

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ**

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2  
по дисциплине  
**«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И  
РЕГУЛЯТОРЫ»**

Выполнил: студент гр. Р3441  
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель  
Зименко К. А.

Санкт-Петербург  
2025

## **Содержание**

<b>1 Задание 1</b>	<b>3</b>
1.1 Условие . . . . .	3
1.2 Выполнение . . . . .	3
1.2.1 Первая система . . . . .	3
1.2.2 Вторая система . . . . .	4
1.2.3 Третья система . . . . .	5
1.2.4 Четвертая система . . . . .	5
1.2.5 Пятая система . . . . .	7
<b>2 Задание 2</b>	<b>7</b>
2.1 Условие . . . . .	7
2.2 Выполнение . . . . .	8

## 1. Задание 1

### 1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

### 1.2. Выполнение

#### 1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_1 + x_1 x_2) + x_2 (-2x_2) = -x_1^2 + x_1^2 x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2 (1 - x_2) - 2x_2^2$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_2 \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$ .

### 1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (2)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)) + x_2 (x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Сделаем замену  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\dot{V} = r^2 (r^2 - 1)$$

Тогда:

$$r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0,$$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0,$$

$$r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : \dot{V} > 0$$

Внутри единичной окружности  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$  начало координат локально асимптотически устойчиво.

Локальная асимптотическая устойчивость исключает глобальную.

### 1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2) \end{cases} \quad (3)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1) + x_2(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)),$$

$$\dot{V} = x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_1^2 - x_1x_2(1 - x_1^2) - x_2^2(1 - x_1^2) = -2x_1^2 - x_2^2(1 - x_1^2)$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), |x_1| \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

### 1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (4)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-3x_1 - x_2) + x_2 (2x_1 - x_2^3) = -3x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^4$$

Найдем корни  $\dot{V} = 0$ :

$$-3x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

Найдем точки равновесия системы (4):

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

Точки  $(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$  не являются равновесиями системы, из них траектории уходят. Следовательно,  $\dot{V} = 0$  в этих точках не принадлежит инвариантному множеству.

Таким образом, наибольшее инвариантное множество, содержащееся в  $\dot{V} = 0$  – это начало координат.

По теореме Ласалля начало координат асимптотически устойчиво.

По неравенству Коши-Буняковского:

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -3x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^4 = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 \left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)$$

Скобка должна быть отрицательной:

$$\frac{1}{2} - x_2^2 \leq 0 \Rightarrow x_2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Таким образом, начало координат не может быть глобально асимптотически устойчиво – оно локально асимптотически устойчиво.

### 1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x) \quad (5)$$

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-\arctan(x)) = -x\arctan(x)$$

Для всех  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

и  $\arctan(x)$  – неубывающая нечетная функция. Она имеет тот же знак, что  $x$ .

Тогда:

$$x > 0 \Rightarrow \arctan(x) > 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow \arctan(x) = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow \arctan(x) < 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Таким образом, для всех  $x \neq 0$ :  $\dot{V} < 0$ , следовательно начало координат глобально асимптотически устойчиво.

## 2. Задание 2

### 2.1. Условие

Рассмотрим скалярную систему  $\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$ , где  $p$  – натуральное число, а  $h(x)$  удовлетворяет условию  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?

## 2.2. Выполнение

Положим влияние  $h(x)$  незначительным при малых  $x$  около начала координат, так как оно имеет порядок  $x^{p+1}$  и стремится к нулю быстрее, чем  $x^p$ .

Рассмотрим упрощенную систему:

$$\dot{x} = \alpha x^p$$

При нечетном  $p$  функция  $x^p$  сохраняет знак  $x$ :

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x^p > 0, \\ x < 0 &\Rightarrow x^p < 0 \end{aligned}$$

Направление поля на прямой зависит от знака  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &\Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} < 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = -\text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} > 0 \end{aligned}$$

При  $\alpha > 0$  функция  $x(t)$  или растет или убывает в противоположном от нуля направлении – начало координат неустойчиво.

При  $\alpha < 0$  функция  $x(t)$  либо растет к нулю слева, либо убывает к нулю справа – начало координат асимптотически устойчиво.

При четном  $p$  функция  $x^p$  всегда положительна.

Направления полей:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 &\Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p > 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} > 0 \\ \alpha < 0 &\Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p < 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} < 0 \end{aligned}$$

При  $\alpha > 0$  функция  $x(t)$  приближается к нулю слева, но справа расходится – неустойчиво.

При  $\alpha < 0$  функция  $x(t)$  приближается к нулю справа, но слева расходится – неустойчиво.

Таким образом,  $p$  должно быть нечетным, а  $\alpha < 0$ .

Теперь учтем возмущение  $h(x)$ :

$$\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$$

Оно мало в окрестности нуля.

Для  $x \neq 0$  перепишем:

$$\dot{x} = x^p \left( \alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Из условия  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  следует:

$$\left| \frac{h(x)}{x^p} \right| \leq k|x|$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$  такой, что:

$$k\varepsilon < \frac{|\alpha|}{2} = -\frac{\alpha}{2},$$

тогда для всех  $|x| < \varepsilon$ :

$$\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \leq \alpha + k|x| \leq \frac{\alpha}{2} < 0$$

Следовательно, для  $|x| < \varepsilon$ :

$$\dot{x} \cdot \text{sign}(x) = |x|^p \left( \alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right) \leq \frac{\alpha}{2} |x|^p < 0,$$

то есть  $|x|$  монотонно убывает вдоль траекторий, пока решение остаётся в окрестности нуля.

Таким образом,  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  при малых  $x$ , нечетном  $p$  и  $\alpha < 0$  – начало координат локально асимптотически устойчиво.