

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И  
РЕГУЛЯТОРЫ»**

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1	Условие . . . . .	3
1.2	Выполнение . . . . .	3
1.2.1	Первая система . . . . .	3
1.2.2	Вторая система . . . . .	4
1.2.3	Третья система . . . . .	5
1.2.4	Четвертая система . . . . .	5
1.2.5	Пятая система . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>7</b>
2.1	Условие . . . . .	7
2.2	Выполнение . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Задание 3</b>	<b>10</b>
3.1	Условие . . . . .	10
3.2	Выполнение . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Задание 4</b>	<b>11</b>
4.1	Условие . . . . .	11
4.2	Выполнение . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Задание 5</b>	<b>13</b>
5.1	Условие . . . . .	13
5.2	Выполнение . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Задание 6</b>	<b>16</b>
6.1	Условие . . . . .	16
6.2	Выполнение . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Вывод</b>	<b>18</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

### 1.2. Выполнение

#### 1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_1 + x_1x_2) + x_2 (-2x_2) = -x_1^2 + x_1^2x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2 (1 - x_2) - 2x_2^2$$

Область, где производная отрицательна:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_1^2 + x_2^2 < 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$ .

### 1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (2)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)) + x_2 (x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Сделаем замену  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\dot{V} = r^2 (r^2 - 1)$$

Тогда:

$$r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0,$$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0,$$

$$r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \vee (1, \infty) : \dot{V} > 0$$

Внутри единичной окружности  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$  начало координат локально асимптотически устойчиво.

### 1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2) (1 - x_1^2) \end{cases} \quad (3)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1) + x_2 (-(x_1 + x_2) (1 - x_1^2)),$$

$$\dot{V} = x_1 x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1^2 - x_1 x_2 (1 - x_1^2) - x_2^2 (1 - x_1^2) = -2x_1^2 - x_2^2 (1 - x_1^2)$$

Область, в которой производная отрицательна:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_1^2 + x_2^2 < 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

### 1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (4)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-3x_1 - x_2) + x_2 (2x_1 - x_2^3) = -3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4$$

Найдем корни  $\dot{V} = 0$ :

$$-3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

Найдем точки равновесия системы (4):

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

Точки  $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$  не являются равновесиями системы, из них траектории уходят. Следовательно,  $\dot{V} = 0$  в этих точках не принадлежит инвариантному множеству.

Таким образом, наибольшее инвариантное множество, содержащееся в  $\dot{V} = 0$  – это начало координат.

По теореме ЛаСалля начало координат асимптотически устойчиво.

По неравенству Коши-Буняковского:

$$x_1x_2 \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -3x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^4 = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 \left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)$$

Скобка должна быть отрицательной:

$$\frac{1}{2} - x_2^2 < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Таким образом, начало координат локально асимптотически устойчиво.

### 1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x) \quad (5)$$

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad V(x) > 0 \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-\arctan(x)) = -x \arctan(x)$$

Для всех  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

и  $\arctan(x)$  – неубывающая нечетная функция. Она имеет тот же знак, что  $x$ .

Тогда:

$$x > 0 \Rightarrow \arctan(x) > 0 \Rightarrow \dot{V} = -x \arctan(x) < 0 \forall x \neq 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow \arctan(x) = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow \arctan(x) < 0 \Rightarrow \dot{V} = -x \arctan(x) < 0 \forall x \neq 0$$

Таким образом, для всех  $x \neq 0$  :  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат глобально асимптотически устойчиво.

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

Рассмотрим скалярную систему  $\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$ , где  $p$  – натуральное число, а  $h(x)$  удовлетворяет условию  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?

## 2.2. Выполнение

Положим влияние  $h(x)$  незначительным при малых  $x$  около начала координат, так как оно имеет порядок  $x^{p+1}$  и стремится к нулю быстрее, чем  $x^p$ .

Рассмотрим упрощенную систему:

$$\dot{x} = \alpha x^p$$

При нечетном  $p$  функция  $x^p$  сохраняет знак  $x$ :

$$x > 0 \Rightarrow x^p > 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow x^p < 0$$

Направление поля на прямой зависит от знака  $\alpha$ :

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} < 0$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = -\text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} > 0$$

При  $\alpha > 0$  функция  $x(t)$  или растет или убывает в противоположном от нуля направлении – начало координат неустойчиво.

При  $\alpha < 0$  функция  $x(t)$  либо растет к нулю слева, либо убывает к нулю справа – начало координат асимптотически устойчиво.

При четном  $p$  функция  $x^p$  всегда положительна.

Направления полей:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p > 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} > 0$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p < 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} < 0$$

При  $\alpha > 0$  функция  $x(t)$  приближается к нулю слева, но справа расходится – неустойчиво.

При  $\alpha < 0$  функция  $x(t)$  приближается к нулю справа, но слева расходится – неустойчиво.

Таким образом,  $p$  должно быть нечетным, а  $\alpha < 0$ .

Теперь учтем возмущение  $h(x)$ :

$$\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$$



Оно мало в окрестности нуля.

Для  $x \neq 0$  перепишем:

$$\dot{x} = x^p \left( \alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Из условия  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  следует:

$$\left| \frac{h(x)}{x^p} \right| \leq k|x|, \quad k > 0$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  такой, что:

$$k\varepsilon < \frac{|\alpha|}{2},$$

тогда для всех  $|x| < \varepsilon$ :

$$\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \leq \alpha + k|x| \leq \frac{\alpha}{2} < 0$$

Учтем для  $|x|$ :

$$\frac{d|x|}{dx} = \dot{x} \operatorname{sign}(x), \quad x^p \operatorname{sign}(x) = |x|^p, \quad p = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = (\alpha x^p + h(x)) \operatorname{sign}(x) = x^p \operatorname{sign}(x) \left( \alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Следовательно, для  $|x| < \varepsilon$ :

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = |x|^p \left( \alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right) \leq \frac{\alpha}{2} |x|^p < 0,$$

то есть  $|x|$  монотонно убывает вдоль траекторий, пока решение остаётся в окрестности нуля.

Таким образом,  $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  при малых  $x$ ,  $p = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  и  $\alpha < 0$  – начало координат локально асимптотически устойчиво.

Также это задание можно решить через функцию Ляпунова  $V = 0.5x^2$ .

### 3. Задание 3

#### 3.1. Условие

На основе применения LMI построить линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases} \quad (6)$$

#### 3.2. Выполнение

Приведем систему к виду:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx$$

Матрицы  $A, B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{1.41, -1.41\}$$

Проверим управляемость:

$$A = PJP^{-1}, B_J = P^{-1}B \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 0 & -1.41 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Система полностью управляема – можно задать регулятору любую степень устойчивости.

Синтезируем LMI со степенью устойчивости  $\alpha = 2$  без ограничения на управление при помощи матричного неравенства типа Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}$$

Получим:

$$K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Проверим собственные числа замкнутой системы  $A + BK$ :

$$\sigma(A + BK) = \{-5.4 \pm 2.8i\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива, и, убывает быстрее, чем требуемая скорость  $e^{-2t}$  (см. действительную часть собственных чисел).

#### 4. Задание 4

##### 4.1. Условие

Найти ограничивающее условие на параметр  $\gamma$ , при котором система является экспоненциально устойчивой со степенью 1. Закон управления взять из предыдущего задания.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u, \end{cases} \quad (7)$$

$$u = Kx, \quad K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

##### 4.2. Выполнение

Подставим закон управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + Kx = 2x_1 - 39.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = -37.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Замкнутая система будет иметь вид:

$$\dot{x} = (A + BK)x + \gamma f(x),$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Линеаризуем систему. При малых  $x_2$ :

$$\sin(x_2) \approx x_2$$

Тогда система примет вид:

$$\dot{x} = \left[ (A + BK) + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] x = A_\gamma x,$$

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Экспоненциальная устойчивость степени 1 требует:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{A_\gamma i}) \leq -1$$

Характеристический полином:

$$\det(\lambda I - A_\gamma) = \lambda^2 + 10.81\lambda + 37.02(\gamma + 1) = 0$$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)}}{2}$$

Рассмотрим дискриминант:

$$D = 10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)$$

Если  $D < 0$ , то корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью  $-10.81/2 < -1$ :

$$10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1) < 0 \Rightarrow \gamma > \frac{10.81^2}{4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma > -0.21$$

Если  $D \geq 0$ , то корни действительные и должны удовлетворять условию:

$$\lambda_i = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02 (\gamma + 1)}}{2} \leq -1,$$

Так как  $\lambda_{1+} \geq \lambda_{2-}$ , то достаточно проверить  $\lambda_{1+}$ :

$$\sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02 (\gamma + 1)} \leq 8.81 \Rightarrow \gamma \geq \frac{8.81^2 - 10.81^2}{-4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma \geq -0.74$$

Таким образом, экспоненциальная устойчивость степени 1 достигается при:

$$\gamma \geq -0.74$$

При  $\gamma > -0.21$  собственные числа будут комплексными.

## 5. Задание 5

### 5.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = u, \\ u = Kx \end{cases} \quad (8)$$

Весь вектор состояния  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  измерим.

1. Синтезируйте линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат.
2. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии шумов измерений.
3. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

## 5.2. Выполнение

Линейная обратная связь:

$$u = Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$$

Замкнутая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 + d \end{cases}$$

В качестве  $d$  учитываем шумы измерений или аддитивные возмущения.

В доказательстве глобальной устойчивости полагаем  $d = 0$ .

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad k_1 > 0, \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = k_1x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = k_1x_1(x_2 - 0.5x_1^3) + x_2(-k_1x_1 - k_2x_2) = -0.5k_1x_1^4 - k_2x_2^2$$

Член  $k_1x_1x_2$  сократился.

При всех  $k_1, k_2 > 0$ :

$$\dot{V} < 0, \quad \dot{V} = 0 : (x_1, x_2) = (0, 0)$$

Начало координат глобально асимптотически устойчиво.

При наличии шумов измерений вектор состояния объекта:

$$\tilde{x} = x + n(t),$$

где  $n(t)$  – векторный шум.

Управление:

$$u = K\tilde{x} = Kx + Kn(t) = Kx + w(t)$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = k_1 x_1 (x_2 - 0.5x_1^3) + x_2 (-k_1 x_1 - k_2 x_2 + w(t)) = -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + x_2 w(t)$$

Неравенство Коши-Шварца:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

Положим  $a = |x_2|$ ,  $b = |w(t)|$ ,  $\varepsilon = k_2 > 0$ :

$$x_2 w(t) \leq |x_2| |w(t)| \leq \frac{k_2}{2} x_2^2 + \frac{1}{2k_2} |w(t)|^2$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + \frac{k_2}{2} x_2^2 + \frac{1}{2k_2} |w(t)|^2 = -0.5k_1 x_1^4 - 0.5k_2 x_2^2 + \frac{1}{2k_2} |w(t)|^2$$

Получили:

$$\dot{V} \leq -\alpha(|x|) + \gamma(|w(t)|^2),$$

где  $\alpha(|x|)$  – положительно определенная функция,  $\gamma(|w(t)|^2)$  – положительная функция входа.

Пусть:

$$\|w\|_\infty := \sup_t |w(t)| \leq W$$

Тогда при  $\dot{V} \geq 0$ :

$$0.5k_1 x_1^4 + 0.5k_2 x_2^2 \leq \frac{1}{2k_2} W^2$$

Отдельно для компонент:

$$0.5k_1 x_1^4 \leq \frac{1}{2k_2} W^2 \Rightarrow |x_1| \leq (k_1 k_2)^{-1/4} W^{1/2},$$

$$0.5k_2 x_2^2 \leq \frac{1}{2k_2} W^2 \Rightarrow |x_2| \leq \frac{W}{k_2}$$

То есть  $x_1$  ограничено пропорционально  $\sqrt{W}$ ,  $x_2$  линейно по  $W$ .

Таким образом, при наличии шумов измерений система устойчива по входу-к-состоянию (ISS) – при любом ограниченном входе  $w(t)$  состояния  $x_1, x_2$

тоже остаются ограниченными.

При наличии аддитивных возмущений уравнение динамики  $x_2$ :

$$\dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + d(t)$$

Этот случай аналогичен случаю с измерительным шумом  $w(t)$ .

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + x_2 d(t)$$

Аналогичные преобразования:

$$\dot{V} \leq -0.5k_1 x_1^4 - 0.5k_2 x_2^2 + \frac{1}{2k_2} |d(t)|^2$$

Ограничения для компонент будут аналогичны  $W \sim |d|_\infty$ .

Таким образом, при наличии аддитивных возмущений система устойчива по входу-к-состоянию. Ограниченный возмущающий сигнал дает ограниченное состояние.

## 6. Задание 6

### 6.1. Условие

Исследуйте устойчивость по входу-к-состоянию системы по отношению к возмущению  $d$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\sigma$  – локально липшицева,  $\sigma(0) = 0$ ,  $y\sigma(y) \geq 0$ .

### 6.2. Выполнение

Из условия  $y\sigma(y) \geq 0$  следует, что  $\sigma(y)$  имеет тот же знак, что и  $y$ .

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$



Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 (-2x_1 + x_2) + x_2 (-x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_2\sigma(x_1) + x_2d$$

При  $d = 0$  член  $x_2\sigma(x_1)$  может иметь произвольный знак, поэтому производная функции Ляпунова не всегда строго отрицательна.

Неравенство Коши-Буняковского:

$$x_2d \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -2x_1^2 - x_2^2 - x_2\sigma(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 = -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_2\sigma(x_1) + \frac{1}{2}d^2$$

Так как  $\sigma(0) = 0$ , то для  $x_2 = 0$  можно для малых  $x_1$  записать:

$$|\sigma(x_1)| = |\sigma(x_1) - \sigma(0)| \leq L|x_1 - 0| = L|x_1|,$$

где  $L$  – константа Липшица.

В окрестности нуля функция растёт не быстрее, чем  $L|x_1|$ .

Оценим член  $-x_2\sigma(x_1)$ :

$$|-x_2\sigma(x_1)| \leq |x_2||\sigma(x_1)| \leq L|x_1||x_2| \leq \frac{L}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Тогда производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} \leq -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{L}{2}x_1^2 + \frac{L}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 = -\left(2 - \frac{L}{2}\right)x_1^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{L}{2}\right)x_2^2 + \frac{1}{2}d^2$$

Скобки должны быть положительны:

$$\begin{cases} 2 - \frac{L}{2} > 0, \\ 1 - L > 0 \end{cases} \Rightarrow L < 1$$

Положительно определенная функция:

$$\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0, \quad \alpha_1 = 2 - L/2, \quad \alpha_2 = 1/2 - L/2$$

Обозначим:

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \gamma(s) = \frac{1}{2}s, \quad s = \|d\|^2$$

Тогда производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} \leq -\alpha\|x\|^2 + \frac{1}{2}d^2 = -\alpha\|x\|^2 + \gamma(\|d\|^2)$$

Ограничение величины состояния при  $\dot{V} \geq 0$ :

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha}d^2 \Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}|d|$$

Величина состояния ограничена линейно по  $|d|$ .

Таким образом, система устойчива по входу-к-состоянию (ISS) при  $L < 1$ . С возмущением  $d \neq 0$  состояние остается ограниченным, величина пропорциональна размеру  $d$ .

При  $d = 0$  система асимптотически устойчива.

## 7. Вывод

В ходе данной лабораторной работы были исследованы различные нелинейные системы. Устойчивость определялась по производной функции Ляпунова. Был синтезирован регулятор с условием на параметр для степени экспоненциальной устойчивости. Была исследована устойчивость системы с регулятором при наличии шумов измерений и аддитивных возмущений. Была исследована устойчивость по входу-к-состоянию системы по отношению к возмущению. Каждый результат был обоснован.