

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП
МАКСИМУМА»
Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Цель работы	3
2	Постановка задачи	3
3	Экспериментальная часть	3
3.1	Исходные данные	3
3.2	Синтез оптимального управления	3
3.3	Критерий при отклонениях параметра	5
4	Вывод	9
А	Приложение	9
Б	Приложение	9

1. Цель работы

Исследовать метод динамической оптимизации и синтезировать оптимальное управление, обеспечивающее минимум функционала качества.

2. Постановка задачи

Дан объект, критерий, начальные условия и ограничения. Необходимо:

1. Построить оптимальный в смысле заданного критерия регулятор и промоделировать его работу на заданном интервале времени;
2. Построить графики управления, переменных состояния и критерия;
3. Рассчитать критерий при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений.

3. Экспериментальная часть

3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, объект:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -8x_1 + u \end{cases}$$

Критерий:

$$J = \int_0^3 u^2(\tau) d\tau$$

Начальные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Ограничения:

$$x_1(3) = 5, \quad x_2(3) = 0$$

3.2. Синтез оптимального управления

Гамильтониан:

$$H = \varphi_0 u^2 + \varphi \dot{x},$$

где φ_i – динамические множители Лагранжа. Примем $\varphi_0 = -1$. Так как у объекта два состояния, Гамильтониан:

$$H = -u^2 + \varphi_1 \dot{x}_1 + \varphi_2 \dot{x}_2 = -u^2 + \varphi_1 x_2 + \varphi_2 (-8x_1 + u)$$

Система уравнений Эйлера-Лагранжа (принцип максимума Понтрягина):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 8\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1, \\ -2u + \varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 8\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1, \\ u = \frac{1}{2}\varphi_2 \end{cases}$$

Задействуем уравнение объекта $\dot{x} = Ax + Bu$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 8\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\varphi_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -8x_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 \end{cases}$$

В матричном виде (форма Коши):

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Решение системы в Maple:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = 43.446 \sin(2.823t) - 26.645 \cos(2.823t), \\ \varphi_2(t) = 15.36 \cos(2.823t) + 9.42 \sin(2.823t), \\ x_1(t) = 1.358 \sin(2.823t)t - 0.833 \cos(2.823t)t + 0.294 \sin(2.823t), \\ x_2(t) = 3.84 \cos(2.823t)t + 2.355 \sin(2.823t)t + 1.358 \sin(2.823t) \end{cases}$$

Построим графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$:

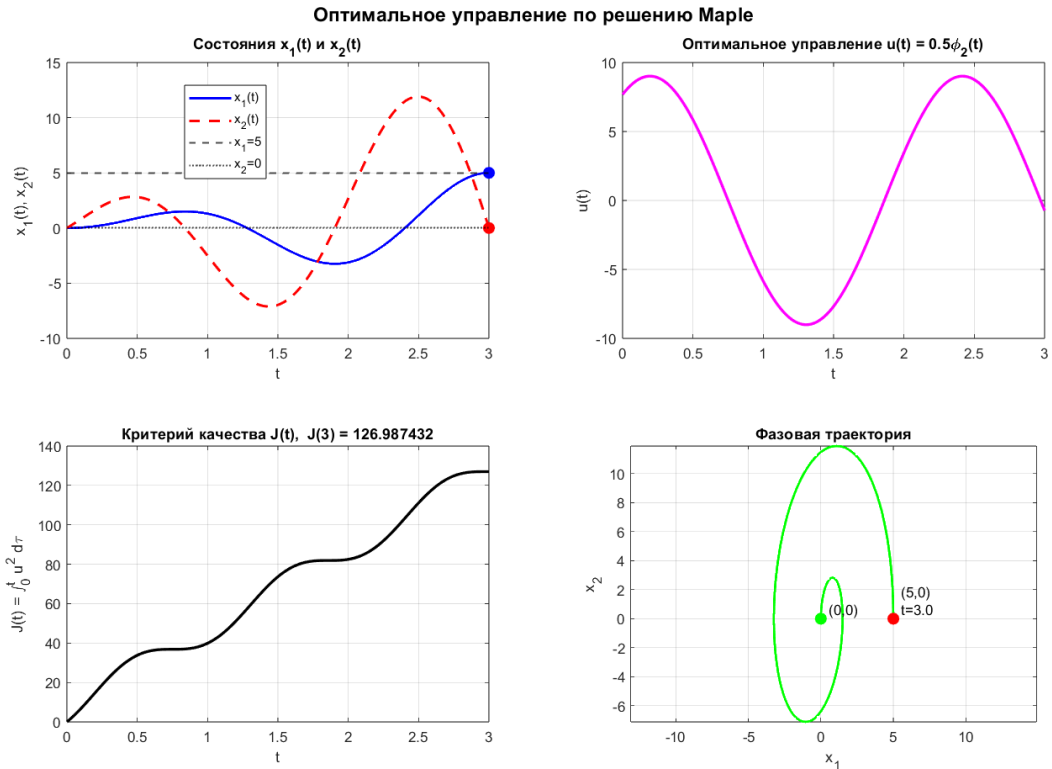


Рис. 1: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$

Система сошлась к ограничениям $x_1(3) = 5, x_2(3) = 0$, при этом $J(3) = 126.987$.

3.3. Критерий при отклонениях параметра

Рассчитаем критерий и построим графики при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений – исследуем влияние отклонения коэффициента k в законе управления $u = k\varphi_2, k \in \{0.05, 0.1, 0.25, 0.75, 1\}$.

Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ для различных k :

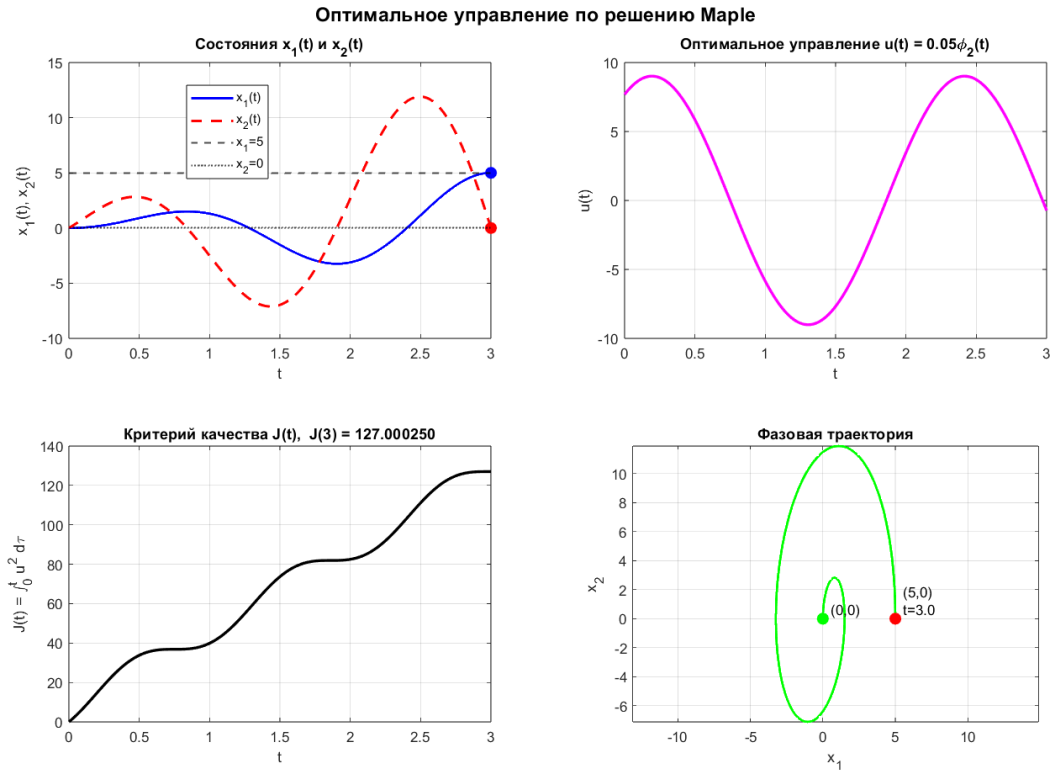


Рис. 2: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ при $k = 0.05$

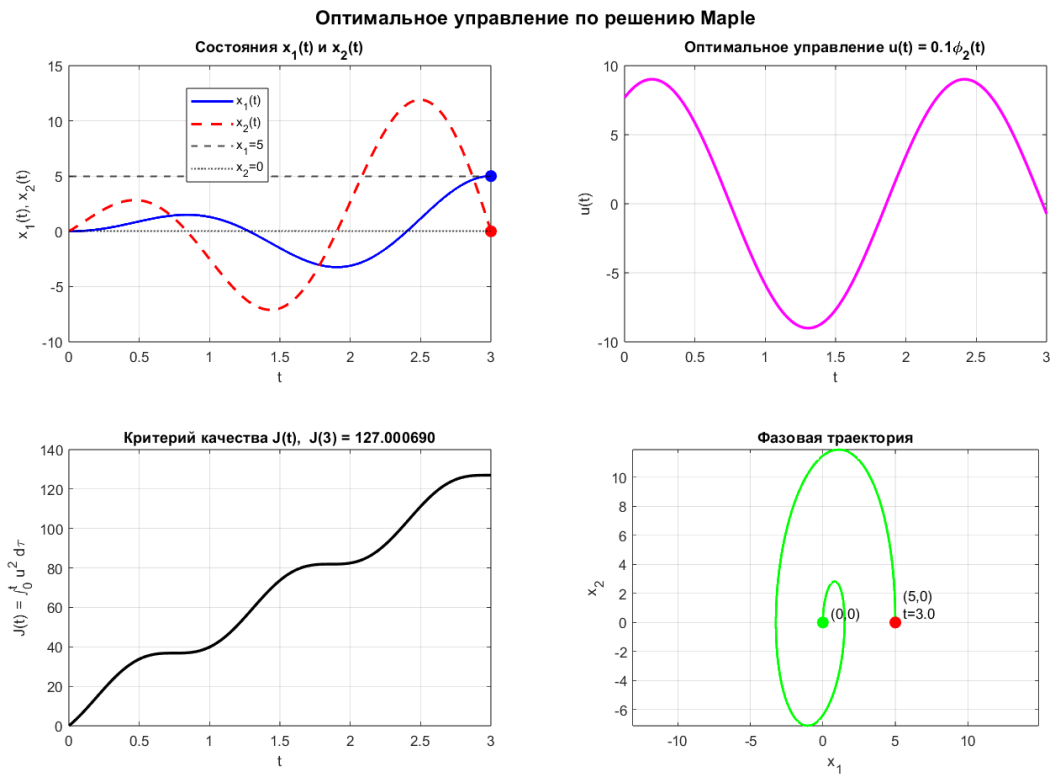


Рис. 3: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ при $k = 0.1$

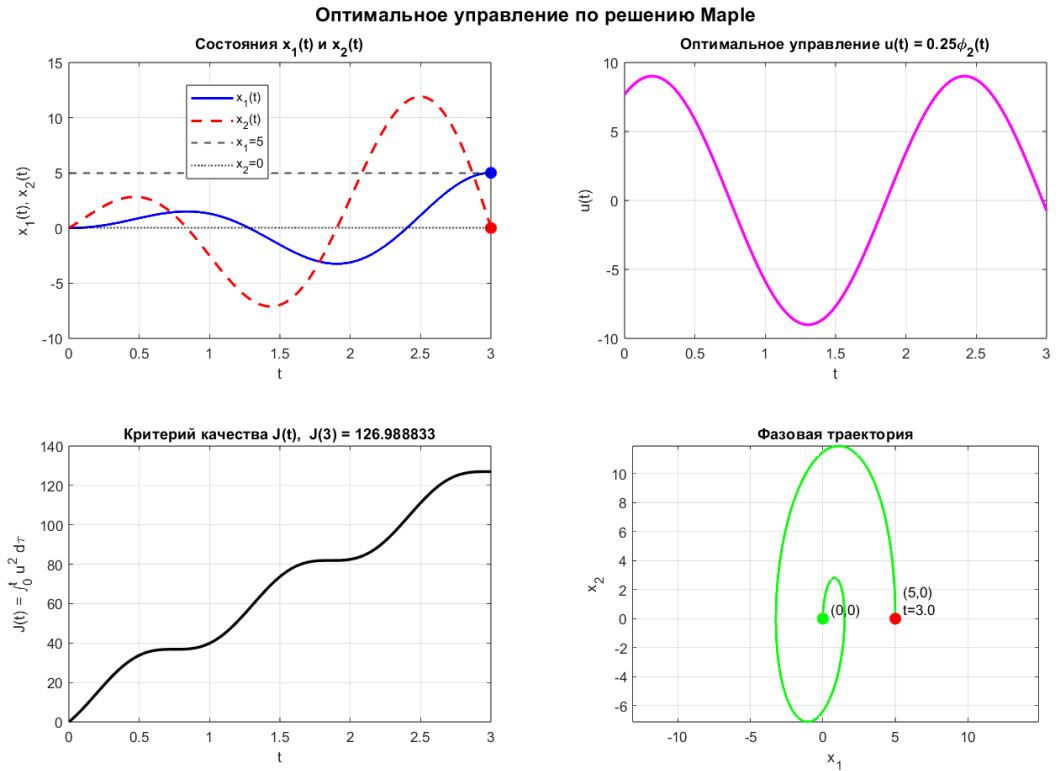


Рис. 4: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ при $k = 0.25$

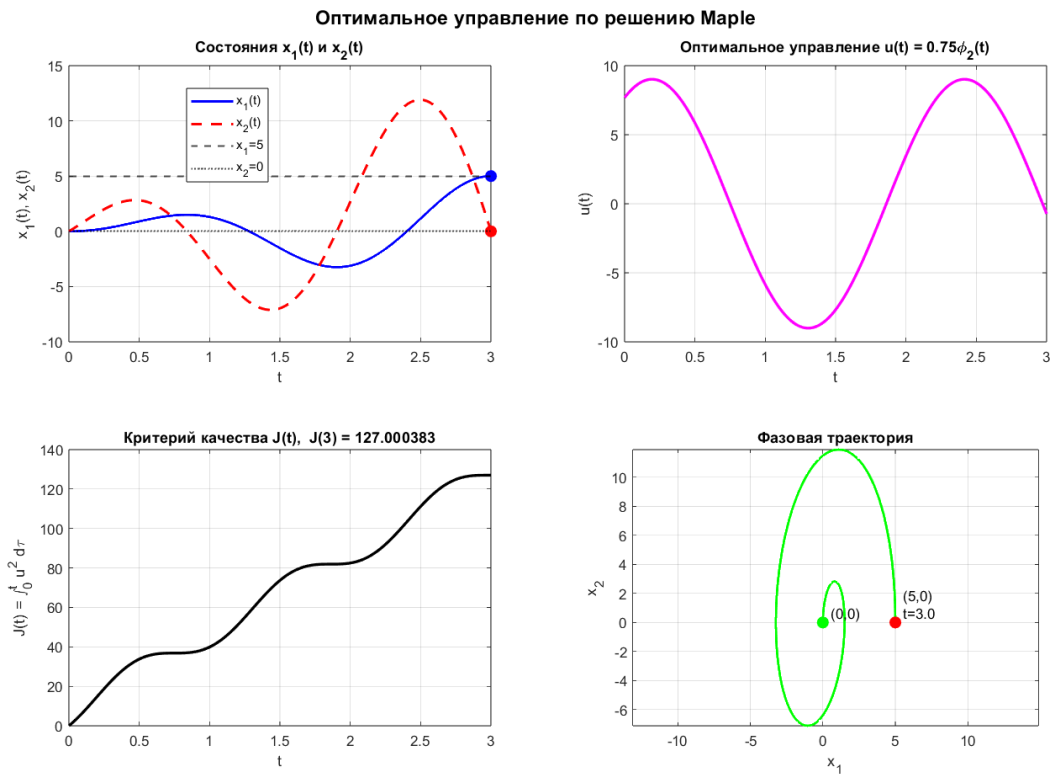


Рис. 5: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ при $k = 0.75$

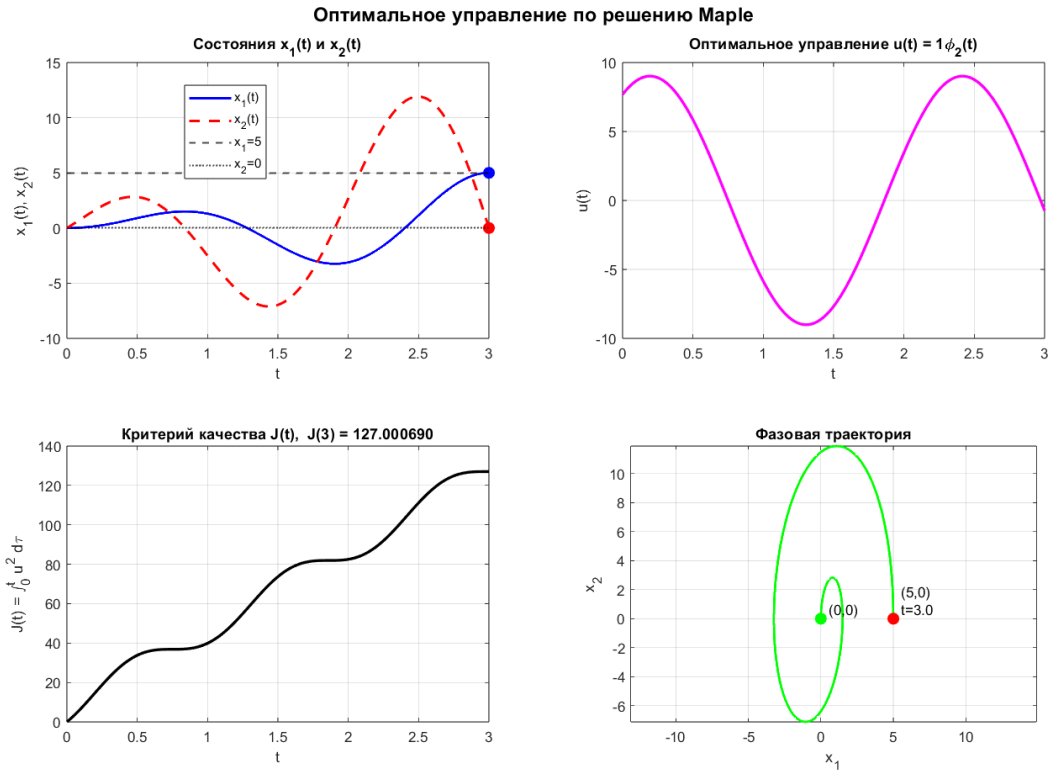


Рис. 6: Графики $x(t)$, $u(t)$, $J(t)$ при $k = 1$

Таблица сравнения значения критерия

$$J_k = \int_0^3 u^2(\tau) d\tau$$

при различных k :

k	$J(3)$	Отклонение, %	Примечание
0.05	127.000250	+0.0101	
0.10	127.000690	+0.0104	
0.25	126.988833	+0.0011	
0.50	126.987432	0.0000	эталон (оптимальное k)
0.75	127.000383	+0.0102	
1.00	127.000690	+0.0104	

Таблица 1: Сравнение значения критерия $J(3)$ при различных коэффициентах усиления k

Значение критерия отклоняется несильно от эталона при изменении коэффициента управления k . Состояния сходятся в те же точки, что и эталонная модель.

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был исследован метод динамической оптимизации – принцип максимума Понтрягина. Был синтезирован оптимальный в смысле заданного критерия регулятор и промоделирована система с ним. Результаты сошлись с ожидаемыми значениями. Изменение коэффициента при управлении незначительно влияет на значение критерия, при этом состояния сходятся в те же точки, как в эталонном случае.

А. Приложение

```
1 evalf[5](dsolve({diff(f1(t), t) = 8*f2(t), ...
2 diff(f2(t), t) = -f1(t), ...
3 diff(x1(t), t) = x2(t), ...
4 diff(x2(t), t) = -8*x1(t) + 0.5*f2(t), ...
5 x1(0) = 0, x1(3) = 5, x2(0) = 0, x2(3) = 0}, ...
6 {f1(t), f2(t), x1(t), x2(t)}))
```

Листинг 1: Программа для решения системы

Б. Приложение

```
1 clear; clc; close all;
2
3 omega = 2.8284;
4
5 t = linspace(0, 3, 1000);
6
7 % coef = 0.5;
8 % phi1 = 43.446 * sin(omega*t) - 26.645 * cos(omega*t);
9 % phi2 = 15.360 * cos(omega*t) + 9.4202 * sin(omega*t);
10
11 % coef = 0.05;
12 % phi1 = 434.50 * sin(omega*t) - 266.41 * cos(omega*t);
13 % phi2 = 153.62 * cos(omega*t) + 94.190 * sin(omega*t);
14
15 % coef = 0.1;
16 % phi1 = 217.25 * sin(omega*t) - 133.21 * cos(omega*t);
17 % phi2 = 76.808 * cos(omega*t) + 47.098 * sin(omega*t);
```

```

18
19 % coef = 0.25;
20 % phi1 = 86.899 * sin(omega*t) - 53.283 * cos(omega*t);
21 % phi2 = 30.722 * cos(omega*t) + 18.838 * sin(omega*t);
22
23 % coef = 0.75;
24 % phi1 = 28.966 * sin(omega*t) - 17.762 * cos(omega*t);
25 % phi2 = 10.241 * cos(omega*t) + 6.2798 * sin(omega*t);
26
27 coef = 1;
28 phi1 = 21.725 * sin(omega*t) - 13.321 * cos(omega*t);
29 phi2 = 7.6808 * cos(omega*t) + 4.7098 * sin(omega*t);
30
31 u = coef * phi2;
32
33 % 0.05, 0.1, 0.25, 0.5
34 x1 = 1.3578 * t .* sin(omega*t) ...
35       - 0.83254 * t .* cos(omega*t) ...
36       + 0.29434 * sin(omega*t);
37
38 x2 = 3.8405 * t .* cos(omega*t) ...
39       + 2.3548 * t .* sin(omega*t) ...
40       + 1.3578 * sin(omega*t);
41
42 J = cumtrapz(t, u.^2);
43
44 figure('Position',[100,100,1200,800]);
45
46 subplot(2,2,1);
47 plot(t, x1, 'b-', 'LineWidth', 1.8); hold on;
48 plot(t, x2, 'r--', 'LineWidth', 1.8);
49 yline(5, '--k', 'LineWidth', 1.2);
50 yline(0, ':k', 'LineWidth', 1.2);
51
52 plot(3, x1(end), 'bo', ...
53       'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor','b');
54 plot(3, x2(end), 'ro', ...
55       'MarkerSize', 8, 'MarkerFaceColor','r');
56 xlabel('t'); ylabel('x_1(t), x_2(t)');
57 title('State x_1(t) and x_2(t)');
58 legend('x_1(t)', 'x_2(t)', ...

```

```

59         'x_1=5', 'x_2=0', 'Location','best');
60 grid on;
61
62 subplot(2,2,2);
63 plot(t, u, 'm-', 'LineWidth', 2);
64 xlabel('t'); ylabel('u(t)');
65 title(['Optimal control u(t) = ', ...
66        num2str(coef), '\phi_2(t)']);
67 grid on;
68
69 subplot(2,2,3);
70 plot(t, J, 'k-', 'LineWidth', 2);
71 xlabel('t'); ylabel('J(t) = \int_0^t u^2 d\tau');
72 title(['Quality criteria J(t), J(3) = ', ...
73        num2str(J(end), '%.6f')]);
74 grid on;
75
76 subplot(2,2,4);
77 plot(x1, x2, 'g-', 'LineWidth', 1.8); hold on;
78 plot(x1(1), x2(1), 'go', ...
79        'MarkerFaceColor','g', 'MarkerSize',8);
80 plot(x1(end), x2(end), 'ro', ...
81        'MarkerFaceColor','r', 'MarkerSize',8);
82 text(x1(1), x2(1), ' (0,0)', ...
83        'FontSize',10, 'VerticalAlignment','bottom');
84 text(x1(end), x2(end), ...
85        sprintf(' (5,0)\n t=%.1f', t(end)), ...
86        'FontSize',10, 'VerticalAlignment','bottom');
87 xlabel('x_1'); ylabel('x_2');
88 title('Phase trajectory');
89 grid on; axis equal;
90
91 sgtitle('Optimal control considering Maple solution', ...
92        'FontSize',14, 'FontWeight','bold');
93
94 fprintf('Final values:\n');
95 fprintf('x1(3) = %.6f (must be 5)\n', x1(end));
96 fprintf('x2(3) = %.6f (must be 0)\n', x2(end));
97 fprintf('u(3) = %.6f\n', u(end));
98 fprintf('J(3) = %.6f\n', J(end));

```

Листинг 2: Программа для построения графиков