МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему

«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И РЕГУЛЯТОРЫ»

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Задание 1

1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

1.2. Выполнение

1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \; V\left(x_1, x_2\right) > 0 \, \forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0), \; V(0,0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \left(-x_1 + x_1 x_2\right) + x_2 \left(-2x_2\right) = -x_1^2 + x_1^2 x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2 \left(1 - x_2\right) - 2x_2^2$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Тогда:

$$\forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0), x_2 \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда $\forall \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$.

1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{cases} \tag{2}$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2\right), \; V \left(x_1, x_2\right) > 0 \, \forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0), \; V (0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \left(-x_2 - x_1 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right) + x_2 \left(x_1 - x_2 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

Сделаем замену $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\dot{V} = r^2 \left(r^2 - 1\right)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0, \\ & r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0, \\ & r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \vee (1, \infty) : \dot{V} > 0 \end{aligned}$$

Внутри единичной окружности $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ начало координат локально асимптотически устойчиво.

Локальная асимптотическая устойчивость исключает глобальную.

1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \left(1 - x_1^2\right) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -\left(x_1 + x_2\right)\left(1 - x_1^2\right) \end{cases} \tag{3}$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \; V\left(x_1, x_2\right) > 0 \, \forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0), \; V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \left(x_2 \left(1 - x_1^2\right) - 2x_1\right) + x_2 \left(-\left(x_1 + x_2\right)\left(1 - x_1^2\right)\right),$$

$$\dot{V} = x_1 x_2 \left(1 - x_1^2\right) - 2x_1^2 - x_1 x_2 \left(1 - x_1^2\right) - x_2^2 \left(1 - x_1^2\right) = -2x_1^2 - x_2^2 \left(1 - x_1^2\right)$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \leq 1$$

Тогда:

$$\forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0), |x_1| \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \tag{4}$$