

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО  
СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ  
СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ»**

Выполнили: студенты

Румянцев А. А., R3441

Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1	Условие . . . . .	3
1.2	Выполнение . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>8</b>
2.1	Условие . . . . .	8
2.2	Выполнение . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Задание 3</b>	<b>11</b>
3.1	Условие . . . . .	11
3.2	Выполнение . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>12</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) u, \end{cases}$$

где  $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1$ . Весь вектор состояния измерим. Необходимо:

1. синтезировать стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов;
2. синтезировать стабилизирующий непрерывный регулятор на основе скользящих режимов;
3. провести соответствующий анализ устойчивости;
4. провести математическое моделирование.

### 1.2. Выполнение

Выберем скользящую поверхность, на которой упростим динамику системы и зададим ей желаемые свойства:

$$s = ax_1 + x_2 = 0, \quad a > 0$$

На поверхности  $s = 0$ :

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + \sin x_1$$

При малых  $x_1$  получаем  $\sin x_1 \sim x_1$ :

$$\dot{x}_1 \approx -(a - 1)x_1$$

Для асимптотической устойчивости  $a > 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ .

Динамика скользящей переменной:

$$s = ax_1 + x_2 \Rightarrow \dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Подставим  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ :

$$\dot{s} = a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2)u,$$

$$\dot{s} = \Delta(x) + (2 + \theta_2)u, \quad \Delta(x) \equiv ax_2 + a \sin x_1 + \theta_1 x_1^2$$

Необходимо выбрать  $u$  так, чтобы выполнялось условие достижения скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0$$

Это эквивалентно:

$$\dot{V} \leq -\eta|s|, \quad V = 0.5s^2$$

Синтезируем дискретный регулятор на основе скользящих режимов.

Выберем управление как сумму эквивалентной и переключающей составляющих:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}$$

Эквивалентная часть при  $s = 0$ :

$$u_{\text{eq}} = -\frac{\Delta(x)}{2 + \theta_2}$$

Параметры  $\theta_1, \theta_2$  неизвестны, поэтому положим их нулевыми.

Такое допущение возможно вследствие наличия переключающей части с коэффициентом переключения  $\beta_0$ , который при верном подборе компенсирует влияние отклонений  $\theta_i$ .

Кроме того, скользящий режим является робастным к параметрическим неопределенностям и возмущениям.

Тогда, номинальная эквивалентная часть:

$$u_{\text{eq,nom}} = -\frac{ax_2 + a \sin x_1}{2}$$

Добавим переключающую часть:

$$u_{\text{sw}} = -\beta_0 \text{sign}(s), \quad \beta_0 > 0$$

Итоговый разрывный регулятор:

$$u = -\frac{ax_2 + a \sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s), \quad \beta_0 > 0$$

Подставим  $u$  в  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = a(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2) \left( -\frac{ax_2 + a \sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s) \right),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{2 + \theta_2}{2} (ax_2 + a \sin x_1) + ax_2 + a \sin x_1 - (2 + \theta_2) \beta_0 \operatorname{sign}(s),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} (ax_2 + a \sin x_1) - (2 + \theta_2) \beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Оценим модуль «невязки» (первые два слагаемых).

Получим верхнюю оценку при  $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1, |\sin x_1| \leq |x_1|$ :

$$\left| \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a(x_2 + \sin x_1) \right| \leq |x_1|^2 + \frac{a}{2} (|x_2| + |x_1|) \equiv W(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \leq W(x) - (2 + \theta_2) \beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Умножим выражение на  $s$  и учтем  $\operatorname{sign}(s) \cdot s = |s|$ :

$$s\dot{s} \leq sW(x) - (2 + \theta_2) \beta_0 |s|$$

В правой части на  $s$  не хватает модуля в первом слагаемом – заменим на верхнюю границу:

$$W(x) \geq 0 \Rightarrow sW(x) \leq |s|W(x)$$

Тогда:

$$s\dot{s} \leq |s|W(x) - (2 + \theta_2) \beta_0 |s|$$

Так как  $2 + \theta_2 \geq g_0 = 1$ , достаточное условие достижения скольжения:

$$\beta_0 > \sup_{x \in \mathcal{D}} W(x) + \delta,$$

где  $\mathcal{D}$  – рассматриваемая область состояний,  $\delta > 0$  – небольшой запас.

Тогда:

$$s\dot{s} \leq -\mu|s|, \mu = (\beta_0 g_0 - \sup W(x)) > 0$$

Т.е. гарантируем, что при минимально возможном  $g_0$  и максимально возможном  $W(x)$  их разница при  $\beta_0 g_0$  будет положительна.

Таким образом, для  $V = 0.5s^2$  имеем  $\dot{V} = s\dot{s} \leq -\mu|s|, \mu > 0$ , что гарантирует достижение  $s = 0$  за конечное время.

Синтезируем непрерывный регулятор на основе скользящих режимов.

Для уменьшения колебаний из-за задержки переключения управления, заменим в управлении функцию  $\text{sign}$  функцией насыщения:

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} s/\varepsilon, & |s| \leq \varepsilon, \\ \text{sign}(s), & |s| > \varepsilon \end{cases}$$

Непрерывный регулятор:

$$u = -\frac{ax_2 + a \sin x_1}{2} - \beta_0 \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Подставим  $u$  в  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} (ax_2 + a \sin x_1) - (2 + \theta_2) \beta_0 \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Аналогично оценим невязку абсолютной величиной  $W(x)$  и зададим  $V = 0.5s^2$ , тогда:

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq |s|W(x) - (2 + \theta_2) \beta_0 |s| \left| \text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \right|$$

Если  $|s| > \varepsilon$ , то  $|\text{sat}| = 1$  – аналогичное разрывному случаю условие на  $\beta_0$ , следовательно  $\dot{V} \leq -\mu|s|, \mu > 0$  и достижение уменьшает  $s$  до слоя  $|s| \leq \varepsilon$ .

На слое  $|s| \leq \varepsilon$  имеем  $\text{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$ , тогда:

$$\dot{V} \leq |s|W(x) - (2 + \theta_2) \beta_0 \frac{s^2}{\varepsilon}$$

Пусть на рассматриваемой рабочей области  $\mathcal{D}$  есть оценка:

$$|\Delta(x)| \leq D_{\max} \leq |x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|)$$

Тогда, для  $r = |s| \leq \varepsilon$  оценивающее неравенство:

$$\dot{V} \leq r D_{\max} - g_0 \frac{\beta_0}{\varepsilon} r^2, \quad g_0 = \inf (2 + \theta_2) = 1$$

Правая часть в  $\dot{V}$  отрицательна, если:

$$g_0 \frac{\beta_0}{\varepsilon} r^2 > r D_{\max} \Rightarrow r > \frac{D_{\max} \varepsilon}{g_0 \beta_0}$$

Предельный радиус:

$$r_* := \frac{D_{\max} \varepsilon}{g_0 \beta_0}$$

Тогда, при  $r \in (r_*, \varepsilon]$  имеем  $\dot{V} < 0$  и  $r(t)$  убывает до нее не более чем  $r_*$ . Следовательно, система обладает практической устойчивостью: внутри слоя  $|s| \leq \varepsilon$  значения  $s(t)$  стремятся к компактному множеству  $|s| \leq r_*$ .

Моделирование системы при  $a = 2, \beta_0 = 0.8, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1 \ 0]^T, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.5$ :

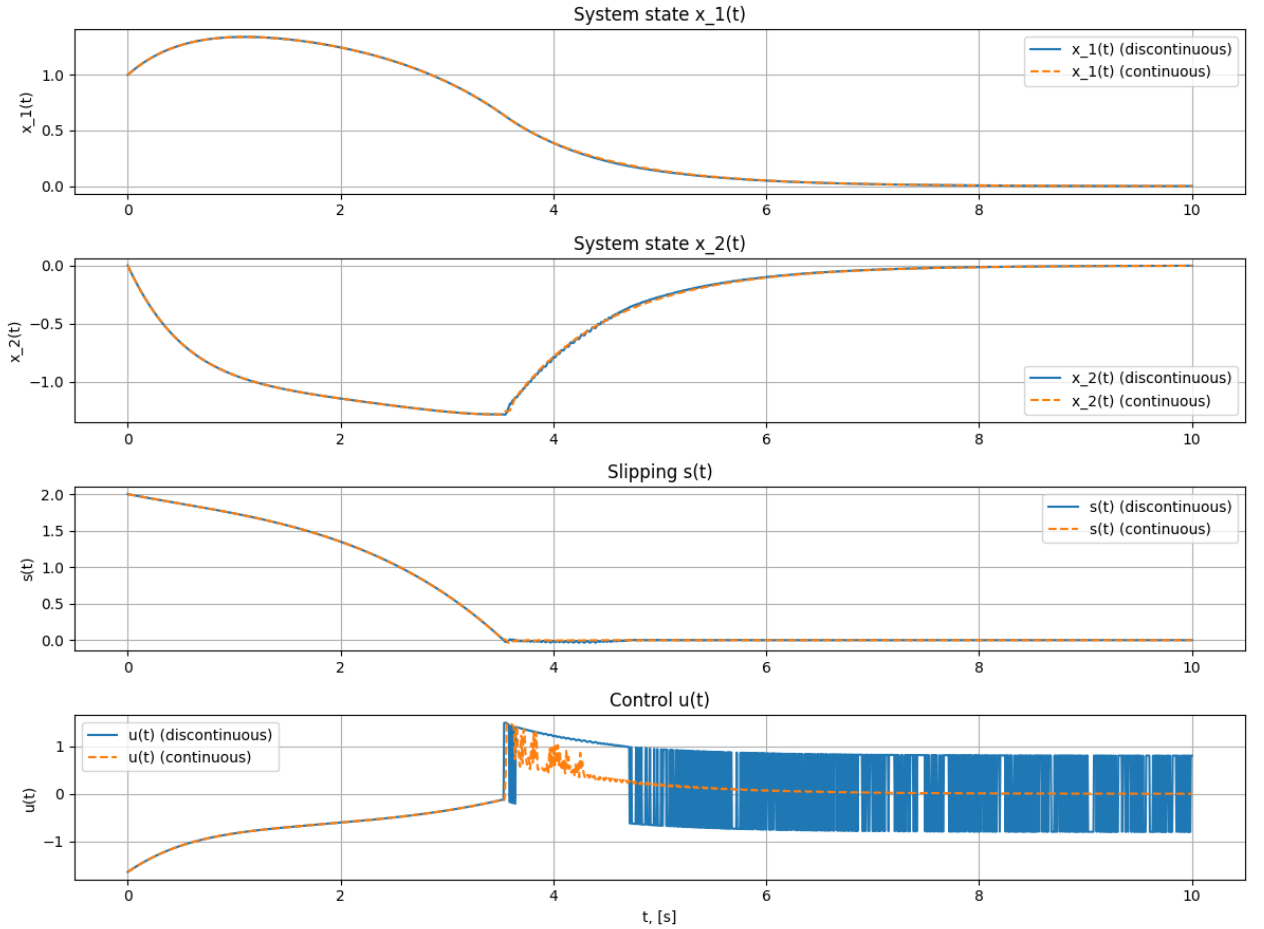


Рис. 1: Графики  $x_i(t), s(t), u(t)$

Все графики сошлись к нулю, кроме разрывного управления.

В разрывном управлении две составляющие – эквивалентная и переключающая. Первая стремится к нулю вместе с состоянием. Вторая не стремится к нулю, а переключается между  $\pm\beta_0$ , из-за чего получаются высокочастотные колебания – график  $u(t)$  выглядит как импульсный сигнал при устоявшейся системе. По графику видно, что управление меняется от  $\approx -\beta_0 = -0.8$  до  $\approx +\beta_0 = 0.8$ .

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где  $a_1, a_2$  – неизвестные параметры,  $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$ . Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

### 2.2. Выполнение

Выберем поверхность:

$$s = ax_1 + x_2, \quad a > 0$$

На поверхности  $s = 0$ :

$$x_2 = -ax_1, \quad x_2 = \dot{x}_1 - a_1 x_1 \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + a_1 x_1 \sin x_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 (-a + a_1 \sin x_1)$$

Функция Ляпунова и ее производная для подсистемы на поверхности:

$$V_1(x_1) = 0.5x^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = x_1^2 (-a + a_1 \sin x_1)$$



Так как  $|\sin x_1| \leq |x_1|, |a_1| \leq 2$ :

$$a_1 \sin x_1 \leq |a_1| \cdot |\sin x_1| \leq 2|x_1|$$

Тогда:

$$\dot{V}_1 \leq x_1^2 (-a + 2|x_1|) < 0 \forall x_1 : 0 < |x_1| < \frac{a}{2}$$

Начало координат локально асимптотически устойчиво.

Рассмотрим  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = a(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) + a_2 x_1 x_2 + 3u = \Delta(x) + 3u$$

Предположим номинальные значения  $|a_i - 1| = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1$ .

Тогда, номинальная эквивалентная часть регулятора, обеспечивающая  $\dot{s} \rightarrow 0$  в номинальном случае:

$$\Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{eq,nom}} = 0 \Rightarrow u_{\text{eq,nom}} = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2)$$

Добавим разрывную часть:

$$u = u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}, \quad u_{\text{sw}} = -\beta(x) \text{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1 x_2) - \beta(x) \text{sign}(s)$$

Подставим в  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = \Delta(x) + 3(u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}) = 3u_{\text{eq,nom}} + \Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{sw}} + \Delta(x) - \Delta_{a_i=1}(x),$$

$$\dot{s} = 3u_{\text{sw}} + a(a_1 - 1)x_1 \sin x_1 + (a_2 - 1)x_1 x_2 = 3u_{\text{sw}} + \delta(x)$$

Оценим  $\delta(x)$  при  $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$ :

$$|\delta(x)| \leq a|x_1 \sin x_1| + |x_1 x_2| \leq ax_1^2 + |x_1 x_2|$$

Тогда:

$$\dot{s} = -3\beta(x) \text{sign}(s) + ax_1^2 + |x_1 x_2|$$

Оценим производную функции Ляпунова  $V = 0.5s^2$ :

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(-3\beta(x)\text{sign}(s) + \delta(x)) = -3\beta(x)|s| + \delta(x)s,$$

$$\dot{V} = -3\beta(x)|s| + \delta(x)s \leq -3\beta(x)|s| + |\delta(x)||s| = -(3\beta(x) - |\delta(x)|)|s|$$

Если выбрать  $3\beta(x) \geq |\delta(x)| + \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$ :

$$\dot{V} \leq -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0 \forall s \neq 0$$

Это гарантирует достижение поверхности  $s = 0$  за конечное время.

Выберем:

$$\beta(x) \geq \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0), \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0)\text{sign}(s)$$

Заменяем  $\text{sign}(s)$  на  $\text{sat}(s/\varepsilon)$  и получим непрерывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}(ax_2 + ax_1 \sin x_1 + x_1x_2) - \frac{1}{3}(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0)\text{sat}(s/\varepsilon)$$

Моделирование системы при  $a = 2, \beta_0 = 0.8, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1 \ 0]^T, a_1 = 0.5, a_2 = 1$ :

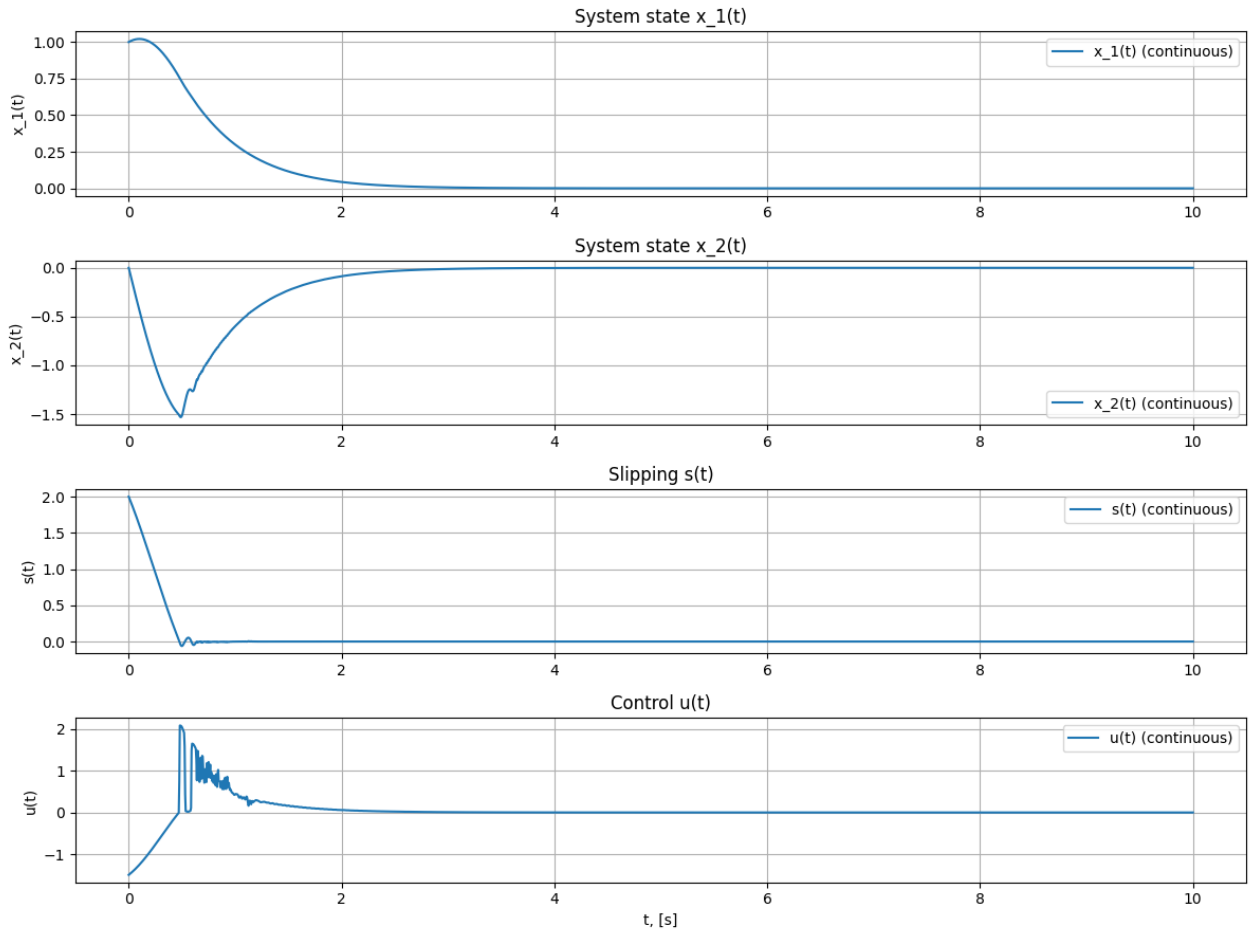


Рис. 2: Графики  $x_i(t)$ ,  $s(t)$ ,  $u(t)$

### 3. Задание 3

#### 3.1. Условие

Рассмотрим уравнение движения для маятника в виде:

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t) \cos \theta,$$

где  $h$  – горизонтальное ускорение,  $T$  – управляющий момент.

Предположим, что:

$$0.8 \leq l \leq 1, \quad 0.5 \leq m \leq 1, \quad 0.1 \leq k \leq 0.2, \quad |h(t)| \leq 0.5$$

и  $g = 9.81$ . Требуется стабилизировать маятник при  $\theta = 0$  для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

### **3.2. Выполнение**

...

## **4. Вывод**

...