

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

по дисциплине

«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»

на тему

«СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ
ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА»

Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Парамонов А. В.

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1	Цель работы	3
2	Постановка задачи	3
3	Теоретическая часть	3
4	Экспериментальная часть	3
4.1	Исходные данные	3
4.2	Коэффициенты оптимального регулятора	4
4.3	Моделирование замкнутой системы	4
4.4	Коэффициенты оптимального регулятора с отклонением	7
4.5	Моделирование системы с регулятором с отклонением	7
4.6	Исследование параметров r, Q	9
5	Вывод	14

1. Цель работы

Разработать и исследовать оптимальный регулятор для линейного объекта управления на основе решения уравнения Риккати, оценить его эффективность по критерию качества, а также проанализировать влияние параметров регулятора на динамику системы и значение целевого функционала.

2. Постановка задачи

Дан линейный объект:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0)$$

Необходимо рассчитать коэффициенты оптимального регулятора для этого объекта.

3. Теоретическая часть

Структура регулятора $u = -Kx$. Расчет произвести на основе уравнения Риккати

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - Pbr^{-1}b^T P = 0, \\ K = r^{-1}b^T P, \end{cases}$$

и критерия качества вида

$$J = \int_0^{\infty} x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau) d\tau$$

4. Экспериментальная часть

4.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, матрицы A, b, Q :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Параметр $r = 4$.

4.2. Коэффициенты оптимального регулятора

Программа для подсчета K :

```
1 %% plant parameters
2 A=[0 1;
3     -2 4];
4 b=[8;
5     9];
6 Q=[3 0;
7     0 4];
8 r=4;
9 v = 1;
10
11 %% solve Riccati
12 [P,K,e]=icare(A,sqrt(v)*b,Q,r);
13 P
14 K=inv(r)*b'*P
15 eK=eig(A-b*K)
```

Листинг 1: Программа MATLAB для вычисления K через Риккати

Результаты:

$$P \approx \begin{bmatrix} 40.795 & -39.067 \\ -39.067 & 38.101 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -6.310 & 7.594 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-2.1961, -11.6695\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

4.3. Моделирование замкнутой системы

Проведем моделирование замкнутой системы при начальных условиях:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Схема моделирования:

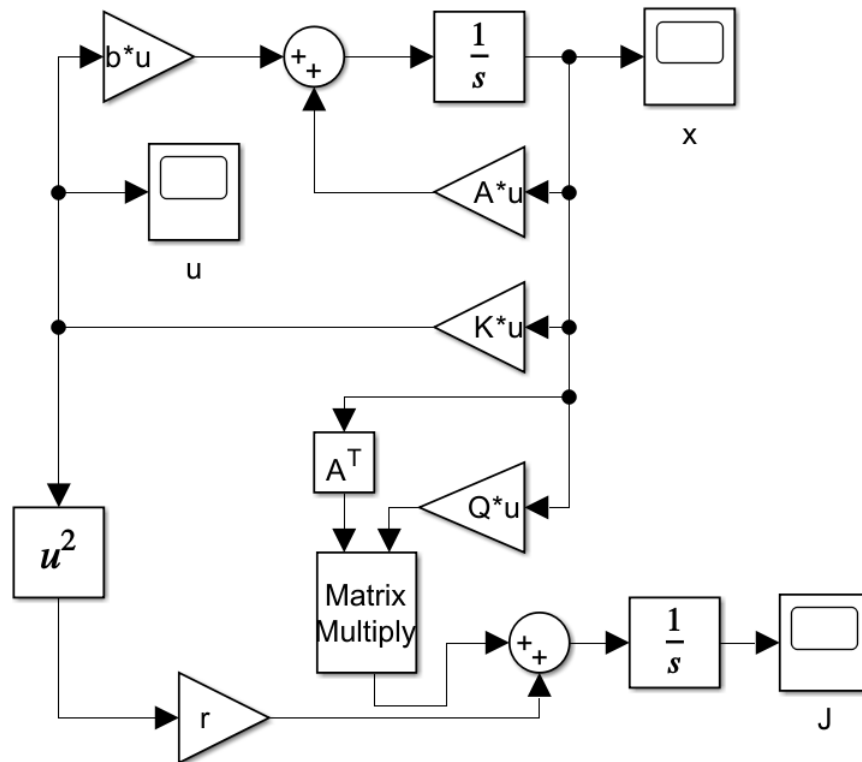


Рис. 1: Схема моделирования замкнутой системы, $u = -Kx$

Результаты моделирования:

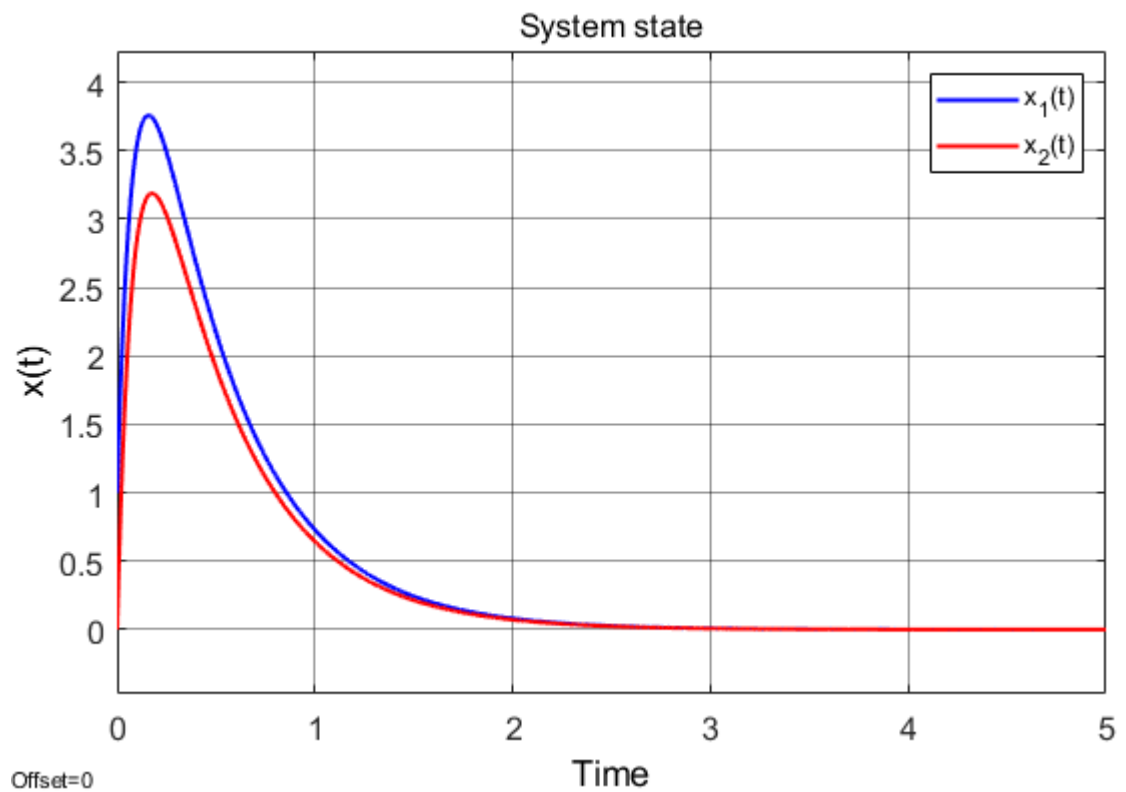


Рис. 2: Вектор состояния объекта $x(t)$, $u = -Kx$

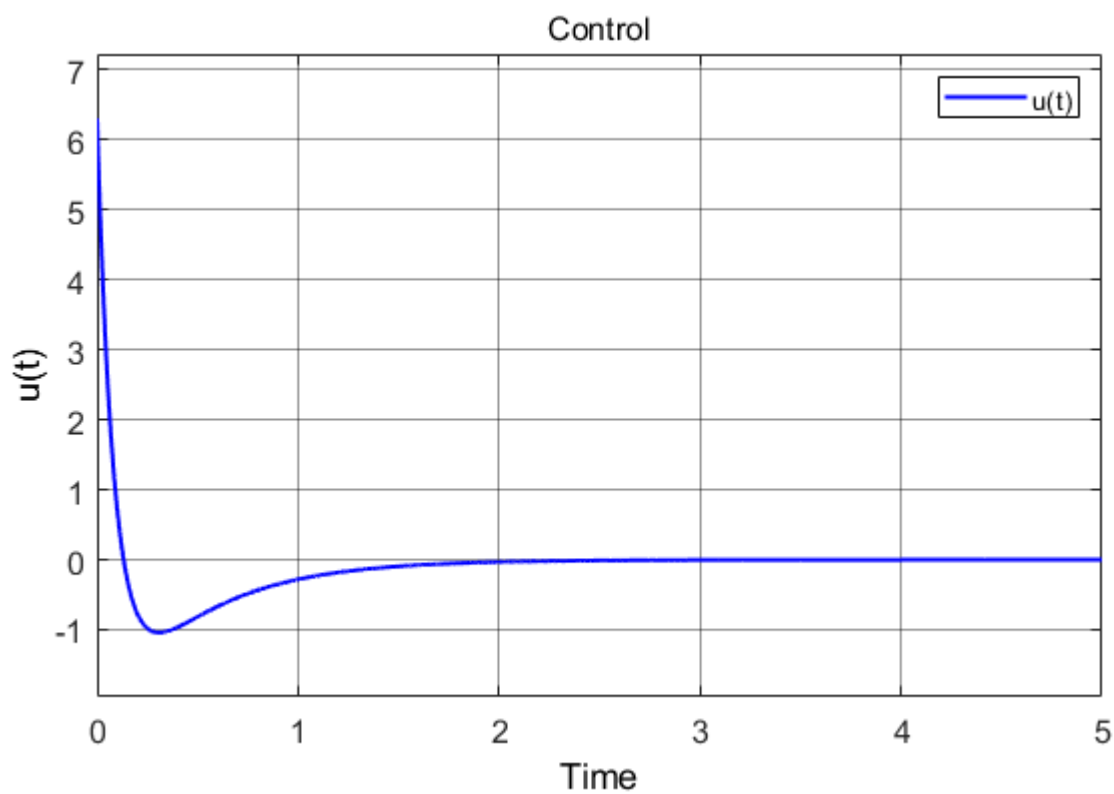


Рис. 3: Управление $u = -Kx$

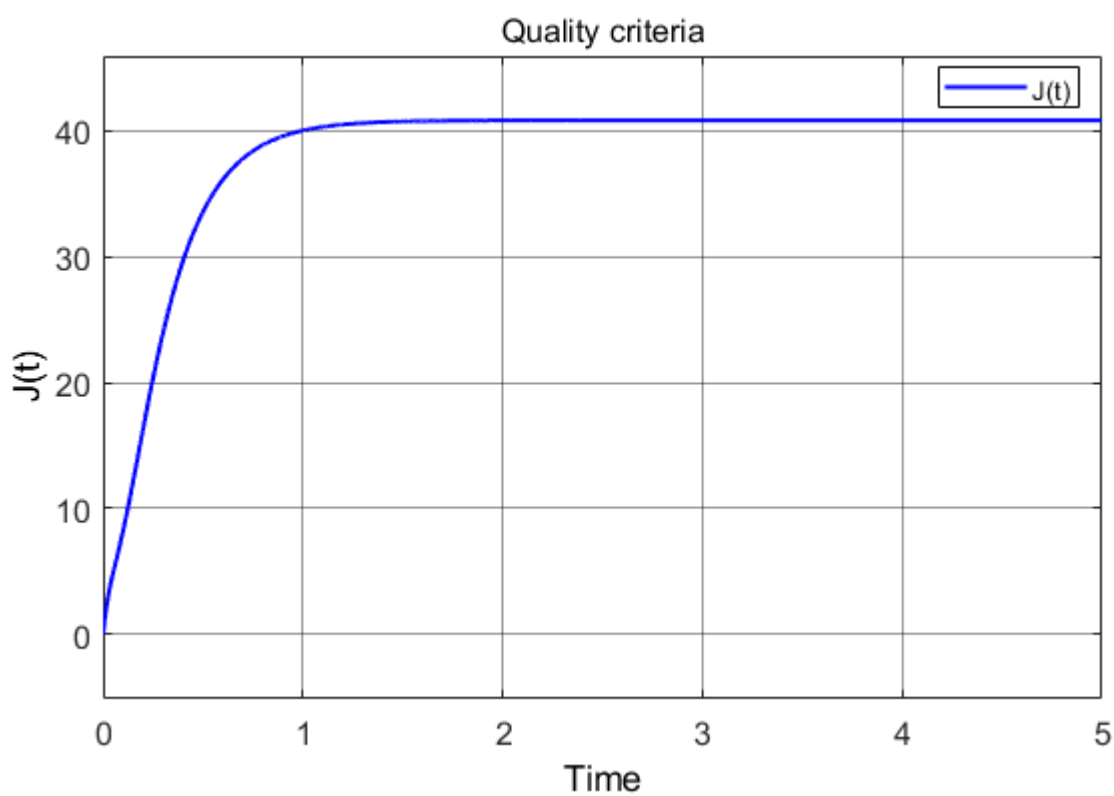


Рис. 4: Критерий качества $J(t)$, $u = -Kx$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило $J = 40.795$.

4.4. Коэффициенты оптимального регулятора с отклонением

Отклоним расчетные значения K на 5%:

$$K_b = 1.05K = \begin{bmatrix} -6.6255 & 7.9737 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK_b) = \{-2.1211, -12.6382\}$$

Замкнутая система осталась асимптотически устойчивой.

4.5. Моделирование системы с регулятором с отклонением

Проведем аналогичное моделирование:

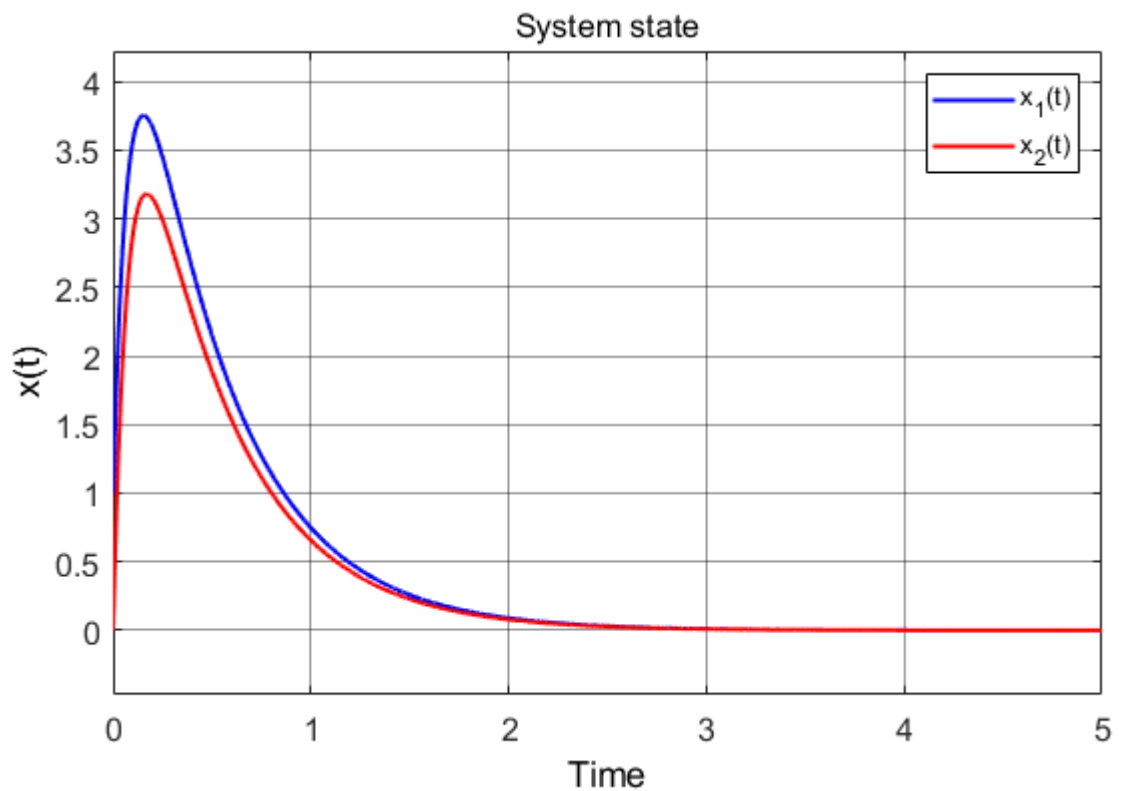


Рис. 5: Вектор состояния объекта $x(t)$, $u = -K_b x$

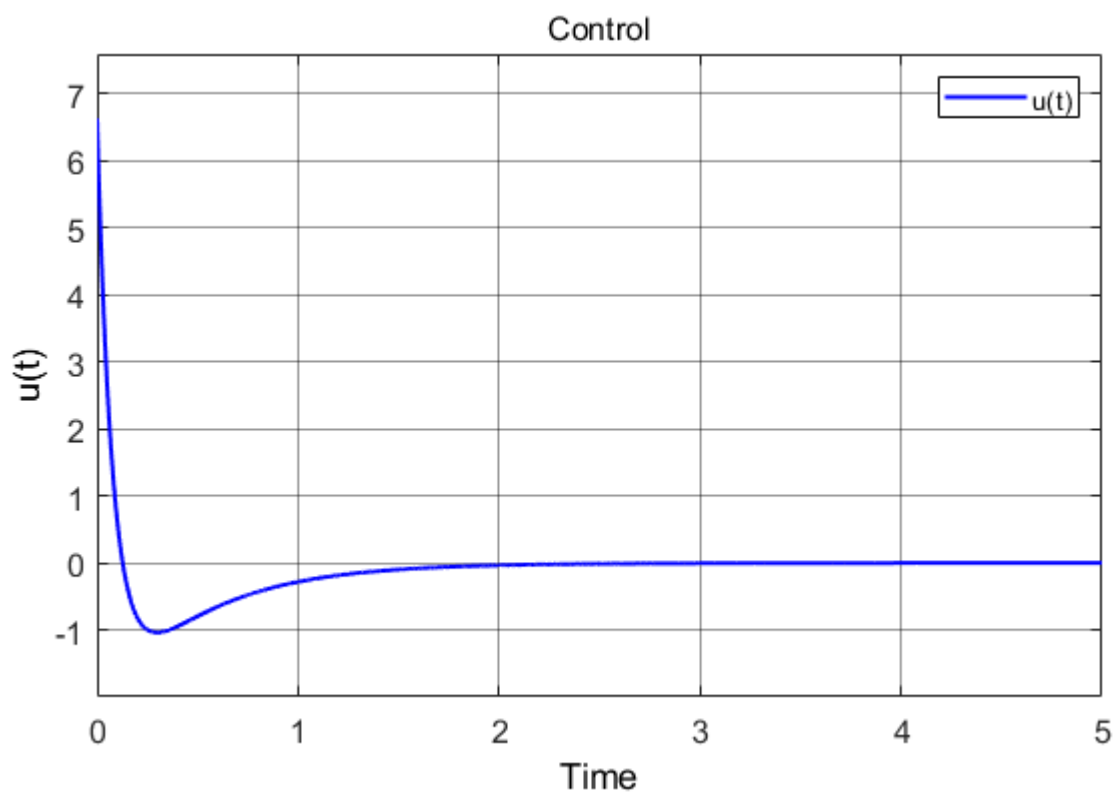


Рис. 6: Управление $u = -K_b x$

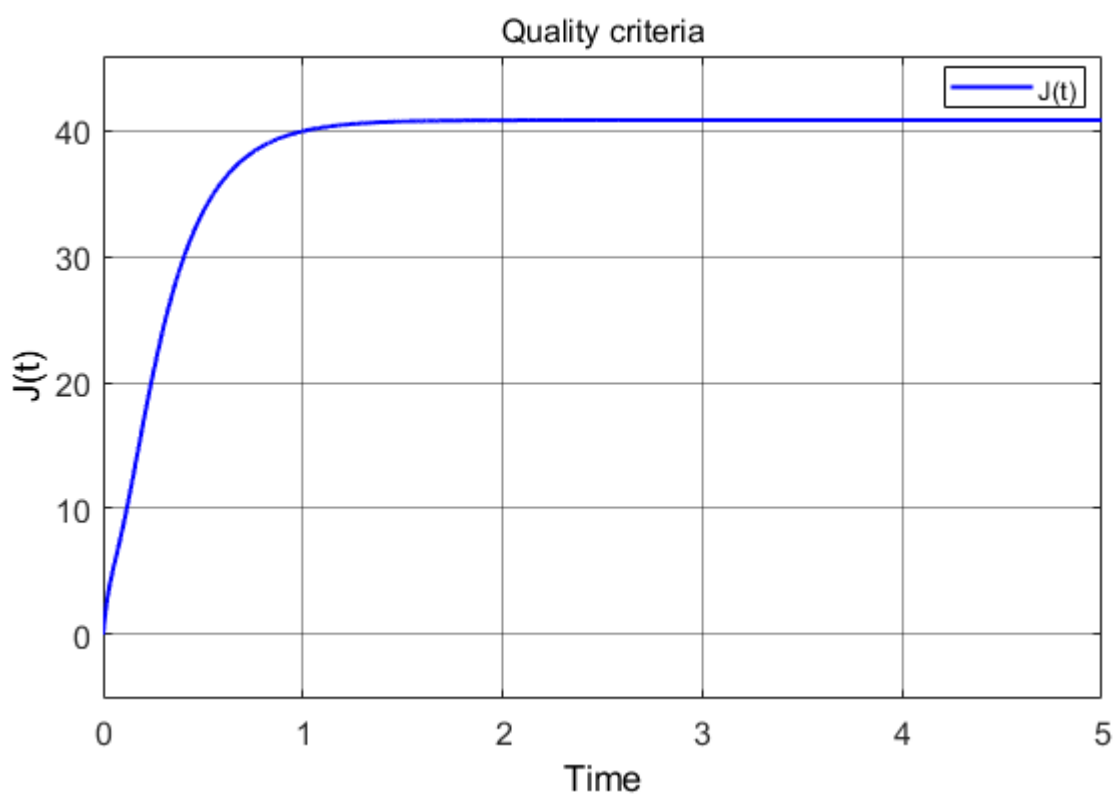


Рис. 7: Критерий качества $J(t)$, $u = -K_b x$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило $J = 40.810$.

Небольшое отклонение коэффициентов оптимального регулятора несколько увеличило установившееся значение критерия качества J : $40.810 > 40.795$, то есть штрафы за отклонение состояния от нуля Q и на затраты на управление r увеличились, регулятор стал менее эффективным.

4.6. Исследование параметров r, Q

Проведем моделирование для параметров $r \in \{1, 4, 10\}$ и $k \in \{0.5, 1, 2\}$:
 $Q_i = k_i Q^*$, Q^* – исходная матрица Q .

Результаты моделирования:

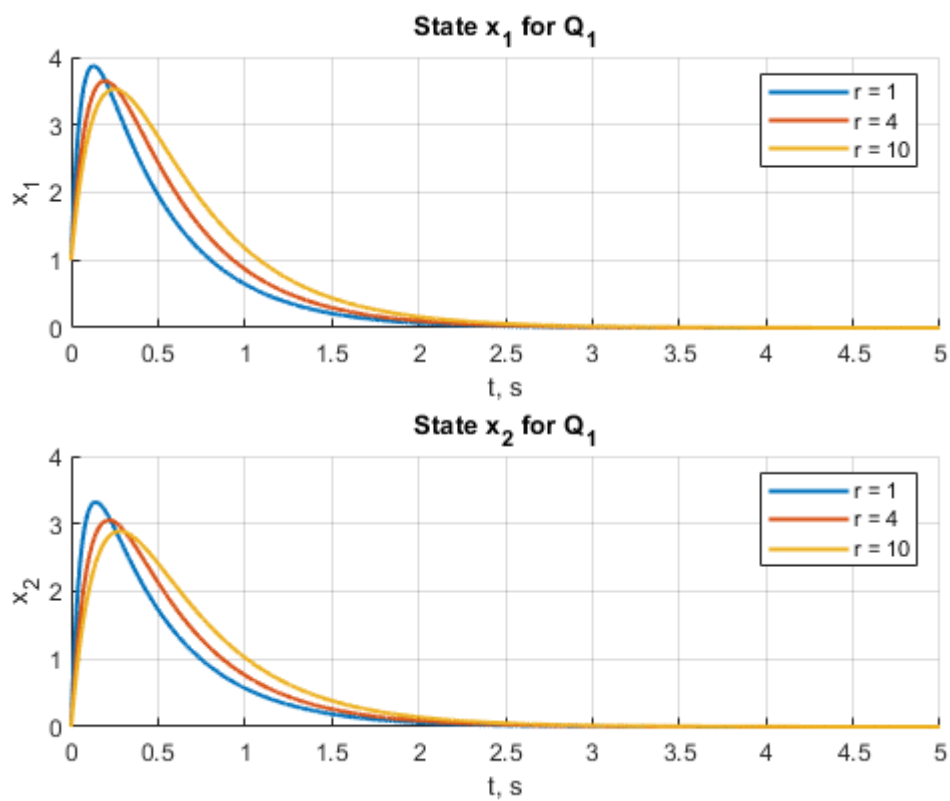


Рис. 8: Вектор состояния объекта $x(t)$, $Q_{j=1}, r_i$

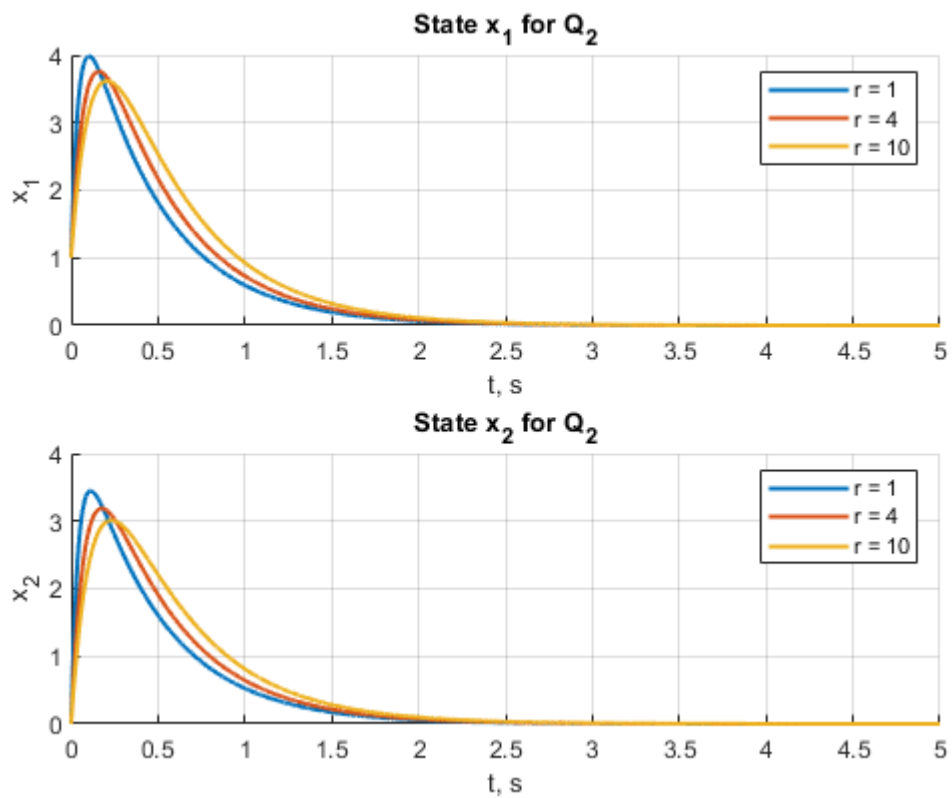


Рис. 9: Вектор состояния объекта $x(t)$, $Q_{j=2}, r_i$

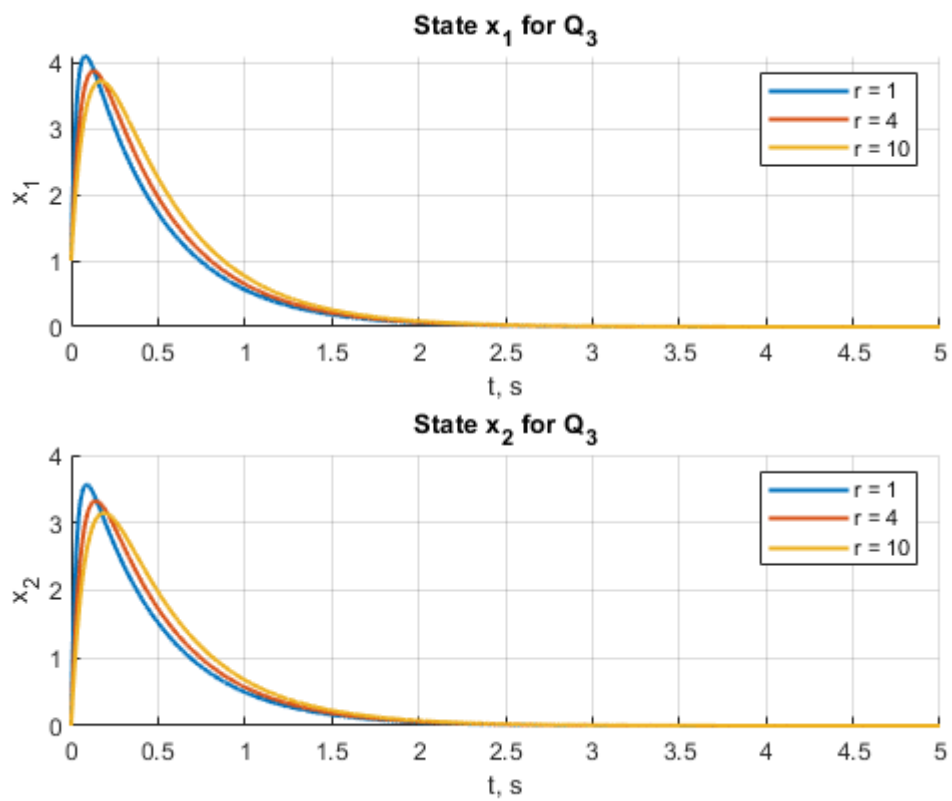


Рис. 10: Вектор состояния объекта $x(t)$, $Q_{j=3}, r_i$

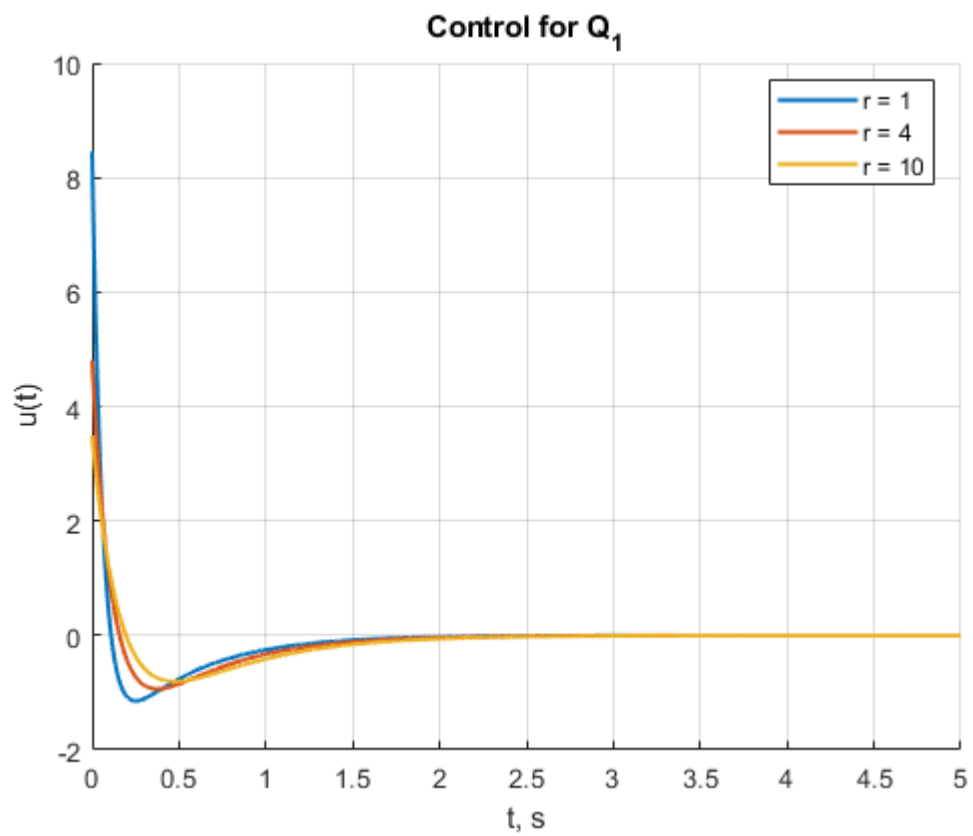


Рис. 11: Управление $u = -K_{j,i}x, Q_{j=1}, r_i$

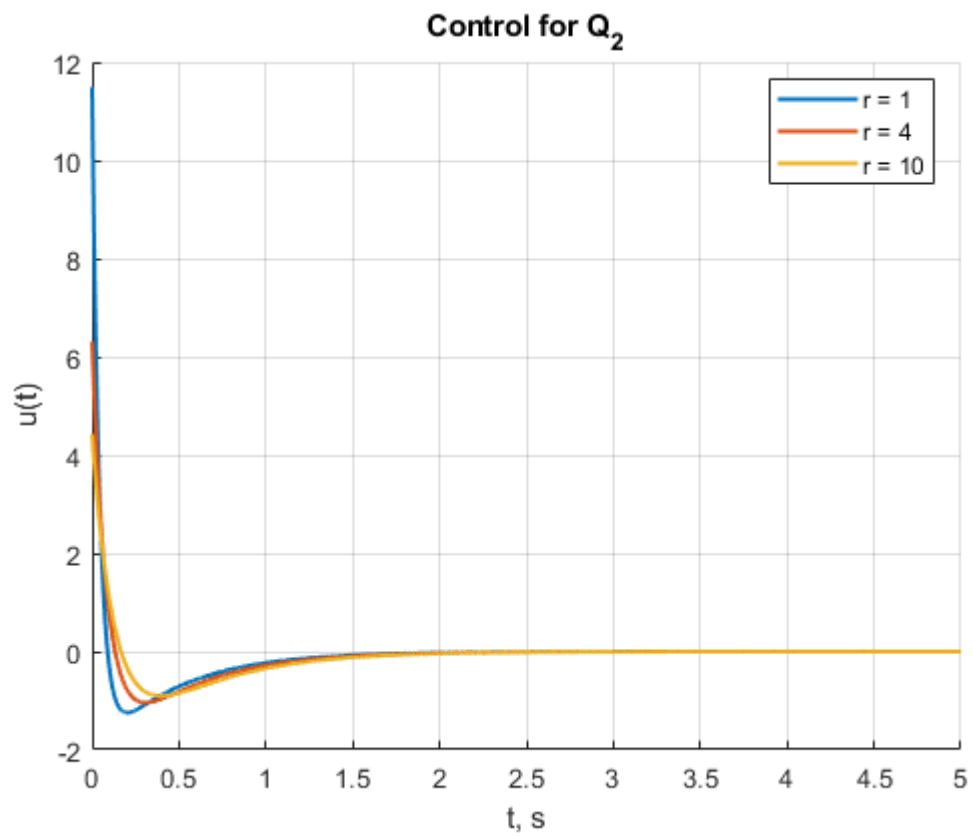


Рис. 12: Управление $u = -K_{j,i}x, Q_{j=2}, r_i$

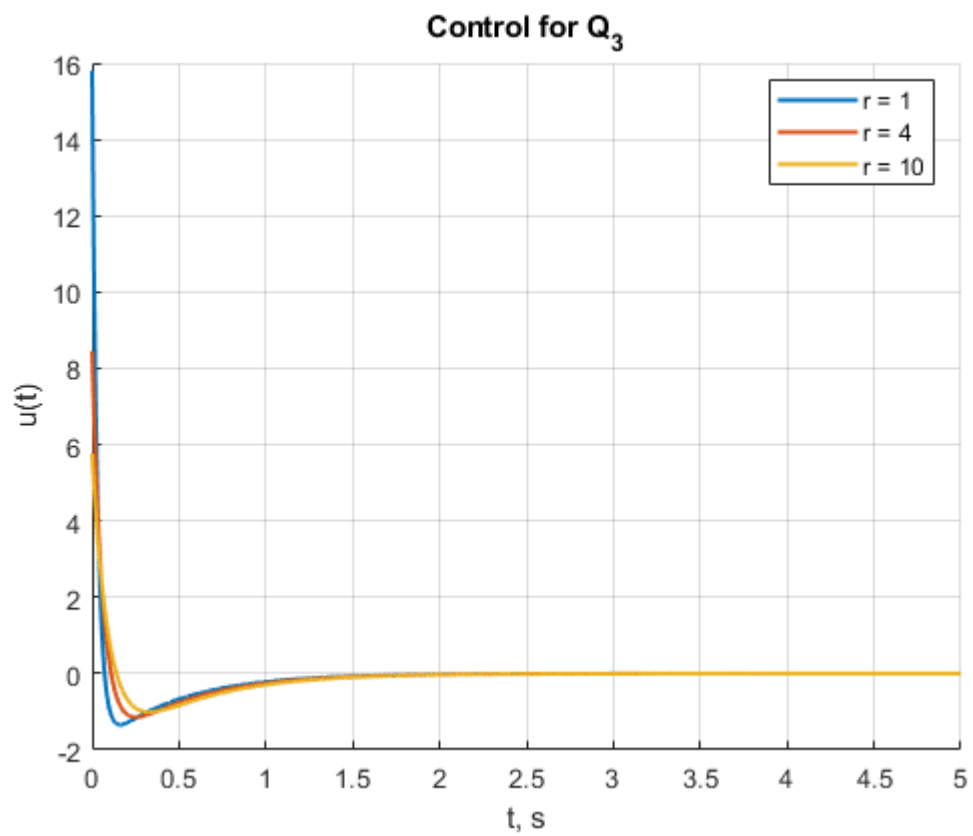


Рис. 13: Управление $u = -K_{j,i}x$, $Q_{j=3}, r_i$

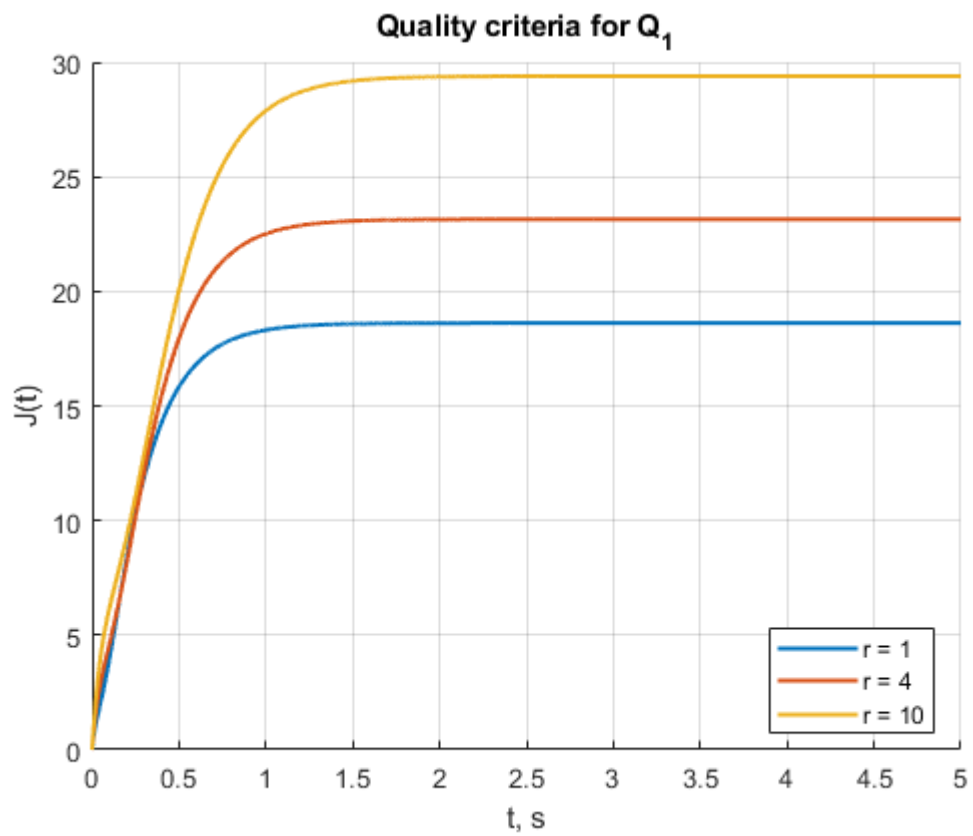


Рис. 14: Критерий качества $J(t)$, $Q_{j=1}, r_i$

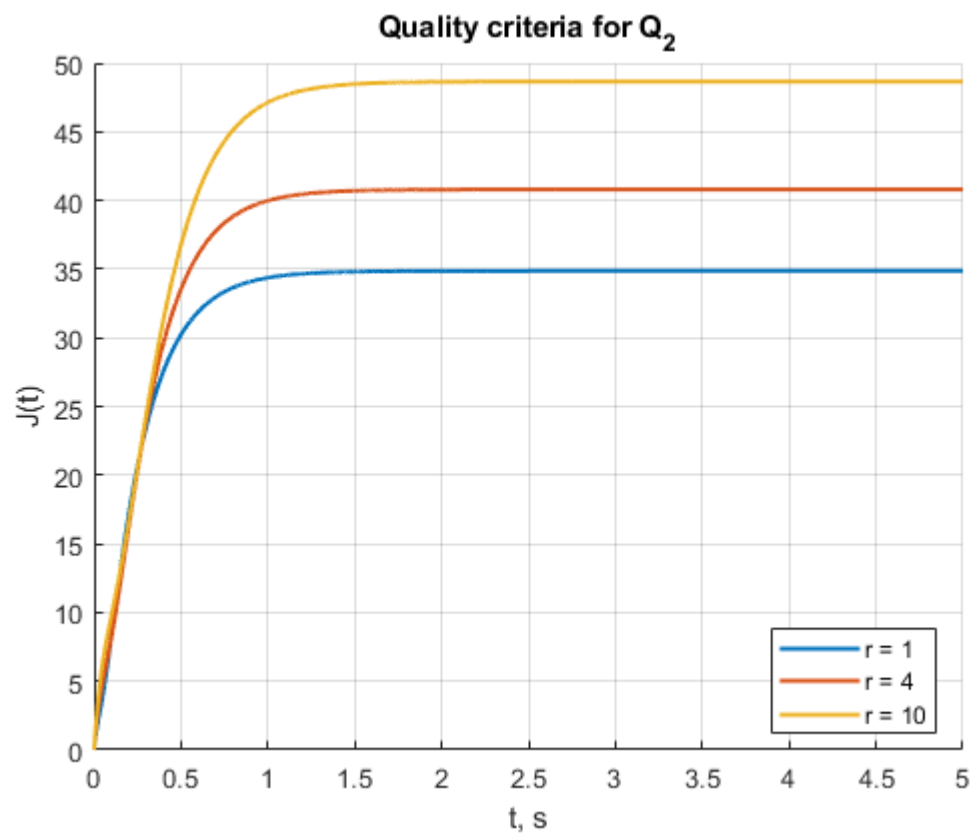


Рис. 15: Критерий качества $J(t)$, $Q_{j=2}, r_i$

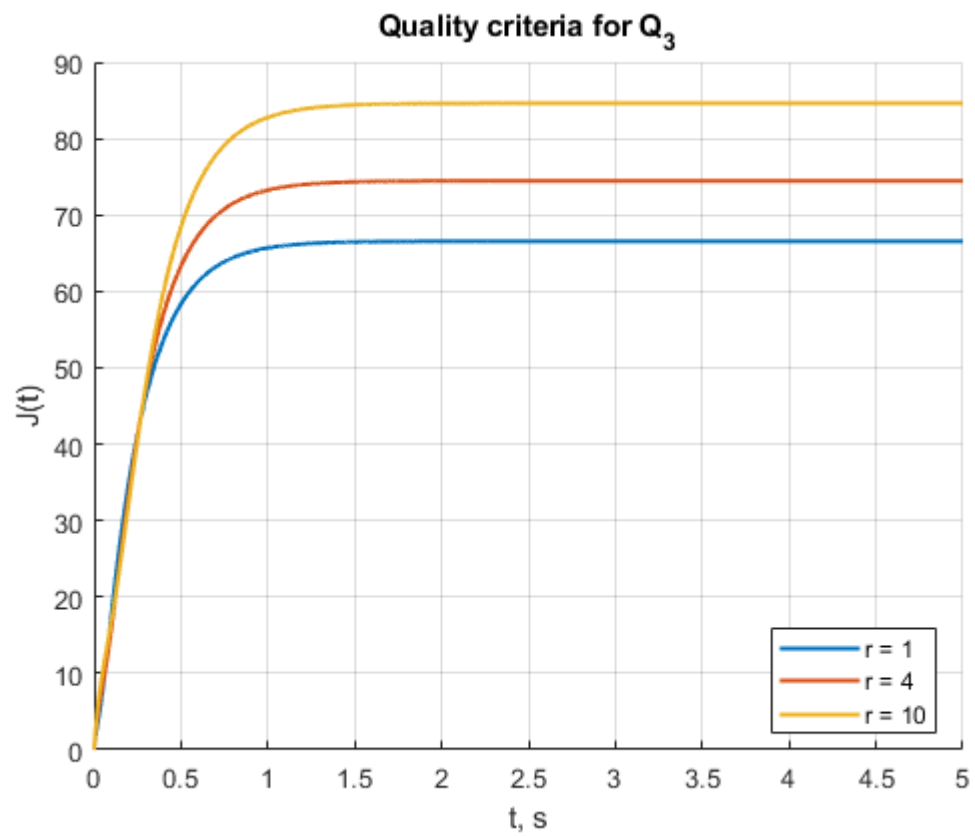


Рис. 16: Критерий качества $J(t)$, $Q_{j=3}, r_i$

Чем меньше штраф на затраты на управление, тем быстрее система сходится к нулю, однако управления затрачивается больше.

Меньше управления затрачивается в обратном случае, когда штраф на затраты на управление больше.

Чем больше штраф на скорость сходимости, тем быстрее система приходит к устоявшемуся состоянию. Однако скорость требует бóльших затрат на управление.

Исходя из графиков, минимальный и максимальный устоявшиеся критерии $J_{\min} \sim 18$, $J_{\max} \sim 84$. Таким образом, оптимальный по времени сходимости и затратам на управление устоявшийся критерий должен быть $J_{\text{opt}} \sim 51$. Самый близкий из рассматриваемых случаев – при $k = 1(Q_{j=2})$, $r = 10$ (см. рис. 15).

5. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был синтезирован оптимальный регулятор. Результаты моделирования показали корректность проведенных расчетов. Небольшое отклонение коэффициентов регулятора приводит к некоторому увеличению критерия качества. Исследование при различных Q, r позволило выбрать наиболее оптимальный регулятор для данной системы в рамках исследуемых k, r .