

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«АНАЛИЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

Выполнил: студент гр. Р3441  
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель  
Зименко К. А.

Санкт-Петербург  
2025

## **Содержание**

<b>1 Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1 Условие . . . . .	3
1.2 Выполнение . . . . .	3
1.2.1 Первая система . . . . .	3
1.2.2 Вторая система . . . . .	5
1.2.3 Третья система . . . . .	7
1.2.4 Четвертая система . . . . .	8
1.2.5 Пятая система . . . . .	12
1.2.6 Шестая система . . . . .	14
1.2.7 Седьмая система . . . . .	16
<b>2 Задание 2</b>	<b>18</b>
2.1 Условие . . . . .	18
2.2 Выполнение . . . . .	18
2.2.1 Первая система . . . . .	18
2.2.2 Вторая система . . . . .	21
<b>3 Вывод</b>	<b>24</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Для каждой из данных систем найти все точки равновесия. На основе метода линеаризации в точке определить тип каждого изолированного состояния равновесия. С использованием перехода к полярным координатам определить устойчивость предельного цикла для системы 4.

Численно построить фазовый портрет каждой системы и сравнить с полученными результатами (кроме системы 7).

### 1.2. Выполнение

#### 1.2.1. Первая система

Найдем точки равновесия системы (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Приравняем выражения к нулю и найдем корни системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2(1 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0; 0), \\ (1; -1), \\ (-1; 1) \end{cases}$$

Определим тип каждого изолированного состояния равновесия.

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы  $A_i$  и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\},$$

$$A_2 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{4.83, -0.83\},$$

$$A_3 = J|_{(-1;1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_3 1,2} = \lambda_{A_2 1,2}$$

Таким образом,

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\}$  – устойчивый фокус,

$(1; -1), (-1; 1) : \lambda_{A_{2,3} 1,2} = \{4.83, -0.83\}$  – седла (неуст.)

Седловые точки находятся рядом с устойчивым фокусом, из-за чего некоторые фазовые траектории будут уходить на бесконечность вдоль седловых направлений.

Таким образом, любой контур вокруг фокуса не может полностью замкнуться, а значит предельного цикла не существует.

Численно построим фазовый портрет системы.

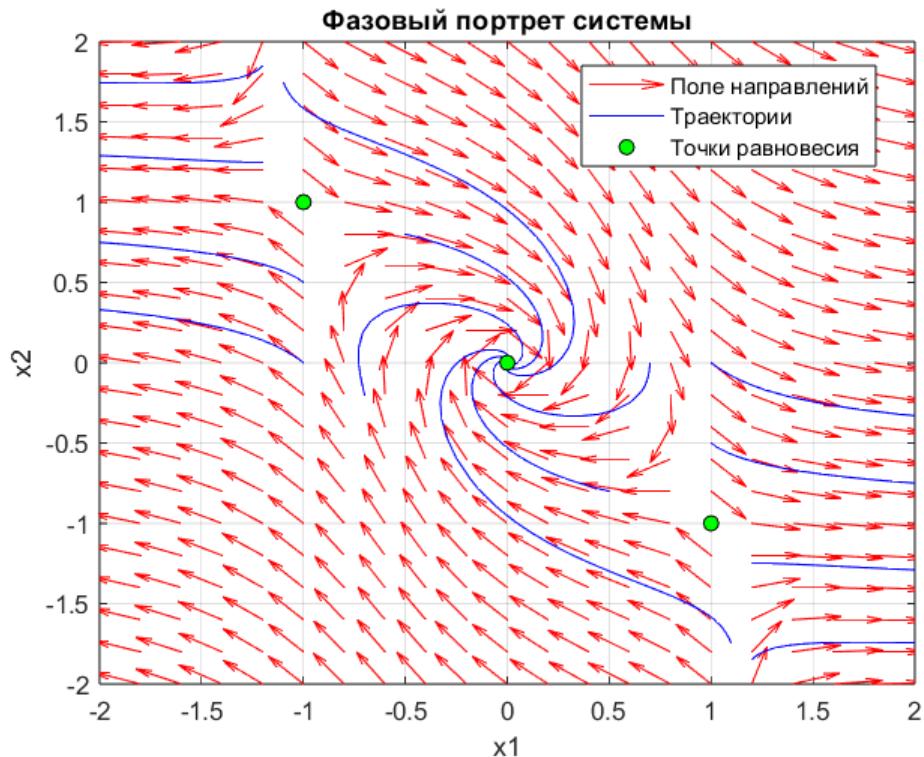


Рис. 1: Фазовый портрет системы (1)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились устойчивый фокус и два седла.

### 1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему (2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases} \quad (2)$$

Проведем аналогичные действия

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 = 0, \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (x_2 + 1) = 0, \\ -x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Получим две системы

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 (x_2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Подставив  $x_1 = 1$  во вторую систему, получим равенство нулю. После деления полинома  $x_1^3 + x_1 - 2$  на  $x_1 - 1$  получим

$$\begin{cases} x_2 = -1, \\ (x_1 - 1) (x_1^2 + x_1 + 2) = 0 \end{cases}$$

Второе выражение даст комплексные корни. Для анализа системы и построения фазовых портретов берем только вещественные, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, имеем точки равновесия системы

$$\begin{bmatrix} (0; 0), \\ (0; 1), \\ (1; -1) \end{bmatrix}$$

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 + 1 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & x_1 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы  $A_i$  и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\},$$

$$A_2 = J|_{(0;1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\},$$

$$A_3 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.73i\}$$

Таким образом,

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\}$  – седло,

$(0; 1) : \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\}$  – неустойчивый узел,

$(1; -1) : \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.73i\}$  – устойчивый фокус

Численно построим фазовый портрет системы.

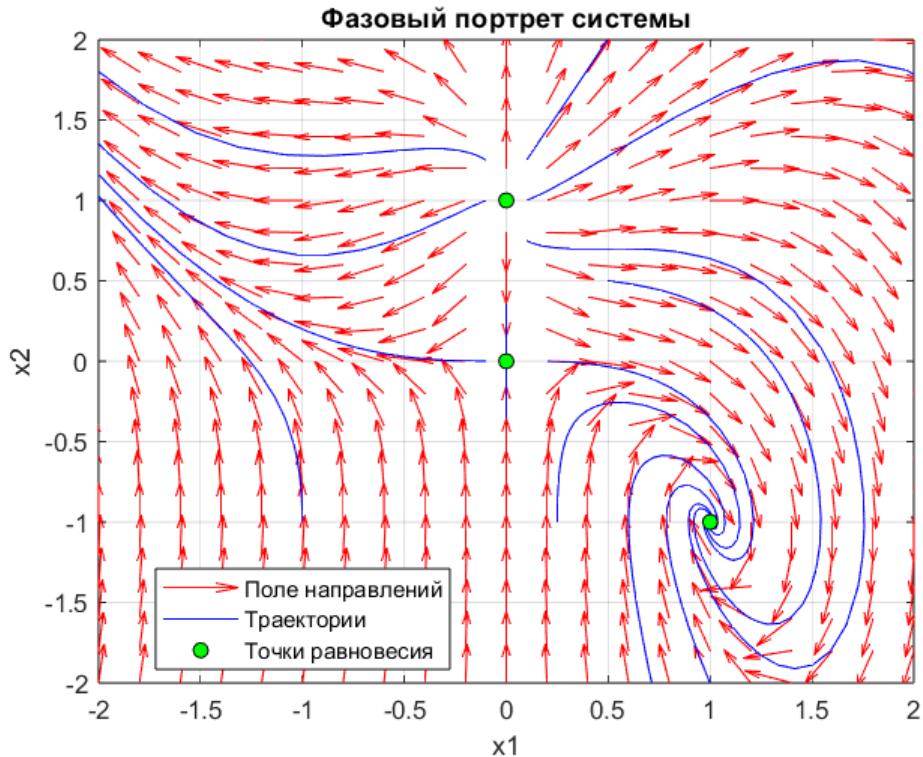


Рис. 2: Фазовый портрет системы (2)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились седло, неустойчивый узел и устойчивый фокус.

### 1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 (1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \end{cases} \quad (3)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + x_2 (-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{bmatrix}$$

Матрица  $A$  и ее собственные числа:

$$A = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \{0.5 \pm 0.87i\}$$

Вывод: неустойчивый фокус. Действительная часть мнимой пары больше нуля.

Фазовый портрет:

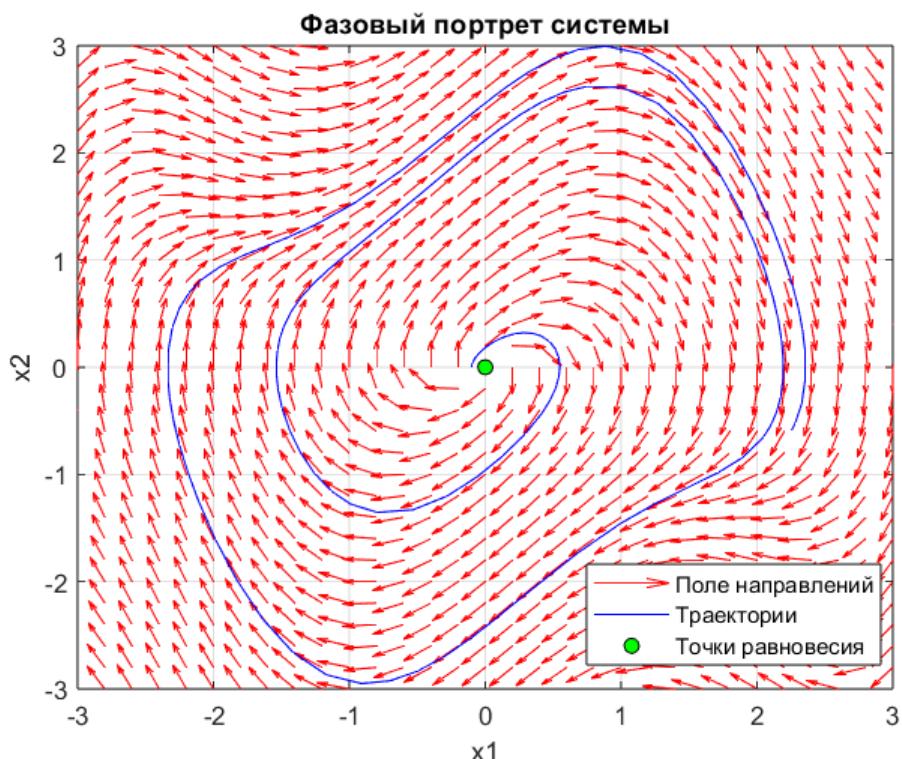


Рис. 3: Фазовый портрет системы (3)

Точка равновесия совпадает с найденной ранее. На портрете неустойчивый фокус.

#### 1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (4)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) (1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0, \\ (x_1 + x_2) (1 - (x_1^2 + x_2^2)) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай  $1 - (x_1^2 + x_2^2) \neq 0$ :

$$\begin{cases} 1 - (x_1^2 + x_2^2) \neq 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$$

Рассмотрим случай  $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$ :

$$\begin{cases} 1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0, \\ x_1 - x_2 \neq 0, \\ x_1 + x_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

В случае  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  окружность единичного радиуса является множеством равновесий.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -2x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + 1 & 2x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 - 1 \\ -2x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 & -2x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Матрица  $A$  и ее собственные числа:

$$A = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \{1 \pm i\}$$

Таким образом, в точке равновесия  $(0; 0)$  неустойчивый фокус. Действительная часть комплексной пары больше нуля.

Перейдем к полярным координатам:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

Приведем систему (4) к виду:

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = r (1 - r^2)$$

Аналогично выведем производную полярного угла:

$$\dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = 1 - r^2$$

Найдем стационарные радиусы через радиальное уравнение:

$$\dot{r} = r (1 - r^2), \quad r (1 - r^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = 1 \end{cases}$$

Получили равновесие в начале координат  $r = 0$  и окружность радиуса  $r = 1$ .

Чтобы окружность радиуса  $r = 1$  являлась предельным циклом, скорости точек вблизи нее и на ней не должны быть равны нулю и, соседние траектории должны стремиться к ней (устойчивый предельный цикл) или отдаляться от нее (неустойчивый).

Подставим  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$  в систему (4):

$$\begin{cases} \dot{x}_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = (x_1 - x_2)(1 - 1), \\ \dot{x}_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = (x_1 + x_2)(1 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \\ \dot{x}_2|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0 \end{cases}$$

Так как скорости точек на окружности равны нулю, то все они являются равновесиями – т.е. в данной системе нет предельного цикла, но есть множество равновесий на окружности радиуса  $r = 1$ .

Проверим устойчивость множества равновесий по радиальному направлению.

Зафиксируем радиус равновесия  $R = 1$  и введем малое отклонение:

$$s = r - R \Rightarrow r = s + R$$

Введем обозначение:

$$g(r) := \dot{r} = r (1 - r^2)$$

Рассмотрим производную малого отклонения по времени:

$$\dot{s} = \frac{d}{dt} (r - R) = \dot{r} - \dot{R} = \dot{r} \Rightarrow \dot{s} = g(s + R)$$

Разложим  $g(R + s)$  в ряд Тейлора:

$$g(s + R) = g(R) + \dot{g}(R)s + \frac{1}{2}\ddot{g}(R)s^2 + \dots \approx g(R) + \dot{g}(R)s + O(s^2)$$

Первое приближение – полагаем отклонение  $s$  мало, т.е.  $s^n \rightarrow 0$ .

Найдем  $\dot{s} = g(s + R)$ :

$$g(R) = 1(1 - 1^2) = 0, \quad \dot{g}(R) = 1 - 3r^2|_{R=1} = -2 \Rightarrow \dot{s} = g(s + R) \approx -2s$$

Решая дифференциальное уравнение  $\dot{s}(t) \approx -2s(t)$ , получим:

$$s(t) = Ce^{-2t}, \quad C = s(0)$$

Рассмотрим предел малого отклонения при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Ce^{-2t} = C \cdot 0 = 0,$$

$$s = (r - R) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Тогда радиус:

$$r \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} R = 1$$

Все траектории стремятся к окружности радиуса  $r = 1$ , следовательно множество равновесий радиально устойчиво.

Фазовый портрет:

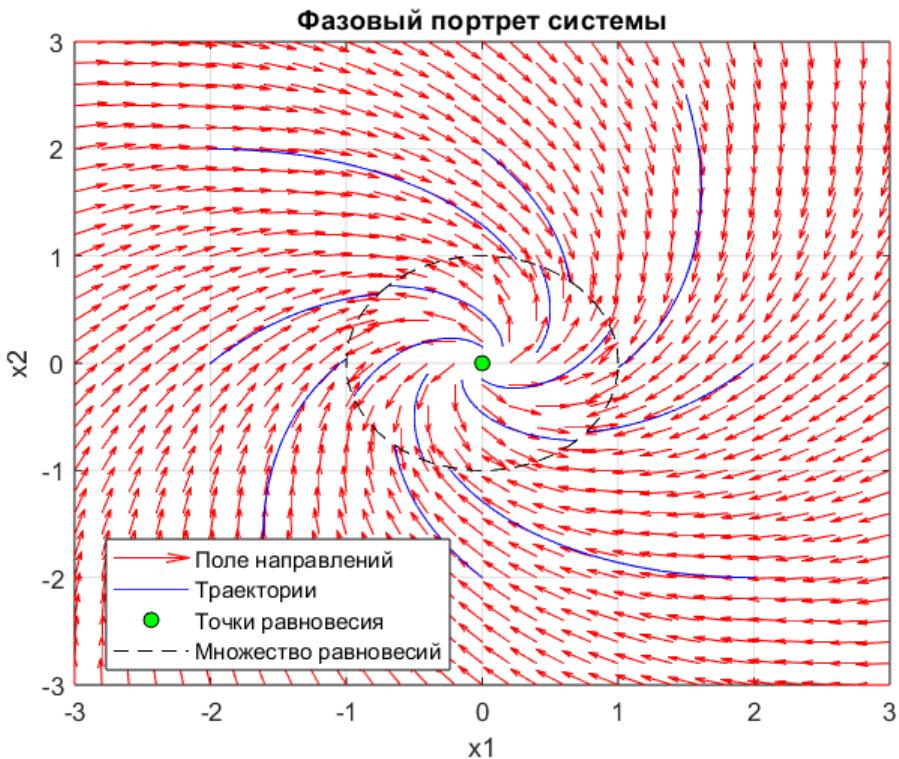


Рис. 4: Фазовый портрет системы (4)

Точка равновесия совпадает с найденной ранее. На портрете есть множество равновесий — окружность радиуса 1. Траектории притягиваются к ней и остаются неподвижны.

### 1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (5)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2^3, \\ x_2(1 - x_2^8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; 1), \\ (-1; -1) \end{bmatrix}$$

Выражение  $x_2^8 = 1$  дает 8 корней — 3 комплексные пары и 2 действительных числа. Для анализа системы рассматриваем действительные точки равновесия, т.к. они обладают физическим смыслом.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Матрицы  $A_i$  и их собственные числа:

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\},$$

$$A_2 = J|_{(1;1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{-4, -2\},$$

$$A_3 = J|_{(-1;-1)} = A_2, \lambda_{A_3 1,2} = \lambda_{A_2 1,2}$$

Таким образом:

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\}$  – седло,

$(1; 1), (-1, -1) : \lambda_{A_{2,3} 1,2} = \{-4, -2\}$  – устойчивые узлы

Фазовый портрет:

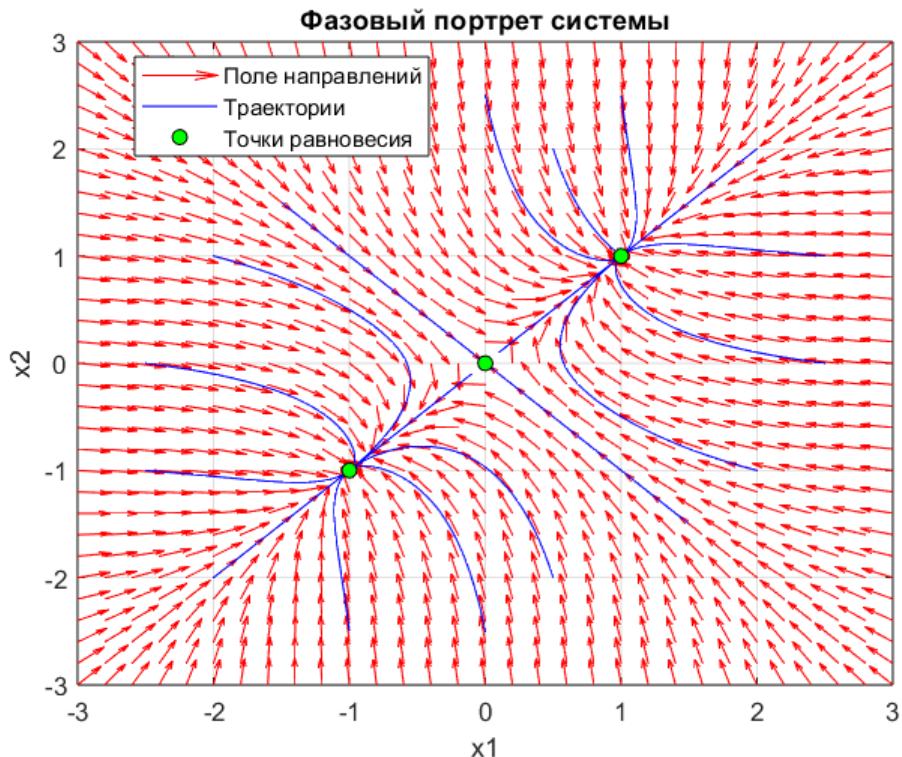


Рис. 5: Фазовый портрет системы (5)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике два устой-

чивых узла и седло.

### 1.2.6. Шестая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (6)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0, \\ x_2^3 x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_1^3 (x_1 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; 1) \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) \end{bmatrix}$$

Матрицы  $A_i$  и их собственные числа:

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0\},$$

$$A_2 = J|_{(1;1)} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{-3.79, 0.79\}$$

Точка  $(0; 0)$  является негиперболической (вещественные части собственных чисел нулевые).

Исследуем эту точку на устойчивость с помощью функции Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V} = x_1 (-x_1^3 + x_2^3) + x_2 (x_2^3 (x_1 - 1)) = -x_1^4 - x_2^4 + x_1 x_2^3 + x_1 x_2^4$$

Воспользуемся неравенством Юнга для произведения:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, a, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Берем  $p = 4, q = 4/3$ :

$$|x_1||x_2|^3 \leq \frac{1}{4}|x_1|^4 + |x_2|^{3 \cdot 4/3} \div 4/3 = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{3}{4}x_2^4$$

По определению:

$f(x) = O(r^n)$  при  $r \rightarrow 0$ , если  $|f(x)| \leq Cr^n, C > 0, r$  малы

При  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ :

$$|x_1| \leq r, |x_2| \leq r \Rightarrow |x_1 x_2^4| \leq |x_1| \cdot |x_2|^4 \leq r \cdot r^4 = r^5$$

Следовательно:

$$x_1 x_2^4 = O(r^5) \text{ при } r \rightarrow 0$$

Производная функции Ляпунова примет вид:

$$\dot{V} \leq -x_1^4 - x_2^4 + \left( \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{3}{4}x_2^4 \right) + O(r^5)$$

$$\dot{V} \leq -\frac{3}{4}x_1^4 - \frac{1}{4}x_2^4 + O(r^5)$$

При  $r \rightarrow 0$  степенные члены отрицательны,  $O(r^5)$  мало:  $\dot{V} < 0$ .

Таким образом:

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0\}$  – локально асимптотически устойчивая  
негиперболическая точка,

$(1; 1) : \lambda_{A_2 1,2} = \{-3.79, 0.79\}$  – седло

Фазовый портрет:

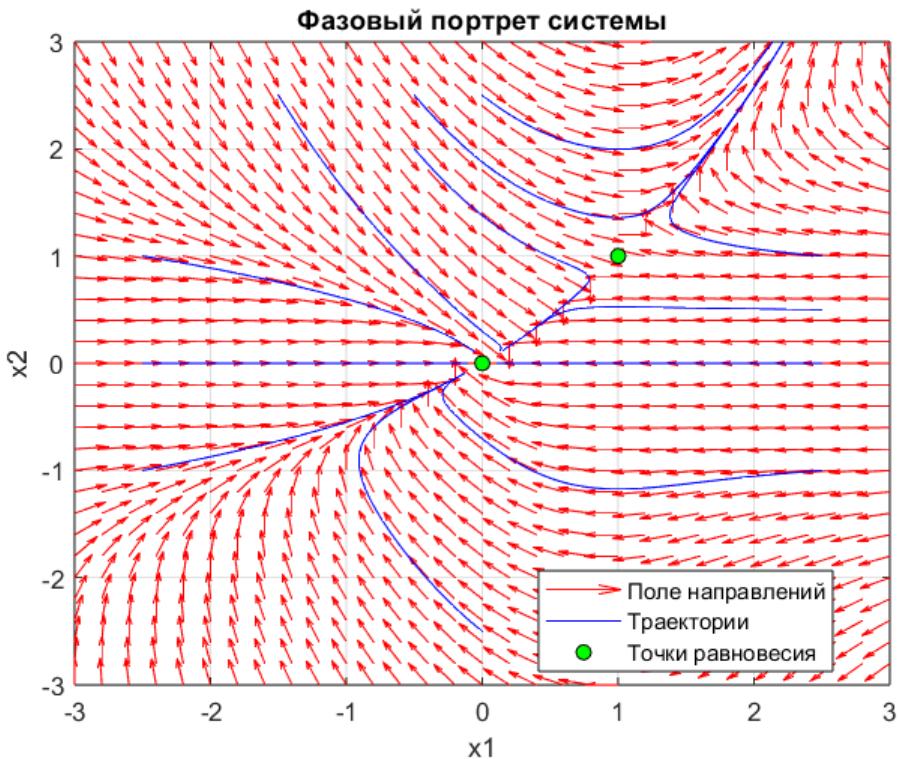


Рис. 6: Фазовый портрет системы (6)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике седло и локально асимптотически устойчивая негиперболическая точка.

### 1.2.7. Седьмая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \end{cases} \quad (7)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0, \\ x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 3^{-1}x_1(x_1^2 - 1), \\ x_1^4 - 3x_1^3 - x_1^2 - 3\sin(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0; 0), \\ (3.29, 3.29, 10.79) \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos(x_1) & -3x_2^2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Матрицы  $A_i$  и их собственные числа:

$$A_1 = J|_{(0;0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0, 0\}$$

$$A_2 = J|_{(3.29, 3.29, 10.79)} = \begin{bmatrix} -32.5 & 32.5 & 0 \\ 1 & -32.5 & 3 \\ 11.78 & -32.5 & 3.29 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_2 1,2} = \{1.36, -30.36, -32.71\}$$

Точка  $(0; 0; 0)$  негиперболическая.

Возьмем функцию Четаева:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2, \quad V(0) = 0, \quad V(x_1 \neq 0) > 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 = x_1 (-x_1^3 + x_2^3) = -x_1^4 + x_1 x_2^3$$

Рассмотрим область  $x_1 > 0, x_2 > 0$  вблизи нуля, тогда  $x_1 x_2^3 > 0, -x_1^4$  меньшего порядка  $\Rightarrow \dot{V} > 0$  в некоторой окрестности нуля, т.е. существует область, в которой производная функции Четаева положительна, значит точка равновесия неустойчива (вблизи равновесия вдоль  $|x_1|$  траектории уходят от точки равновесия).

Таким образом,

$(0; 0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0, 0\}$  – негиперболическая неустойчивая точка,  
 $(3.29, 3.29, 10.79) : \lambda_{A_2 1,2} = \{1.36, -30.36, -32.71\}$  – седло

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

Для каждой из данных систем найти все изолированные точки равновесия и построить локально стабилизирующий регулятор.

Представить результаты численного моделирования.

### 2.2. Выполнение

#### 2.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin(u_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin(u_2) \end{cases} \quad (8)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin(u_1) = 0, \\ -x_1 - x_2 + 3 \sin(u_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; -1), \\ (-1; 1) \end{bmatrix}$$

Линейное локальное управление:

$$u - u_{ss} = -K(x - x_{ss}),$$

где  $x_{ss}$  – точка равновесия,  $u_{ss}$  – управляющее воздействие, которое удерживает систему в равновесии.

Найдем  $u_{ss}$  при  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$  в точке равновесия  $(-1; 1)$ :

$$\begin{cases} 1 - 2 + 1 + \sin(u_1) = 0, \\ 1 - 1 + 3 \sin(u_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin u_1 = 0, \\ \sin u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1^{ss} = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ u_2^{ss} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

При условии  $u_{ss} \neq 0$  выберем:

$$u_{ss} = \begin{bmatrix} u_1^{ss} \\ u_2^{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix}$$

Обозначим:

$$\tilde{x} = x - x_{ss}, \quad \tilde{u} = u - u_{ss}$$

Составим систему:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

Найдем матрицы  $A, B$ :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} \cos(u_1) & 0 \\ 0 & 3\cos(u_2) \end{bmatrix} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа системы:

$$\sigma(A) = \{4.8284, -0.8284\}$$

Система неустойчива. Нужно управление. Проверим управляемость:

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{bmatrix} -0.8284 & 0 \\ 0 & 4.8284 \end{bmatrix}, \quad B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -0.18 & -3.09 \\ 0.18 & 0.09 \end{bmatrix}$$

Система полностью управляема (неустойчивому собственному значению соответствуют ненулевые элементы матрицы  $B_J$ ).

Синтезируем локально стабилизирующий регулятор по состоянию:

$$\tilde{u} = -K\tilde{x}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{\tilde{x}} = (A - BK)\tilde{x},$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 5 & k_2 + 1 \\ 3k_3 - 1 & 3k_4 - 1 \end{bmatrix}$$

Условия устойчивости:

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BK) < 0, \\ \det(A - BK) > 0, \\ \Re(\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BK) = k_1 + 3k_4 + 4 < 0, \\ \det(A - BK) = -k_1 + k_2 - 3k_2k_3 - 3k_3 + 3k_1k_4 + 15k_4 - 4 > 0 \end{cases}$$

Пусть:

$$K = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6 + 3 \cdot 0.5 + 4 = -0.5 < 0, \\ 6 - 3 \cdot 6 \cdot 0.5 + 15 \cdot 0.5 - 4 = 0.5 > 0 \end{cases}$$

Собственные числа замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-0.25 \pm 0.66i\}$$

Схема моделирования:

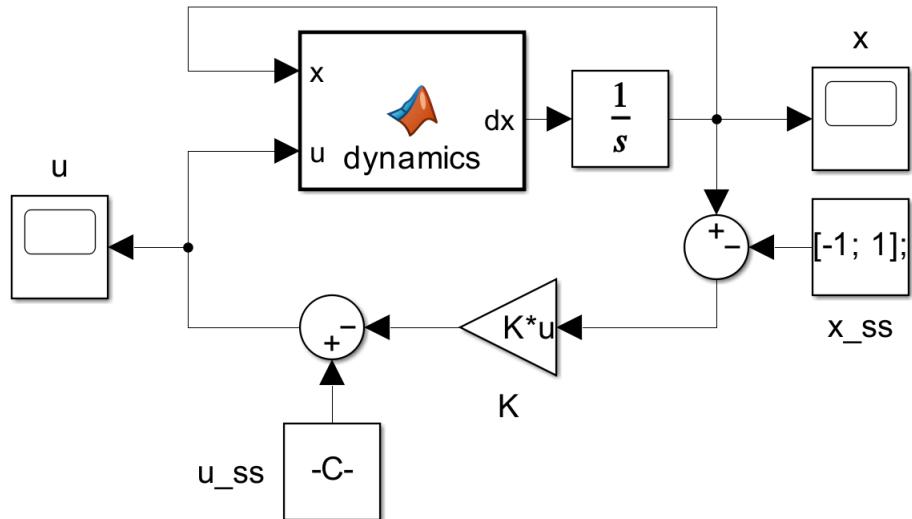


Рис. 7: Схема моделирования системы

В схеме учтено смещение  $u = u_{ss} - K(x - x_{ss})$ .

Начальные условия:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

Графики вектора состояния системы и управления:

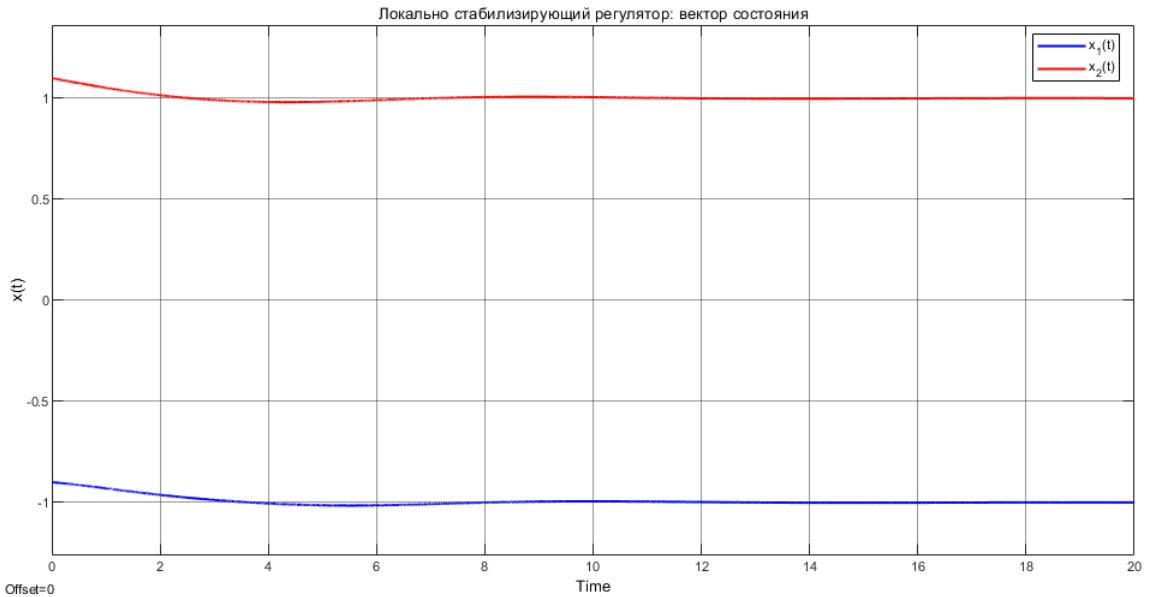


Рис. 8: Вектор состояния объекта управления

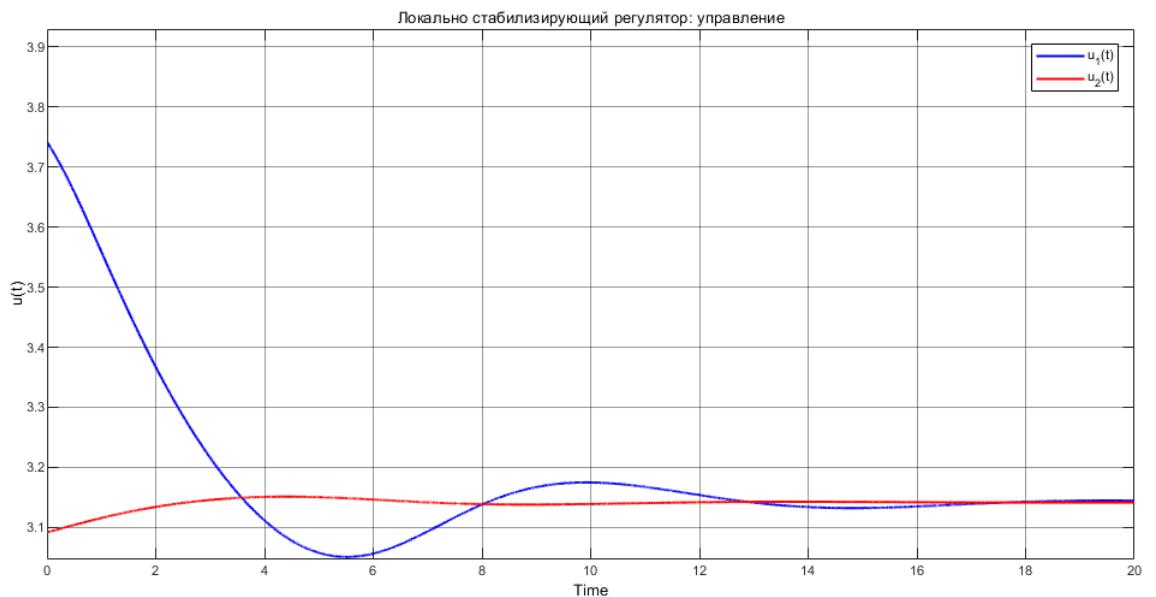


Рис. 9: Управление  $u = u_{ss} - K(x - x_{ss})$

Система стабилизировалась в точке равновесия  $(-1; 1)$ .

### 2.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u^3, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin(u) \end{cases} \quad (9)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 x_2 + u^3 = 0, \\ -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin(u) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$$

Найдем  $u_{ss}$  в точке равновесия:

$$\begin{cases} u^3 = 0, \\ \sin(u) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0, \\ u = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow u_{ss} = 0$$

Составим систему. Так как  $x_{ss} = (0; 0)$  и  $u_{ss} = 0$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -Kx$$

Найдем матрицы  $A, B$ :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} x_2 & 1 + x_1 \\ -3x_1^2 & -1 + 2x_2 \end{bmatrix} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} 3u^2 \\ \cos(u) \end{bmatrix} \Big|_{x_{ss}, u_{ss}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа системы:

$$\sigma(A) = \{0, -1\}$$

Система устойчива, не асимптотически.

Управляемость:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Система полностью управляема.

Синтезируем регулятор:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = (A - BK)x,$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Условия устойчивости:

$$\begin{cases} \text{trace}(A - BK) < 0, \\ \det(A - BK) > 0, \\ \Re(\lambda_i) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k_2 - 1 < 0, \\ k_1 > 0 \end{cases}$$

Пусть:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 1 = -3 < 0, \\ 2 > 0 \end{cases}$$

Собственные числа:

$$\sigma(A - BK) = \{-1, -2\}$$

Схема моделирования аналогична рис. (7). В блоке  $u_{ss}$  константа 0, в  $x_{ss}$  нулевой вектор.

Начальные условия:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

Графики вектора состояния системы и управления:

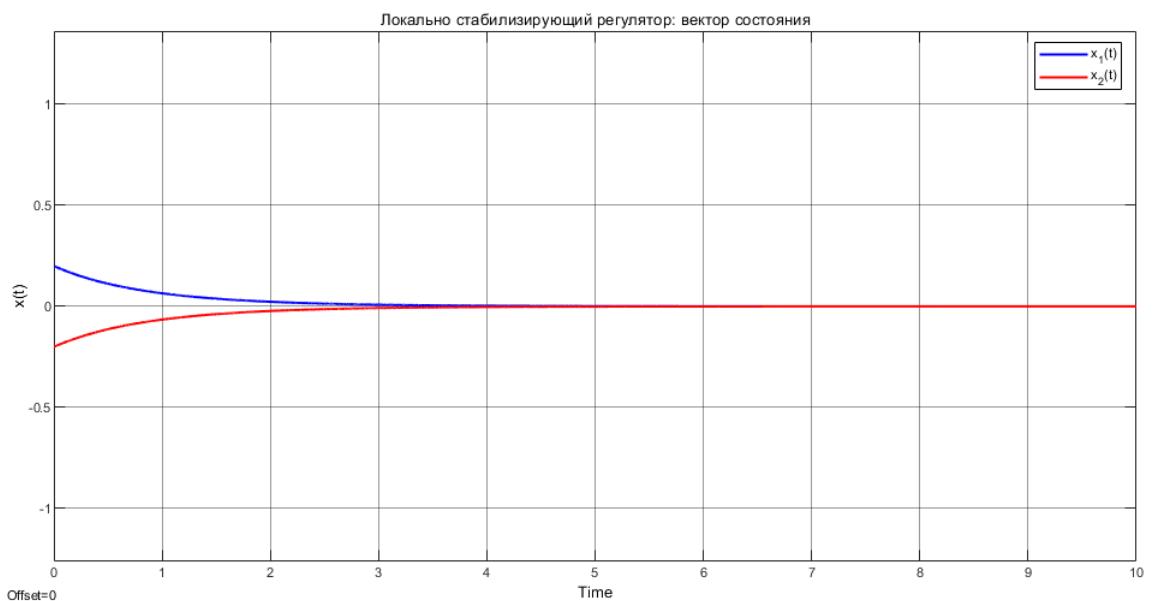


Рис. 10: Вектор состояния объекта управления

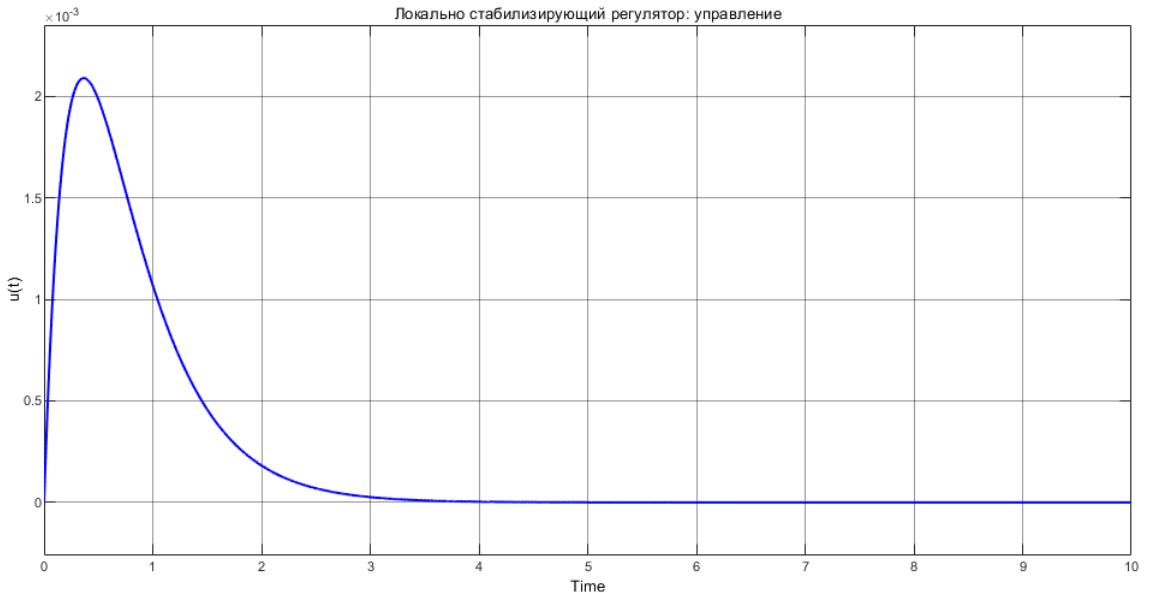


Рис. 11: Управление  $u = -K(x)$

Система стабилизировалась в точке равновесия  $(0; 0)$ .

### 3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы для различных нелинейных систем были найдены точки равновесия и определены их типы методом линеаризации. Для одной из систем был исследован предельный цикл – в результате был сделан вывод, что это множество равновесий. Были построены фазовые портреты систем. Результаты моделирования подтвердили вычисления. Были синтезированы локально стабилизирующие регуляторы для нелинейных систем и проверены моделированием – регуляторы синтезированы корректно.