

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА
БЭКСТЕППИНГА»**

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., R3441
Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1	3
1.1	Условие	3
1.2	Выполнение	3
2	Задание 2	6
2.1	Условие	6
2.2	Выполнение	6
3	Задание 3	8
3.1	Условие	8
3.2	Выполнение	9
4	Вывод	14

1. Задание 1

1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + (2 + \sin(x_1))u \end{cases} \quad (1)$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

1.2. Выполнение

Компонента x_2 является виртуальным управлением подсистемы \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + \varphi(x_1), \quad f(x_1) = \sin(x_1) + x_1^2, \quad \varphi(x_1) = x_2$$

Функция Ляпунова:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2, \quad V_1(x_1) > 0 \quad \forall x_1 \neq 0, \quad V_1(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = x_1 (x_2 + \sin(x_1) + x_1^2) = x_1 x_2 + x_1 \sin(x_1) + x_1^3$$

Необходимо, чтобы $\dot{V}_1(x_1) < 0 \quad \forall x_1 \neq 0$. В таком случае нужно компенсировать неопределенные по знаку слагаемые $x_1 \sin(x_1)$, x_1^3 и сделать слагаемое $x_1 x_2$ отрицательным четной степени через $x_2 = \varphi(x_1)$:

$$\varphi(x_1) = -\sin(x_1) - x_1^2 - k_1 x_1, \quad k_1 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = -k_1 x_1$$

Тогда, производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}_1(x_1) = -k_1 x_1^2 < 0 \quad \forall x_1 \neq 0, \quad k_1 > 0$$

Сделаем замену, чтобы определить ошибку между реальным x_2 и вирту-

альным управлением:

$$z = x_2 - \varphi(x_1) = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1$$

Тогда:

$$x_2 = z - \sin(x_1) - x_1^2 - k_1 x_1$$

Подставим x_2 в подсистему \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 = z - k_1 x_1$$

Найдем \dot{z} :

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_t(x_1)$$

Найдем $\dot{\varphi}_t(x_1)$:

$$\dot{\varphi}_t(x_1) = (-\cos(x_1) - 2x_1 - k_1) \dot{x}_1 = -(\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1)$$

Тогда:

$$\dot{z} = x_1^2 + (2 + \sin(x_1))u + (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1)$$

Полная функция Ляпунова:

$$V = V_1 + 0.5z^2, \quad V_1 = 0.5x_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + z \dot{z},$$

$$\dot{V} = x_1(z - k_1 x_1) + z(x_1^2 + (2 + \sin(x_1))u + (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1)),$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 + z(2 + \sin(x_1))u + z x_1 + z x_1^2 + z(\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1),$$

Выберем управление $u(t)$ так, чтобы компенсировать неопределенные по знаку слагаемые и добавить отрицательно определенное слагаемое с z :

$$u = \frac{1}{2 + \sin(x_1)} (-x_1 - x_1^2 - (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(z - k_1 x_1) - k_2 z), \quad k_2 > 0,$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z^2 < 0 \quad \forall (x_1, z) \neq (0, 0), \quad k_1, k_2 > 0$$

Положение равновесия глобально асимптотически устойчиво с таким законом управления u .

Подставляя $z = x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1$ в u , итоговый закон управления:

$$u = \frac{1}{2 + \sin(x_1)} \left(-x_1 - x_1^2 - (\cos(x_1) + 2x_1 + k_1)(x_2 + \sin(x_1) + x_1^2) - k_2(x_2 + \sin(x_1) + x_1^2 + k_1 x_1) \right)$$

Выполним моделирование системы при $k_1 = 2, k_2 = 3, x_0 = (1, -0.5)$:

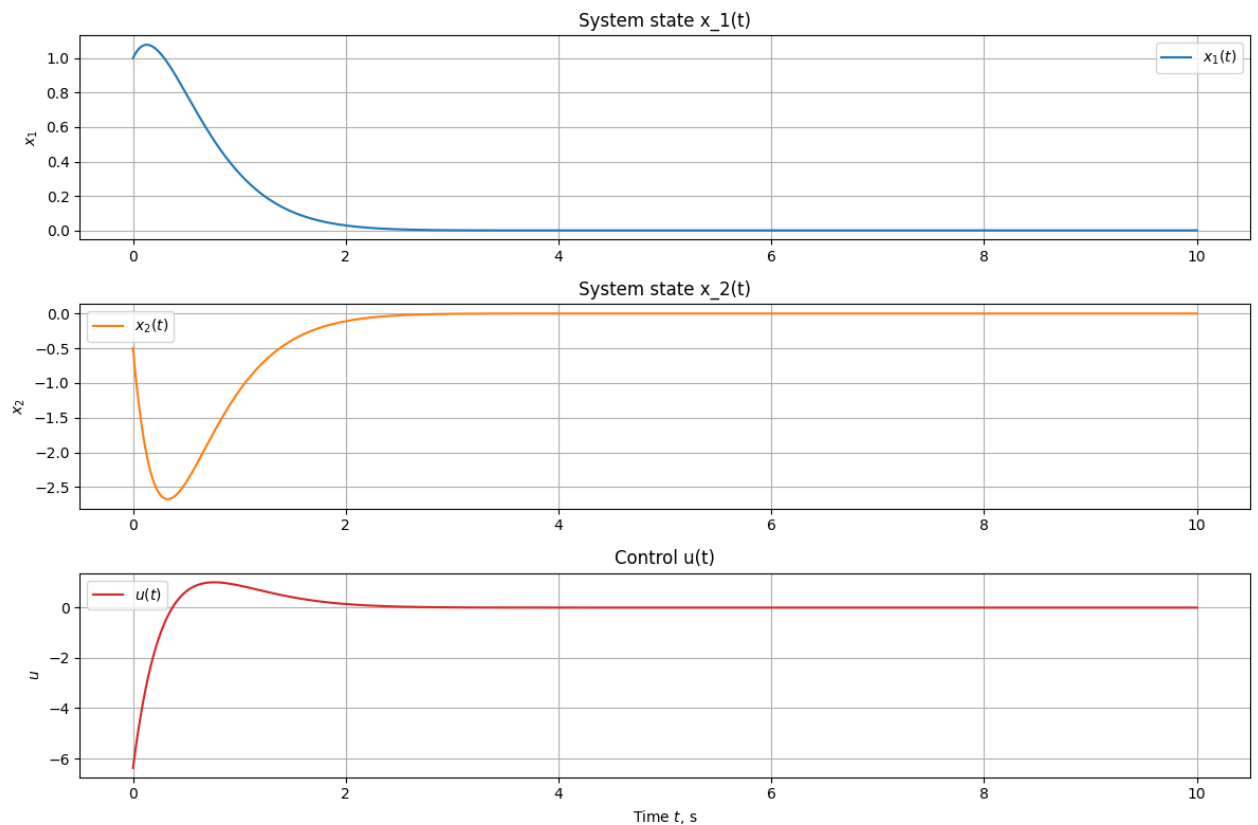


Рис. 1: Графики $x_i(t), u(t)$

Вектор состояния и управление стремятся к нулю с течением времени.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \quad (2)$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

2.2. Выполнение

Компонента x_2 – виртуальное управление подсистемы \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + \varphi(x_1), \quad f(x_1) = -x_1^3, \quad \varphi(x_1) = x_2$$

Функция Ляпунова и ее производная:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2, \quad \dot{V}_1(x_1) = x_1 (x_2 - x_1^3) = x_1x_2 - x_1^4$$

Чтобы $\dot{V}_1 \leq 0$, нужно сделать слагаемое x_1x_2 отрицательно определенным через $\varphi(x_1) = x_2$:

$$\varphi(x_1) = -k_1x_1, \quad k_1 > 0$$

Тогда:

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 (-k_1x_1 - x_1^3) = -k_1x_1^2 - x_1^4 < 0 \quad \forall x_1 \neq 0, k_1 > 0$$

Замена:

$$z = x_2 - \varphi(x_1) = x_2 + k_1x_1$$

Тогда:

$$x_2 = z - k_1x_1$$

Подставим x_2 в подсистему \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 = z - k_1 x_1 - x_1^3$$

Найдем \dot{z} :

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_t(x_1)$$

Найдем $\dot{\varphi}_t(x_1)$:

$$\dot{\varphi}_t(x_1) = -k_1 \dot{x}_1 = -k_1 (z - k_1 x_1 - x_1^3)$$

Тогда:

$$\dot{z} = x_1 + u + k_1 (z - k_1 x_1 - x_1^3)$$

Полная функция Ляпунова и ее производная:

$$V = V_1 + 0.5z^2, \quad V_1 = 0.5x_1^2,$$

$$\dot{V} = x_1 (z - k_1 x_1 - x_1^3) + z (x_1 + u + k_1 (z - k_1 x_1 - x_1^3)),$$

$$\dot{V} = 2zx_1 - k_1 x_1^2 - x_1^4 + zu + z^2 k_1 - zk_1^2 x_1 - zk_1 x_1^3$$

Закон управления:

$$u = -2x_1 - k_1 z + k_1^2 x_1 + k_1 x_1^3 - k_2 z$$

Тогда:

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - x_1^4 - k_2 z^2 < 0 \quad \forall (x_1, z) \neq (0, 0), \quad k_1, k_2 > 0$$

Положение равновесия глобально асимптотически устойчиво.

Итоговый закон управления:

$$u = -2x_1 - k_1 (x_2 + k_1 x_1) + k_1^2 x_1 + k_1 x_1^3 - k_2 (x_2 + k_1 x_1),$$

$$u = -2x_1 - k_1 x_2 + k_1 x_1^3 - k_2 x_2 - k_2 k_1 x_1$$

Моделирование системы при $k_1 = 2, k_2 = 3, x_0 = (1, -0.5)$:

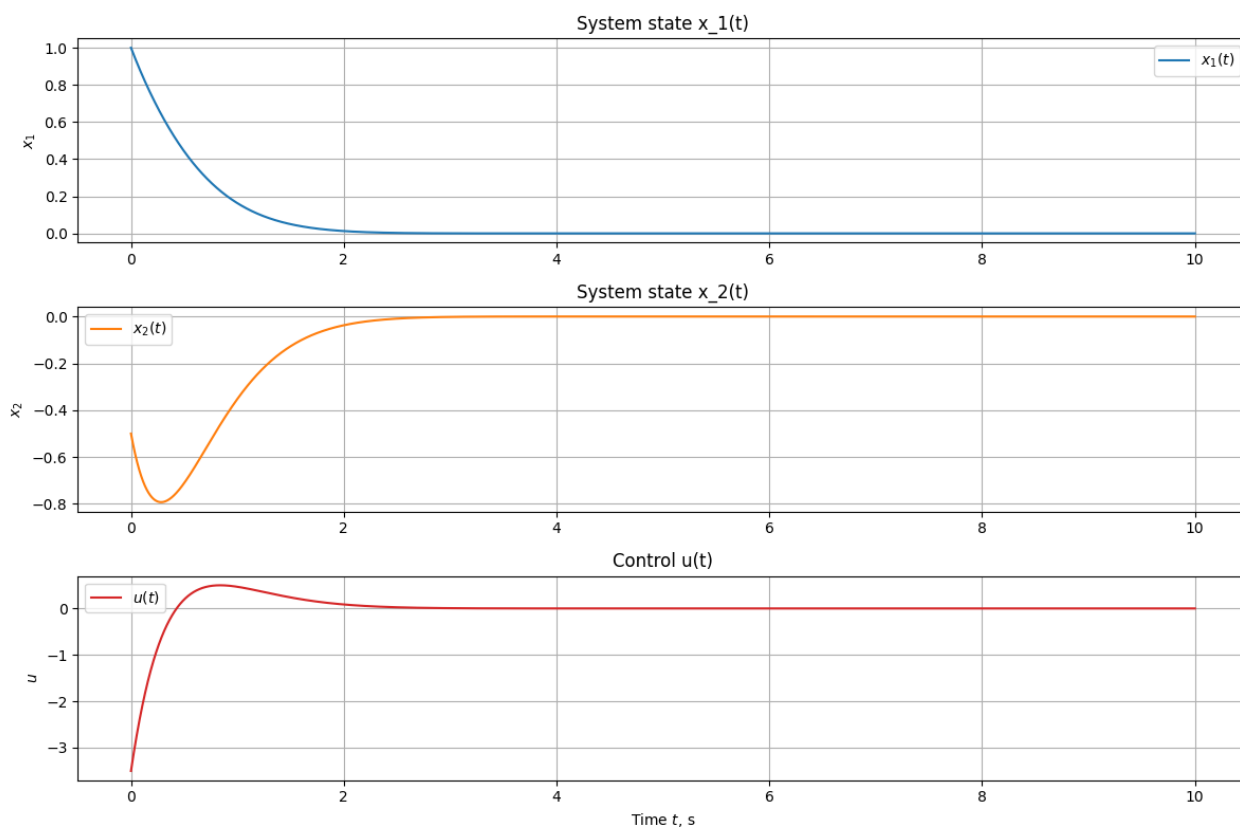


Рис. 2: Графики $x_i(t)$, $u(t)$

Вектор состояния и управление стремятся к нулю с течением времени.

3. Задание 3

3.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(x_1) - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + (2 - \sin(x_3)) x_4, \\ \dot{x}_4 = x_2 x_3 + 2u \end{cases} \quad (3)$$

Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе метода бэкстеппинга и провести математическое моделирование.

3.2. Выполнение

Система четвёртого порядка в строгой обратносвязной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1 x_2, & f_1(x_1) &= \cos(x_1), g_1 = -1, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1) + g_2 x_3, & f_2(x_1) &= x_1, g_2 = 1, \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_3) + g_3(x_3) x_4, & f_3(x_1, x_3) &= x_1 x_3, g_3(x_3) = 2 - \sin(x_3), \\ \dot{x}_4 &= f_4(x_2, x_3) + g_4 u, & f_4(x_2, x_3) &= x_2 x_3, g_4 = 2\end{aligned}$$

Так как $g_3(x_3) = 2 - \sin(x_3) \geq 1 > 0$, $g_4 = 2 > 0$, то управление эффективно.

Сделаем рекурсивный бэкстеппинг.

Функция Ляпунова и ее производная:

$$V_1(x_1) = 0.5x_1^2, \quad \dot{V}_1(x_1) = x_1 (\cos(x_1) - x_2) = x_1 \cos(x_1) - x_1 x_2$$

Виртуальное управление:

$$\varphi_1(x_1) = \cos(x_1) + k_1 x_1, \quad k_1 > 0$$

Тогда, при $x_2 = \varphi_1(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 \Rightarrow \dot{V}_1(x_1) = -k_1 x_1^2 < 0 \quad \forall x_1 \neq 0, k_1 > 0$$

Ошибка отслеживания:

$$z_1 = x_2 - \varphi_1(x_1) = x_2 - \cos(x_1) - k_1 x_1$$

Тогда:

$$\begin{aligned}x_2 &= z_1 + \cos(x_1) + k_1 x_1, \\ \dot{x}_1 &= \cos(x_1) - x_2 = -z_1 - k_1 x_1\end{aligned}$$

Найдем \dot{z}_1 :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{\varphi}_{1,t}(x_1), \\ \dot{\varphi}_{1,t}(x_1) &= (-\sin(x_1) + k_1) \dot{x}_1 = (\sin(x_1) - k_1) (z_1 + k_1 x_1),\end{aligned}$$

$$\dot{z}_1 = x_1 + x_3 - (\sin(x_1) - k_1)(z_1 + k_1 x_1)$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V_2 = V_1 + 0.5z_1^2, \quad V_1 = 0.5x_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1 + z_1 \dot{z}_1 = -x_1(z_1 + k_1 x_1) + z_1(x_1 + x_3 - (\sin(x_1) - k_1)(z_1 + k_1 x_1)),$$

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 + z_1 x_3 - z_1^2 \sin(x_1) - z_1 k_1 x_1 \sin(x_1) + z_1^2 k_1 + z_1 k_1^2 x_1$$

Виртуальное управление $x_3 = \varphi_2(x_1, x_2)$:

$$x_3 = z_1 \sin(x_1) + k_1 x_1 \sin(x_1) - z_1 k_1 - k_1^2 x_1 - z_1 k_2, \quad k_2 > 0$$

Тогда, после подстановки $z_1 x_3$:

$$\dot{V}_2 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 < 0 \quad \forall (x_1, z_1) \neq (0, 0), \quad k_2 > 0$$

Подставим z_1 в $\varphi_2(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2) = & x_2 \sin(x_1) - \sin(x_1) \cos(x_1) - k_1 x_2 + \\ & + k_1 \cos(x_1) - k_2 x_2 + k_2 \cos(x_1) + k_2 k_1 x_1 \end{aligned}$$

Введем следующую ошибку отслеживания и проведем аналогичные действия:

$$z_2 = x_3 - \varphi_2(x_1, x_2) \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{x}_3 - \dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2) = & \dot{x}_2 \sin(x_1) - k_1 \dot{x}_2 - k_2 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2 \cos(x_1) + \\ & - \dot{x}_1 \cos(2x_1) - k_1 \dot{x}_1 \sin(x_1) - k_2 \dot{x}_1 \sin(x_1) + k_2 k_1 \dot{x}_1 \end{aligned}$$

Подставим \dot{x}_1, \dot{x}_2 в $\dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{2,t}(x_1, x_2) = & x_1 \sin(x_1) + x_3 \sin(x_1) + x_2 \cos^2(x_1) - x_2^2 \cos(x_1) + \\ & - \cos(x_1) \cos(2x_1) + x_2 \cos(2x_1) - k_1 x_1 - k_1 x_3 + \\ & - \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) + k_1 x_2 \sin(x_1) - k_2 x_1 - k_2 x_3 + \\ & - \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) + k_2 x_2 \sin(x_1) + k_2 k_1 \cos(x_1) - k_2 k_1 x_2\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 = & x_1 x_3 + (2 - \sin(x_3)) x_4 - x_1 \sin(x_1) - x_3 \sin(x_1) + \\ & - x_2 \cos^2(x_1) + x_2^2 \cos(x_1) + \cos(x_1) \cos(2x_1) - x_2 \cos(2x_1) + \\ & + k_1 x_1 + k_1 x_3 + \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) - k_1 x_2 \sin(x_1) + k_2 x_1 + k_2 x_3 + \\ & + \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) - k_2 x_2 \sin(x_1) - k_2 k_1 \cos(x_1) + k_2 k_1 x_2\end{aligned}$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V_3 = V_2 + 0.5 z_2^2, \quad V_2 = 0.5 x_1^2 + 0.5 z_1^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 + z_2 \dot{z}_2$$

При умножении z_2 на \dot{z}_2 все слагаемые, кроме $z x_4 (2 - \sin(x_3))$, получатся неопределенными по знаку. Нужно компенсировать их с помощью виртуального управления $x_4 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)$, а также добавить отрицательно определенное слагаемое с z_2 :

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{2 - \sin(x_3)} (-x_1 x_3 + x_1 \sin(x_1) + x_3 \sin(x_1) + \\ & + x_2 \cos^2(x_1) - x_2^2 \cos(x_1) - \cos(x_1) \cos(2x_1) + x_2 \cos(2x_1) + \\ & - k_1 x_1 - k_1 x_3 - \frac{k_1}{2} \sin(2x_1) + k_1 x_2 \sin(x_1) - k_2 x_1 - k_2 x_3 + \\ & - \frac{k_2}{2} \sin(2x_1) + k_2 x_2 \sin(x_1) + k_2 k_1 \cos(x_1) - k_2 k_1 x_2 - k_3 z_2), \\ & k_3 > 0\end{aligned}$$

Тогда:

$$\dot{V}_3 = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 < 0 \forall (x_1, z_1, z_2) \neq (0, 0, 0), k_1, k_2, k_3 > 0$$

Введем следующую ошибку и выполним аналогичные действия:

$$z_3 = x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \dot{z}_3 = \dot{x}_4 - \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3)$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V(x_1, z_1, z_2, z_3) = V_3 + 0.5z_3^2, \quad V_3 = 0.5x_1^2 + 0.5z_1^2 + 0.5z_2^2$$

Ее производная:

$$\dot{V}(x_1, z_1, z_2, z_3) = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 + z_3 \dot{z}_3$$

Рассмотрим $z_3 \dot{z}_3$:

$$z_3 \dot{z}_3 = z_3 (x_2 x_3 + 2u - \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3))$$

Достаточно компенсировать реальным управлением влияние $x_2 x_3$ и $\dot{\varphi}_{3,t}$ и добавить слагаемое с z_3 , которое в производной функции Ляпунова будет отрицательно определенным:

$$u = \frac{1}{2} (-x_2 x_3 + \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3) - k_4 (x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3))), \quad k_4 > 0$$

Таким образом:

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 - k_4 z_3 (x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3)),$$

$$\dot{V} = -k_1 x_1^2 - k_2 z_1^2 - k_3 z_2^2 - k_4 z_3^2 < 0 \forall (x_1, z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0, 0), k_i > 0$$

Положение равновесия глобально асимптотически устойчиво с законом управления:

$$u = \frac{1}{2} (-x_2 x_3 + \dot{\varphi}_{3,t}(x_1, x_2, x_3) - k_4 (x_4 - \varphi_3(x_1, x_2, x_3))), \quad k_i > 0$$

Моделирование системы при $k_i = 1, x_0 = (0.5, 0, 0, 0)$:

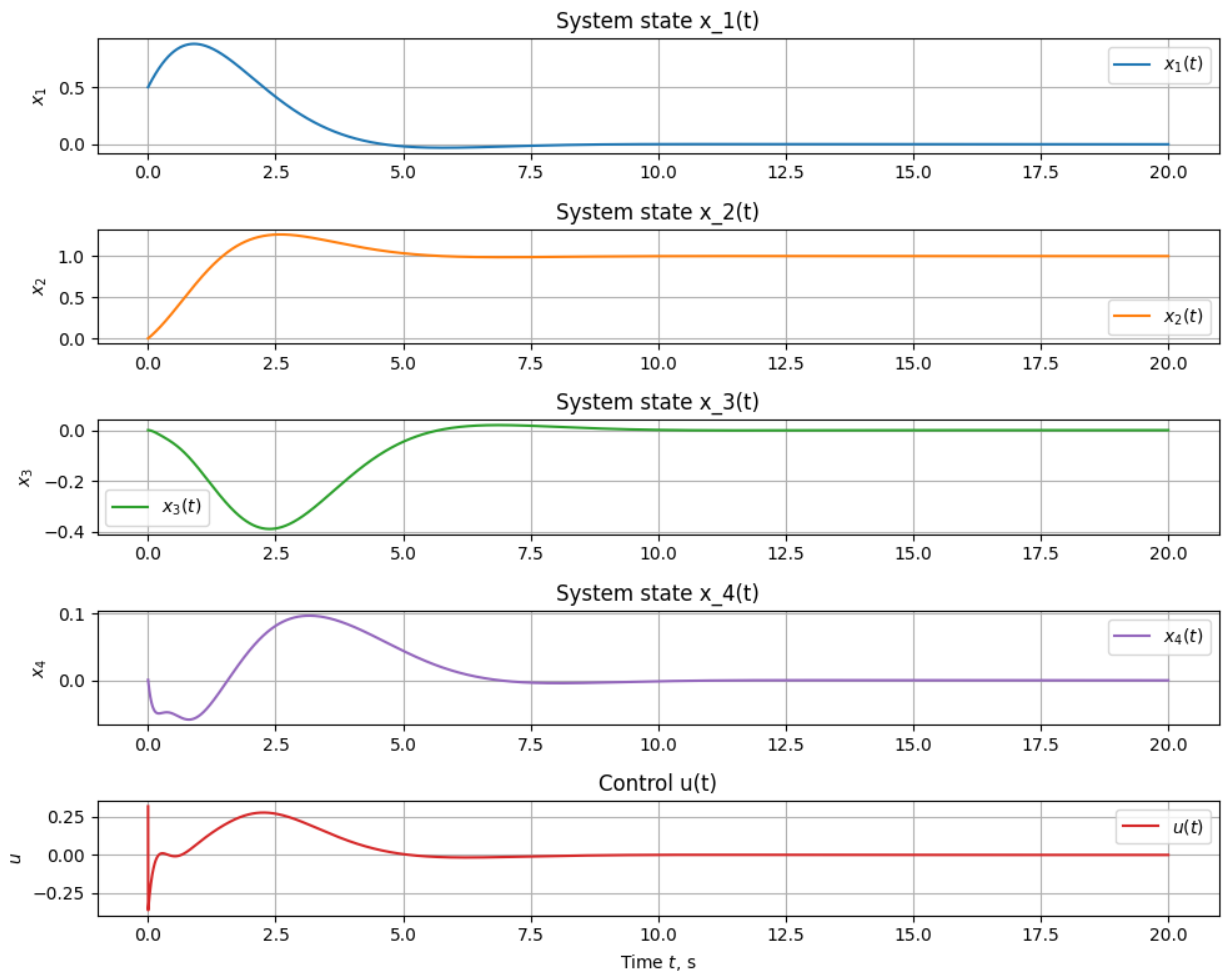


Рис. 3: Графики $x_i(t), u(t)$

Система с данным законом управления стремится к положению равновесия $x = (0, 1, 0, 0)$, управление стремится к нулю.

Рассмотрим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \varphi_1(x_1(t)) + z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varphi_1(0), z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

$$\varphi_1(x_1(t) = 0) = \cos(0) + k_1 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

Чтобы $x_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ необходимо, чтобы ошибка $z_1(t)$ была ненулевой для $\varphi_1(x_1)$, однако синтез бэкстеппинг регулятора подразумевает стремление всех ошибок к нулю в устойчивом состоянии.

4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были синтезированы регуляторы на основе метода бэкстеппинга для различных нелинейных систем. Было выполнено моделирование систем, показывающее, что регуляторы синтезированы корректно.