

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ПО ВХОДУ–ВЫХОДУ И  
ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО  
СОСТОЯНИЮ»**

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1	Условие . . . . .	3
1.2	Выполнение . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Задание 2</b>	<b>7</b>
2.1	Условие . . . . .	7
2.2	Выполнение . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Вывод</b>	<b>11</b>

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Для данной системы определить:

- Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу?
- Если да, преобразуйте её в нормальную форму и укажите область определения соответствующего преобразования
- Является ли эта система минимально-фазовой?

### 1.2. Выполнение

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + u, \\ y = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Точки равновесия при  $\dot{x} = 0, u = 0$ :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 x_3 - x_2 = 0, \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0)$$

Нелинейная система:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Производная от выхода  $y = h(x)$ :

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u$$

Производная Ли функции  $h$  вдоль поля  $f$ :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = -x_1$$

Вдоль поля  $g$ :

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Производная выхода:

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = -x_1 + u$$

Первая производная выхода зависит от  $u$ , следовательно относительная степень нелинейной системы  $\rho = 1$ .

Так как  $L_g L_f^{\rho-1} h(x) = L_g h(x) = 1 \neq 0$ ,  $\rho < 2$  и  $\rho = 1 < n = 3$ , то система линеаризуема по входу-выходу (вход появляется именно в  $\rho$ -й производной; так как производная потребовалась всего одна, то условие на непоявление входа раньше  $\rho$ -й производной  $L_g L_f^k h(x) = 0$ ,  $k \in [0, \rho - 2]$  проверять не нужно;  $\rho \leq n$  – относительная степень не больше порядка системы).

Замена переменных:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \xi \end{bmatrix}$$

Условие:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n - \rho$$

Исходя из  $g(x)$ :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_3} = 0$$

Пусть:

$$\begin{cases} \phi_1 = x_1, \\ \phi_2 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Проверим обратимость преобразования  $z = T(x)$ :

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow J_T(x) = \frac{\partial (\eta_1, \eta_2, \xi)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det J_T(x) = 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Преобразование  $T(x)$  является гладко обратимым в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. глобальным диффеоморфизмом.

Область определения соответствующего преобразования:

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det J_T(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^3$$

Преобразование координат  $x = T^{-1}(z)$ :

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1, \\ x_2 = \eta_2 + \xi, \\ x_3 = \xi \end{cases}$$

Вычислим производные:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 = -\eta_1 + \eta_2 + \xi - \xi = -\eta_1 + \eta_2,$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_3 = -x_1 x_3 - x_2 + u + x_1 - u = -x_1 x_3 - x_2 + x_1 = -\eta_1 \xi - \eta_2 - \xi + \eta_1,$$

$$\dot{\xi} = \dot{x}_3 = -x_1 + u = -\eta_1 + u$$

Система в нормальной (канонической) форме:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 \xi - \eta_2 - \xi + \eta_1, \\ \dot{\xi} = -\eta_1 + u, \\ y = \xi \end{cases}$$

Проверка равновесия в нормальной форме:

$$(\eta_1, \eta_2, \xi) = (0, 0, 0), u = 0 \Rightarrow \dot{\eta} = 0, \dot{\xi} = 0$$

Нулевая динамика:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi = 0)$$

Подставим  $\xi = 0$  в  $\dot{\eta}$ :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_2 + \eta_1 \end{cases} \Rightarrow \dot{\eta} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \eta$$

Собственные числа:

$$\det \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \sigma = \{0, -2\}$$

Система неасимптотически устойчива.

Система называется минимально-фазовой, если начало координат для уравнения нуль-динамики асимптотически устойчиво при  $T(x)$  таком, что начало координат  $(\eta = 0, \xi = 0)$  является точкой равновесия.

Следовательно, система не минимально-фазовая.

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

На основе метода линеаризации обратной связью найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат для данной системы.

### 2.2. Выполнение

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1x_2 - 2x_3 \end{cases} \quad (2)$$

Нелинейная система:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1 + x_1x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Управление влияет только на  $\dot{x}_2$ .

Линеаризация обратной связью:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Компенсируем нелинейность  $-x_1x_3$  в  $\dot{x}_2$  с помощью  $u$ :

$$\alpha(x) = x_1x_3 \Rightarrow u = x_1x_3 + \beta(x)v$$

Тогда  $\dot{x}_2$ :

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1x_3 + x_1x_3 + \beta(x)v = x_1 - x_2 + \beta(x)v$$

Выберем линейный закон такой, чтобы  $(x_1, x_2) \rightarrow 0$ :

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad \beta(x) = 1 \Rightarrow u = x_1x_3 - k_1x_1 - k_2x_2$$

Нелинейность  $x_1x_2$  в  $\dot{x}_3$  косвенно компенсируется, т.к.  $(x_1, x_2) \rightarrow 0 \Rightarrow x_1x_2 \rightarrow 0$ .

Подставим  $\beta(x)v$  в  $\dot{x}_2$ :

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - k_1x_1 - k_2x_2 = -(k_1 - 1)x_1 - (k_2 + 1)x_2$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -(k_1 - 1)x_1 - (k_2 + 1)x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Рассмотрим линейную подсистему по состояниям  $(x_1, x_2)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -(k_1 - 1)x_1 - (k_2 + 1)x_2 \end{cases}$$

Найдем матрицу  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -(k_1 - 1) & -(k_2 + 1) \end{bmatrix}$$

Чтобы матрица  $A$  была Гурвицевой, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \text{trace } A < 0, \\ \det A > 0, \\ \Re \lambda_i < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k_2 - 2 < 0, \\ k_1 + k_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 > -2, \\ k_1 > -k_2 \end{cases}$$

Тогда линейная подсистема будет экспоненциально устойчива:

$$\| (x_1(t), x_2(t)) \| \leq Ce^{-\alpha t} \| (x_1(0), x_2(0)) \|, \quad C > 0, \quad \alpha > 0$$

Рассмотрим  $\dot{x}_3$ :

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + x_1(x_2 + 1) = -2x_3 + f(t)$$



Рассмотрим возмущение  $f(t)$ :

$$f(t) = x_1(t) (x_2(t) + 1)$$

Ее убывание:

$$|x_1(t)| \leq C_1 e^{-\alpha t}, \quad |x_2(t)| \leq C_2 e^{-\alpha t},$$

$$|f(t)| = |x_1(t) (x_2(t) + 1)| \leq C_1 e^{-\alpha t} (C_2 e^{-\alpha t} + 1) \leq (C_1 + C_1 C_2) e^{-\alpha t} = C e^{-\alpha t}$$

То есть:

$$|f(t)| \leq C e^{-\alpha t}$$

Решение линейного уравнения с известным источником  $f(t)$  в общем виде:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + f(t), \quad x_h(t) = e^{\alpha t} x(0),$$

$$x(t) = e^{\alpha t} C(t), \quad \dot{C}(t) = e^{-\alpha t} f(t) \Rightarrow C(t) = \int_0^t e^{-\alpha s} f(s) ds + C_0,$$

$$x(t) = e^{\alpha t} C_0 + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} f(s) ds = e^{\alpha t} x(0) + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} f(s) ds,$$

Решим  $\dot{x}_3 = -2x_3 + f(t)$ :

$$x_3(t) = e^{-2t} x(0) + \int_0^t e^{-2(t-s)} f(s) ds$$

Первый член стремится к нулю экспоненциально.

Оценим интеграл при  $|f(s)| \leq C e^{-\alpha s}$ :

$$\left| \int_0^t e^{-2(t-s)} f(s) ds \right| \leq \int_0^t e^{-2(t-s)} C e^{-\alpha s} ds = C e^{-2t} \int_0^t e^{(2-\alpha)s} ds,$$

$$\int_0^t e^{(2-\alpha)s} ds = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha} (e^{(2-\alpha)t} - 1), & \alpha \neq 2, \\ t, & \alpha = 2 \end{cases}$$

В случае  $\alpha \neq 2$  для больших  $t$  главное слагаемое:  $e^{(2-\alpha)t}$ .

Тогда интеграл можно оценить:

$$e^{-2t} \int_0^t e^{(2-\alpha)s} ds \sim e^{-2t} \cdot e^{(2-\alpha)t} = e^{-\alpha t}$$

Следовательно, интеграл убывает экспоненциально с тем же показателем  $\alpha$ , что и  $f(t)$ .

Таким образом,  $x_3(t)$  и  $\dot{x}_3(t)$  убывают экспоненциально.

Подобранный закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию начала координат данной системы.

Промоделируем систему при

$$k_2 = -1, k_1 = 4,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ -70 \\ 45 \end{bmatrix}$$

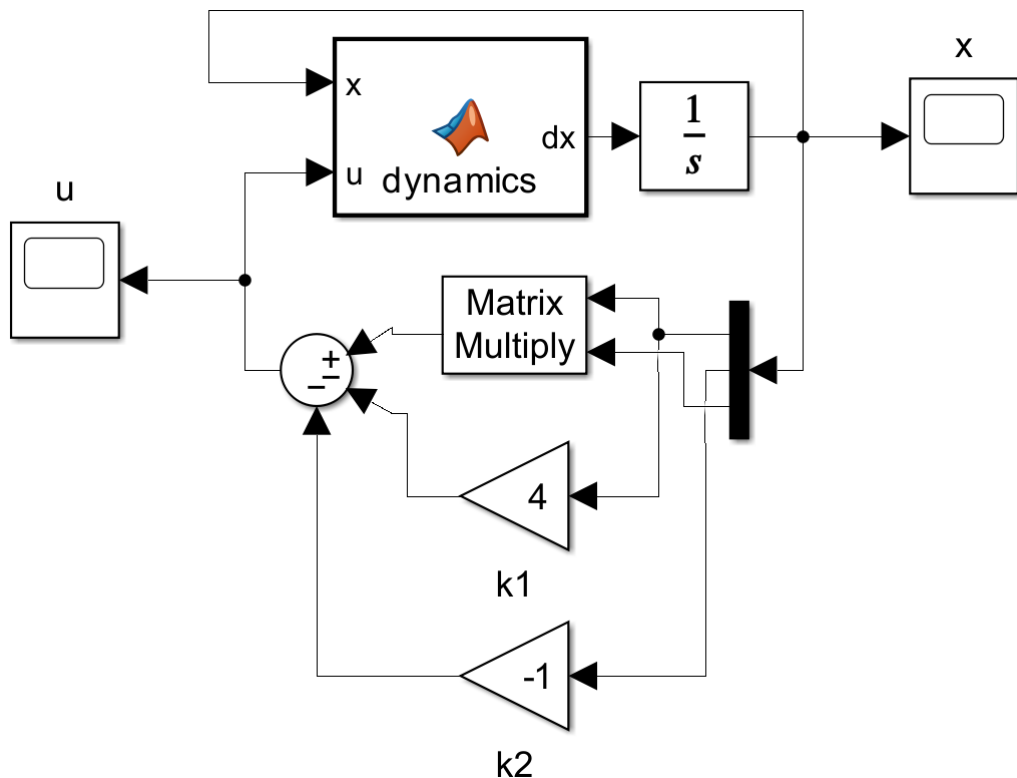


Рис. 1: Схема моделирования системы

## Графики вектора состояния системы и управления:

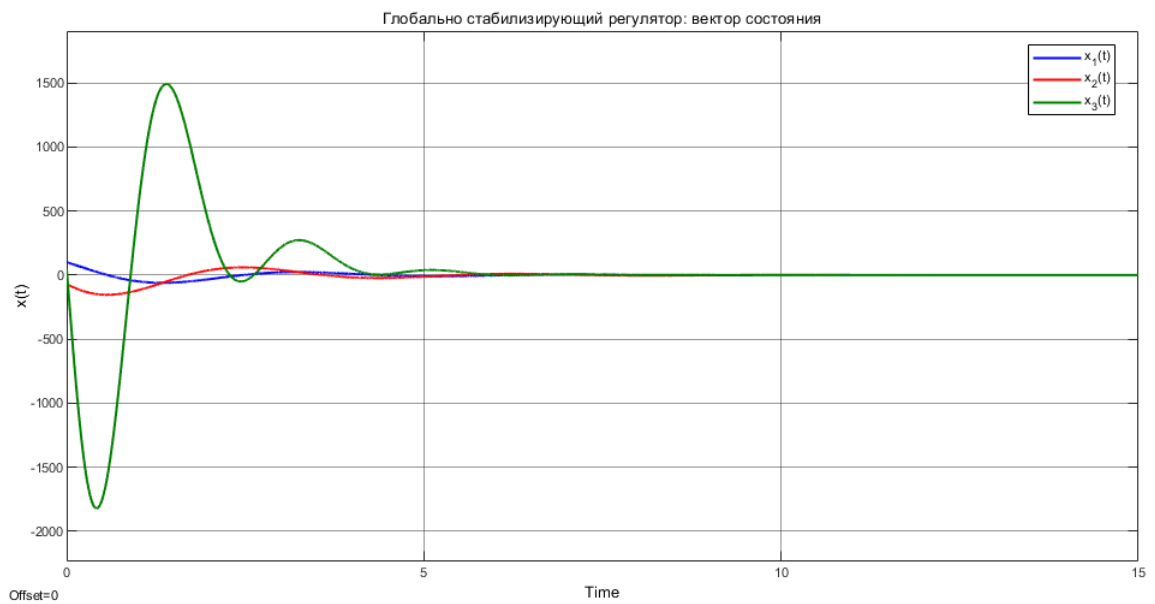


Рис. 2: Вектор состояния объекта управления

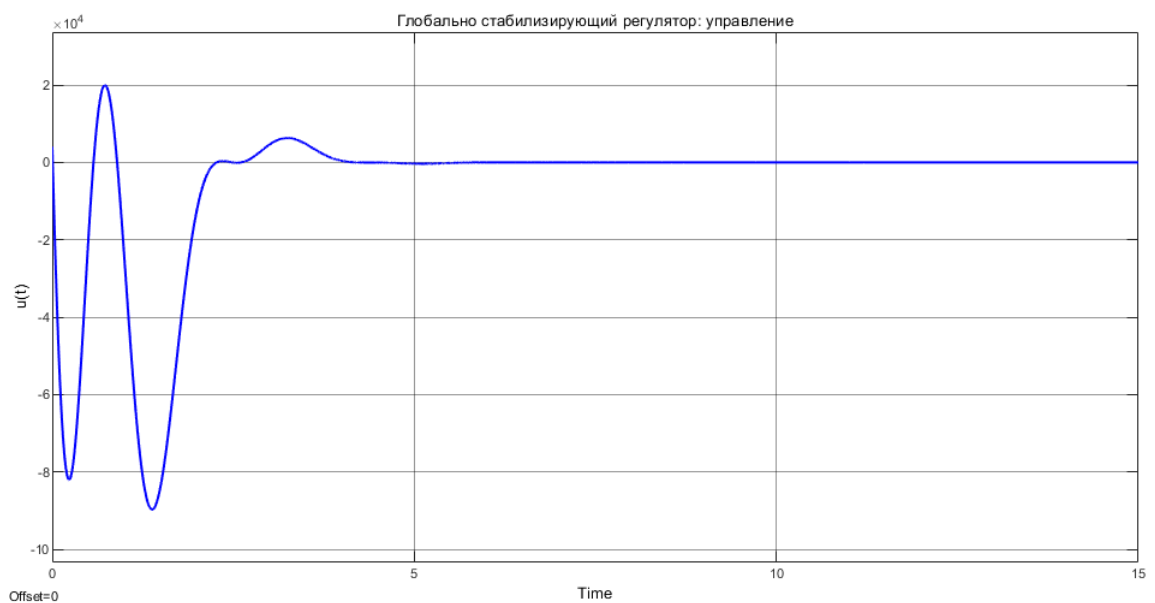


Рис. 3: Управление  $u = x_1x_3 - k_1x_1 - k_2x_2$

## 3. Вывод

В ходе выполнения работы было выяснено, что первая нелинейная система является линеаризуемой по входу-выходу. Она была преобразована к канонической форме, область определения определена как  $\mathbb{R}^3$ . Система не является минимально фазовой.

Для второй нелинейной системы удалось найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат. Использовался метод линеаризации обратной связью.