

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5**  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО  
СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ  
СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ»**

Выполнили: студенты  
Румянцев А. А., Р3441  
Дьячихин Д. Н., Р3480

Проверил: преподаватель  
Зименко К. А.

Санкт-Петербург  
2025

## **Содержание**

<b>1 Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1 Условие . . . . .	3
1.2 Выполнение . . . . .	3
<b>2 Задание 2</b>	<b>9</b>
2.1 Условие . . . . .	9
2.2 Выполнение . . . . .	9
<b>3 Задание 3</b>	<b>13</b>
3.1 Условие . . . . .	13
3.2 Выполнение . . . . .	13
<b>4 Вывод</b>	<b>17</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) u, \end{cases}$$

где  $|\theta_1| \leq 1$ ,  $|\theta_2| \leq 1$ . Весь вектор состояния измерим. Необходимо:

1. синтезировать стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов;
2. синтезировать стабилизирующий непрерывный регулятор на основе скользящих режимов;
3. провести соответствующий анализ устойчивости;
4. провести математическое моделирование.

### 1.2. Выполнение

Выберем скользящую поверхность, на которой упростим динамику системы и зададим ей желаемые свойства:

$$s = ax_1 + x_2 = 0, \quad a > 0$$

На поверхности  $s = 0$ :

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + \sin x_1$$

При  $V = 0.5x_1^2$ :

$$\dot{V} = x\dot{x} = -ax_1^2 + x_1 \sin x_1$$

Так как  $|\sin x_1| \leq |x_1| \forall x_1$ :

$$\dot{V} \leq -ax_1^2 + |x_1||\sin x_1| \leq -ax_1^2 + x_1^2 = -(a-1)x_1^2 = -2(a-1)V$$

Для асимптотической устойчивости  $a > 1 \Rightarrow \dot{V} < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ .

Динамика скользящей переменной:

$$s = ax_1 + x_2 \Rightarrow \dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Подставим  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ :

$$\dot{s} = a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) u,$$

$$\dot{s} = (2 + \theta_2) u + \Delta(x), \quad \Delta(x) \equiv a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2$$

Необходимо выбрать  $u$  так, чтобы выполнялось условие достижения скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0$$

Это эквивалентно:

$$\dot{V} \leq -\eta|s|, \quad V = 0.5s^2$$

Синтезируем дискретный регулятор на основе скользящих режимов.

Выберем управление как сумму эквивалентной и переключающей составляющих:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}$$

Эквивалентная часть при  $s = 0$ :

$$u_{\text{eq}} = -\frac{\Delta(x)}{2 + \theta_2}$$

Параметры  $\theta_1, \theta_2$  неизвестны, поэтому положим их нулевыми.

Такое допущение возможно вследствие наличия переключающей части  $\beta(x) \text{sign}(s)$  с коэффициентом переключения  $\beta_0$ , который при верном подборе компенсирует влияние отклонений  $\theta_i$ .

Кроме того, скользящий режим является робастным к параметрическим неопределенностям и возмущениям.

Тогда, номинальная эквивалентная часть:

$$u_{\text{eq,nom}} = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1)$$

Добавим переключающую часть:

$$u_{\text{sw}} = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{a}{2} (x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Подставим  $u$  в  $\dot{s}$ :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) \left( -\frac{a}{2} (x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \operatorname{sign}(s) \right), \\ \dot{s} &= -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a (x_2 + \sin x_1), \\ \dot{s} &= -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \delta(x)\end{aligned}$$

Оценим модуль «невязки»  $\delta(x)$ . Получим верхнюю оценку при  $|\theta_1| \leq 1$ ,  $|\theta_2| \leq 1$ ,  $|\sin x_1| \leq |x_1|$ :

$$|\delta(x)| = \left| \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a (x_2 + \sin x_1) \right| \leq |x_1|^2 + \frac{a}{2} (|x_2| + |x_1|) \equiv \rho(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)$$

Умножим выражение на  $s$ , учтем  $\operatorname{sign}(s) \cdot s = |s|$  и оценим верхнюю границу:

$$s \dot{s} \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) |s| + \rho(x) s \leq -(2 + \theta_2) \beta(x) |s| + |\rho(x)| |s|$$

Вынесем общий множитель  $-(|s|)$ , положим  $g_0 := \min(2 + \theta_2) = 1$  и оценим верхнюю границу:

$$s \dot{s} \leq ((2 + \theta_2) \beta(x) - |\rho(x)|) |s| \leq (g_0 \beta(x) - |\rho(x)|) |s|,$$

$$s \dot{s} \leq (\beta(x) - |\rho(x)|) |s|$$

Если выбрать  $\beta(x) \geq |\rho(x)| + \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$ :

$$s\dot{s} \leq -\beta_0|s| < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Это аналогично записи через функцию Ляпунова и ее производную:

$$V = 0.5s^2, \dot{V} = s\dot{s} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0,$$

что гарантирует достижение  $s = 0$  за конечное время.

Выберем:

$$\beta(x) \geq |x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|) + \beta_0, \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1) - \left( |x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|) + \beta_0 \right) \text{sign}(s)$$

Синтезируем непрерывный регулятор на основе скользящих режимов.

Для уменьшения колебаний из-за задержки переключения управления, заменим в управлении функцию  $\text{sign}$  функцией насыщения:

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} s/\varepsilon, & |s| \leq \varepsilon, \\ \text{sign}(s), & |s| > \varepsilon \end{cases}$$

Непрерывный регулятор:

$$u = -\frac{a}{2}(x_2 + \sin x_1) - \beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Аналогично подставим  $u$  в  $\dot{s}$ , оценим модуль невязки  $\delta(x)$  абсолютной величиной  $\rho(x)$  и коэффициент при  $\beta(x)$  константой  $g_0$ :

$$\dot{s} = -(2 + \theta_2)\beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}(ax_2 + a \sin x_1),$$

$$\dot{s} \leq -g_0\beta(x) \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x), g_0 := \min(2 + \theta_2) = 1$$

Зададим функцию Ляпунова  $V = 0.5s^2$ , тогда:

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq -\beta(x)s \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x)|s|$$

При  $|s| > \varepsilon$  :  $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = \operatorname{sign}(s)$  – аналогичный разрывному случаю:  
 $\dot{V} \leq -\beta_0|s|$ ,  $\beta_0 > 0$  – уменьшение  $s$  до  $|s| \leq \varepsilon$ .

При  $|s| \leq \varepsilon$  :  $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$ , тогда:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Подставим  $\beta(x)$ :

$$\dot{V} \leq -\frac{\rho(x) + \beta_0}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = -\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 - \frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Два последних члена:

$$-\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = \rho(x)|s|\left(1 - \frac{|s|}{\varepsilon}\right) \geq 0,$$

так как  $|s| \leq \varepsilon$  внутри полосы.

Следовательно, худший случай  $\dot{V}_{\max}$  достигается, когда  $\rho(x)$  максимально.

Пусть  $\rho_{\max} = \sup_{x \in \mathcal{D}} \rho(x)$ , где  $\mathcal{D}$  – ограниченная и замкнутая область в пространстве состояний, в которой оценивается верхняя граница  $|\delta(x)| \leq \rho(x) \leq \rho_{\max}$ .

Тогда, оценка сверху:

$$\dot{V} \leq -\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 + \rho_{\max}|s|$$

Тогда,  $\dot{V} < 0$  при:

$$|s| > \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{\beta_0}$$

Следовательно, все траектории входят в полосу:

$$|s| \leq \varepsilon_s^* := \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{\beta_0}$$

и остаются в ней.

Начало координат практически устойчиво – траектории не расходятся и

в конечном счете входят в малую окрестность нуля радиуса  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  и остаются в ней, так как динамика на поверхности устойчива.

Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $\varepsilon_s^* \rightarrow 0$  – приближение к идеальному скользящему режиму с отклонением  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ .

Так как  $\varepsilon = \text{const.}$ ,  $\text{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$ ,  $\beta(x) \geq \rho(x) + \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$  и система достигает полосы  $|s| \leq \varepsilon$  за конечное время и остается в ней, то в окрестности поверхности  $s = 0$  возникает квазискользящий режим.

Моделирование системы при  $a = 2$ ,  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $x_0 = [1 \ 0]^T$ ,  $\theta_1 = 0.5$ ,  $\theta_2 = -0.5$ :

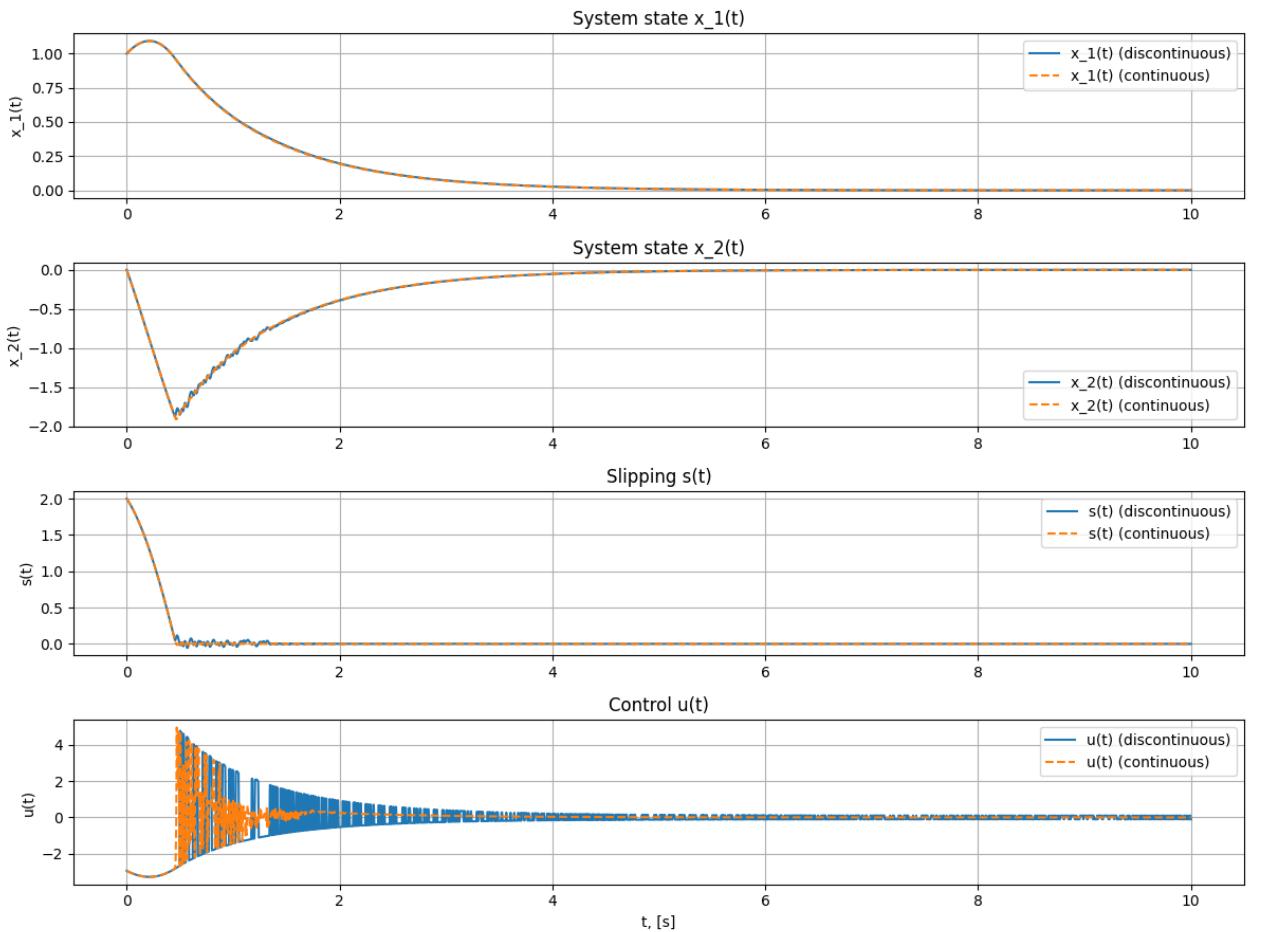


Рис. 1: Графики  $x_i(t)$ ,  $s(t)$ ,  $u(t)$

Все графики сошлись к нулю, кроме разрывного управления.

В разрывном управлении две составляющие – эквивалентная и переключающая. Первая стремится к нулю вместе с состоянием. Вторая не стремится к нулю, а переключается между  $\pm\beta_0$ , из-за чего получаются высокочастотные колебания – график  $u(t)$  выглядит как импульсный сигнал при устоявшейся системе.

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где  $a_1, a_2$  – неизвестные параметры,  $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$ . Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

### 2.2. Выполнение

Выберем поверхность:

$$s = ax_1 + x_2, \quad a > 0$$

На поверхности  $s = 0$ :

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - a_1 x_1 \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + a_1 x_1 \sin x_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 (-a + a_1 \sin x_1)$$

Функция Ляпунова и ее производная для подсистемы на поверхности:

$$V_1(x_1) = 0.5x^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = x_1^2 (-a + a_1 \sin x_1)$$

Так как  $|\sin x_1| \leq |x_1|, |a_1| \leq 2$ :

$$a_1 \sin x_1 \leq |a_1| \cdot |\sin x_1| \leq 2|x_1|$$

Тогда:

$$\dot{V}_1 \leq x_1^2 (-a + 2|x_1|) < 0 \quad \forall x_1 : 0 < |x_1| < \frac{a}{2}$$

Начало координат локально асимптотически устойчиво.

Рассмотрим  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = a(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) + a_2 x_1 x_2 + 3u = \Delta(x) + 3u$$

Предположим номинальные значения  $|a_i - 1| = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1$ .

Тогда, номинальная эквивалентная часть регулятора, обеспечивающая  $\dot{s} \rightarrow 0$  в номинальном случае:

$$\Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{eq,nom}} = 0 \Rightarrow u_{\text{eq,nom}} = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2)$$

Добавим разрывную часть:

$$u = u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}, \quad u_{\text{sw}} = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2) - \beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Подставим в  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = \Delta(x) + 3(u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}) = 3u_{\text{eq,nom}} + \Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{sw}} + \Delta(x) - \Delta_{a_i=1}(x),$$

$$\dot{s} = 3u_{\text{sw}} + a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2 = 3u_{\text{sw}} + \delta(x)$$

Оценим модуль невязки  $\delta(x)$  при  $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$ :

$$|\delta(x)| = |a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2|,$$

$$|\delta(x)| \leq a|x_1 \sin x_1| + |x_1 x_2| \leq ax_1^2 + |x_1 x_2| \equiv \rho(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \leq -3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + ax_1^2 + |x_1 x_2| = -3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)$$

Оценим производную функции Ляпунова  $V = 0.5s^2$ :

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq s(-3\beta(x) \operatorname{sign}(s) + \rho(x)) = -3\beta(x)|s| + \rho(x)s,$$

$$\dot{V} \leq -3\beta(x)|s| + \rho(x)s \leq -3\beta(x)|s| + |\rho(x)||s| = -(3\beta(x) - |\rho(x)|)|s|$$

Если выбрать  $3\beta(x) \geq |\rho(x)| + \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$ :

$$\dot{V} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Это гарантирует достижение поверхности  $s = 0$  за конечное время.

Выберем:

$$\beta(x) \geq \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0), \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0) \operatorname{sign}(s)$$

Заменим  $\operatorname{sign}(s)$  на  $\operatorname{sat}(s/\varepsilon)$  и получим непрерывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Проверим устойчивость:

$$V = 0.5s^2, \dot{V} \leq -3\beta(x)s \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \rho(x)|s|$$

При  $|s| > \varepsilon$ :  $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = \operatorname{sign}(s)$ , т.е. случай аналогичен дискретному:

$$\dot{V} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \quad \forall s \neq 0, \beta_0 > 0$$

Уменьшение  $s$  до  $|s| \leq \varepsilon$ .

При  $|s| \leq \varepsilon$ :  $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$ , тогда:

$$\dot{V} \leq -3\beta(x)\frac{s^2}{\varepsilon} + \rho(x)|s|$$

Подставим  $\beta(x)$ :

$$\dot{V} \leq -3\frac{\beta_0}{\varepsilon}s^2 - 3\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s|$$

Два последних члена:

$$-3\frac{\rho(x)}{\varepsilon}s^2 + \rho(x)|s| = \rho(x)|s| \left(1 - 3\frac{|s|}{\varepsilon}\right) = Q(x, s)$$

Оценим  $Q(x, s)$ :

$$Q(x, s) \geq 0 : |s| \leq \frac{\varepsilon}{3}; \quad Q(x, s) < 0 : \frac{\varepsilon}{3} < |s| \leq \varepsilon$$

Т.е. вблизи  $s = 0$  возможно  $\dot{V} > 0$ , тогда, аналогично предыдущему пункту:

$$\dot{V} \leq -3\frac{\beta_0}{\varepsilon} + \rho_{\max}|s|, \quad |s| > \varepsilon_s^* := \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{3\beta_0} : \dot{V} < 0,$$

что гарантирует практическую устойчивость с предельной полосой  $|s(t)| \leq \varepsilon_s^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Моделирование системы при  $a = 1, \beta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1 \ 0]^T, a_1 = 0.5, a_2 = 1.5$ :

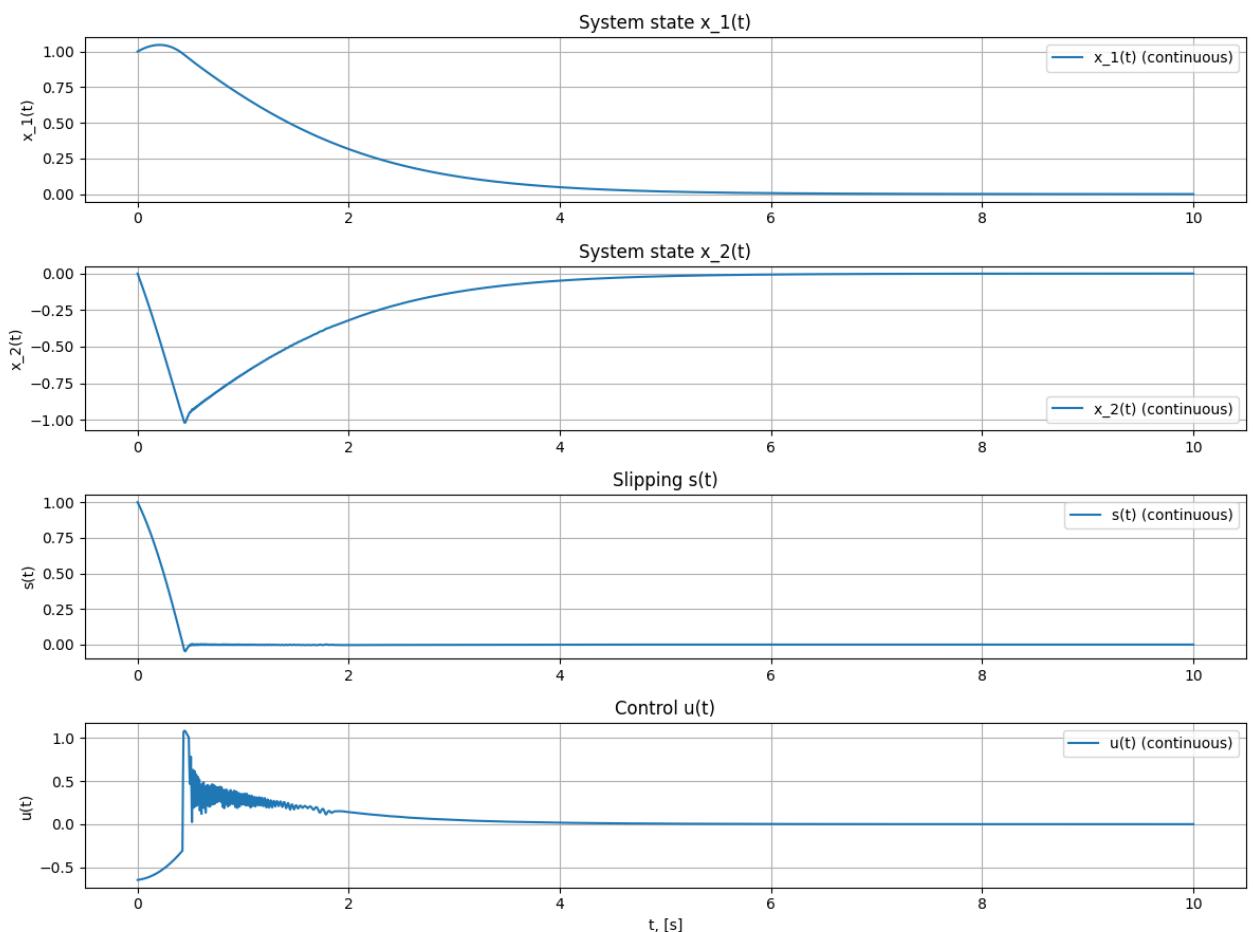


Рис. 2: Графики  $x_i(t), s(t), u(t)$

### 3. Задание 3

#### 3.1. Условие

Рассмотрим уравнение движения для маятника в виде:

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t) \cos \theta,$$

где  $h$  – горизонтальное ускорение,  $T$  – управляющий момент.

Предположим, что:

$$0.8 \leq l \leq 1, 0.5 \leq m \leq 1, 0.1 \leq k \leq 0.2, |h(t)| \leq 0.5$$

и  $g = 9.81$ . Требуется стабилизировать маятник при  $\theta = 0$  для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

#### 3.2. Выполнение

Обозначим:

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

Выразим из уравнения  $\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml} \left( \frac{T}{l} + mh(t) \cos \theta - kl\dot{\theta} - mg \sin \theta \right),$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} T + \frac{1}{l} h(t) \cos \theta - \frac{k}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta$$

Обозначим внутреннюю известную динамику:

$$F(x) = -\frac{k}{m} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1$$

и возмущение:

$$D(t, x) = \frac{1}{l} h(t) \cos x_1$$

Тогда:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2} T + F(x) + D(t, x)$$

Коэффициент при управляемом моменте:

$$b(x) = \frac{1}{ml^2} > 0, \quad b(x) \in \left[ \frac{1}{m_{\max} l_{\max}^2} = 1, \frac{1}{m_{\min} l_{\min}^2} = 3.125 \right]$$

Оценка возмущения:

$$|D(t, x)| \leq \frac{|h(t)|}{l_{\min}} \leq \frac{0.5}{0.8} = 0.625$$

Выберем поверхность скольжения:

$$s = ax_1 + x_2 = a\theta + \dot{\theta}, \quad a > 0$$

На поверхности  $s = 0$ :

$$\dot{\theta} = -a\theta$$

Для устойчивости достаточно  $a > 0$ .

Вычислим  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = a\dot{\theta} + \ddot{\theta} = ax_2 + \frac{1}{ml^2}T + F(x) + D(t, x)$$

Обозначим:

$$\Phi(x) = F(x) + ax_2 = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 + ax_2$$

Тогда:

$$\dot{s} = \frac{1}{ml^2}T + \Phi(x) + D(t, x)$$

Хотим  $\dot{s} = -\beta_0$ . Положим управляемый момент:

$$T = ml^2 (-\Phi(x) + u_{\text{sw}}(s)),$$

где переключающее управление:

$$u_{\text{sw}} = -\beta_0 \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad \beta_0 > 0$$

Так как параметры неизвестны, то положим номинальные значения:

$$\hat{m} = m_{\min} = 0.5, \hat{l} = l_{\min} = 0.8$$

Тогда, регулятор:

$$T(x) = \hat{m}\hat{l}^2 \left( -\hat{\Phi}(x) - \beta_0 \operatorname{sat} \left( \frac{s(x)}{\varepsilon} \right) \right),$$

где:

$$\hat{\Phi}(x) = -\frac{\hat{k}}{\hat{m}}x_2 - \frac{g}{\hat{l}} \sin x_1 + ax_2, \quad \hat{k} = k_{\max} = 0.2$$

Для функции Ляпунова  $V = 0.5s^2$  производная:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s \left( \frac{1}{ml^2} T + \Phi(x) + D(t, x) \right)$$

Подставим  $T$  в  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} = -\gamma\beta_0 s \operatorname{sat} \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) + s \left( \Phi - \gamma\hat{\Phi} \right) + sD, \quad \gamma = \frac{\hat{m}\hat{l}^2}{ml^2}$$

При  $|s| > \varepsilon : \operatorname{sat}(s/\varepsilon) = \operatorname{sign}(s)$ :

$$\dot{V} = -\gamma\beta_0 |s| + s \left( \Phi - \gamma\hat{\Phi} \right) + sD$$

Оценим положительные слагаемые по абсолютной величине:

$$s \left( \Phi - \gamma\hat{\Phi} \right) \leq |s| |\Phi - \gamma\hat{\Phi}|, \quad sD \leq |s| |D|$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -\gamma\beta_0 |s| + |s| \left( |\Phi - \gamma\hat{\Phi}| + |D| \right)$$

Обозначим:

$$\rho = |\Phi - \gamma\hat{\Phi}| + |D|$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -(\gamma\beta_0 - \rho) |s|$$

При  $\gamma\beta_0 > \sup_{x \in \mathcal{D}} \rho(x)$  получим  $\dot{V} < 0$ , т.е.  $s$  уменьшается до  $|s| \leq \varepsilon$ .

При  $|s| \leq \varepsilon$  :  $\text{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$ :

$$\dot{V} = -\gamma\beta_0 \frac{s^2}{\varepsilon} + s \left( \Phi - \gamma \hat{\Phi} \right) + sD \leq -\gamma\beta_0 \frac{s^2}{\varepsilon} + \rho(x)|s|$$

Применим неравенство Юнга:

$$\rho(x)|s| \leq \frac{\gamma\beta_0}{2\varepsilon}s^2 + \frac{\varepsilon}{2\gamma\beta_0}\rho^2(x)$$

Подставим в  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} \leq -\frac{\gamma\beta_0}{2\varepsilon}s^2 + \frac{\varepsilon}{2\gamma\beta_0}\rho^2(x)$$

Худший случай  $\rho(x) = \sup_{x \in \mathcal{D}} \rho(x) = \rho_{\max}$ :

$$\dot{V} \leq -\frac{\gamma\beta_0}{2\varepsilon}s^2 + \frac{\varepsilon}{2\gamma\beta_0}\rho_{\max}^2$$

Следовательно,  $s$  остается ограниченным и асимптотически попадает в окрестность:

$$|s| \leq \varepsilon_s^* := \frac{\varepsilon\rho_{\max}}{\gamma\beta_0},$$

что говорит о практической устойчивости.

При выполнении  $\gamma\beta_0 > \rho_{\max}$  :  $\varepsilon_s^* < \varepsilon$ , т.е. после достижения слоя  $|s| \leq \varepsilon$  ошибка дополнительно сжимается до  $|s| \leq \varepsilon_s^* < \varepsilon$ .

Моделирование системы (см. рис. 3) при

$$g = 9.81,$$

$$\hat{m} = 0.5, m = 0.8,$$

$$\hat{l} = 0.8, l = 1,$$

$$\hat{k} = 0.2, k = 0.15,$$

$$a = 2,$$

$$\beta_0 = 15,$$

$$\varepsilon = 0.05,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

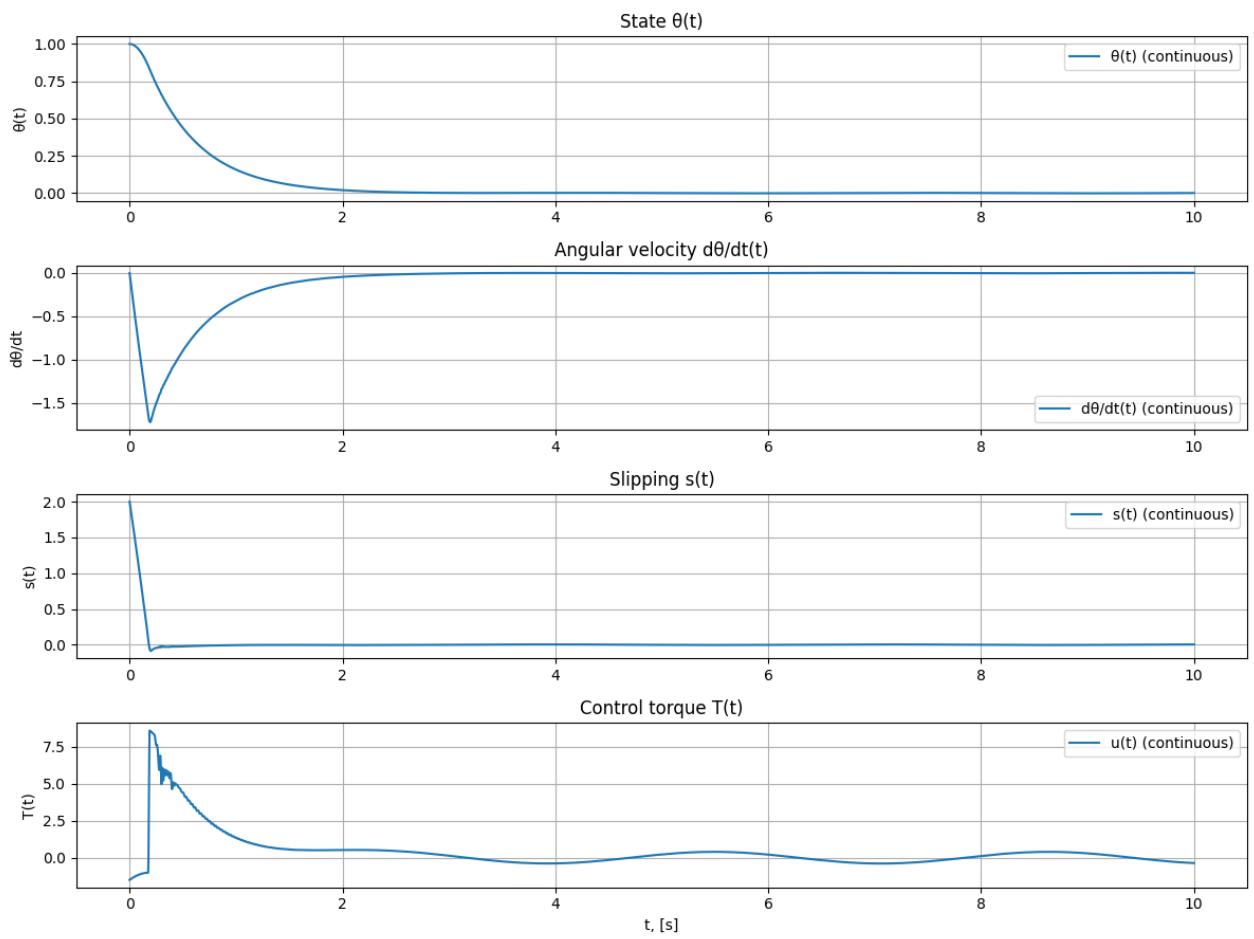


Рис. 3: Графики  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $s(t)$ ,  $u(t)$

Управление ненулевое, так как в системе присутствует внешнее возмущение  $D(t, x) = l^{-1}h(t) \cos x_1$  (горизонтальное ускорение с коэффициентом и гармоникой).

#### 4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы для различных нелинейных систем были синтезированы разрывный и/или непрерывный стабилизирующие регуляторы на основе скользящих режимов. В каждом случае был проведен анализ устойчивости, в ходе которого были получены асимптотическая и практическая устойчивости систем в зависимости от условия на скольжение. Также было проведено математическое моделирование каждой из систем. Результаты показали корректность выполненных расчетов.