

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И
РЕГУЛЯТОРЫ»**

Выполнил: студент гр. Р3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1	3
1.1 Условие	3
1.2 Выполнение	3
1.2.1 Первая система	3
1.2.2 Вторая система	4
1.2.3 Третья система	5
1.2.4 Четвертая система	5
1.2.5 Пятая система	7
2 Задание 2	7
2.1 Условие	7
2.2 Выполнение	8
3 Задание 3	10
3.1 Условие	10
3.2 Выполнение	10
4 Задание 4	11
4.1 Условие	11
4.2 Выполнение	11
5 Задание 5	13
5.1 Условие	13
5.2 Выполнение	13
6 Задание 6	14
6.1 Условие	14
6.2 Выполнение	14
7 Вывод	14

1. Задание 1

1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

1.2. Выполнение

1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_1 + x_1 x_2) + x_2 (-2x_2) = -x_1^2 + x_1^2 x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2 (1 - x_2) - 2x_2^2$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_2 \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$.

1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (2)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)) + x_2 (x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Сделаем замену $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\dot{V} = r^2 (r^2 - 1)$$

Тогда:

$$r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0,$$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0,$$

$$r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : \dot{V} > 0$$

Внутри единичной окружности $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ начало координат локально асимптотически устойчиво.

Локальная асимптотическая устойчивость исключает глобальную.

1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2) \end{cases} \quad (3)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1) + x_2(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)),$$

$$\dot{V} = x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_1^2 - x_1x_2(1 - x_1^2) - x_2^2(1 - x_1^2) = -2x_1^2 - x_2^2(1 - x_1^2)$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), |x_1| \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (4)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-3x_1 - x_2) + x_2 (2x_1 - x_2^3) = -3x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^4$$

Найдем корни $\dot{V} = 0$:

$$-3x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

Найдем точки равновесия системы (4):

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

Точки $(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ не являются равновесиями системы, из них траектории уходят. Следовательно, $\dot{V} = 0$ в этих точках не принадлежит инвариантному множеству.

Таким образом, наибольшее инвариантное множество, содержащееся в $\dot{V} = 0$ – это начало координат.

По теореме Ласалля начало координат асимптотически устойчиво.

По неравенству Коши-Буняковского:

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -3x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^4 = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 \left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)$$

Скобка должна быть отрицательной:

$$\frac{1}{2} - x_2^2 \leq 0 \Rightarrow x_2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Таким образом, начало координат не может быть глобально асимптотически устойчиво – оно локально асимптотически устойчиво.

1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x) \quad (5)$$

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad V(x) > 0 \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-\arctan(x)) = -x\arctan(x)$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

и $\arctan(x)$ – неубывающая нечетная функция. Она имеет тот же знак, что x .

Тогда:

$$x > 0 \Rightarrow \arctan(x) > 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0 \forall x \neq 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow \arctan(x) = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow \arctan(x) < 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0 \forall x \neq 0$$

Таким образом, для всех $x \neq 0 : \dot{V} < 0$, следовательно начало координат глобально асимптотически устойчиво.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$, где p – натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?

2.2. Выполнение

Положим влияние $h(x)$ незначительным при малых x около начала координат, так как оно имеет порядок x^{p+1} и стремится к нулю быстрее, чем x^p .

Рассмотрим упрощенную систему:

$$\dot{x} = \alpha x^p$$

При нечетном p функция x^p сохраняет знак x :

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x^p > 0, \\ x < 0 &\Rightarrow x^p < 0 \end{aligned}$$

Направление поля на прямой зависит от знака α :

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &\Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} < 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = -\text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} > 0 \end{aligned}$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ или растет или убывает в противоположном от нуля направлении – начало координат неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ либо растет к нулю слева, либо убывает к нулю справа – начало координат асимптотически устойчиво.

При четном p функция x^p всегда положительна.

Направления полей:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &\Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p > 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} > 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p < 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} < 0 \end{aligned}$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю слева, но справа расходится – неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю справа, но слева расходится – неустойчиво.

Таким образом, p должно быть нечетным, а $\alpha < 0$.

Теперь учтем возмущение $h(x)$:

$$\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$$

Оно мало в окрестности нуля.

Для $x \neq 0$ перепишем:

$$\dot{x} = x^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Из условия $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ следует:

$$\left| \frac{h(x)}{x^p} \right| \leq k|x|, \quad k > 0$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такой, что:

$$k\varepsilon < \frac{|\alpha|}{2},$$

тогда для всех $|x| < \varepsilon$:

$$\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \leq \alpha + k|x| \leq \frac{\alpha}{2} < 0$$

Учтем для $|x|$:

$$\frac{d|x|}{dx} = \dot{x} \operatorname{sign}(x), \quad x^p \operatorname{sign}(x) = |x|^p, \quad p = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = (\alpha x^p + h(x)) \operatorname{sign}(x) = x^p \operatorname{sign}(x) \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Следовательно, для $|x| < \varepsilon$:

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = |x|^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right) \leq \frac{\alpha}{2} |x|^p < 0,$$

то есть $|x|$ монотонно убывает вдоль траекторий, пока решение остаётся в окрестности нуля.

Таким образом, $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ при малых x , $p = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha < 0$ – начало координат локально асимптотически устойчиво.

3. Задание 3

3.1. Условие

На основе применения LMI построить линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases} \quad (6)$$

3.2. Выполнение

Приведем систему к виду:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx$$

Матрицы A, B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A :

$$\sigma(A) = \{1.41, -1.41\}$$

Проверим управляемость:

$$A = PJP^{-1}, \quad B_J = P^{-1}B \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 0 & -1.41 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Система полностью управляема – можно задать регулятору любую степень устойчивости.

Синтезируем LMI со степенью устойчивости $\alpha = 2$ без ограничения на управление при помощи матричного неравенства типа Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}$$

Получим:

$$K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BK$:

$$\sigma(A + BK) = \{-5.4 \pm 2.8i\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива, и, убывает быстрее, чем требуемая скорость e^{-2t} (см. действительную часть собственных чисел).

4. Задание 4

4.1. Условие

Найти ограничивающее условие на параметр γ , при котором система является экспоненциально устойчивой со степенью 1. Закон управления взять из предыдущего задания.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u, \end{cases} \quad (7)$$

$$u = Kx, \quad K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

4.2. Выполнение

Подставим закон управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + Kx = 2x_1 - 39.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin(x_2), \\ \dot{x}_2 = -37.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Замкнутая система будет иметь вид:

$$\dot{x} = (A + BK)x + \gamma f(x),$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Линеаризуем систему. При малых x_2 :

$$\sin(x_2) \approx x_2$$

Тогда система примет вид:

$$\dot{x} = \left[(A + BK) + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] x = A_\gamma x,$$

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Экспоненциальная устойчивость степени 1 требует:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{A_\gamma i}) \leq -1$$

Характеристический полином:

$$\det(\lambda I - A_\gamma) = \lambda^2 + 10.81\lambda + 37.02(\gamma + 1) = 0$$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)}}{2}$$

Рассмотрим дискриминант:

$$D = 10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)$$

Если $D < 0$, то корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью $-10.81/2 < -1$:

$$10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1) < 0 \Rightarrow \gamma > \frac{10.81^2}{4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma > -0.21$$

Если $D \geq 0$, то корни действительные и должны удовлетворять условию:

$$\lambda_i = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)}}{2} \leq -1,$$

Так как $\lambda_{1+} \geq \lambda_{2-}$, то достаточно проверить λ_{1+} :

$$\sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)} \leq 8.81 \Rightarrow \gamma \geq \frac{8.81^2 - 10.81^2}{-4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma \geq -0.74$$

Таким образом, экспоненциальная устойчивость степени 1 достигается при:

$$\gamma \geq -0.74$$

При $\gamma > -0.21$ собственные числа будут комплексными.

5. Задание 5

5.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = u, \\ u = Kx \end{cases} \quad (8)$$

Весь вектор состояния $x = [x_1 \ x_2]^T$ измерим.

1. Синтезируйте линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат.
2. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии шумов измерений.
3. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

5.2. Выполнение

...

6. Задание 6

6.1. Условие

Исследуйте устойчивость по входу к состоянию системы по отношению к возмущению d :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d, \end{cases} \quad (9)$$

где σ – локально липшицева, $\sigma(0) = 0$, $y\sigma(y) \geq 0$.

6.2. Выполнение

...

7. Вывод

...