МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

по дисциплине

«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

на тему

«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И РЕГУЛЯТОРЫ»

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1. Задание 1

1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

1.2. Выполнение

1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \ V\left(x_1, x_2\right) > 0 \,\forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0), \ V(0,0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\left(-x_1 + x_1x_2\right) + x_2\left(-2x_2\right) = -x_1^2 + x_1^2x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2\left(1 - x_2\right) - 2x_2^2$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Тогда:

$$\forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0), x_2 \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда $\forall\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$.

1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{cases} \tag{2}$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),\ V\left(x_1, x_2\right) > 0\, \forall\left(x_1, x_2\right) \neq (0, 0),\ V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\left(-x_2 - x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right) + x_2\left(x_1 - x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

Сделаем замену $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\dot{V} = r^2\left(r^2 - 1\right)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0, \\ & r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0, \\ & r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \vee (1, \infty) : \dot{V} > 0 \end{aligned}$$

Внутри единичной окружности $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ начало координат локально асимптотически устойчиво.

Локальная асимптотическая устойчивость исключает глобальную.

1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \left(1 - x_1^2\right) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -\left(x_1 + x_2\right)\left(1 - x_1^2\right) \end{cases} \tag{3}$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),\ V\left(x_1, x_2\right) > 0\, \forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0)\,,\ V\left(0,0\right) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\left(x_2\left(1 - x_1^2\right) - 2x_1\right) + x_2\left(-\left(x_1 + x_2\right)\left(1 - x_1^2\right)\right),$$

$$\dot{V} = x_1x_2\left(1 - x_1^2\right) - 2x_1^2 - x_1x_2\left(1 - x_1^2\right) - x_2^2\left(1 - x_1^2\right) = -2x_1^2 - x_2^2\left(1 - x_1^2\right)$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \leq 1$$

Тогда:

$$\forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0)\,, |x_1| \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \tag{4}$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),\ V\left(x_1, x_2\right) > 0\, \forall \left(x_1, x_2\right) \neq (0,0)\,,\ V\left(0,0\right) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\left(-3x_1 - x_2\right) + x_2\left(2x_1 - x_2^3\right) = -3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4$$

Найдем корни $\dot{V} = 0$:

$$-3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (0,0)\,,\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

Найдем точки равновесия системы (4):

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

Точки $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ не являются равновесиями системы, из них траектории уходят. Следовательно, $\dot{V} = 0$ в этих точках не принадлежит инвариантному множеству.

Таким образом, наибольшее инвариантное множество, содержащееся в $\dot{V} = 0$ – это начало координат.

По теореме ЛаСалля начало координат асимптотически устойчиво.

По неравенству Коши-Буняковского:

$$x_1x_2 \leq \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -3x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^4 = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2\left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)$$

Скобка должна быть отрицательной:

$$\frac{1}{2} - x_2^2 \leq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Таким образом, начало координат не может быть глобально асимптотически устойчиво – оно локально асимптотически устойчиво.

1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x) \tag{5}$$

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2,\ V(x) > 0\,\forall x \neq 0,\ V(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x\left(-\arctan(x)\right) = -x\arctan(x)$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

и $\arctan(x)$ – неубывающая нечетная функция. Она имеет тот же знак, что x.

Тогда:

$$\begin{aligned}
&x > 0 \Rightarrow \arctan(x) > 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0\,\forall x \neq 0,\\
&x = 0 \Rightarrow \arctan(x) = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0,\\
&x < 0 \Rightarrow \arctan(x) < 0 \Rightarrow \dot{V} = -x\arctan(x) < 0\,\forall x \neq 0
\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \neq 0 : \dot{V} < 0$, следовательно начало координат глобально асимптотически устойчиво.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$, где p – натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?

2.2. Выполнение

Положим влияние $h(x)$ незначительным при малых x около начала координат, так как оно имеет порядок x^{p+1} и стремится к нулю быстрее, чем x^p.

Рассмотрим упрощенную систему:

$$\dot{x} = \alpha x^p$$

При нечетном p функция x^p сохраняет знак x:

$$\begin{gathered} x > 0 \Rightarrow x^p > 0, \\ x < 0 \Rightarrow x^p < 0 \end{gathered}$$

Направление поля на прямой зависит от знака α:

$$\begin{gathered} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{sign}(\dot{x}) = \operatorname{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0,\ x < 0 : \dot{x} < 0 \\ \alpha < 0 \Rightarrow \operatorname{sign}(\dot{x}) = -\operatorname{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0,\ x < 0 : \dot{x} > 0 \end{gathered}$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ или растет или убывает в противоположном от нуля направлении – начало координат неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ либо растет к нулю слева, либо убывает к нулю справа – начало координат асимптотически устойчиво.

При четном p функция x^p всегда положительна.

Направления полей:

$$\begin{gathered} \alpha > 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p > 0 \, \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0,\ x < 0 : \dot{x} > 0 \\ \alpha < 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p < 0 \, \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0,\ x < 0 : \dot{x} < 0 \end{gathered}$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю слева, но справа расходится – неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю справа, но слева расходится – неустойчиво.

Таким образом, p должно быть нечетным, а $\alpha < 0$.

Теперь учтем возмущение $h(x)$:

$$\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$$

Оно мало в окрестности нуля.

Для $x \neq 0$ перепишем:

$$\dot{x} = x^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Из условия $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ следует:

$$\left| \frac{h(x)}{x^p} \right| \leq k|x|, \ k > 0$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такой, что:

$$k\varepsilon < \frac{|\alpha|}{2},$$

тогда для всех $|x| < \varepsilon$:

$$\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \leq \alpha + k|x| \leq \frac{\alpha}{2} < 0$$

Учтем для $|x|$:

$$\frac{d|x|}{dx} = \dot{x} \operatorname{sign}(x), \ x^p \operatorname{sign}(x) = |x|^p, \ p = 2n+1, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = (\alpha x^p + h(x)) \operatorname{sign}(x) = x^p \operatorname{sign}(x) \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Следовательно, для $|x| < \varepsilon$:

$$\dot{x} \operatorname{sign}(x) = |x|^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right) \leq \frac{\alpha}{2}|x|^p < 0,$$

то есть $|x|$ монотонно убывает вдоль траекторий, пока решение остаётся в окрестности нуля.

Таким образом, $|x(t)| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ при малых x, $p = 2n+1, n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha < 0$ – начало координат локально асимптотически устойчиво.

3. Задание 3

3.1. Условие

На основе применения LMI построить линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases} \tag{6}$$

3.2. Выполнение

Приведем систему к виду:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ u = Kx$$

Матрицы A, B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\sigma\left(A\right) = \{1.41, -1.41\}$$

Проверим управляемость:

$$A = PJP^{-1}, B_J = P^{-1}B \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 0 & -1.41 \end{bmatrix}, \ B_J = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Система полностью управляема – можно задать регулятору любую степень устойчивости.

Синтезируем LMI со степенью устойчивости $\alpha = 2$ без ограничения на управление при помощи матричного неравенства типа Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \ K = YP^{-1}$$

Получим:

$$K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BK$:

$$\sigma\left(A + BK\right) = \{-5.4 \pm 2.8i\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива, и, убывает быстрее, чем требуемая скорость e^{-2t} (см. действительную часть собственных чисел).

4. Задание 4

4.1. Условие

Найти ограничивающее условие на параметр γ, при котором система является экспоненциально устойчивой со степенью 1. Закон управления взять из предыдущего задания.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin\left(x_2\right), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u, \end{cases} \tag{7}$$

$$u = Kx,\ K = \begin{bmatrix} -39.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

4.2. Выполнение

Подставим закон управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin\left(x_2\right), \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + Kx = 2x_1 - 39.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin\left(x_2\right), \\ \dot{x}_2 = -37.02x_1 - 10.81x_2 \end{cases}$$

Замкнутая система будет иметь вид:

$$\dot{x} = \left(A + BK\right)x + \gamma f(x),$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}, \; f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Линеаризуем систему. При малых x_2:

$$\sin(x_2) \approx x_2$$

Тогда система примет вид:

$$\dot{x} = \left[(A + BK) + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] x = A_\gamma x,$$

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -37.02 & -10.81 \end{bmatrix}$$

Экспоненциальная устойчивость степени 1 требует:

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_{A_\gamma i}\right) \le -1$$

Характеристический полином:

$$\det(\lambda I - A_\gamma) = \lambda^2 + 10.81\lambda + 37.02(\gamma + 1) = 0$$

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)}}{2}$$

Рассмотрим дискриминант:

$$D = 10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1)$$

Если $D < 0$, то корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью $-10.81/2 < -1$:

$$10.81^2 - 4 \cdot 37.02(\gamma + 1) < 0 \Rightarrow \gamma > \frac{10.81^2}{4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma > -0.21$$

Если $D \geq 0$, то корни действительные и должны удовлетворять условию:

$$\lambda_i = \frac{-10.81 \pm \sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02\,(\gamma + 1)}}{2} \leq -1,$$

Так как $\lambda_{1+} \geq \lambda_{2-}$, то достаточно проверить λ_{1+}:

$$\sqrt{10.81^2 - 4 \cdot 37.02\,(\gamma + 1)} \leq 8.81 \Rightarrow \gamma \geq \frac{8.81^2 - 10.81^2}{-4 \cdot 37.02} - 1 \Rightarrow \gamma \geq -0.74$$

Таким образом, экспоненциальная устойчивость степени 1 достигается при:

$$\gamma \geq -0.74$$

При $\gamma > -0.21$ собственные числа будут комплексными.

5. Задание 5

5.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = u, \\ u = Kx \end{cases} \tag{8}$$

Весь вектор состояния $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ измерим.

1. Синтезируйте линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат.
2. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии шумов измерений.
3. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

5.2. Выполнение

Линейная обратная связь:

$$u = Kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2$$

Замкнутая система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + d \end{cases}$$

В качестве d учитываем шумы измерений или аддитивные возмущения.

В доказательстве глобальной устойчивости полагаем $d = 0$.

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,\ V\left(x_1, x_2\right) > 0\,\forall\left(x_1, x_2\right) \neq \left(0, 0\right), k_1 > 0,\ V\left(0, 0\right) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = k_1 x_1 \dot{x_1} + x_2 \dot{x}_2 = k_1 x_1 \left(x_2 - 0.5x_1^3\right) + x_2\left(-k_1 x_1 - k_2 x_2\right) = -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2$$

Член $k_1 x_1 x_2$ сократился.

При всех $k_1, k_2 > 0$:

$$\dot{V} < 0,\ \dot{V} = 0 : (x_1, x_2) = (0, 0)$$

Начало координат глобально асимптотически устойчиво.

При наличии шумов измерений вектор состояния объекта:

$$\tilde{x} = x + n(t),$$

где $n(t)$ – векторный шум.

Управление:

$$u = K\tilde{x} = Kx + Kn(t) = Kx + w(t)$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = k_1 x_1 \left(x_2 - 0.5x_1^3\right) + x_2\left(-k_1 x_1 - k_2 x_2 + w(t)\right) = -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + x_2 w(t)$$

Неравенство Коши-Шварца:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2,\ a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

Положим $a = |x_2|, b = |w(t)|, \varepsilon = k_2 > 0$:

$$x_2 w(t) \leq |x_2||w(t)| \leq \frac{k_2}{2}x_2^2 + \frac{1}{2k_2}|w(t)|^2$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -0.5k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + \frac{k_2}{2}x_2^2 + \frac{1}{2k_2}|w(t)|^2 = -0.5k_1 x_1^4 - 0.5k_2 x_2^2 + \frac{1}{2k_2}|w(t)|^2$$

Получили:

$$\dot{V} \leq -\alpha\left(|x|\right) + \gamma\left(|w(t)|^2\right),$$

где $\alpha\left(|x|\right)$ – положительно определенная функция, $\gamma\left(|w(t)|^2\right)$ – положительная функция входа.

Пусть:

$$||w||_\infty := \sup{}_t|w(t)| \leq W$$

Тогда при $\dot{V} \geq 0$:

$$0.5k_1 x_1^4 + 0.5k_2 x_2^2 \leq \frac{1}{2k_2}W^2$$

Отдельно для компонент:

$$0.5k_1 x_1^4 \leq \frac{1}{2k_2}W^2 \Rightarrow |x_1| \leq \left(k_1 k_2\right)^{-1/4} W^{1/2},$$

$$0.5k_2 x_2^2 \leq \frac{1}{2k_2}W^2 \Rightarrow |x_2| \leq \frac{W}{k_2}$$

То есть x_1 ограничено пропорционально $\sqrt{W}$, x_2 линейно по W.

Таким образом, при наличии шумов измерений система устойчива по входу-к-состоянию (ISS) – при любом ограниченном входе $w(t)$ состояния x_1, x_2

тоже остаются ограниченными.

При наличии аддитивных возмущений уравнение динамики x_2:

$$\dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + d(t)$$

Этот случай аналогичен случаю с измерительным шумом $w(t)$.

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = -0.5 k_1 x_1^4 - k_2 x_2^2 + x_2 d(t)$$

Аналогичные преобразования:

$$\dot{V} \leq -0.5 k_1 x_1^4 - 0.5 k_2 x_2^2 + \frac{1}{2k_2} |d(t)|^2$$

Ограничения для компонент будут аналогичны $W \sim |d|_\infty$.

Таким образом, при наличии аддитивных возмущений система устойчива по входу-к-состоянию. Ограниченный возмущающий сигнал дает ограниченное состояние.

6. Задание 6

6.1. Условие

Исследуйте устойчивость по входу-к-состоянию системы по отношению к возмущению d:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma\left(x_1\right) - x_2 + d, \end{cases} \tag{9}$$

где σ – локально липшицева, $\sigma\left(0\right) = 0$, $y\sigma\left(y\right) \geq 0$.

6.2. Выполнение

Из условия $y\sigma\left(y\right) \geq 0$ следует, что $\sigma\left(y\right)$ имеет тот же знак, что и y.

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),\ V\left(x_1, x_2\right) > 0 \,\forall \left(x_1, x_2\right) \neq \left(0, 0\right),\ V\left(0, 0\right) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \left(-2x_1 + x_2\right) + x_2 \left(-x_1 - \sigma\left(x_1\right) - x_2 + d\right) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_2\sigma\left(x_1\right) + x_2 d$$

При $d = 0$ член $x_2\sigma\left(x_1\right)$ может иметь произвольный знак, поэтому производная функции Ляпунова не всегда строго отрицательна.

Неравенство Коши-Буняковского:

$$x_2 d \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -2x_1^2 - x_2^2 - x_2\sigma\left(x_1\right) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 = -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_2\sigma\left(x_1\right) + \frac{1}{2}d^2$$

Так как $\sigma(0) = 0$, то для $x_2 = 0$ можно для малых x_1 записать:

$$|\sigma\left(x_1\right)| = |\sigma\left(x_1\right) - \sigma\left(0\right)| \leq L|x_1 - 0| = L|x_1|,$$

где L – константа Липшица.

В окрестности нуля функция растет не быстрее, чем $L|x_1|$.

Оценим член $-x_2\sigma\left(x_1\right)$:

$$|-x_2\sigma\left(x_1\right)| \leq |x_2||\sigma\left(x_1\right)| \leq L|x_1||x_2| \leq \frac{L}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

Тогда производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} \leq -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{L}{2}x_1^2 + \frac{L}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 = -\left(2 - \frac{L}{2}\right)x_1^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{L}{2}\right)x_2^2 + \frac{1}{2}d^2$$

Скобки должны быть положительны:

$$\begin{cases} 2 - \frac{L}{2} > 0, \\ 1 - L > 0 \end{cases} \Rightarrow L < 1$$

Положительно определенная функция:

$$\alpha = \min\left(\alpha_1, \alpha_2\right) > 0,\ \alpha_1 = 2 - L/2, \alpha_2 = 1/2 - L/2$$

Обозначим:

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2,\ \gamma(s) = \frac{1}{2}s, s = ||d||^2$$

Тогда производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} \leq -\alpha||x||^2 + \frac{1}{2}d^2 = -\alpha||x||^2 + \gamma\left(||d||^2\right)$$

Ограничение величины состояния при $\dot{V} \geq 0$:

$$||x||^2 \leq \frac{1}{2\alpha}d^2 \Rightarrow ||x|| \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}|d|$$

Величина состояния ограничена линейно по $|d|$.

Таким образом, система устойчива по входу-к-состоянию (ISS) при $L < 1$. С возмущением $d \neq 0$ состояние остается ограниченным, величина пропорциональна размеру d.

При $d = 0$ система асимптотически устойчива.

7. Вывод

В ходе данной лабораторной работы были исследованы различные нелинейные системы. Устойчивость определялась по производной функции Ляпунова. Был синтезирован регулятор с условием на параметр для степени экспоненциальной устойчивости. Была исследована устойчивость системы с регулятором при наличии шумов измерений и аддитивных возмущений. Была исследована устойчивость по входу-к-состоянию системы по отношению к возмущению. Каждый результат был обоснован.