МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему

«СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ»

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., R3441
Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Задание 1

1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2)\, u, \end{cases}$$

где $|\theta_1| \le 1, |\theta_2| \le 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо:

1. синтезировать стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов;
2. синтезировать стабилизирующий непрерывный регулятор на основе скользящих режимов;
3. провести соответствующий анализ устойчивости;
4. провести математическое моделирование.

1.2. Выполнение

Выберем скользящую поверхность, на которой упростим динамику системы и зададим ей желаемые свойства:

$$s = ax_1 + x_2 = 0,\ a > 0$$

На поверхности $s = 0$:

$$x_2 = -ax_1,\ x_2 = \dot{x}_1 - \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + \sin x_1$$

При малых x_1 получаем $\sin x_1 \sim x_1$:

$$\dot{x}_1 \approx -(a-1)\, x_1$$

Для асимптотической устойчивости $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 0$.
Динамика скользящей переменной:

$$s = ax_1 + x_2 \Rightarrow \dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Подставим $\dot{x}_1, \dot{x}_2$:

$$\dot{s} = a\left(x_2 + \sin x_1\right) + \theta_1 x_1^2 + \left(2 + \theta_2\right) u,$$

$$\dot{s} = \Delta(x) + \left(2 + \theta_2\right) u,\ \Delta(x) \equiv a x_2 + a \sin x_1 + \theta_1 x_1^2$$

Необходимо выбрать u так, чтобы выполнялось условие достижения скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta |s|,\ \eta > 0$$

Это эквивалентно:

$$\dot{V} \leq -\eta |s|,\ V = 0.5 s^2$$

Синтезируем дискретный регулятор на основе скользящих режимов.

Выберем управление как сумму эквивалентной и переключающей составляющих:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}$$

Эквивалентная часть при $s = 0$:

$$u_{\text{eq}} = -\frac{\Delta(x)}{2 + \theta_2}$$

Параметры θ_1, θ_2 неизвестны, поэтому положим их нулевыми.

Такое допущение возможно вследствие наличия переключающей части с коэффициентом переключения β_0, который при верном подборе компенсирует влияние отклонений θ_i.

Кроме того, скользящий режим является робастным к параметрическим неопределенностям и возмущениям.

Тогда, номинальная эквивалентная часть:

$$u_{\text{eq,nom}} = -\frac{a x_2 + a \sin x_1}{2}$$

Добавим переключающую часть:

$$u_{\text{sw}} = -\beta_0 \operatorname{sign}(s),\ \beta_0 > 0$$

Итоговый разрывный регулятор:

$$u = -\frac{ax_2 + a\sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s),\ \beta_0 > 0$$

Подставим u в $\dot{s}$:

$$\dot{s} = a\left(x_2 + \sin x_1\right) + \theta_1 x_1^2 + (2+\theta_2)\left(-\frac{ax_2 + a\sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s)\right),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{2+\theta_2}{2}\left(ax_2 + a\sin x_1\right) + ax_2 + a\sin x_1 - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}\left(ax_2 + a\sin x_1\right) - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Оценим модуль «невязки» (первые два слагаемых).
Получим верхнюю оценку при $|\theta_1| \le 1, |\theta_2| \le 1, |\sin x_1| \le |x_1|$:

$$\left|\theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a\left(x_2 + \sin x_1\right)\right| \le |x_1|^2 + \frac{a}{2}\left(|x_2| + |x_1|\right) \equiv W(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \le W(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Умножим выражение на s и учтем $\operatorname{sign}(s)\cdot s = |s|$:

$$s\dot{s} \le sW(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0|s|$$

В правой части на s не хватает модуля в первом слагаемом – заменим на верхнюю границу:

$$W(x) \ge 0 \Rightarrow sW(x) \le |s|W(x)$$

Тогда:

$$s\dot{s} \le |s|W(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0|s|$$

Так как $2+\theta_2 \ge g_0 = 1$, достаточное условие достижения скольжения:

$$\beta_0 > \sup_{x\in\mathcal{D}} W(x) + \delta,$$

где $\mathcal{D}$ – рассматриваемая область состояний, $\delta > 0$ – небольшой запас.

Тогда:

$$s\dot{s} \le -\mu|s|,\ \mu = (\beta_0 g_0 - \sup W(x)) > 0$$

Т.е. гарантируем, что при минимально возможном g_0 и максимально возможном $W(x)$ их разница при $\beta_0 g_0$ будет положительна.

Таким образом, для $V = 0.5s^2$ имеем $\dot{V} = s\dot{s} \le -\mu|s|, \mu > 0$, что гарантирует достижение $s = 0$ за конечное время.

Синтезируем непрерывный регулятор на основе скользящих режимов.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где a_1, a_2 – неизвестные параметры, $|a_1 - 1| \le 1, |a_2 - 1| \le 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

2.2. Выполнение

...

3. Задание 3

3.1. Условие

Рассмотрим уравнение движения для маятника в виде:

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t)\cos\theta,$$

где h – горизонтальное ускорение, T – управляющий момент.

Предположим, что:

$$0.8 \le l \le 1,\ 0.5 \le m \le 1,\ 0.1 \le k \le 0.2,\ |h(t)| \le 0.5$$

и $g = 9.81$. Требуется стабилизировать маятник при $\theta = 0$ для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

3.2. Выполнение

...

4. Вывод

...