МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему

«СИНТЕЗ РАЗРЫВНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ»

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., R3441
Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Задание 1

1.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2)\, u, \end{cases}$$

где $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо:

1. синтезировать стабилизирующий разрывный регулятор на основе скользящих режимов;
2. синтезировать стабилизирующий непрерывный регулятор на основе скользящих режимов;
3. провести соответствующий анализ устойчивости;
4. провести математическое моделирование.

1.2. Выполнение

Выберем скользящую поверхность, на которой упростим динамику системы и зададим ей желаемые свойства:

$$s = ax_1 + x_2 = 0,\ a > 0$$

На поверхности $s = 0$:

$$x_2 = -ax_1,\ x_2 = \dot{x}_1 - \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -ax_1 + \sin x_1$$

При малых x_1 получаем $\sin x_1 \sim x_1$:

$$\dot{x}_1 \approx -\left(a - 1\right) x_1$$

Для асимптотической устойчивости $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} x_1(t) = 0$.
Динамика скользящей переменной:

$$s = ax_1 + x_2 \Rightarrow \dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Подставим $\dot{x}_1, \dot{x}_2$:

$$\dot{s} = a\left(x_2 + \sin x_1\right) + \theta_1 x_1^2 + \left(2 + \theta_2\right) u,$$

$$\dot{s} = \Delta(x) + \left(2 + \theta_2\right) u,\ \Delta(x) \equiv a x_2 + a \sin x_1 + \theta_1 x_1^2$$

Необходимо выбрать u так, чтобы выполнялось условие достижения скользящего режима:

$$s\dot{s} \leq -\eta |s|,\ \eta > 0$$

Это эквивалентно:

$$\dot{V} \leq -\eta |s|,\ V = 0.5 s^2$$

Синтезируем дискретный регулятор на основе скользящих режимов.

Выберем управление как сумму эквивалентной и переключающей составляющих:

$$u = u_{\text{eq}} + u_{\text{sw}}$$

Эквивалентная часть при $s = 0$:

$$u_{\text{eq}} = -\frac{\Delta(x)}{2 + \theta_2}$$

Параметры θ_1, θ_2 неизвестны, поэтому положим их нулевыми.

Такое допущение возможно вследствие наличия переключающей части с коэффициентом переключения β_0, который при верном подборе компенсирует влияние отклонений θ_i.

Кроме того, скользящий режим является робастным к параметрическим неопределенностям и возмущениям.

Тогда, номинальная эквивалентная часть:

$$u_{\text{eq,nom}} = -\frac{a x_2 + a \sin x_1}{2}$$

Добавим переключающую часть:

$$u_{\text{sw}} = -\beta_0 \operatorname{sign}(s),\ \beta_0 > 0$$

Итоговый разрывный регулятор:

$$u = -\frac{ax_2 + a\sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s),\ \beta_0 > 0$$

Подставим u в $\dot{s}$:

$$\dot{s} = a\left(x_2 + \sin x_1\right) + \theta_1 x_1^2 + (2+\theta_2)\left(-\frac{ax_2 + a\sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sign}(s)\right),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{2+\theta_2}{2}\left(ax_2 + a\sin x_1\right) + ax_2 + a\sin x_1 - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s),$$

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}\left(ax_2 + a\sin x_1\right) - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Оценим модуль «невязки» (первые два слагаемых).

Получим верхнюю оценку при $|\theta_1| \le 1, |\theta_2| \le 1, |\sin x_1| \le |x_1|$:

$$\left|\theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2} a\left(x_2 + \sin x_1\right)\right| \le |x_1|^2 + \frac{a}{2}\left(|x_2| + |x_1|\right) \equiv W(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} \le W(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0 \operatorname{sign}(s)$$

Умножим выражение на s и учтем $\operatorname{sign}(s)\cdot s = |s|$:

$$s\dot{s} \le sW(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0 |s|$$

В правой части на s не хватает модуля в первом слагаемом – заменим на верхнюю границу:

$$W(x) \ge 0 \Rightarrow sW(x) \le |s|W(x)$$

Тогда:

$$s\dot{s} \le |s|W(x) - (2+\theta_2)\,\beta_0 |s|$$

Так как $2 + \theta_2 \ge g_0 = 1$, достаточное условие достижения скольжения:

$$\beta_0 > \sup_{x\in\mathcal{D}} W(x) + \delta,$$

где $\mathcal{D}$ – рассматриваемая область состояний, $\delta > 0$ – небольшой запас.

Тогда:

$$s\dot{s} \le -\mu|s|,\ \mu = (\beta_0 g_0 - \sup W(x)) > 0$$

Т.е. гарантируем, что при минимально возможном g_0 и максимально возможном $W(x)$ их разница при $\beta_0 g_0$ будет положительна.

Таким образом, для $V = 0.5s^2$ имеем $\dot{V} = s\dot{s} \le -\mu|s|, \mu > 0$, что гарантирует достижение $s = 0$ за конечное время.

Синтезируем непрерывный регулятор на основе скользящих режимов.

Для уменьшения колебаний из-за задержки переключения управления, заменим в управлении функцию sign функцией насыщения:

$$\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} s/\varepsilon, & |s| \le \varepsilon, \\ \operatorname{sign}(s), & |s| > \varepsilon \end{cases}$$

Непрерывный регулятор:

$$u = -\frac{ax_2 + a\sin x_1}{2} - \beta_0 \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Подставим u в $\dot{s}$:

$$\dot{s} = \theta_1 x_1^2 - \frac{\theta_2}{2}\left(ax_2 + a\sin x_1\right) - \left(2 + \theta_2\right)\beta_0 \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Аналогично оценим невязку абсолютной величиной $W(x)$ и зададим $V = 0.5s^2$, тогда:

$$\dot{V} = s\dot{s} \le |s|W(x) - \left(2 + \theta_2\right)\beta_0 |s| \left|\operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|$$

Если $|s| > \varepsilon$, то $|\operatorname{sat}| = 1$ – аналогичное разрывному случаю условие на β_0, следовательно $\dot{V} \le -\mu|s|, \mu > 0$ и достижение уменьшает s до слоя $|s| \le \varepsilon$.

На слое $|s| \le \varepsilon$ имеем $\operatorname{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$, тогда:

$$\dot{V} \le |s|W(x) - \left(2 + \theta_2\right)\beta_0 \frac{s^2}{\varepsilon}$$

Пусть на рассматриваемой рабочей области $\mathcal{D}$ есть оценка:

$$|\Delta(x)| \le D_{\max} \le |x_1|^2 + \frac{a}{2}(|x_2| + |x_1|)$$

Тогда, для $r = |s| \leq \varepsilon$ оценивающее неравенство:

$$\dot{V} \leq rD_{\max} - g_0 \frac{\beta_0}{\varepsilon} r^2, \; g_0 = \inf\left(2 + \theta_2\right) = 1$$

Правая часть в $\dot{V}$ отрицательна, если:

$$g_0 \frac{\beta_0}{\varepsilon} r^2 > rD_{\max} \Rightarrow r > \frac{D_{\max}\varepsilon}{g_0 \beta_0}$$

Предельный радиус:

$$r_* := \frac{D_{\max}\varepsilon}{g_0 \beta_0}$$

Тогда, при $r \in (r_*, \varepsilon]$ имеем $\dot{V} < 0$ и $r(t)$ убывает до нее не более чем r_*. Следовательно, система обладает практической устойчивостью: внутри слоя $|s| \leq \varepsilon$ значения $s(t)$ стремятся к компактному множеству $|s| \leq r_*$.

Моделирование системы при $a = 2, \beta_0 = 0.8, \varepsilon = 0.01, x_0 = \left[1 \; 0\right]^T, \theta_1 = 0.5, \theta_2 = -0.5$:

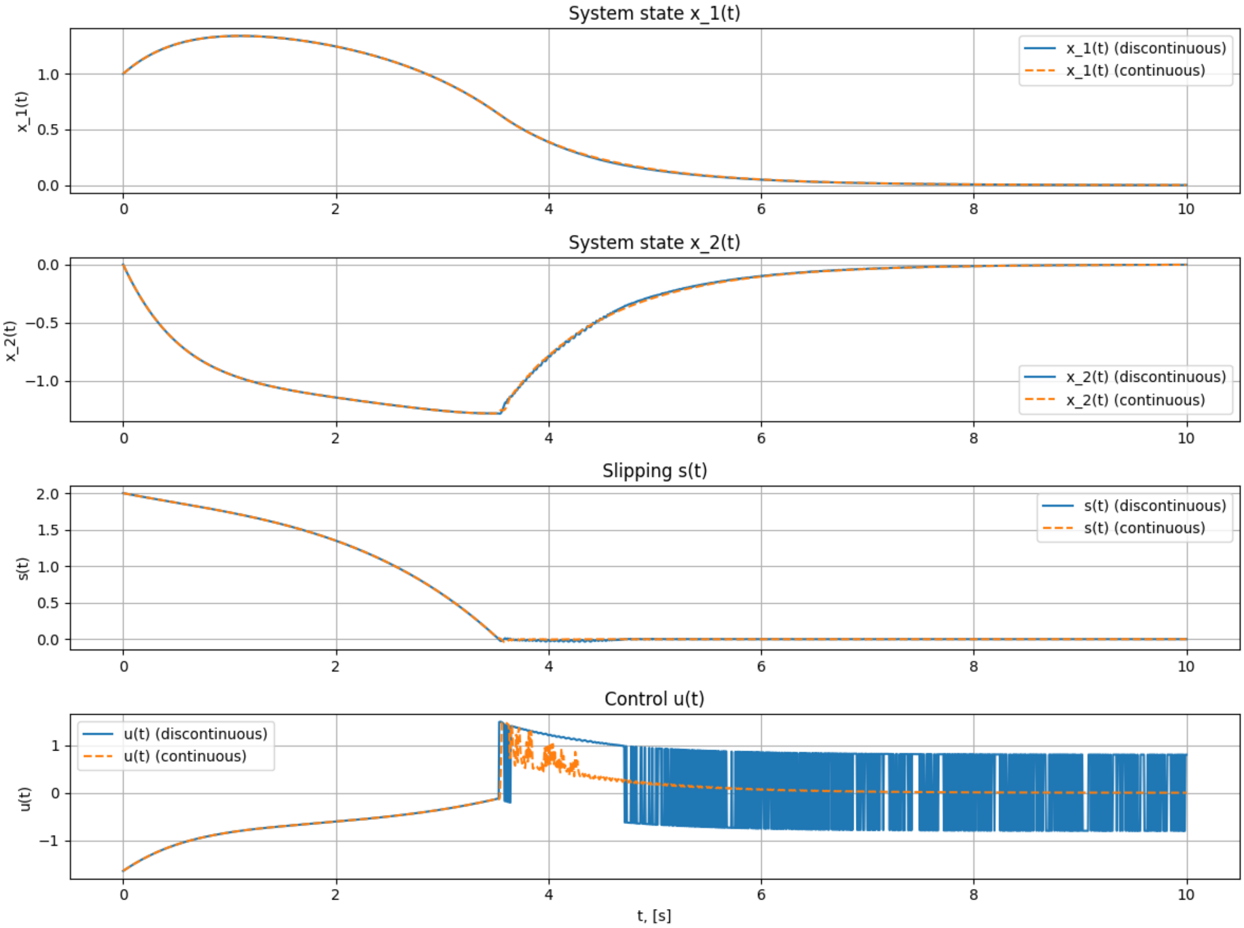

Рис. 1: Графики $x_i(t), s(t), u(t)$

Все графики сошлись к нулю, кроме разрывного управления.

В разрывном управлении две составляющие – эквивалентная и переключающая. Первая стремится к нулю вместе с состоянием. Вторая не стремится к нулю, а переключается между $\pm\beta_0$, из-за чего получаются высокочастотные колебания – график $u(t)$ выглядит как импульсный сигнал при устоявшейся системе. По графику видно, что управление меняется от $\approx -\beta_0 = -0.8$ до $\approx +\beta_0 = 0.8$.

2. Задание 2

2.1. Условие

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u, \end{cases}$$

где a_1, a_2 – неизвестные параметры, $|a_1 - 1| \leq 1, |a_2 - 1| \leq 1$. Весь вектор состояния измерим. Необходимо синтезировать стабилизирующий регулятор на основе скользящих режимов, провести соответствующий анализ устойчивости и провести математическое моделирование.

2.2. Выполнение

Выберем поверхность:

$$s = a x_1 + x_2,\ a > 0$$

На поверхности $s = 0$:

$$x_2 = -a x_1,\ x_2 = \dot{x}_1 - a_1 x_1 \sin x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -a x_1 + a_1 x_1 \sin x_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 \left(-a + a_1 \sin x_1\right)$$

Функция Ляпунова и ее производная для подсистемы на поверхности:

$$V_1(x_1) = 0.5x^2 \Rightarrow \dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = x_1^2 \left(-a + a_1 \sin x_1\right)$$

Так как $|\sin x_1| \le |x_1|, |a_1| \le 2$:

$$a_1 \sin x_1 \le |a_1| \cdot |\sin x_1| \le 2|x_1|$$

Тогда:

$$\dot{V}_1 \le x_1^2 \left(-a + 2|x_1|\right) < 0 \, \forall x_1 : 0 < |x_1| < \frac{a}{2}$$

Начало координат локально асимптотически устойчиво.

Рассмотрим $\dot{s}$:

$$\dot{s} = a\left(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1\right) + a_2 x_1 x_2 + 3u = \Delta(x) + 3u$$

Предположим номинальные значения $|a_i - 1| = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1.$

Тогда, номинальная эквивалентная часть регулятора, обеспечивающая $\dot{s} \to 0$ в номинальном случае:

$$\Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{eq,nom}} = 0 \Rightarrow u_{\text{eq,nom}} = -\frac{1}{3}\left(a x_2 + a x_1 \sin x_1 + x_1 x_2\right)$$

Добавим разрывную часть:

$$u = u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}, \; u_{\text{sw}} = -\beta(x)\operatorname{sign}(s)$$

Разрывный регулятор:

$$u = -\frac{1}{3}\left(a x_2 + a x_1 \sin x_1 + x_1 x_2\right) - \beta(x)\operatorname{sign}(s)$$

Подставим в $\dot{s}$:

$$\dot{s} = \Delta(x) + 3\left(u_{\text{eq,nom}} + u_{\text{sw}}\right) = 3u_{\text{eq,nom}} + \Delta_{a_i=1}(x) + 3u_{\text{sw}} + \Delta(x) - \Delta_{a_i=1}(x),$$

$$\dot{s} = 3u_{\text{sw}} + a\left(a_1 - 1\right) x_1 \sin x_1 + \left(a_2 - 1\right) x_1 x_2 = 3u_{\text{sw}} + \delta(x)$$

Оценим $\delta(x)$ при $|a_1 - 1| \le 1, |a_2 - 1| \le 1$:

$$|\delta(x)| \le a|x_1 \sin x_1| + |x_1 x_2| \le a x_1^2 + |x_1 x_2| = \rho(x)$$

Тогда:

$$\dot{s} = -3\beta(x)\,\mathrm{sign}(s) + ax_1^2 + |x_1x_2| = -3\beta(x)\,\mathrm{sign}(s) + \rho(x)$$

Оценим производную функции Ляпунова $V = 0.5s^2$:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s\left(-3\beta(x)\,\mathrm{sign}(s) + \rho(x)\right) = -3\beta(x)|s| + \rho(x)s,$$

$$\dot{V} = -3\beta(x)|s| + \rho(x)s \le -3\beta(x)|s| + |\rho(x)||s| = -\left(3\beta(x) - |\rho(x)|\right)|s|$$

Если выбрать $3\beta(x) \ge |\rho(x)| + \beta_0,\ \beta_0 > 0$:

$$\dot{V} \le -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0\,\forall s \ne 0$$

Это гарантирует достижение поверхности $s = 0$ за конечное время.
Выберем:

$$\beta(x) \ge \frac{1}{3}\left(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0\right),\ \beta_0 > 0$$

Разрывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}\left(ax_2 + ax_1\sin x_1 + x_1x_2\right) - \frac{1}{3}\left(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0\right)\mathrm{sign}(s)$$

Заменим $\mathrm{sign}(s)$ на $\mathrm{sat}(s/\varepsilon)$ и получим непрерывный закон управления:

$$u = -\frac{1}{3}\left(ax_2 + ax_1\sin x_1 + x_1x_2\right) - \frac{1}{3}\left(ax_1^2 + |x_1x_2| + \beta_0\right)\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Проверим устойчивость.
Функция насыщения:

$$\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} s/\varepsilon, & |s| \le \varepsilon, \\ \mathrm{sign}(s), & |s| > \varepsilon \end{cases}$$

При $|s| > \varepsilon : \mathrm{sat}(s/\varepsilon) = \mathrm{sign}(s)$, т.е. случай аналогичен дискретному:

$$V = 0.5s^2,\ \dot{V} \le -\beta_0|s| = -\beta_0\sqrt{2V} < 0\,\forall s \ne 0$$

Поверхность $s = 0$ достигается за конечное время.

При $|s| \leq \varepsilon : \operatorname{sat}(s/\varepsilon) = s/\varepsilon$. Воспользуемся ранее найденной $\dot{s}$ с оцененной $|\delta(x)| \leq \rho(x)$:

$$\dot{s} = 3u_{\text{sw}} + \rho(x)$$

Заменим в разрывной части управления $\operatorname{sign}(s)$ на s/ε:

$$u_{\text{sw}} = -\beta(x)\frac{s}{\varepsilon}$$

Тогда:

$$\dot{s} = -3\beta(x)\frac{s}{\varepsilon} + \rho(x)$$

Моделирование системы при $a = 1, \beta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.01, x_0 = [1\ 0]^T, a_1 = 0.5, a_2 = 1.5$:

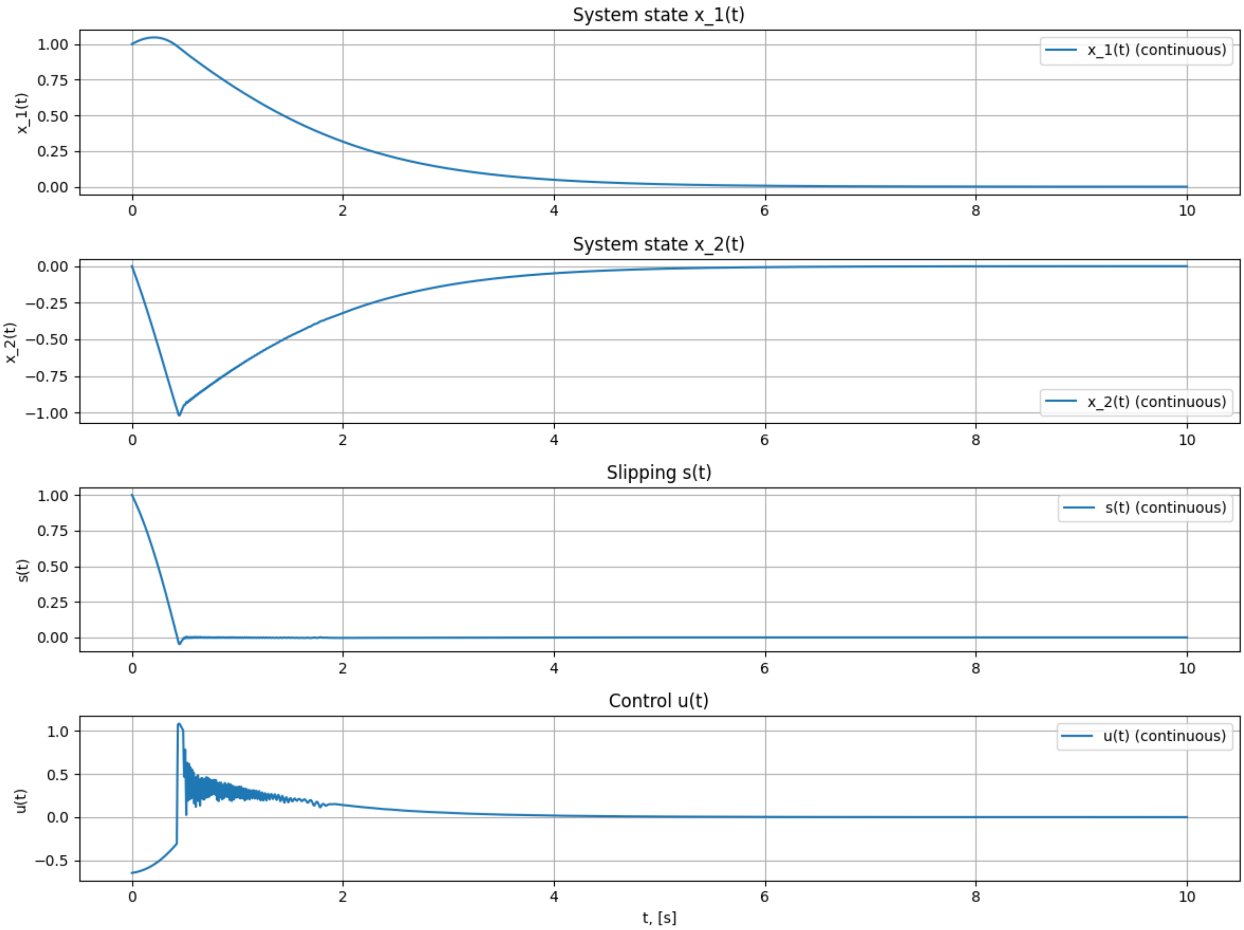

Рис. 2: Графики $x_i(t), s(t), u(t)$

3. Задание 3

3.1. Условие

Рассмотрим уравнение движения для маятника в виде:

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t)\cos\theta,$$

где h – горизонтальное ускорение, T – управляющий момент.

Предположим, что:

$$0.8 \leq l \leq 1,\ 0.5 \leq m \leq 1,\ 0.1 \leq k \leq 0.2,\ |h(t)| \leq 0.5$$

и $g = 9.81$. Требуется стабилизировать маятник при $\theta = 0$ для произвольных начальных условий. Необходимо разработать непрерывный регулятор на основе скользящего режима с обратной связью по состоянию.

3.2. Выполнение

...

4. Вывод

...