2 = -1, \\ (x_1 - 1) (x_1^2 + x_1 + 2) = 0 \end{cases}$$

Второе выражение даст комплексные корни. Для анализа системы и построения фазовых портретов берем только вещественные, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, имеем точки равновесия системы

$$\begin{bmatrix} (0; 0), \\ (0; 1), \\ (1; -1) \end{bmatrix}$$

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 + 1 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & x_1 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы  $A_i$  и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\},$$

$$A_2 = J|_{(0;1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\},$$

$$A_3 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.7321i\}$$

Таким образом,

$$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\} - \text{седло},$$

$$(0; 1) : \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\} - \text{неустойчивый узел},$$

$$(1; -1) : \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.7321i\} - \text{устойчивый фокус}$$

Численно построим фазовый портрет системы.

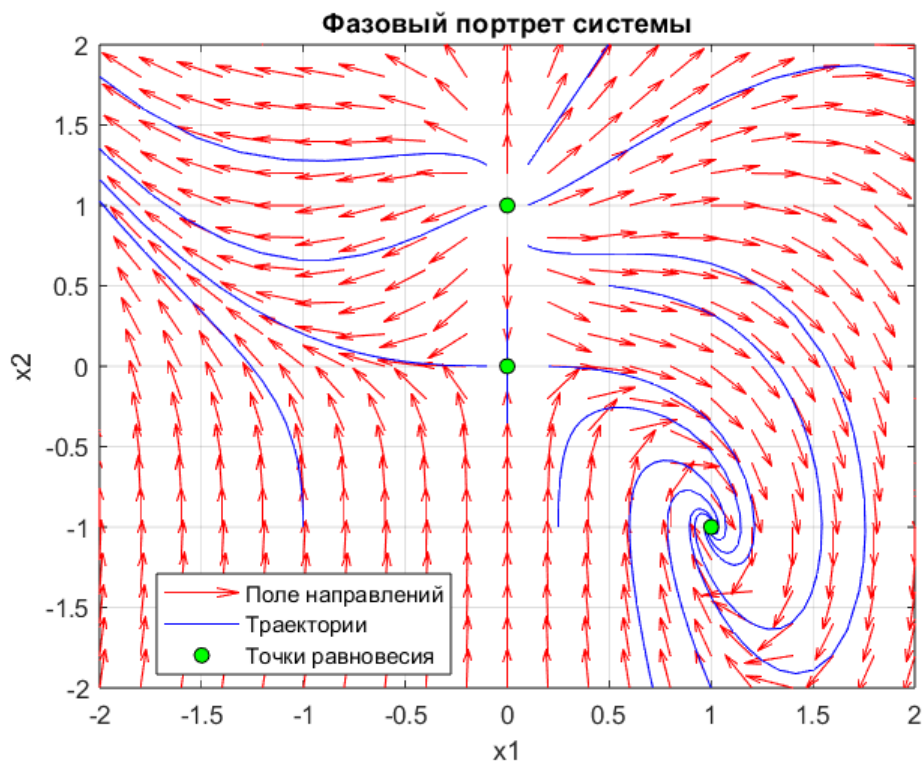


Рис. 2: Фазовый портрет системы (2)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились седло, неустойчивый узел и устойчивый фокус.

### 1.2.3. Третья система

...

### 1.2.4. Четвертая система

...

### 1.2.5. Пятая система

...

### 1.2.6. Шестая система

...

### 1.2.7. Седьмая система

...

## **2. Задание 2**

### **2.1. Условие**

Для каждой из данных систем найти все изолированные точки равновесия и построить локально стабилизирующий регулятор.

Представить результаты численного моделирования.

### **2.2. Выполнение**

#### **2.2.1. Первая система**

...

#### **2.2.2. Вторая система**

...

## **3. Вывод**

...