

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«АНАЛИЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

Выполнил: студент гр. Р3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1	3
1.1 Условие	3
1.2 Выполнение	3
1.2.1 Первая система	3
1.2.2 Вторая система	5
1.2.3 Третья система	7
1.2.4 Четвертая система	8
1.2.5 Пятая система	13
1.2.6 Шестая система	14
1.2.7 Седьмая система	16
2 Задание 2	16
2.1 Условие	16
2.2 Выполнение	17
2.2.1 Первая система	17
2.2.2 Вторая система	17
3 Вывод	17

1. Задание 1

1.1. Условие

Для каждой из данных систем найти все точки равновесия. На основе метода линеаризации в точке определить тип каждого изолированного состояния равновесия. С использованием перехода к полярным координатам определить устойчивость предельного цикла для системы 4.

Численно построить фазовый портрет каждой системы и сравнить с полученными результатами (кроме системы 7).

1.2. Выполнение

1.2.1. Первая система

Найдем точки равновесия системы (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Приравняем выражения к нулю и найдем корни системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2(1 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0; 0), \\ (1; -1), \\ (-1; 1) \end{cases}$$

Определим тип каждого изолированного состояния равновесия.

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы A_i и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\},$$

$$A_2 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{4.83, -0.83\},$$

$$A_3 = J|_{(-1;1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \lambda_{A_3 1,2} = \lambda_{A_2 1,2}$$

Таким образом,

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1 \pm i\}$ – устойчивый фокус,

$(1; -1), (-1; 1) : \lambda_{A_{2,3} 1,2} = \{4.83, -0.83\}$ – седло (неуст.)

Седловые точки находятся рядом с устойчивым фокусом, из-за чего некоторые фазовые траектории будут уходить на бесконечность вдоль седловых направлений.

Таким образом, любой контур вокруг фокуса не может полностью замкнуться, а значит предельного цикла не существует.

Численно построим фазовый портрет системы.

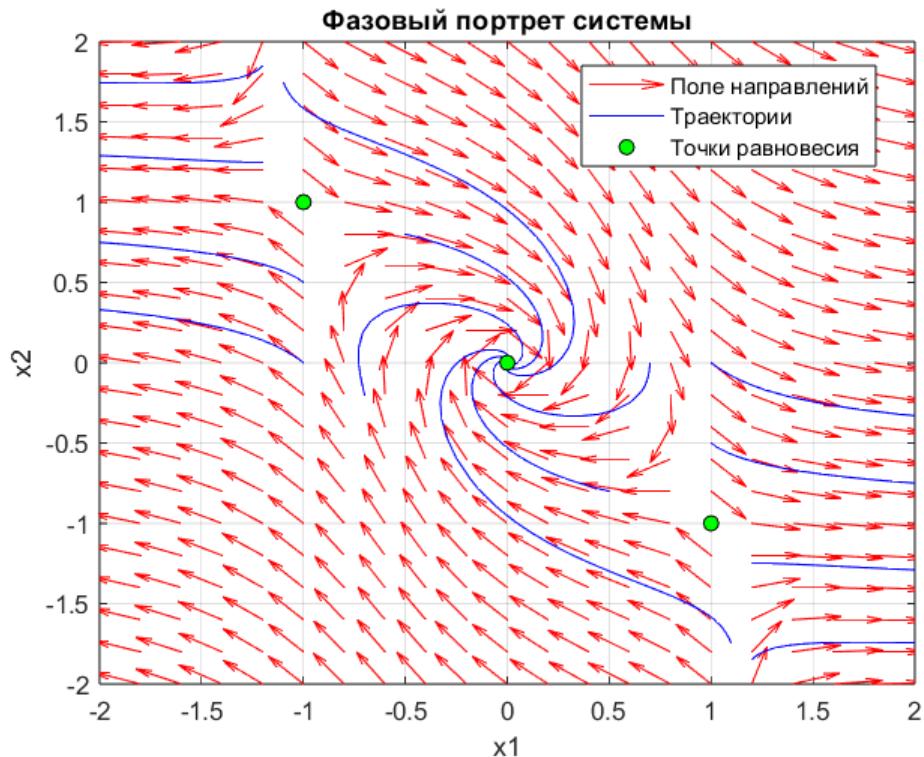


Рис. 1: Фазовый портрет системы (1)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились устойчивый фокус и два седла.

1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему (2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \end{cases} \quad (2)$$

Проведем аналогичные действия

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2 = 0, \\ -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (x_2 + 1) = 0, \\ -x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

Получим две системы

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 (x_2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Подставив $x_1 = 1$ во вторую систему, получим равенство нулю. После деления полинома $x_1^3 + x_1 - 2$ на $x_1 - 1$ получим

$$\begin{cases} x_2 = -1, \\ (x_1 - 1) (x_1^2 + x_1 + 2) = 0 \end{cases}$$

Второе выражение даст комплексные корни. Для анализа системы и построения фазовых портретов берем только вещественные, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, имеем точки равновесия системы

$$\begin{bmatrix} (0; 0), \\ (0; 1), \\ (1; -1) \end{bmatrix}$$

Составим матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 + 1 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & x_1 + 2x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицы A_i и их собственные числа

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\},$$

$$A_2 = J|_{(0;1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\},$$

$$A_3 = J|_{(1;-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.73i\}$$

Таким образом,

$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\}$ – седло,

$(0; 1) : \lambda_{A_2 1,2} = \{1, 2\}$ – неустойчивый узел,

$(1; -1) : \lambda_{A_3 1,2} = \{-1 \pm 1.73i\}$ – устойчивый фокус

Численно построим фазовый портрет системы.

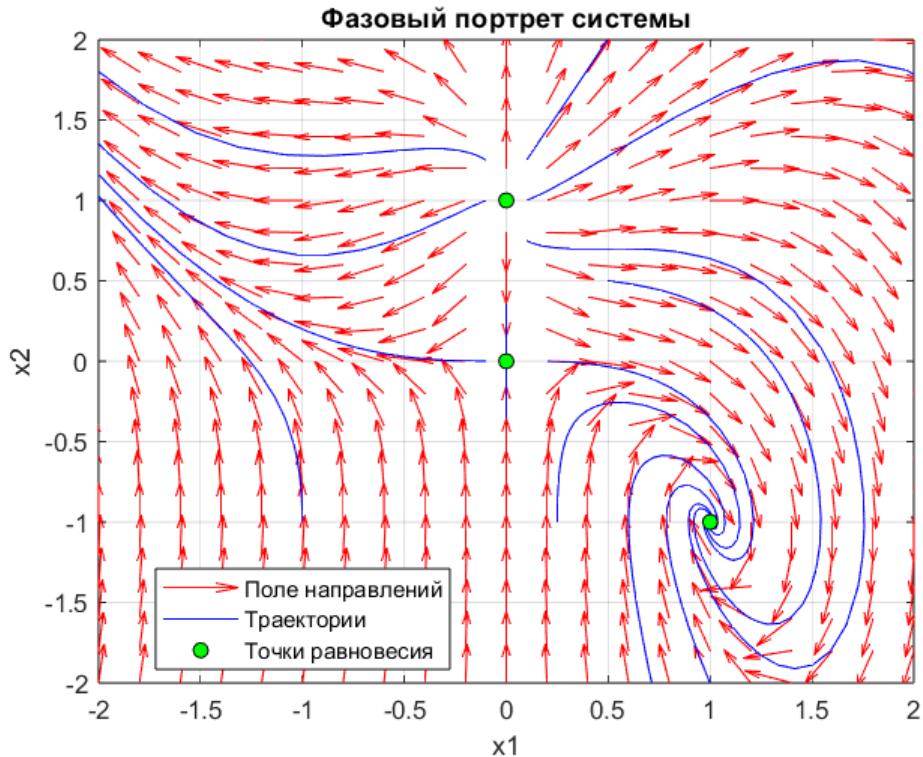


Рис. 2: Фазовый портрет системы (2)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике получились седло, неустойчивый узел и устойчивый фокус.

1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 (1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \end{cases} \quad (3)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + x_2 (-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{bmatrix}$$

Матрица A и ее собственные числа:

$$A = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \{0.5 \pm 0.87i\}$$

Вывод: неустойчивый фокус. Действительная часть мнимой пары больше нуля.

Фазовый портрет:

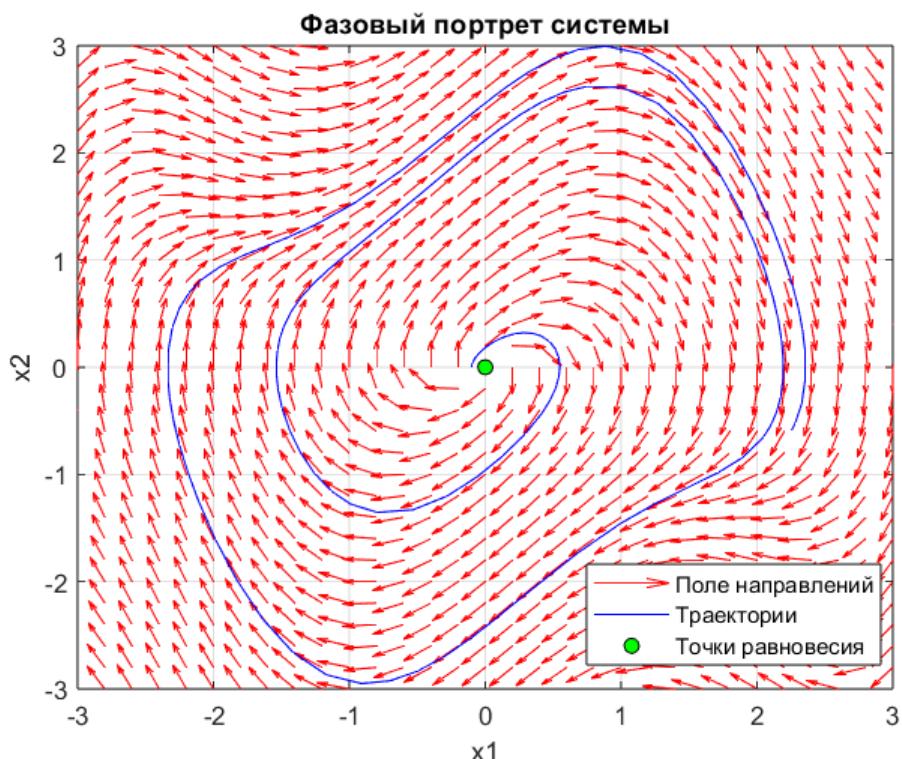


Рис. 3: Фазовый портрет системы (3)

Точка равновесия совпадает с найденной ранее. На портрете неустойчивый фокус.

1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (4)$$

Сделаем замену $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - r^2), \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - r^2) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(1 - r^2) = 0, \\ (x_1 + x_2)(1 - r^2) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай $1 - r^2 \neq 0$:

$$\begin{cases} 1 - r^2 \neq 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow (0; 0)$$

Рассмотрим случай $1 - r^2 = 0$:

$$\begin{cases} 1 - r^2 = 0, \\ x_1 - x_2 \neq 0, \\ x_1 + x_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \ (\sum x_i^2 \neq -1), \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

В случае $1 - r^2 = 0$ единичная окружность является множеством равновесий.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -2x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + 1 & 2x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 - 1 \\ -2x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 & -2x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Матрица A и ее собственные числа:

$$A = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \{1 \pm i\}$$

Таким образом, в точке равновесия $(0; 0)$ неустойчивый фокус. Действительная часть комплексной пары больше нуля.

Для поиска предельного цикла перейдем к полярным координатам:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

Приведем систему (4) к виду:

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Эта формула получается при взятии производной от выражения r с корнем.

Домножим оба выражения на недостающие x_i :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - r^2) | \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - r^2) | \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \dot{x}_1 = x_1(x_1 - x_2)(1 - r^2), \\ x_2 \dot{x}_2 = x_2(x_1 + x_2)(1 - r^2) \end{cases}$$

Сложим два выражения, вынесем общий множитель и упростим:

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = (x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2))(1 - r^2),$$

$$(x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2))(1 - r^2) = (x_1^2 + x_2^2)(1 - r^2) = r^2(1 - r^2)$$

Разделим на r и получим:

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = r(1 - r^2)$$

Аналогично выведем производную полярного угла:

$$\dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2}$$

Эта формула получается при взятии производной от выражения θ с арктангенсом.

Приведем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - r^2) | \cdot (-x_2), \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - r^2) | \cdot x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 \dot{x}_1 = -x_2(x_1 - x_2)(1 - r^2), \\ x_1 \dot{x}_2 = x_1(x_1 + x_2)(1 - r^2) \end{cases}$$

$$x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = (x_1(x_1 + x_2) - x_2(x_1 - x_2)) (1 - r^2) = r^2 (1 - r^2)$$

Разделим на r^2 и получим:

$$\dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = 1 - r^2$$

Найдем стационарные радиусы через радиальное уравнение:

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad r(1 - r^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = 1 \end{cases}$$

Получили равновесие в начале координат $r = 0$ и окружность (предельный цикл) $r = 1$.

Исследуем устойчивость предельного цикла.

Введем малое отклонение:

$$s = r - R \Rightarrow r = s + R,$$

где $R = 1$ – фиксированное значение радиуса равновесия.

Введем обозначение:

$$g(r) := \dot{r} = r(1 - r^2)$$

Рассмотрим производную малого отклонения по времени:

$$\dot{s} = \frac{d}{dt}(r - R) = \dot{r} - \dot{R} = \dot{r} \Rightarrow \dot{s} = g(s + R)$$

Разложим $g(R + s)$ в ряд Тейлора:

$$g(s + R) = g(R) + \dot{g}(R)s + \frac{1}{2}\ddot{g}(R)s^2 + \dots \approx g(R) + \dot{g}(R)s + O(s^2)$$

Рассматриваем в первом приближении полагая, что отклонение s мало, т.е. $s^n \rightarrow 0$.

Найдем $\dot{s} = g(s + R)$:

$$g(R) = 1(1 - 1^2) = 0, \quad \dot{g}(R) = 1 - 3r^2|_{R=1} = -2 \Rightarrow \dot{s} = g(s + R) \approx -2s$$

Решая дифференциальное уравнение $\dot{s}(t) \approx -2s(t)$, получим:

$$s(t) = Ce^{-2t}, C = s(0)$$

Рассмотрим предел малого отклонения при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Ce^{-2t} = C \cdot 0 = 0$$

Таким образом:

$$s = (r - R) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} R = 1$$

Все траектории стремятся к окружности радиуса $r = 1$, следовательно предельный цикл радиально устойчивый (притягивающий).

Фазовый портрет:

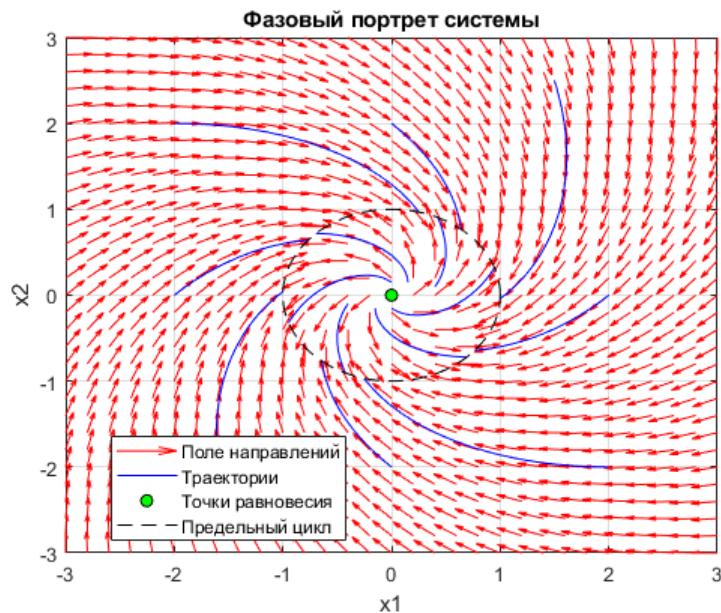


Рис. 4: Фазовый портрет системы (4)

Точка равновесия совпадает с найденной ранее. На портрете есть предельный цикл – окружность радиуса 1. Траектории притягиваются к нему и остаются на нем.

1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (5)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2^3, \\ x_2(1 - x_2^8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; 1), \\ (-1; -1) \end{bmatrix}$$

Выражение $x_2^8 = 1$ дает 8 корней – 3 комплексные пары и 2 действительных числа. Для анализа системы рассматриваем действительные точки равновесия, т.к. они обладают физическим смыслом.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Матрицы A_i и их собственные числа:

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\},$$

$$A_2 = J|_{(1;1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{A_2 1,2} = \{-4, -2\},$$

$$A_3 = J|_{(-1;-1)} = A_2, \quad \lambda_{A_3 1,2} = \lambda_{A_2 1,2}$$

Таким образом:

$$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{-1, 1\} \text{ – седло,}$$

$$(1; 1), (-1, -1) : \lambda_{A_2,3 1,2} = \{-4, -2\} \text{ – устойчивые узлы}$$

Фазовый портрет:

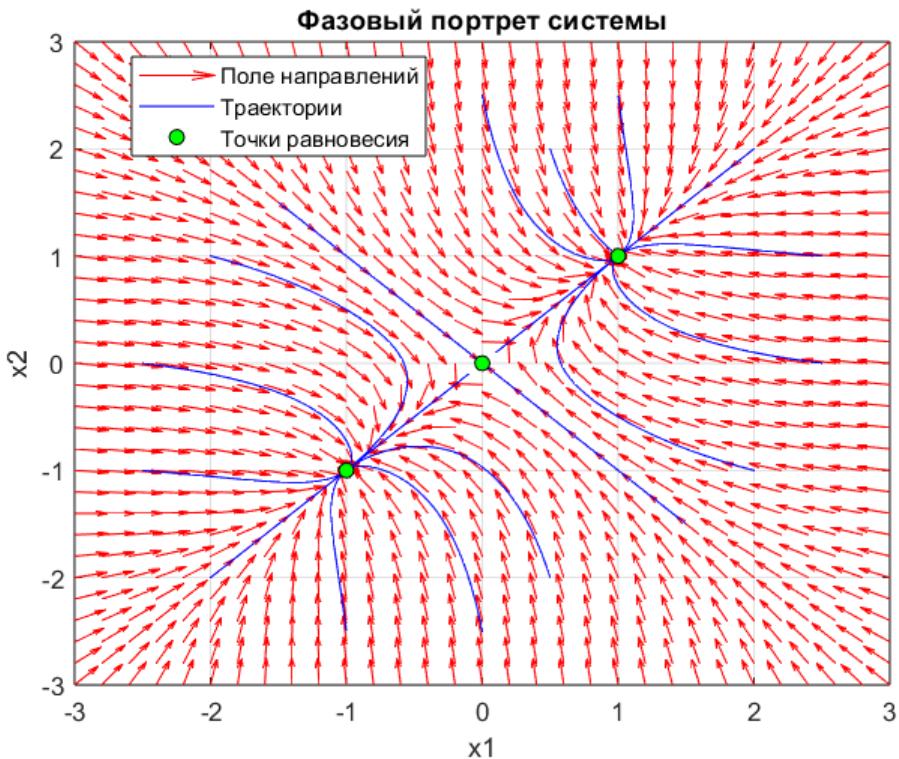


Рис. 5: Фазовый портрет системы (5)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее. На графике два устойчивых узла и седло.

1.2.6. Шестая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (6)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0, \\ x_2^3 x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_1^3 (x_1 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (1; 1) \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) \end{bmatrix}$$

Матрицы A_i и их собственные числа:

$$A_1 = J|_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0\},$$

$$A_2 = J|_{(1;1)} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{A_2 1,2} = \{-3.79, 0.79\}$$

Таким образом:

$$(0; 0) : \lambda_{A_1 1,2} = \{0, 0\} - ??,$$

$$(1; 1) : \lambda_{A_2 1,2} = \{-3.79, 0.79\} - \text{седло}$$

Фазовый портрет:

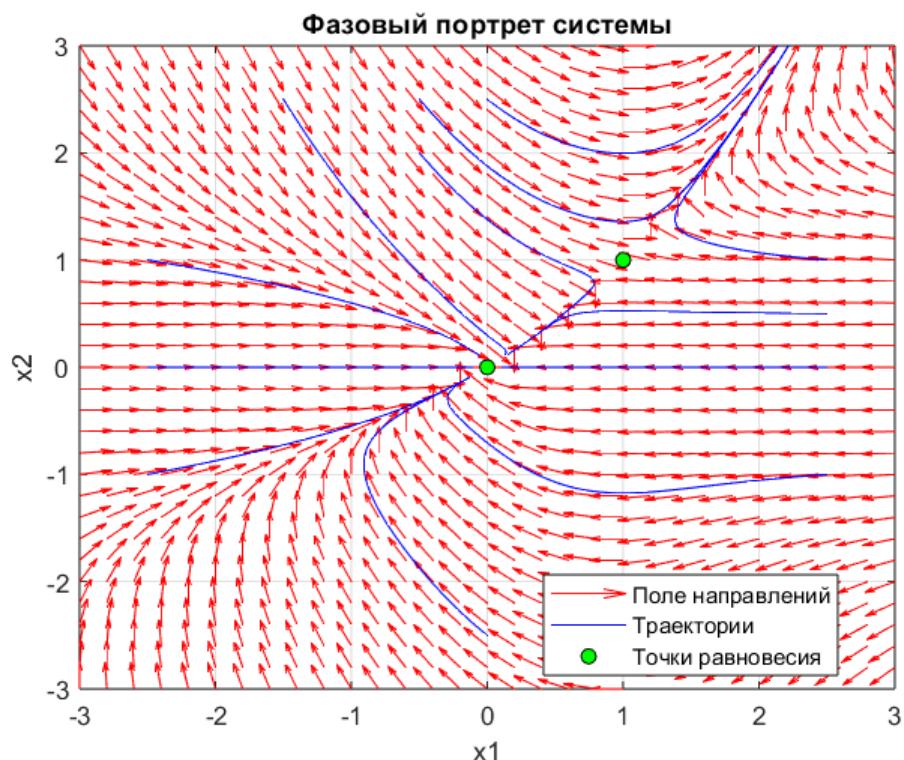


Рис. 6: Фазовый портрет системы (6)

Точки равновесия совпадают с найденными ранее.

1.2.7. Седьмая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \end{cases} \quad (7)$$

Точки равновесия:

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2^3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0, \\ x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 3^{-1}x_1(x_1^2 - 1), \\ x_1^4 - 3x_1^3 - x_1^2 - 3\sin(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0; 0; 0)$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos(x_1) & -3x_2^2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Матрица A и ее собственные числа:

$$A = J|_{(0;0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = \{0, 0, 0\}$$

2. Задание 2

2.1. Условие

Для каждой из данных систем найти все изолированные точки равновесия и построить локально стабилизирующий регулятор.

Представить результаты численного моделирования.

2.2. Выполнение

2.2.1. Первая система

...

2.2.2. Вторая система

...

3. Вывод

...