

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО
СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ
СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ»**

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., Р3441
Дьячихин Д. Н., Р3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1	3
1.1 Условие	3
1.2 Выполнение	3
2 Задание 2	9
2.1 Условие	9
2.2 Выполнение	9
3 Задание 3	13
3.1 Условие	13
3.2 Выполнение	13
4 Вывод	13

1. Задание 1

1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) u, \end{cases}$$

где $|\theta_1| \leq 1$, $|\theta_2| \leq 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо:

1. синтезировать стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов;
2. синтезировать стабилизирующий непрерывный регулятор на основе скользящих режимов;
3. провести соответствующий анализ устойчивости;
4. провести математическое моделирование.

1.2. Выполнение

Выберем скользящую поверхность, на которой упростим динамику системы и зададим ей желаемые свойства:

$$s = ax_1 + x_2 = 0, \quad a > 0$$

На поверхности $s = 0$:

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + \sin x_1$$

При малых x_1 получаем $\sin x_1 \sim x_1$:

$$\dot{x}_1 \approx -(a - 1)x_1$$

Для асимптотической устойчивости $a > 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$.

Динамика скользящей переменной:

$$s = ax_1 + x_2 \Rightarrow \dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Подставим \dot{x}_1, \dot{x}_2 :

$$\dot{s} = a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) u,$$

$$\dot{s} = (2 + \theta_2) u + \Delta(x), \quad \Delta(x) \equiv a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2$$

Необходимо выбрать u так, чтобы выполнялось условие достижения скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0$$

Это эквивалентно:

$$\dot{V} \leq -\eta|s|, \quad V = 0.5s^2$$

Синтезируем дискретный регулятор на основе скользящих режимов.

Выберем управление как сумму эквивалентной и переключающей составляющих:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}$$

Эквивалентная часть при $s = 0$:

$$u_{\text{eq}} = -\frac{\Delta(x)}{2 + \theta_2}$$

Параметры θ_1, θ_2 неизвестны, поэтому положим их нулевыми.

Такое допущение возможно вследствие наличия переключающей части $\beta(x) \text{sign}(s)$ с коэффициентом переключения β_0 , который при верном подборе компенсирует влияние отклонений θ_i .

Кроме того, скользящий режим является робастным к параметрическим неопределенностям и возмущениям.

Тогда, номинальная эквивалентная часть:

$$u_{\text{eq,nom}} = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1)$$

Добавим переключающую часть:

$$u_{\text{sw}} = -\beta(x) \text{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{a}{2} (x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Подставим u в \dot{s} :

$$\dot{s} = a (x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) \left(-\frac{a}{2} (x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \operatorname{sign}(s) \right),$$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a (x_2 + \sin x_1), \\ \dot{s} &= -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \delta(x)\end{aligned}$$

Оценим модуль «невязки» $\delta(x)$. Получим верхнюю оценку при $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1, |\sin x_1| \leq |x_1|$:

$$|\delta(x)| = \left| \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a (x_2 + \sin x_1) \right| \leq |x_1|^2 + \frac{a}{2} (|x_2| + |x_1|) \equiv \rho(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)$$

Умножим выражение на s , учтем $\operatorname{sign}(s) \cdot s = |s|$ и оценим верхнюю границу:

$$s \dot{s} \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) |s| + \rho(x) s \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) |s| + |\rho(x)| |s|$$

Вынесем общий множитель $-|s|$, положим $g_0 := \min(2 + \theta_2) = 1$ и оценим верхнюю границу:

$$s \dot{s} \leq -((2 + \theta_2) \beta(x) - |\rho(x)|) |s| \leq -(g_0 \beta(x) - |\rho(x)|) |s|,$$

$$s \dot{s} \leq -(\beta(x) - |\rho(x)|) |s|$$

Если выбрать $\beta(x) \geq |\rho(x)| + \beta_0, \beta_0 > 0$:

$$s \dot{s} \leq -\beta_0 |s| < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Это аналогично записи через функцию Ляпунова и ее производную:

$$V = 0.5s^2, \dot{V} = s\dot{s} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \forall s \neq 0, \beta_0 > 0,$$

что гарантирует достижение $s = 0$ за конечное время.

Выберем:

$$\beta(x) \geq |x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|) + \beta_0, \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1) - \left(|x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|) + \beta_0\right) \text{sign}(s)$$

Синтезируем непрерывный регулятор на основе скользящих режимов.

Для уменьшения колебаний из-за задержки переключения управления, заменим в управлении функцию sign функцией насыщения:

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} s/\varepsilon, & |s| \leq \varepsilon, \\ \text{sign}(s), & |s| > \varepsilon \end{cases}$$

Непрерывный регулятор:

$$u = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Аналогично подставим u в \dot{s} , оценим модуль невязки $\delta(x)$ абсолютной величиной $\rho(x)$ и коэффициент при $\beta(x)$ константой g_0 :

$$\dot{s} = -(2 + \theta_2)\beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}(ax_2 + a \sin x_1),$$

$$\dot{s} \leq -g_0\beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x), g_0 := \min(2 + \theta_2) = 1$$

Зададим функцию Ляпунова $V = 0.5s^2$, тогда:

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq -\beta(x)s \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x)|s|$$

При $|s| > \varepsilon$: $\text{sat}(s/\varepsilon) = \text{sign}(s)$ – аналогичный разрывному случаю:
 $\dot{V} \leq -\beta_0|s|, \beta_0 > 0$ – уменьшение s до $|s| \leq \varepsilon$.

При $|s| \leq \varepsilon$: $\text{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$, тогда:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Подставим $\beta(x)$:

$$\dot{V} \leq -\frac{\rho(x) + \beta_0}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = -\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 - \frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Два последних члена:

$$-\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = \rho(x)|s| \left(1 - \frac{|s|}{\varepsilon}\right) \geq 0,$$

так как $|s| \leq \varepsilon$ внутри полосы.

Следовательно, худший случай \dot{V}_{\max} достигается, когда $\rho(x)$ максимально.

Пусть $\rho_{\max} = \sup_{x \in \mathcal{D}} \rho(x)$, где \mathcal{D} – ограниченная и замкнутая область в пространстве состояний, в которой оценивается верхняя граница $|\delta(x)| \leq \rho(x) \leq \rho_{\max}$.

Тогда, оценка сверху:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 + \rho_{\max}|s|$$

Тогда, $\dot{V} < 0$ при:

$$|s| > \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{\beta_0}$$

Следовательно, все траектории входят в полосу:

$$|s| \leq \varepsilon_s^* := \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{\beta_0}$$

и остаются в ней.

Начало координат практически устойчиво – траектории не расходятся и в конечном счете входят в малую окрестность нуля радиуса $\mathcal{O}(\varepsilon)$ и остаются в ней, так как динамика на поверхности устойчива.

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\varepsilon_s^* \rightarrow 0$ – приближение к идеальному скользящему режиму с отклонением $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Так как $\varepsilon = \text{const.}$, $\text{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$, $\beta(x) \geq \rho(x) + \beta_0$, $\beta_0 > 0$ и система

достигает полосы $|s| \leq \varepsilon$ за конечное время и остается в ней, то в окрестности поверхности $s = 0$ возникает квазискользящий режим.

Моделирование системы при $a = 2, \beta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1 \ 0]^T, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.5$:

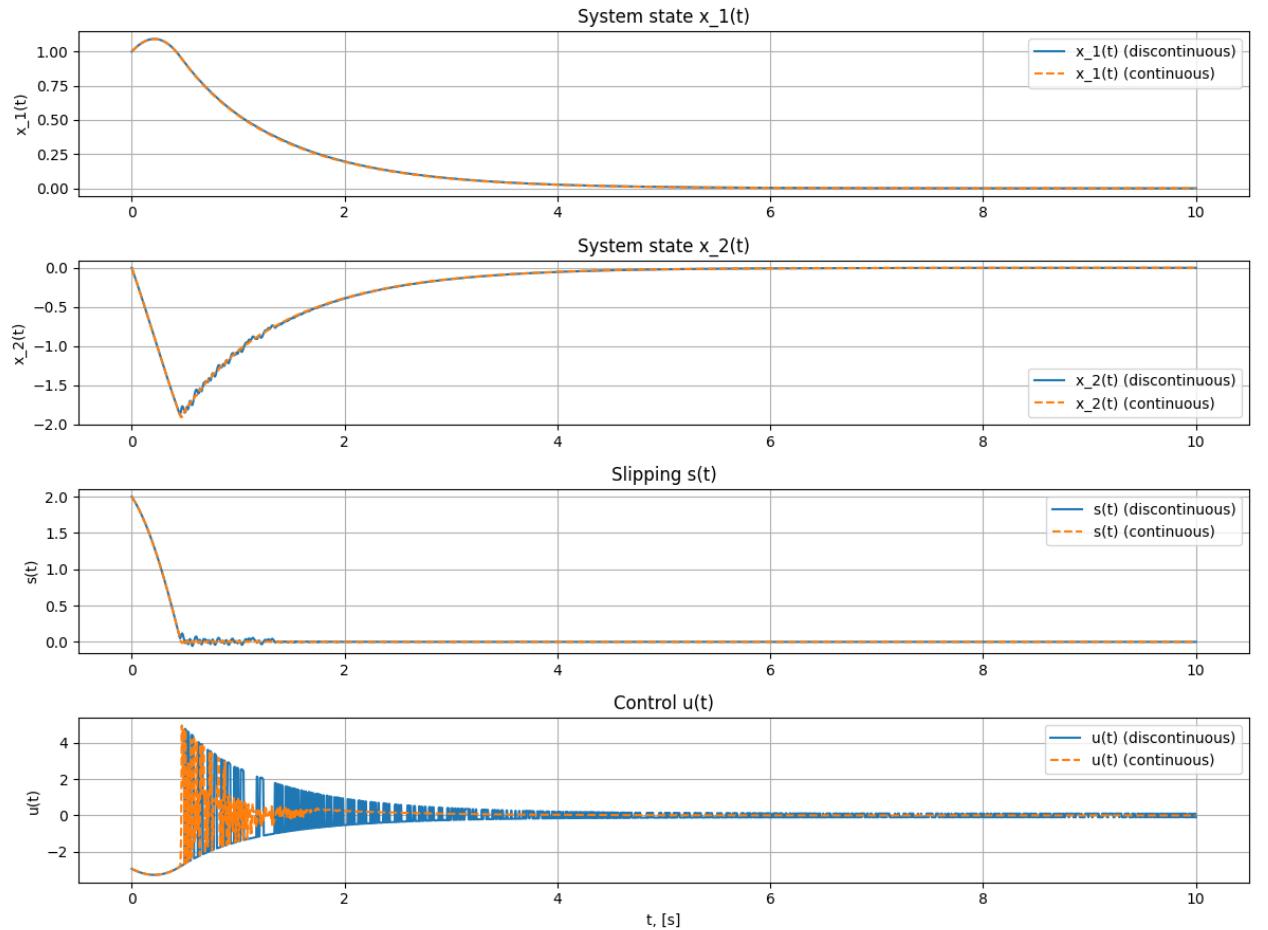


Рис. 1: Графики $x_i(t), s(t), u(t)$

Все графики сошлись к нулю, кроме разрывного управления.

В разрывном управлении две составляющие – эквивалентная и переключающая. Первая стремится к нулю вместе с состоянием. Вторая не стремится к нулю, а переключается между $\pm \beta_0$, из-за чего получаются высокочастотные колебания – график $u(t)$ выглядит как импульсный сигнал при устоявшейся системе.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где a_1, a_2 – неизвестные параметры, $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

2.2. Выполнение

Выберем поверхность:

$$s = ax_1 + x_2, \quad a > 0$$

На поверхности $s = 0$:

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - a_1 x_1 \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + a_1 x_1 \sin x_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 (-a + a_1 \sin x_1)$$

Функция Ляпунова и ее производная для подсистемы на поверхности:

$$V_1(x_1) = 0.5x^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = x_1^2 (-a + a_1 \sin x_1)$$

Так как $|\sin x_1| \leq |x_1|, |a_1| \leq 2$:

$$a_1 \sin x_1 \leq |a_1| \cdot |\sin x_1| \leq 2|x_1|$$

Тогда:

$$\dot{V}_1 \leq x_1^2 (-a + 2|x_1|) < 0 \quad \forall x_1 : 0 < |x_1| < \frac{a}{2}$$

Начало координат локально асимптотически устойчиво.

Рассмотрим \dot{s} :

$$\dot{s} = a(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) + a_2 x_1 x_2 + 3u = \Delta(x) + 3u$$

Предположим номинальные значения $|a_i - 1| = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1$.

Тогда, номинальная эквивалентная часть регулятора, обеспечивающая $\dot{s} \rightarrow 0$ в номинальном случае:

$$\Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{eq,nom}} = 0 \Rightarrow u_{\text{eq,nom}} = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2)$$

Добавим разрывную часть:

$$u = u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}, \quad u_{\text{sw}} = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2) - \beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Подставим в \dot{s} :

$$\dot{s} = \Delta(x) + 3(u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}) = 3u_{\text{eq,nom}} + \Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{sw}} + \Delta(x) - \Delta_{a_i=1}(x),$$

$$\dot{s} = 3u_{\text{sw}} + a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2 = 3u_{\text{sw}} + \delta(x)$$

Оценим модуль невязки $\delta(x)$ при $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$:

$$|\delta(x)| = |a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2|,$$

$$|\delta(x)| \leq a|x_1 \sin x_1| + |x_1 x_2| \leq ax_1^2 + |x_1 x_2| \equiv \rho(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \leq -3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + ax_1^2 + |x_1 x_2| = -3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)$$

Оценим производную функции Ляпунова $V = 0.5s^2$:

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq s(-3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)) = -3\beta(x)|s| + \rho(x)s,$$

$$\dot{V} \leq -3\beta(x)|s| + \rho(x)s \leq -3\beta(x)|s| + |\rho(x)||s| = -(3\beta(x) - |\rho(x)|)|s|$$

Если выбрать $3\beta(x) \geq |\rho(x)| + \beta_0$, $\beta_0 > 0$:

$$\dot{V} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Это гарантирует достижение поверхности $s = 0$ за конечное время.

Выберем:

$$\beta(x) \geq \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0), \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0) \operatorname{sign}(s)$$

Заменим $\operatorname{sign}(s)$ на $\operatorname{sat}(s/\varepsilon)$ и получим непрерывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Проверим устойчивость:

$$V = 0.5s^2, \dot{V} \leq -3\beta(x)s \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x)|s|$$

При $|s| > \varepsilon$: $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = \operatorname{sign}(s)$, т.е. случай аналогичен дискретному:

$$\dot{V} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Уменьшение s до $|s| \leq \varepsilon$.

При $|s| \leq \varepsilon$: $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$, тогда:

$$\dot{V} \leq -3\beta(x)\frac{s^2}{\varepsilon} + \rho(x)|s|$$

Подставим $\beta(x)$:

$$\dot{V} \leq -3\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 - 3\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Два последних члена:

$$-3\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = \rho(x)|s| \left(1 - 3\frac{|s|}{\varepsilon}\right) = Q(x, s)$$

Оценим $Q(x, s)$:

$$Q(x, s) \geq 0 : |s| \leq \frac{\varepsilon}{3}; \quad Q(x, s) < 0 : \frac{\varepsilon}{3} < |s| \leq \varepsilon$$

Т.е. вблизи $s = 0$ возможно $\dot{V} > 0$, тогда, аналогично предыдущему пункту:

$$\dot{V} \leq -3\frac{\beta_0}{\varepsilon} + \rho_{\max}|s|, \quad |s| > \varepsilon_s^* := \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{3\beta_0} : \dot{V} < 0,$$

что гарантирует практическую устойчивость с предельной полосой $|s(t)| \leq \varepsilon_s^*$ при $t \rightarrow \infty$.

Моделирование системы при $a = 1, \beta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1 \ 0]^T, a_1 = 0.5, a_2 = 1.5$:

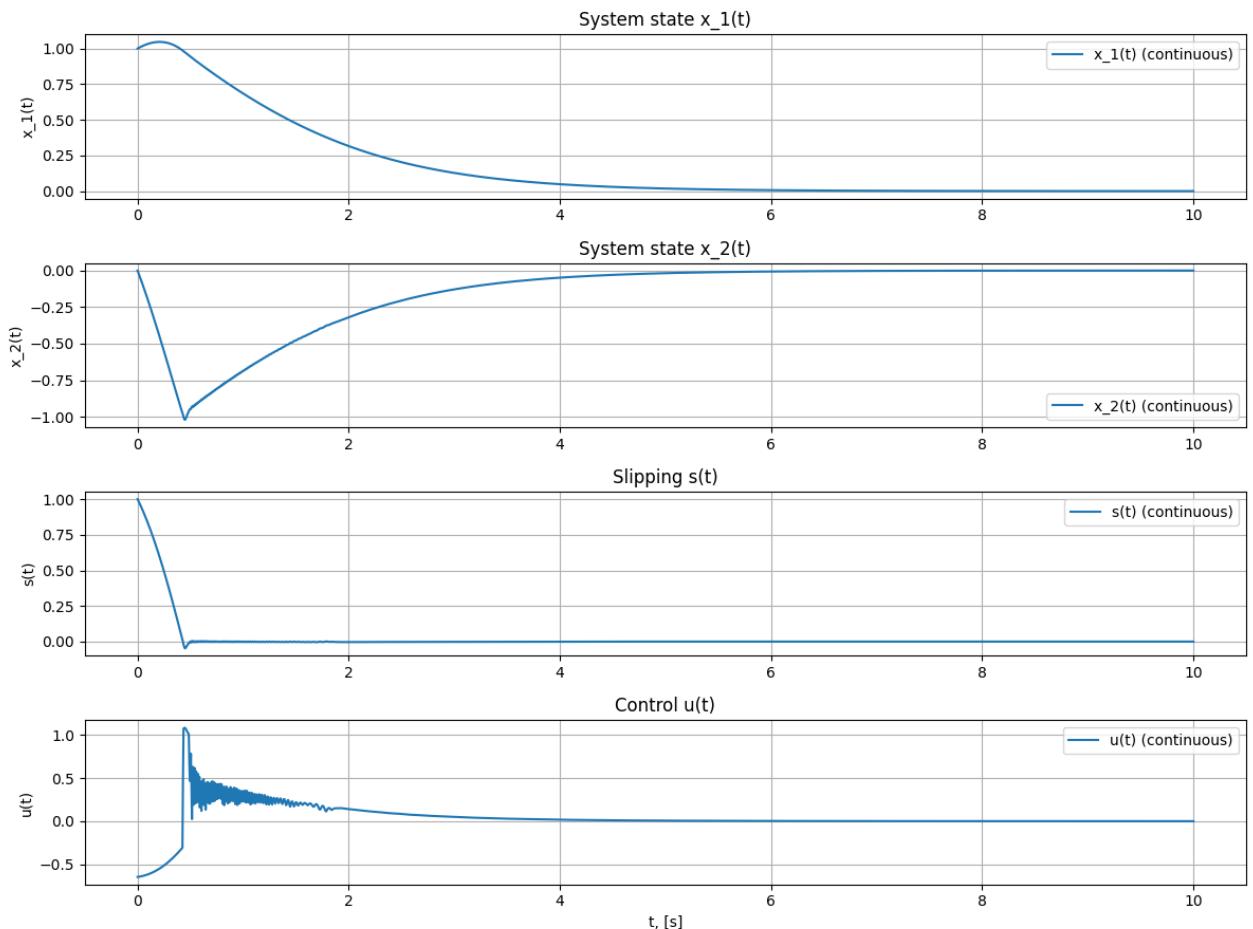


Рис. 2: Графики $x_i(t), s(t), u(t)$

3. Задание 3

3.1. Условие

Рассмотрим уравнение движения для маятника в виде:

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t) \cos \theta,$$

где h – горизонтальное ускорение, T – управляющий момент.

Предположим, что:

$$0.8 \leq l \leq 1, \quad 0.5 \leq m \leq 1, \quad 0.1 \leq k \leq 0.2, \quad |h(t)| \leq 0.5$$

и $g = 9.81$. Требуется стабилизировать маятник при $\theta = 0$ для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

3.2. Выполнение

...

4. Вывод

...