МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3
по дисциплине
«НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ПО ВХОДУ–ВЫХОДУ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ»

Выполнили: студенты
Румянцев А. А., R3441
Дьячихин Д. Н., R3480

Проверил: преподаватель
Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1 **3**

1.1 Условие 3

1.2 Выполнение 3

2 Задание 2 **7**

2.1 Условие 7

2.2 Выполнение 7

3 Вывод **11**

1. Задание 1

1.1. Условие

Для данной системы определить:

- Является ли эта система линеаризуемой по входу–выходу?
- Если да, преобразуйте её в нормальную форму и укажите область определения соответствующего преобразования
- Является ли эта система минимально-фазовой?

1.2. Выполнение

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + u, \\ y = x_3 \end{cases} \tag{1}$$

Точки равновесия при $\dot{x} = 0, u = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 x_3 - x_2 = 0, \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0)$$

Нелинейная система:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,\ f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix},\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Производная от выхода $y = h(x)$:

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) u$$

Производная Ли функции h вдоль поля f:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = -x_1$$

Вдоль поля g:

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Производная выхода:

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = -x_1 + u$$

Первая производная выхода зависит от u, следовательно относительная степень нелинейной системы $\rho = 1$.

Так как $L_g L_f^{\rho-1} h(x) = L_g h(x) = 1 \neq 0$, $\rho < 2$ и $\rho = 1 < n = 3$, то система линеаризуема по входу–выходу (вход появляется именно в ρ-й производной; так как производная потребовалась всего одна, то условие на непоявление входа раньше ρ-й производной $L_g L_f^k h(x) = 0, k \in [0, \rho - 2]$ проверять не нужно; $\rho \leq n$ – относительная степень не больше порядка системы).

Замена переменных:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \xi \end{bmatrix}$$

Условие:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0,\ i = 1, ..., n - \rho$$

Исходя из $g(x)$:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_3} = 0$$

Пусть:

$$\begin{cases} \phi_1 = x_1, \\ \phi_2 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Проверим обратимость преобразования $z = T(x)$:

$$z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow J_T(x) = \frac{\partial\left(\eta_1, \eta_2, \xi\right)}{\partial\left(x_1, x_2, x_3\right)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det J_T(x) = 1 \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Преобразование $T(x)$ является гладко обратимым в $\mathbb{R}^3$, т.е. глобальным диффеоморфизмом.

Область определения соответствующего преобразования:

$$D_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \det J_T(x) \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^3$$

Преобразование координат $x = T^{-1}(z)$:

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1, \\ x_2 = \eta_2 + \xi, \\ x_3 = \xi \end{cases}$$

Вычислим производные:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 = -\eta_1 + \eta_2 + \xi - \xi = -\eta_1 + \eta_2,$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_3 = -x_1 x_3 - x_2 + u + x_1 - u = -x_1 x_3 - x_2 + x_1 = -\eta_1 \xi - \eta_2 - \xi + \eta_1,$$

$$\dot{\xi} = \dot{x}_3 = -x_1 + u = -\eta_1 + u$$

Система в нормальной (канонической) форме:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1\xi - \eta_2 - \xi + \eta_1, \\ \dot{\xi} = -\eta_1 + u, \\ y = \xi \end{cases}$$

Проверка равновесия в нормальной форме:

$$(\eta_1, \eta_2, \xi) = (0, 0, 0)\,, u = 0 \Rightarrow \dot{\eta} = 0, \dot{\xi} = 0$$

Нулевая динамика:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi = 0)$$

Подставим $\xi = 0$ в $\dot{\eta}$:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\eta_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_2 + \eta_1 \end{cases} \Rightarrow \dot{\eta} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \eta$$

Собственные числа:

$$\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \sigma = \{0, -2\}$$

Система неасимптотически устойчива.

Система называется минимально-фазовой, если начало координат для уравнения нуль-динамики асимптотически устойчиво при $T(x)$ таком, что начало координат $(\eta = 0, \xi = 0)$ является точкой равновесия.

Следовательно, система не минимально-фазовая.

2. Задание 2

2.1. Условие

На основе метода линеаризации обратной связью найдите закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат для данной системы.

2.2. Выполнение

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \end{cases} \tag{2}$$

Нелинейная система:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,\ f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \end{bmatrix},\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Управление влияет только на $\dot{x}_2$.
Линеаризация обратной связью:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

Компенсируем нелинейность $-x_1 x_3$ в $\dot{x}_2$ с помощью u:

$$\alpha(x) = x_1 x_3 \Rightarrow u = x_1 x_3 + \beta(x)v$$

Тогда $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + x_1 x_3 + \beta(x)v = x_1 - x_2 + \beta(x)v$$

Выберем линейный закон такой, чтобы $(x_1, x_2) \to 0$:

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2,\ \beta(x) = 1 \Rightarrow u = x_1 x_3 - k_1 x_1 - k_2 x_2$$

Нелинейность $x_1 x_2$ в $\dot{x}_3$ косвенно компенсируется, т.к. $(x_1, x_2) \to 0 \Rightarrow x_1 x_2 \to 0$.

Подставим $\beta(x)v$ в $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 = -\left(k_1 - 1\right) x_1 - \left(k_2 + 1\right) x_2$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -\left(k_1 - 1\right) x_1 - \left(k_2 + 1\right) x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Рассмотрим линейную подсистему по состояниям (x_1, x_2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -\left(k_1 - 1\right) x_1 - \left(k_2 + 1\right) x_2 \end{cases}$$

Найдем матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\left(k_1 - 1\right) & -\left(k_2 + 1\right) \end{bmatrix}$$

Чтобы матрица A была Гурвицевой, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \operatorname{trace} A < 0, \\ \det A > 0, \\ \Re \lambda_i < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k_2 - 2 < 0, \\ k_1 + k_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 > -2, \\ k_1 > -k_2 \end{cases}$$

Тогда линейная подсистема будет экспоненциально устойчива:

$$||\left(x_1(t), x_2(t)\right)|| \leq C e^{-\alpha t} ||\left(x_1(0), x_2(0)\right)||,\ C > 0,\ \alpha > 0$$

Рассмотрим $\dot{x}_3$:

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + x_1\left(x_2 + 1\right) = -2x_3 + f(t)$$

Рассмотрим возмущение $f(t)$:

$$f(t) = x_1(t)\,(x_2(t) + 1)$$

Ее убывание:

$$|x_1(t)| \le C_1 e^{-\alpha t},\ |x_2(t)| \le C_2 e^{-\alpha t},$$

$$|f(t)| = |x_1(t)\,(x_2(t)+1)\,| \le C_1 e^{-\alpha t}\left(C_2 e^{-\alpha t} + 1\right) \le (C_1 + C_1 C_2)\,e^{-\alpha t} = Ce^{-\alpha t}$$

То есть:

$$|f(t)| \le Ce^{-\alpha t}$$

Решение линейного уравнения с известным источником $f(t)$ в общем виде:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + f(t),\ x_h(t) = e^{\alpha t} x(0),$$

$$x(t) = e^{\alpha t} C(t),\ \dot{C}(t) = e^{-\alpha t} f(t) \Rightarrow C(t) = \int\limits_0^t e^{-\alpha s} f(s)\,ds + C_0,$$

$$x(t) = e^{\alpha t} C_0 + e^{\alpha t} \int\limits_0^t e^{-\alpha s} f(s)\,ds = e^{\alpha t} x(0) + \int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds,$$

Решим $\dot{x}_3 = -2x_3 + f(t)$:

$$x_3(t) = e^{-2t} x(0) + \int\limits_0^t e^{-2(t-s)} f(s)\,ds$$

Первый член стремится к нулю экспоненциально.
Оценим интеграл при $|f(s)| \le Ce^{-\alpha s}$:

$$\left|\int\limits_0^t e^{-2(t-s)} f(s)\,ds\right| \le \int\limits_0^t e^{-2(t-s)} Ce^{-\alpha s}\,ds = Ce^{-2t} \int\limits_0^t e^{(2-\alpha)s}\,ds,$$

$$\int\limits_0^t e^{(2-\alpha)s}\,ds = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}\left(e^{(2-\alpha)t} - 1\right), & \alpha \ne 2, \\ t, & \alpha = 2 \end{cases}$$

В случае $\alpha \neq 2$ для больших t главное слагаемое: $e^{(2-\alpha)t}$.

Тогда интеграл можно оценить:

$$e^{-2t} \int\limits_0^t e^{(2-\alpha)s}\, ds \sim e^{-2t} \cdot e^{(2-\alpha)t} = e^{-\alpha t}$$

Следовательно, интеграл убывает экспоненциально с тем же показателем α, что и $f(t)$.

Таким образом, $x_3(t)$ и $\dot{x}_3(t)$ убывают экспоненциально.

Подобранный закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию начала координат данной системы.

Промоделируем систему при

$$k_2 = -1, k_1 = 4,$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ -70 \\ 45 \end{bmatrix}$$

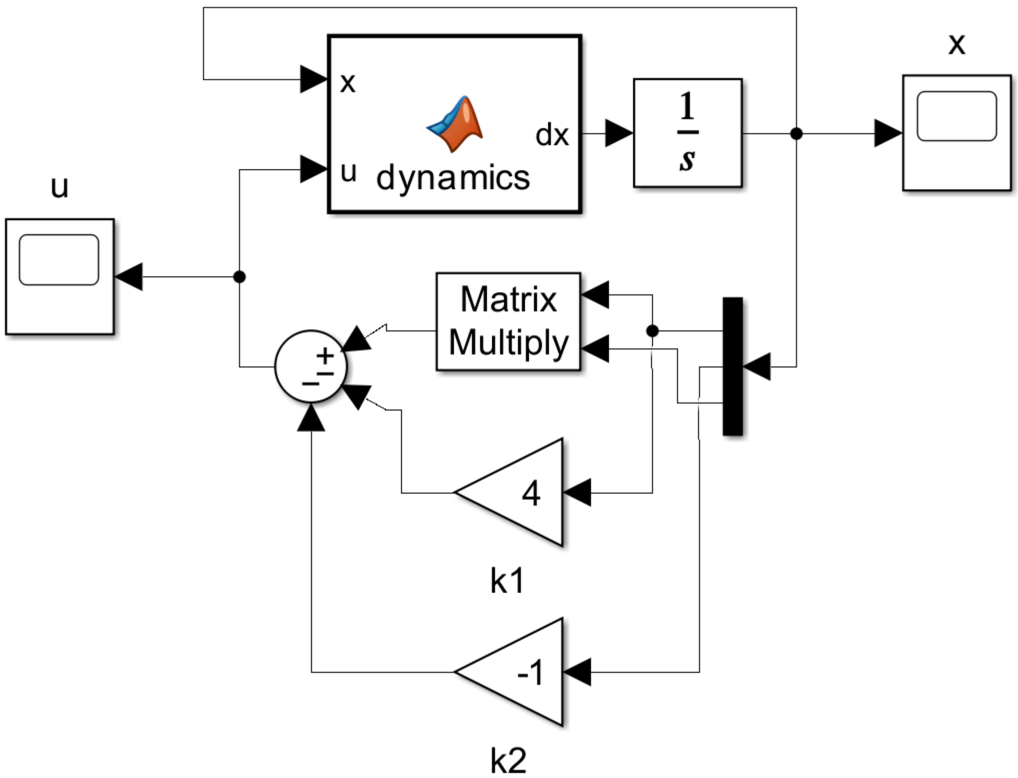

Рис. 1: Схема моделирования системы

Графики вектора состояния системы и управления:

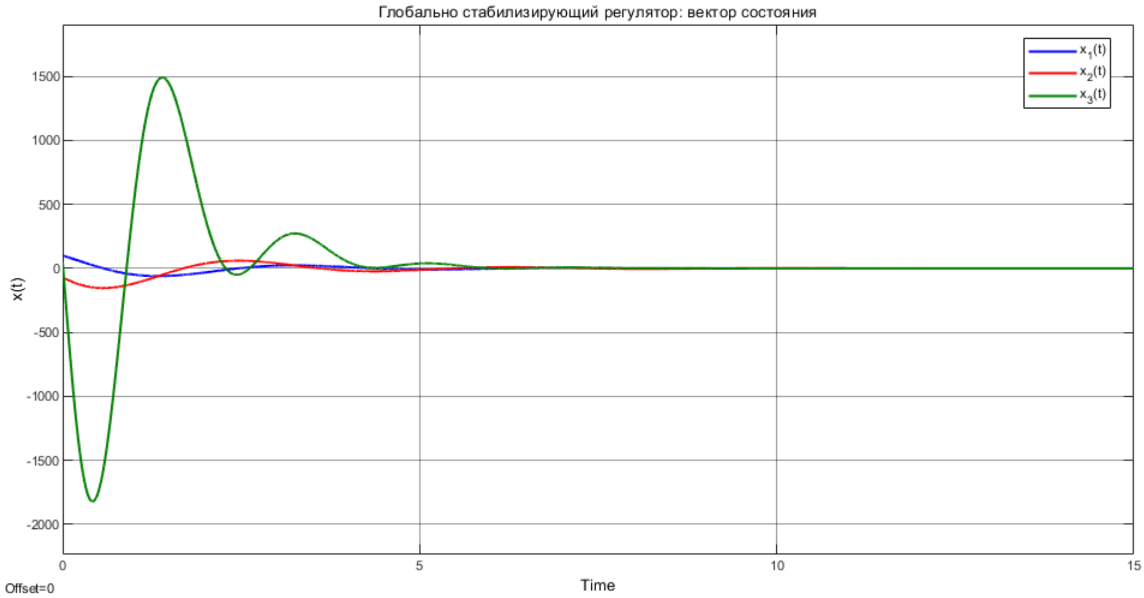

Рис. 2: Вектор состояния объекта управления

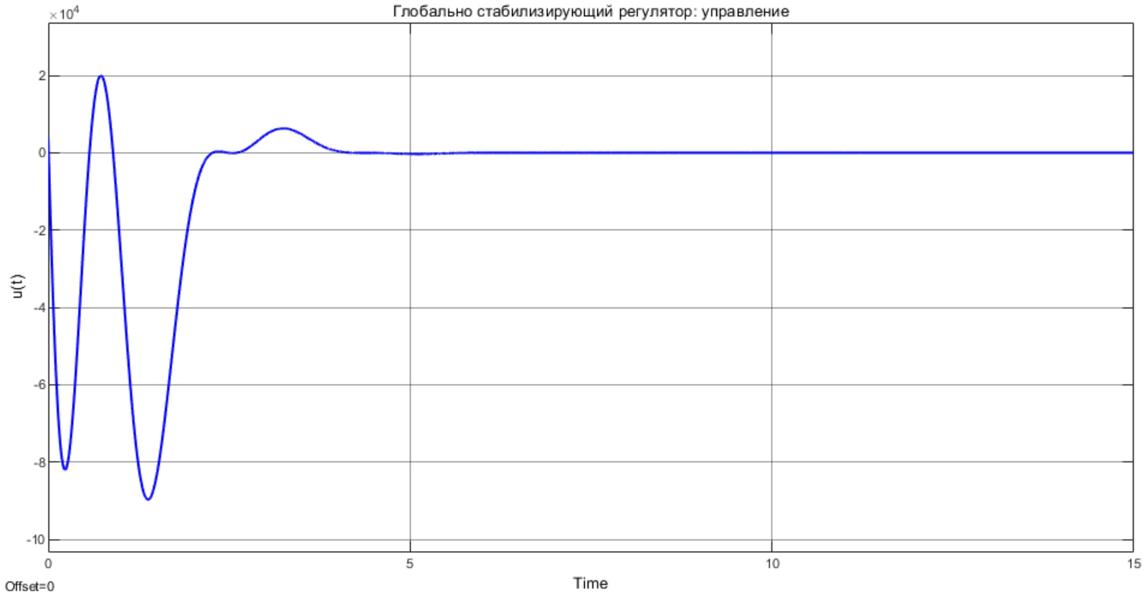

Рис. 3: Управление $u = x_1x_3 - k_1x_1 - k_2x_2$

3. Вывод

В ходе выполнения работы было выяснено, что первая нелинейная система является линеаризуемой по входу-выходу. Она была преобразована к канонической форме, область определения определена как $\mathbb{R}^3$. Система не является минимально фазовой.

Для второй нелинейной системы удалось найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат. Использовался метод линеаризации обратной связью.