

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД
ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА»
Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Цель работы	3
2	Постановка задачи	3
3	Экспериментальная часть	3
3.1	Исходные данные	3
3.2	Синтез оптимального управления	4
3.3	Моделирование системы	6
3.4	Критерий при отклонениях параметров регулятора	8
3.5	Моделирование системы с отклонением	8
4	Вывод	10

1. Цель работы

Исследовать оптимальный регулятор, синтезированный с помощью метода динамического программирования Беллмана.

2. Постановка задачи

Дан линейный объект управления:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0)$$

и критерий качества:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau) d\tau$$

Необходимо:

1. Построить оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана и промоделировать его работу на заданном интервале времени. Начальные условия $x(0) = [1, 0]^T$. Построить графики u, x, J ;
2. Построить критерий при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений.

3. Экспериментальная часть

3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, матрицы A, b, Q :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Параметр $r = 4$.

3.2. Синтез оптимального управления

Принцип Беллмана:

$$J(x_0) = \min_u \left\{ \int_0^{dt} L(x, u) dt + J(x(dt)) \right\}$$

Предел при $dt \rightarrow 0$:

$$J(x) = \min_u \{ L(x, u) dt + J(x) + dt \nabla J(x) f(x, u) + o(dt) \}$$

После преобразований уравнение Беллмана:

$$\min_u \{ L(x, u) + \nabla V(x)^T f(x, u) \} = 0,$$

где $L(x, u)$ – мгновенная стоимость (интегранд в функционале J).

Функция Беллмана V должна быть такой, чтобы при оптимальном управлении выражение под минимумом обращалось в нуль.

Тогда, при линейной системе и квадратичном критерии квадратичная форма функционала ценности:

$$V(x) = x^T P x > 0 \forall x \neq 0, \quad \nabla V = 2Px,$$

где $P = P^T$ – искомая матрица.

Условие минимума по u в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\min_u \{ x^T Q x + ru^2 + \nabla V(x) (Ax + bu) \} = 0$$

Подставим $V(x)$ и $\nabla V(x)$:

$$\frac{d}{du} (ru^2 + 2x^T P b u) = 0 \Rightarrow 2ru + 2b^T P x = 0$$

Выразим u :

$$u(t) = -r^{-1} b^T P x(t) = -K x(t), \quad K = r^{-1} b^T P$$

Найдем $u^2(t)$:

$$u^2 = x^T P^T b r^{-2} b^T P x$$

Подставим в условие минимума по u выражения $\nabla V(x), u^2(t)$:

$$x^T Q x + x^T P^T b r^{-1} b^T P x + (2P x)^T (A x + b u) = 0,$$

$$x^T Q x + x^T P^T b r^{-1} b^T P x + 2x^T P A x + 2x^T P b u = 0$$

Найдем $2x^T P b u$:

$$2x^T P b u = 2x^T P b (-r^{-1} b^T P x) = -2x^T P b r^{-1} b^T P x$$

Тогда, $r u^2 + 2x^T P b u$:

$$r u^2 + 2x^T P b u = x^T P b r^{-1} b^T P x - 2x^T P b r^{-1} b^T P x = -x^T P b r^{-1} b^T P x$$

Подставим:

$$x^T Q x + 2x^T P A x - x^T P b r^{-1} b^T P x = 0$$

Перепишем $2x^T P A x$:

$$2x^T P A x = x^T (P A + A^T P) x$$

Подставим $2x^T P A x$ и вынесем x^T, x :

$$x^T (Q + P A + A^T P - P b r^{-1} b^T P) x = 0$$

Данное условие должно выполняться для всех x , следовательно подматрица:

$$A^T P + P A - P b r^{-1} b^T P + Q = 0$$

Получили непрерывное алгебраическое уравнение Риккати.

Уравнение Риккати – частный случай уравнения Беллмана для LQR.

Решим уравнение Риккати, получим:

$$P \approx \begin{bmatrix} 40.795 & -39.0667 \\ -39.0667 & 38.101 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -6.31 & 7.594 \end{bmatrix}$$

Собственные числа замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-2.1961, -11.6695\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

3.3. Моделирование системы

Схема моделирования:

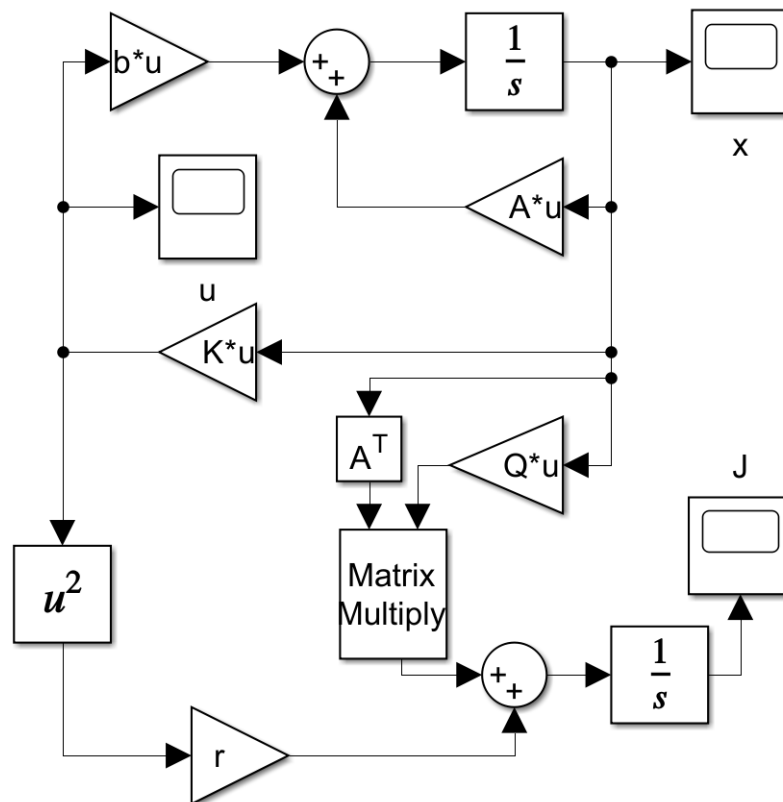


Рис. 1: Схема моделирования замкнутой системы, $u = -Kx$

Построим графики x , u , J :

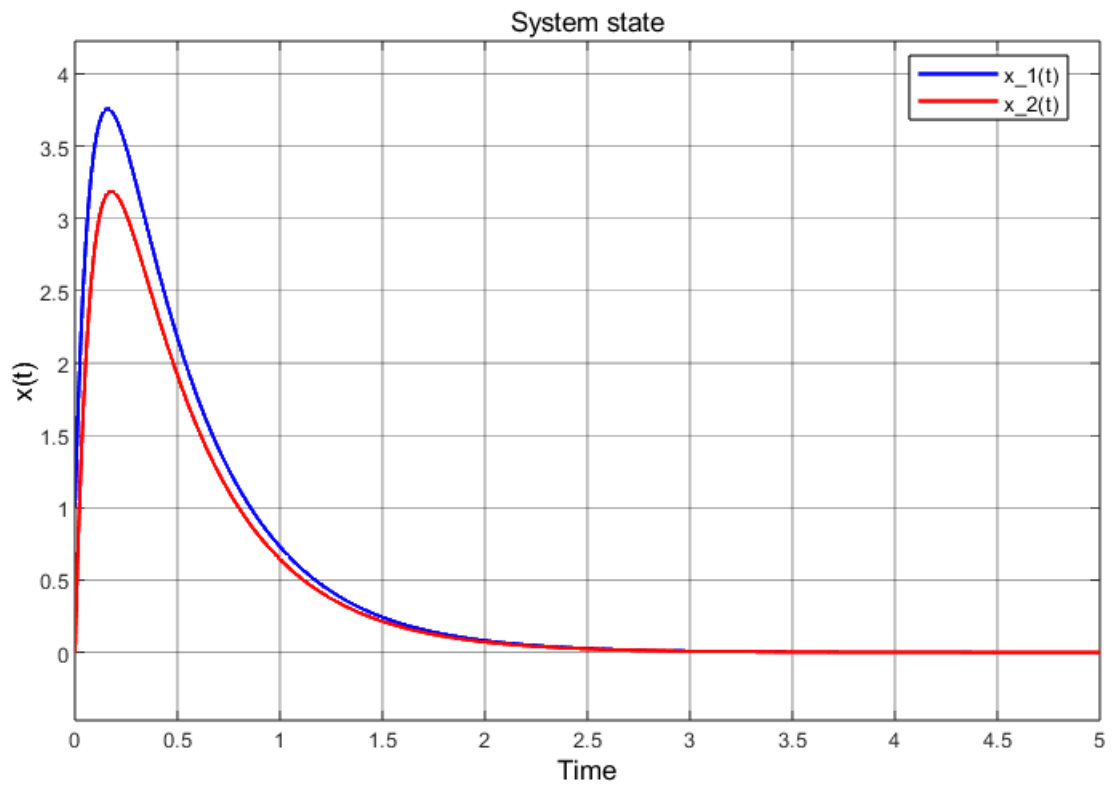


Рис. 2: Вектор состояния объекта $x(t)$, $u = -Kx$

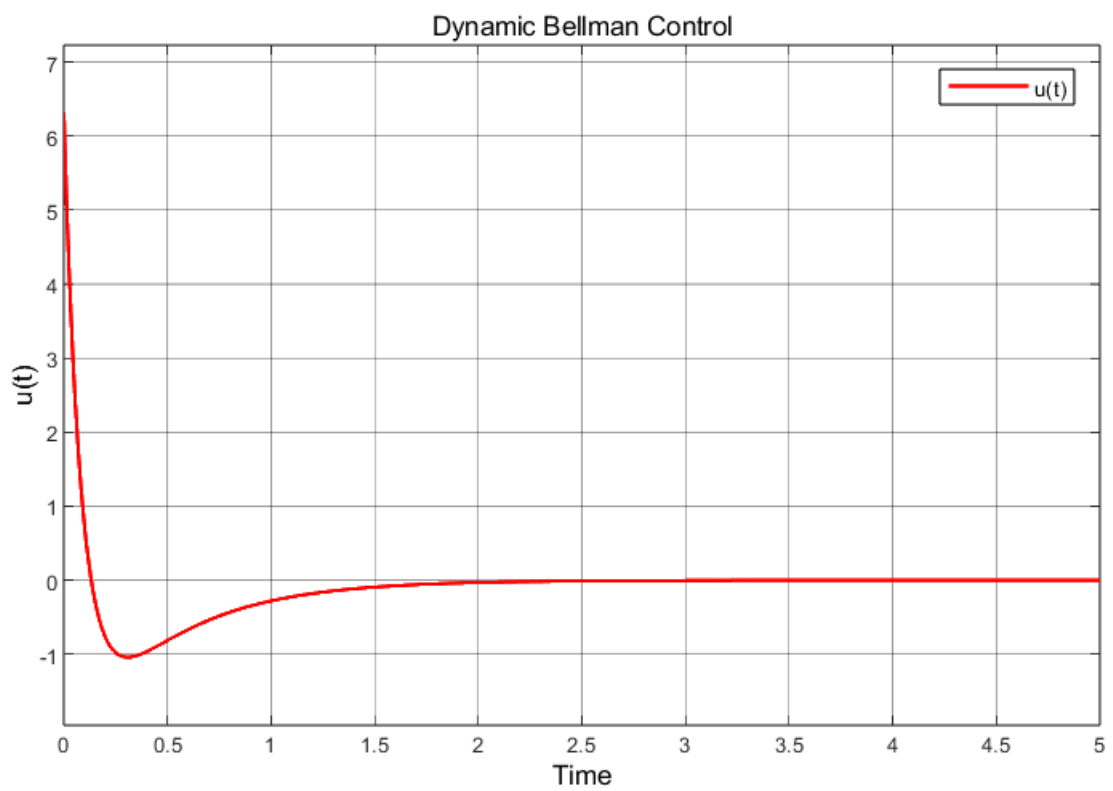


Рис. 3: Управление $u = -Kx$

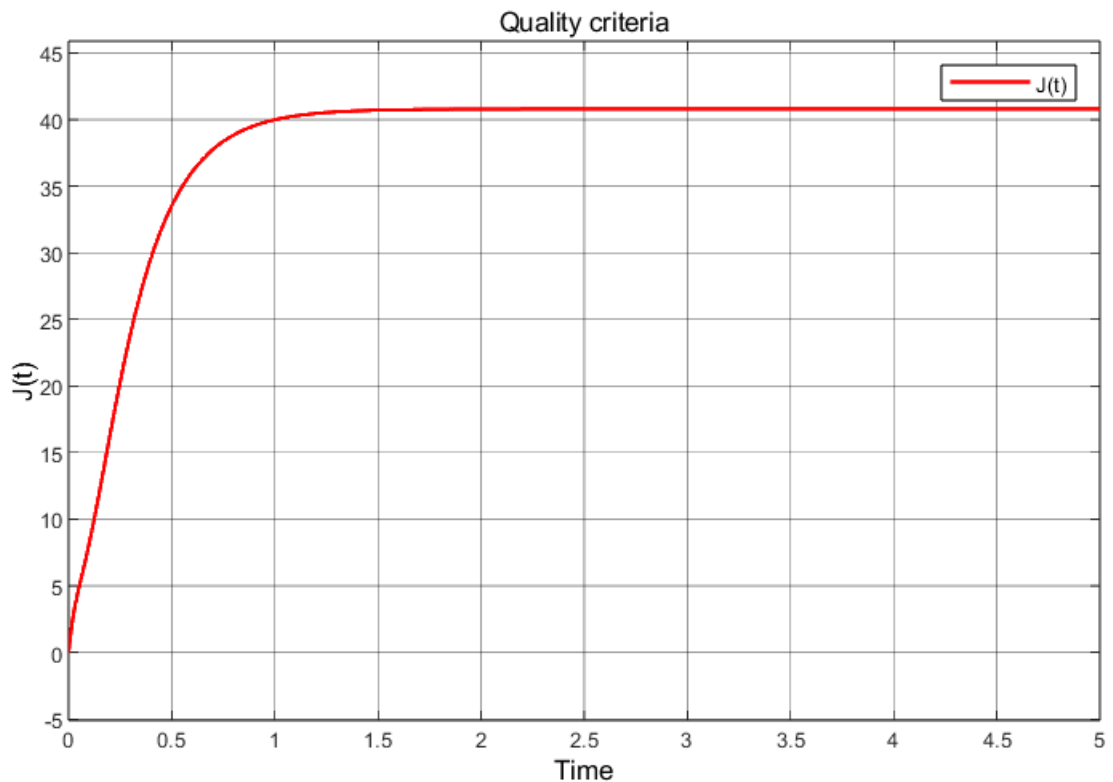


Рис. 4: Критерий качества $J(t)$, $u = -Kx$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило $J = 40.795$.

3.4. Критерий при отклонениях параметров регулятора

Отклоним расчетные значения K на 10%:

$$K_b = 1.1K = \begin{bmatrix} -6.941 & 8.3534 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-2.0589, -13.5937\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

3.5. Моделирование системы с отклонением

Промоделируем систему аналогично предыдущему пункту:

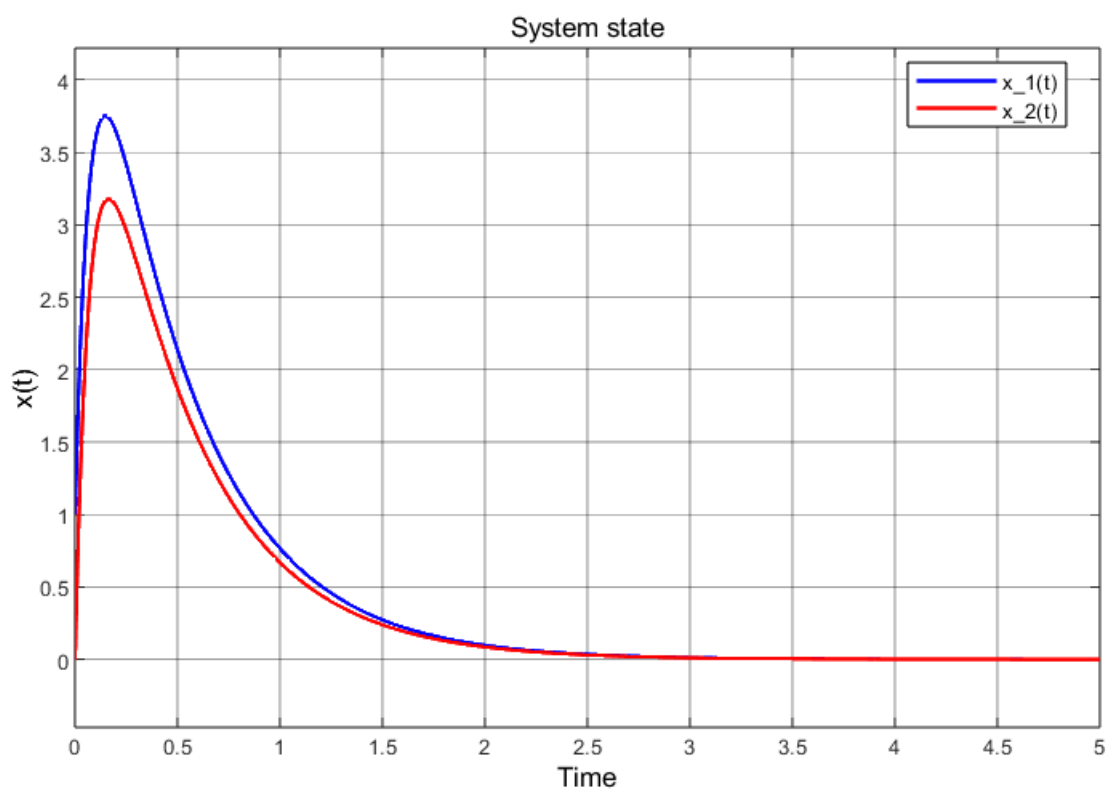


Рис. 5: Вектор состояния объекта $x(t)$, $u = -K_b x$

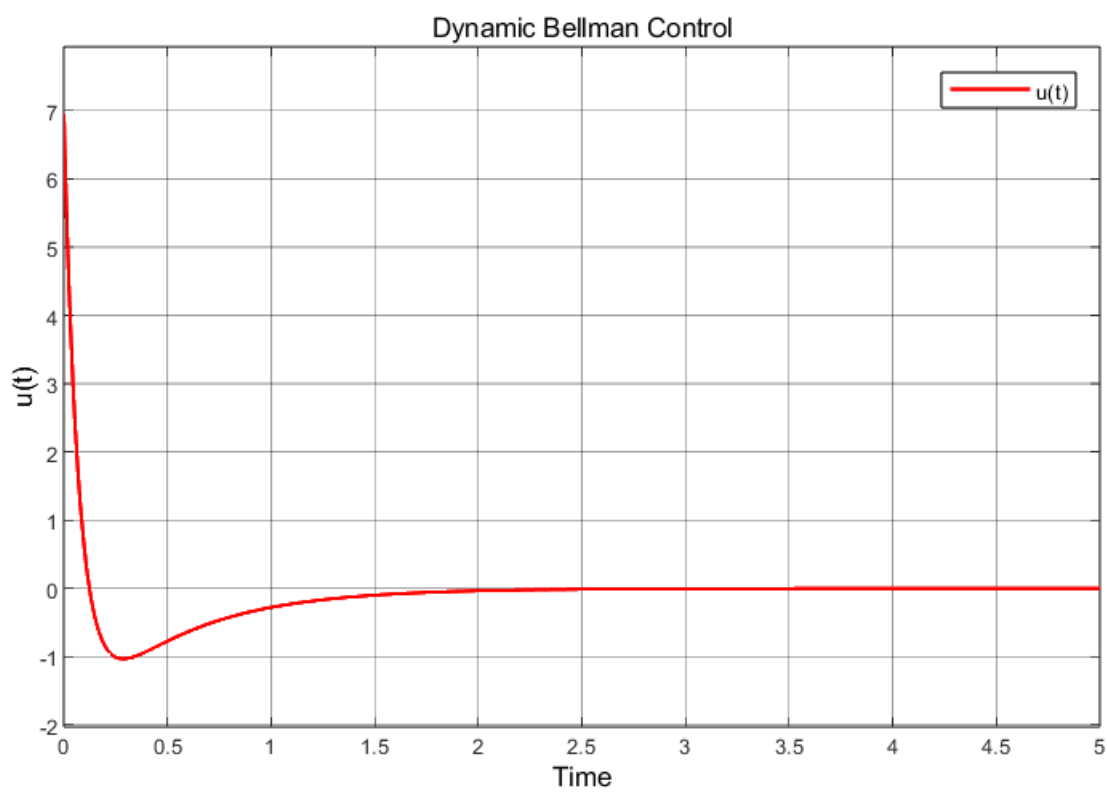


Рис. 6: Управление $u = -K_b x$

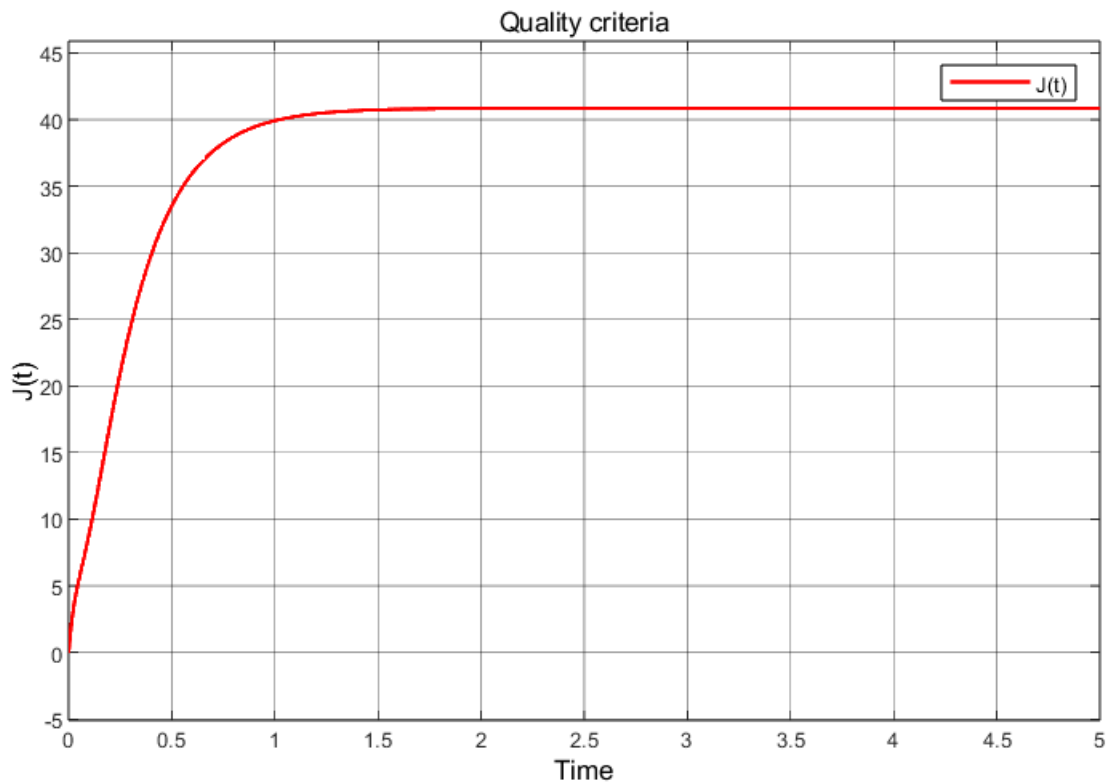


Рис. 7: Критерий качества $J(t)$, $u = -K_b x$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило $J = 40.85$.

С отклоненными параметрами на стабилизацию системы затрачивается несколько больше управления.

Критерий $J_b = 40.85$ отклонился от эталонного $J = 40.795$ на $+0.1348\%$, регулятор остался достаточно эффективным, но менее эффективным, чем в эталонном случае.

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был синтезирован оптимальный регулятор методом динамического программирования Беллмана. В результате получилось алгебраическое уравнение Риккати. Были промоделированы эталонный регулятор и с отклоненными на 10% коэффициентами. Результаты моделирования показали корректность проведенных расчетов и достаточную эффективность обоих регуляторов.