

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
**«ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА, УСТОЙЧИВОСТЬ И
РЕГУЛЯТОРЫ»**

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Зименко К. А.

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1	Задание 1	3
1.1	Условие	3
1.2	Выполнение	3
1.2.1	Первая система	3
1.2.2	Вторая система	4
1.2.3	Третья система	5
1.2.4	Четвертая система	5
1.2.5	Пятая система	7
2	Задание 2	7
2.1	Условие	7
2.2	Выполнение	8

1. Задание 1

1.1. Условие

Для каждой из данных систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво.

1.2. Выполнение

1.2.1. Первая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Функция Ляпунова в квадратичной форме:

$$V(x) = x^T P x, \text{ пусть } P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_1 + x_1x_2) + x_2 (-2x_2) = -x_1^2 + x_1^2x_2 - 2x_2^2,$$

$$\dot{V} = -x_1^2 (1 - x_2) - 2x_2^2$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), x_2 \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

Глобальная асимптотическая устойчивость достигалась бы в случае, когда $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \dot{V} < 0$.

1.2.2. Вторая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \quad (2)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-x_2 - x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)) + x_2 (x_1 - x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)),$$

$$\dot{V} = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2) (x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Сделаем замену $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\dot{V} = r^2 (r^2 - 1)$$

Тогда:

$$r^2 - 1 < 0 \Rightarrow r \in (-1, 1) : \dot{V} < 0,$$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 : \dot{V} = 0,$$

$$r^2 - 1 > 0 \Rightarrow r \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : \dot{V} > 0$$

Внутри единичной окружности $r^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ начало координат локально асимптотически устойчиво.

Локальная асимптотическая устойчивость исключает глобальную.

1.2.3. Третья система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2) (1 - x_1^2) \end{cases} \quad (3)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1) + x_2 (-(x_1 + x_2) (1 - x_1^2)),$$

$$\dot{V} = x_1 x_2 (1 - x_1^2) - 2x_1^2 - x_1 x_2 (1 - x_1^2) - x_2^2 (1 - x_1^2) = -2x_1^2 - x_2^2 (1 - x_1^2)$$

Скобка должна быть неотрицательной:

$$1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| \leq 1$$

Тогда:

$$\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), |x_1| \leq 1 : \dot{V} < 0$$

В окрестности нуля $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат локально асимптотически устойчиво.

1.2.4. Четвертая система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (4)$$

Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 (-3x_1 - x_2) + x_2 (2x_1 - x_2^3) = -3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4$$

Найдем корни $\dot{V} = 0$:

$$-3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$$

Найдем точки равновесия системы (4):

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

Точки $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ не являются равновесиями системы, из них траектории уходят. Следовательно, $\dot{V} = 0$ в этих точках не принадлежит инвариантному множеству.

Таким образом, наибольшее инвариантное множество, содержащееся в $\dot{V} = 0$ – это начало координат.

По теореме ЛаСалля начало координат асимптотически устойчиво.

По неравенству Коши-Буняковского:

$$x_1x_2 \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Тогда:

$$\dot{V} \leq -3x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2^4 = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 \left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)$$

Скобка должна быть отрицательной:

$$\frac{1}{2} - x_2^2 \leq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

Таким образом, начало координат не может быть глобально асимптотически устойчиво – оно локально асимптотически устойчиво.

1.2.5. Пятая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x) \quad (5)$$

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad V(x) > 0 \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0$$

Ее производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(-\arctan(x)) = -x \arctan(x)$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

и $\arctan(x)$ – неубывающая нечетная функция. Она имеет тот же знак, что x .

Тогда:

$$x > 0 \Rightarrow \arctan(x) > 0 \Rightarrow \dot{V} = -x \arctan(x) < 0 \forall x \neq 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow \arctan(x) = 0 \Rightarrow \dot{V} = 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow \arctan(x) < 0 \Rightarrow \dot{V} = -x \arctan(x) < 0 \forall x \neq 0$$

Таким образом, для всех $x \neq 0$: $\dot{V} < 0$, следовательно начало координат глобально асимптотически устойчиво.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$, где p – натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?

2.2. Выполнение

Положим влияние $h(x)$ незначительным при малых x около начала координат, так как оно имеет порядок x^{p+1} и стремится к нулю быстрее, чем x^p .

Рассмотрим упрощенную систему:

$$\dot{x} = \alpha x^p$$

При нечетном p функция x^p сохраняет знак x :

$$x > 0 \Rightarrow x^p > 0,$$

$$x < 0 \Rightarrow x^p < 0$$

Направление поля на прямой зависит от знака α :

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} < 0$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = -\text{sign}(x) \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} > 0$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ или растет или убывает в противоположном от нуля направлении – начало координат неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ либо растет к нулю слева, либо убывает к нулю справа – начало координат асимптотически устойчиво.

При четном p функция x^p всегда положительна.

Направления полей:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p > 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} > 0, x < 0 : \dot{x} > 0$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \dot{x} = \alpha x^p < 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow x > 0 : \dot{x} < 0, x < 0 : \dot{x} < 0$$

При $\alpha > 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю слева, но справа расходится – неустойчиво.

При $\alpha < 0$ функция $x(t)$ приближается к нулю справа, но слева расходится – неустойчиво.

Таким образом, p должно быть нечетным, а $\alpha < 0$.

Теперь учтем возмущение $h(x)$:

$$\dot{x} = \alpha x^p + h(x)$$

Оно мало в окрестности нуля.

Для $x \neq 0$ перепишем:

$$\dot{x} = x^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right)$$

Из условия $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ следует:

$$\left| \frac{h(x)}{x^p} \right| \leq k|x|$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такой, что:

$$k\varepsilon < \frac{|\alpha|}{2} = -\frac{\alpha}{2},$$

тогда для всех $|x| < \varepsilon$:

$$\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \leq \alpha + k|x| \leq \frac{\alpha}{2} < 0$$

Следовательно, для $|x| < \varepsilon$:

$$\dot{x} \cdot \text{sign}(x) = |x|^p \left(\alpha + \frac{h(x)}{x^p} \right) \leq \frac{\alpha}{2}|x|^p < 0,$$

то есть $|x|$ монотонно убывает вдоль траекторий, пока решение остаётся в окрестности нуля.

Таким образом, $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ при малых x , нечетном p и $\alpha < 0$ – начало координат локально асимптотически устойчиво.