МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №6
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«СИНТЕЗ ФИНИТНОГО ОДНОРОДНОГО РЕГУЛЯТОРА»

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., R3441
Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Задание

1.1. Условие

1. Выберите нелинейную управляемую систему с одним входом, одним выходом;

2. Предполагая, что математическая модель содержит существенные неопределенности, представьте систему в виде цепи интеграторов с согласованной обобщенной неизвестной динамикой, используя безмодельный подход;

3. Реализуйте финитный однородный регулятор с дополнительной компенсацией обобщенной неизвестной динамики.

1.2. Выполнение

Рассмотрим нелинейную систему с одним входом и одним выходом – несимметричный маятник с сухим и вязким трением:

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}\sin y - \frac{b}{ml^2}\dot{y} - \frac{c}{ml^2}\operatorname{sign}(\dot{y}) + \frac{1}{ml^2}u,$$

где y угол отклонения от нижнего положения, $|u| \leq u_{\max}$ момент на оси, m, l масса и длина стержня, g ускорение свободного падения, b коэффициент вязкого трения, c коэффициент сухого трения.

Обозначим момент инерции $I = ml^2 > 0$. Перепишем систему в виде:

$$\ddot{y} = d(t, y, \dot{y}) + \frac{1}{I}u,$$

где:

$$d(t, y, \dot{y}) = -\frac{g}{l}\sin y - \frac{b}{I}\dot{y} - \frac{c}{I}\operatorname{sign}(\dot{y})$$

обобщенная неизвестная динамика, содержащая существенные неопределенности. В безмодельном подходе считаем $d(\cdot)$ неизвестной, но ограниченной или растущей не быстрее некоторой однородной функции.

Введем состояние:

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},$$

тогда, система примет канонический вид цепи интеграторов с возмущением:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = d(t,x) + \frac{1}{I}u$$

Выберем веса матрицы расширения $D(\lambda > 0)$:

$$r_1 = 1,\ r_2 = 1 - \rho,\ \rho \in (0,1),$$

что соответствует отрицательной степени однородности $-\rho$ для цепи интеграторов $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = v$. При таком выборе переменные связаны масштабированием:

$$x_2 \sim x_1^{r_2/r_1} = x_1^{1-\rho}$$

Определим нелинейную скользящую поверхность:

$$s(x) = x_2 + \gamma\,[x_1]^{1-\rho},$$

где $[s]^\alpha = |s|^\alpha \operatorname{sign}(s)$ – однородная нелинейность, $\gamma > 0$ коэффициент усиления.

Поверхность $s(x)$ взвешенно-однородна степени $r_2 = 1 - \rho$ относительно матрицы расширения $D(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda^{r_1}, \lambda^{r_2})$, что обеспечивает однородность замкнутой системы при соответствующем выборе управления.

Для системы с возмущением $|d(t,x)| \leq \bar{d}$ стабилизирующий регулятор имеет вид:

$$u = -I\left[\hat{d}(t) + k\,[s(x)]^\rho\right],\ k > 0, \rho \in (0,1),$$

где $\hat{d}(t)$ оценка (компенсация) неизвестной динамики $d(t,x)$, $[s]^\rho = |s|^\rho \operatorname{sign}(s)$ обеспечивает конечное время сходимости:

$$\sigma = \rho < 1 \Rightarrow T(x_0) \leq \frac{V_0^{1-\rho}}{\beta(1-\rho)} < \infty,\ V_0 : Q(V_0, x_0) = 0,\ \beta = k - \delta > 0,$$

где $|d - \hat{d}| \leq \delta$ верхняя граница ошибки компенсации.

Для уменьшения дрожания в управлении заменим $\operatorname{sign}(s)$ на $\tanh(s/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда, закон управления:

$$u(t) = -I\left[\hat{d}(t) + k\,|s(t)|^\rho \tanh(s(t)/\varepsilon)\right],$$

где:

$$s(t) = \dot{y}(t) + \gamma\,\mathrm{sign}(y(t))|y(t)|^{1-\rho},\ \hat{d}(t) \approx d(t, y, \dot{y})$$

Так как $\ddot{y} = d + u/I$, то $d = \ddot{y} - u/I$. Построим оценку $\hat{d}$ на основе двухступенчатой фильтрации для вычисления $\hat{\dot{y}}, \hat{\ddot{y}}$ из измерения y:

$$\hat{\dot{y}}(t) = \frac{2}{2\tau_1 + \Delta t}\left[y(t) - y(t-\Delta t)\right] - \frac{2\tau_1 - \Delta t}{2\tau_1 + \Delta t}\hat{\dot{y}}\left(t - \Delta t\right),$$

$$\hat{\ddot{y}}(t) = \frac{2}{2\tau_2 + \Delta t}\left[\hat{\dot{y}}(t) - \hat{\dot{y}}(t-\Delta t)\right] - \frac{2\tau_2 - \Delta t}{2\tau_2 + \Delta t}\hat{\ddot{y}}\left(t - \Delta t\right)$$

– билинейная дискретизация фильтров первого порядка.

ФНЧ-сглаживания оценки:

$$\hat{d}(t) = (1-\beta_F)\hat{d}(t-\Delta t) + \beta_F\left[\hat{\ddot{y}} - u(t-\Delta t)/I\right],\ \beta_F = \frac{\Delta t}{\tau_F + \Delta t},$$

что обеспечивает ограниченную погрешность $||d - \hat{d}||_\infty \le \delta$. Для решения задачи достаточно, чтобы ошибка была согласованной.

Выполним моделирование системы:

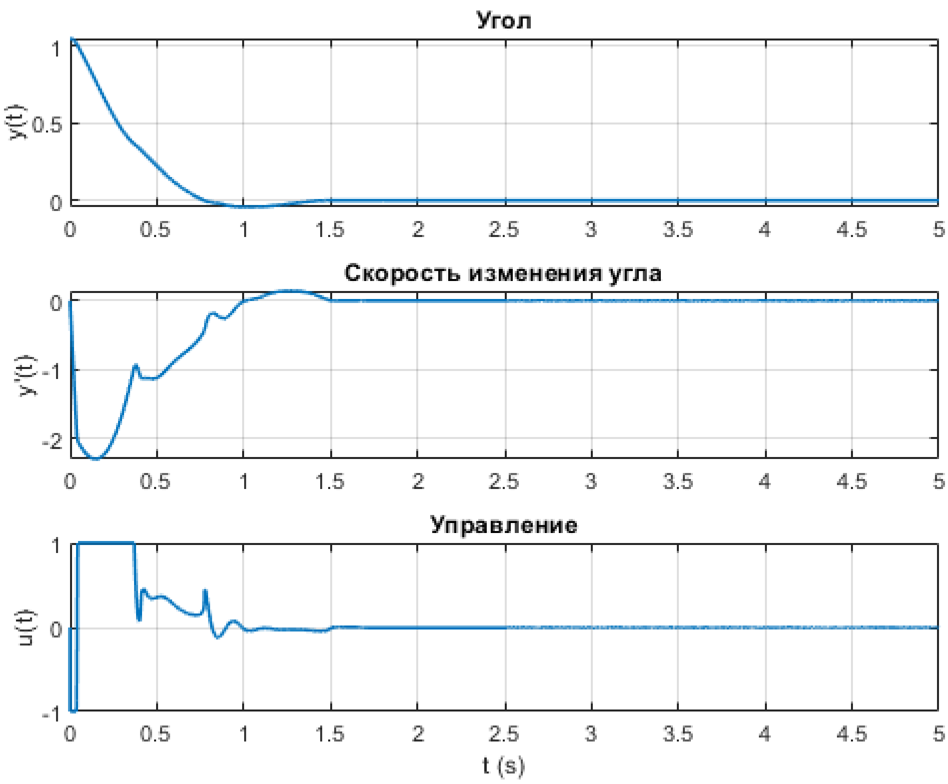

Рис. 1: Графики $y(t), \dot{y}(t), u(t)$

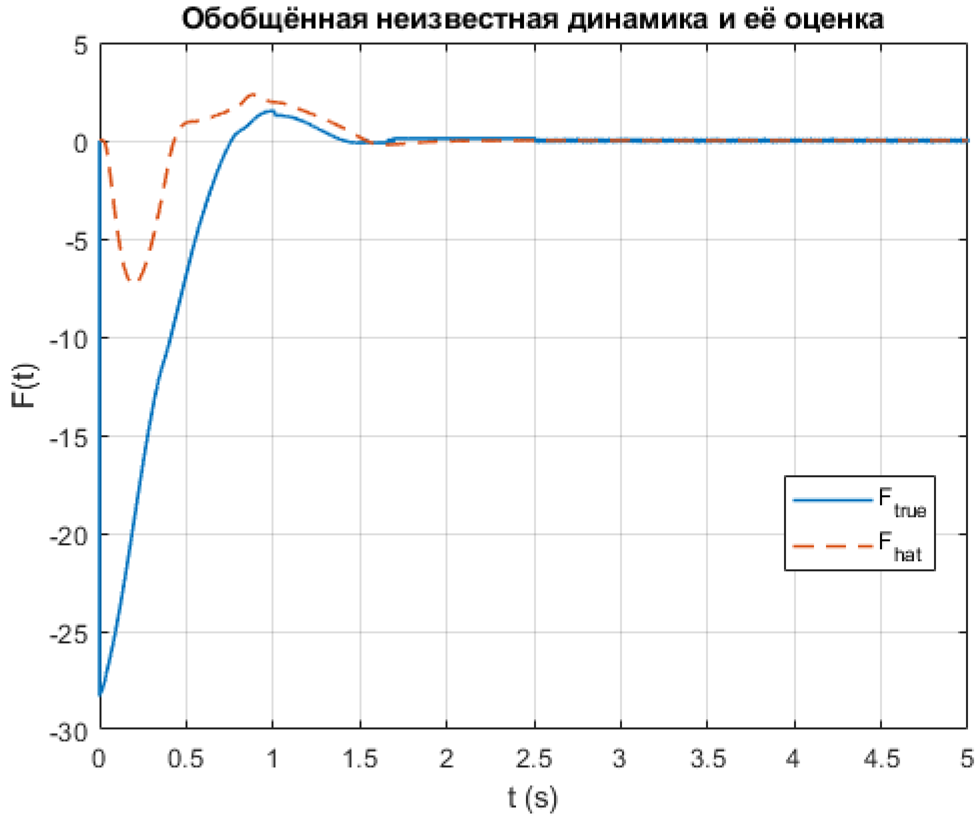

Рис. 2: Графики $d(t), \hat{d}(t)$

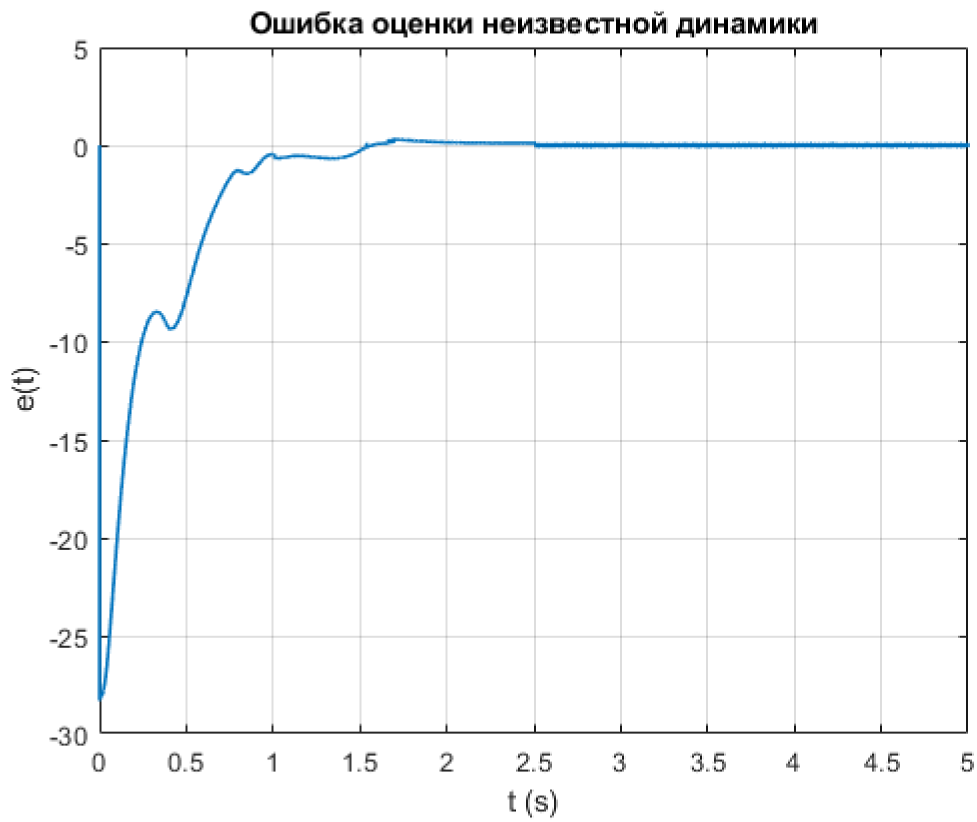

Рис. 3: График $e = d(t) - \hat{d}(t)$

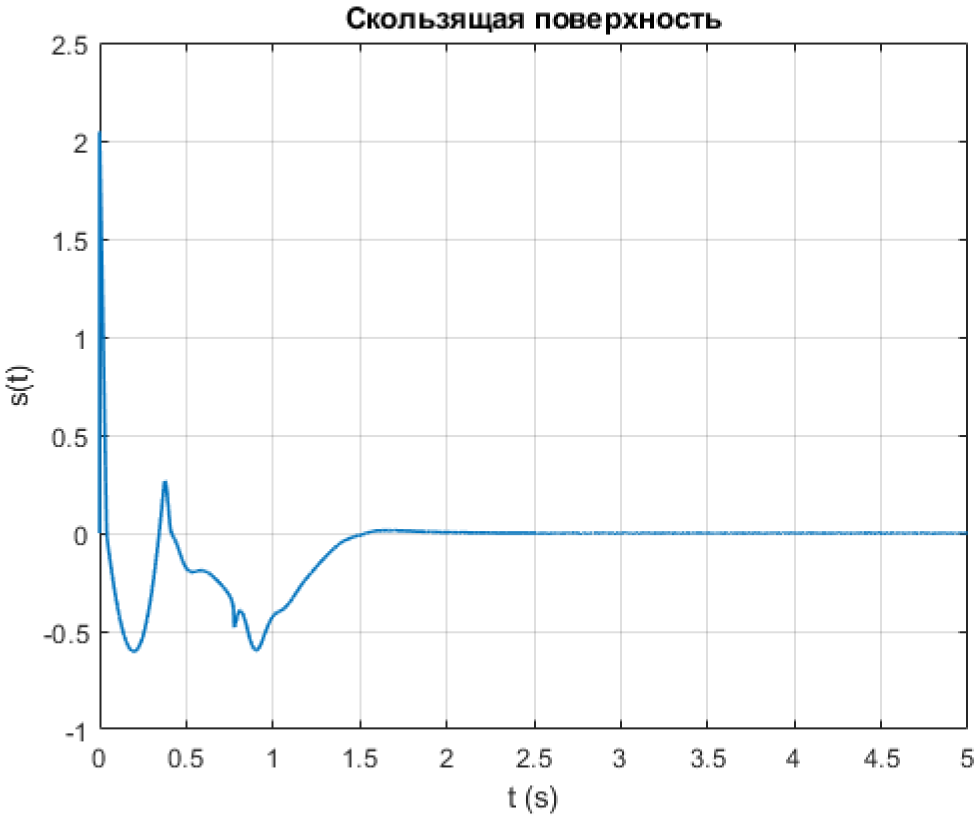

Рис. 4: График $s(t)$

Система достигла установившегося состояния за $t = 1.5$ секунды.

Покажем разницу асимптотической и финитной динамик при $e(t) \equiv s(t)$.

Асимптотическая динамика:

$$\dot{s} = -ks, \ k > 0$$

Решение:

$$s(t) = s(0)e^{-kt}$$

Скользящая переменная убывает экспоненциально, но $s(t) = 0$ только при $t \to \infty$.

Финитная динамика:

$$\dot{s} = -k|s|^{\rho} \operatorname{sign}(s), \ 0 < \rho < 1$$

Решение:

$$s(t) = 0 \text{ при } t = \frac{|s(0)|^{1-\rho}}{k(1-\rho)} < \infty$$

Скользящая переменная становится нулевой за конечное время t.

2. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была выбрана нелинейная управляемая система с одним входом и одним выходом и представлена в виде цепи интеграторов с согласованной обобщенной неизвестной динамикой. Далее был синтезирован финитный однородный регулятор с дополнительной компенсацией обобщенной неизвестной динамики. Результаты моделирования подтверждают корректность расчетов.