МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

по дисциплине

«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»

на тему

«ПОИСК МИНИМУМА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ СТАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ»

Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441

Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель

Парамонов А. В.

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1. Цель работы

Исследовать методы статической оптимизации и найти минимум критерия качества $J(x, u)$.

2. Постановка задачи

Дан критерий качества $J(x, u)$ и ограничение $c(x, u)$. Необходимо:

1. Найти глобальный минимум $J(x, u)$ на основе необходимого и достаточного условий экстремума:
   (a) Без ограничений;
   (b) С ограничением в виде равенства $c(x, u) = 0$;
   (c) С ограничением в виде неравенства $c(x, u) \leq 0$.
2. Осуществить градиентный поиск минимума критерия качества $J_1(x, u) = J(x, u)$:
   (a) Методом Ньютона-Рафсона произвести пошаговый расчет экстремума.
   (b) Методом наискорейшего спуска для двух различных γ (соответствующих колебательной и апериодической сходимостям) произвести пошаговый расчет экстремума.

3. Экспериментальная часть

3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, критерий качества:

$$J(x, u) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7$$

Ограничение:

$$c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2$$

3.2. Поиск глобального минимума

3.2.1. Без ограничений

Градиент критерия:

$$\operatorname{grad} J(x,u) = \nabla J(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(x,u)}{\partial x} \\ \frac{\partial J(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x+6u+9 \\ 6x+6u+2 \end{bmatrix}$$

Приравняем производные к нулю и найдем x, u:

$$\begin{cases} 8x+6u+9=0, \\ 6x+6u+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7/2, \\ u=19/6 \end{cases}$$

Вычислим значение критерия:

$$J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = 4\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{19}{6}\right)^2 + 6\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{19}{6}\right) + 9\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(\frac{19}{6}\right) - 7,$$

$$J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) \approx -19.583$$

Таким образом, для точки $(-7/2, 19/6)$ значение критерия $J \approx -19.583$ – глобальный минимум без ограничений.

3.2.2. С ограничением в виде равенства

Ограничение: $c(x,u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0$.

Функция Лагранжа:

$$L(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda c(x,u),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Подставим:

$$L(x,u,\lambda) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7 + \lambda\left(8x^2 + 7u + 2\right)$$

Система частных производных лагранжиана:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c(x,u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 6u + 9 + 16x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{u} = 6x + 6u + 2 + 7\lambda = 0 \end{cases}$$

Выразим λ:

$$\lambda = -\frac{6x + 6u + 2}{7}$$

Подставим в $\partial L / \partial x$:

$$8x + 6u + 9 - 16x\left(\frac{6x + 6u + 2}{7}\right) = 0,$$

$$7\left(8x + 6u + 9\right) - 16x\left(6x + 6u + 2\right) = 0,$$

$$-96x^2 - 96xu + 24x + 42u + 63 = 0$$

Выразим u из $\partial L / \partial \lambda$:

$$u = -\frac{8x^2 + 2}{7}$$

Подставим:

$$-96x^2 + 96x\left(\frac{8x^2 + 2}{7}\right) + 24x - 42\left(\frac{8x^2 + 2}{7}\right) + 63 = 0,$$

$$256x^3 - 336x^2 + 120x + 119 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx -0.40167, \\ x_{2,3} \approx 0.85708 \pm 0.65014i \end{cases}$$

В реальных задачах комплексные решения лагранжевых уравнений отбрасываются.

Подставим $x_1 = -0.40167$ в u:

$$u = -\frac{8\left(-0.40167\right)^2 + 2}{7} \approx -0.4701$$

Вычислим J при $x = -0.40167, u = -0.4701$:

$$\begin{aligned} J(-0.40167, -0.4701) =& 4(-0.40167)^2 + 3(-0.4701)^2 + \\ &+ 6(-0.40167)(-0.4701) + 9(-0.40167) + \\ &+ 2(-0.4701) - 7 = \approx -9.11394 \end{aligned}$$

Так как реальное решение единственное, то единственным кандидатом на экстремум на границе $c(x, u) = 0$ является точка $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия в которой $J \approx -9.11394$ – глобальный минимум с ограничением в виде равенства.

3.2.3. С ограничением в виде неравенства

Ограничение: $c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2 \leq 0$.

Условие Куна-Таккера: $\lambda \geq 0$.

Условие дополняющей нежесткости:$\lambda c(x, u) = 0$.

Проверим, находится ли неограниченный минимум в области $c(x, u) \leq 0$ – подставим точку из пункта 3.2.1 $(x, u) = (-7/2, 19/6)$ в $c(x, u)$:

$$c\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = 8\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{19}{6}\right) + 2 \approx 122.17 > 0$$

Так как $c(-7/2, 19/6) \approx 122.17 > 0$, то неограниченный минимум лежит вне области ограничения – внутренний минимум невозможен.

Тогда, минимум достигается на границе:

$$c(x, u) = 0,\ \lambda > 0,$$

что соответствует решению из пункта 3.2.2:

$$(x^*, u^*) = (-0.40167, -0.4701),\ J \approx -9.11394$$

Таким образом, глобальный минимум достигается на границе $c(x, u) = 0$ в точке $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия $J \approx -9.11394$.

3.3. Градиентный поиск минимума

3.3.1. Метод Ньютона-Рафсона

Оптимизация:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - H^{-1}(\bar{x}^{(n)}) \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(n)}),$$

где:

$$\bar{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \ \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \\ \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \end{bmatrix},$$

$$H(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u}\right) \end{bmatrix}$$

При нулевой итерации градиент:

$$\nabla J(x, u) = \begin{bmatrix} 8x + 6u + 9 \\ 6x + 6u + 2 \end{bmatrix}$$

Матрица Гессе и обратная ей:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \ H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Пусть начальная точка $(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, тогда первая итерация:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - H^{-1}(\bar{x}^{(0)}) \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(0)})$$

Вычислим:

$$\nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \nabla J(0, 0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 19/6 \end{bmatrix}$$

Вторая итерация:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} - H^{-1}(\bar{x}^{(1)}) \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(1)}),$$

$$\nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \nabla J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -H^{-1}(\bar{x}^{(1)})\nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Следовательно:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)}$$

Метод Ньютона-Рафсона сходится за одну итерацию – точка минимума такая же, как в пункте 3.2.1: $(-7/2, 19/6)$.

3.3.2. Метод наискорейшего спуска

Итерационная формула:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \gamma \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(n)})$$

Рассмотрим **колебательную сходимость** при $\gamma = 0.12$. Предоставим вычисление итераций матлабу:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 9 & 2 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -1.08 & -0.24 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -1.08 & -5.92 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -0.9504 & 0.4704 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 4.2192 & -0.88 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -1.4567 & 0.576 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.8024 & -3.2842 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} -1.553 & 0.9701 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(4)}) = \begin{bmatrix} 2.3967 & -1.4973 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(5)} &= \begin{bmatrix} -1.8406 & 1.1498 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1.1739 & -2.1449 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\bar{x}^{(8)} &= \begin{bmatrix} -2.305 & 1.7667 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(8)}) = \begin{bmatrix} 1.1606 & -1.2295 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(9)} &= \begin{bmatrix} -2.4442 & 1.9143 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(9)}) = \begin{bmatrix} 0.9316 & -1.1799 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(10)} &= \begin{bmatrix} -2.556 & 2.0558 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(10)}) = \begin{bmatrix} 0.8868 & -1.0011 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\bar{x}^{(19)} &= \begin{bmatrix} -3.1701 & 2.7772 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(19)}) = \begin{bmatrix} 0.3024 & -0.3573 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}$$

$$\bar{x}^{(20)} = \begin{bmatrix}-3.2064 & 2.8201\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(20)}) = \begin{bmatrix}0.2694 & -0.3178\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(21)} = \begin{bmatrix}-3.2387 & 2.8582\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(21)}) = \begin{bmatrix}0.2396 & -0.2829\end{bmatrix}^T,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\bar{x}^{(171)} \sim \begin{bmatrix}-3.5 & 3.1667\end{bmatrix}^T, \nabla J(\bar{x}^{(171)}) \sim \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$J(x^{(171)}) \sim -19.5833$$

Получили точку, как в пункте 3.2.1: $(-3.5, 3.1667) \sim (-7/2, 19/6)$.

Рассмотрим **апериодическую сходимость** при $\gamma = 0.05$:

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix}9 & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}-0.45 & -0.1\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix}4.8 & -1.3\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}-0.69 & -0.035\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix}3.27 & -2.35\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix}-0.8535 & 0.0825\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix}2.667 & -2.626\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(4)} = \begin{bmatrix}-0.9869 & 0.2138\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(4)}) = \begin{bmatrix}2.388 & -2.6383\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(5)} = \begin{bmatrix}-1.1063 & 0.3457\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(5)}) = \begin{bmatrix}2.2243 & -2.5632\end{bmatrix}^T,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\bar{x}^{(8)} = \begin{bmatrix}-1.4227 & 0.7147\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(8)}) = \begin{bmatrix}1.9066 & -2.2481\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(9)} = \begin{bmatrix}-1.518 & 0.8271\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(9)}) = \begin{bmatrix}1.8184 & -2.1456\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(10)} = \begin{bmatrix}-1.6089 & 0.9343\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(10)}) = \begin{bmatrix}1.7347 & -2.0475\end{bmatrix}^T,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\bar{x}^{(19)} = \begin{bmatrix}-2.2606 & 1.7036\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(19)}) = \begin{bmatrix}1.1368 & -1.342\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(20)} = \begin{bmatrix}-2.3174 & 1.7707\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(20)}) = \begin{bmatrix}1.0847 & -1.2804\end{bmatrix}^T,$$
$$\bar{x}^{(21)} = \begin{bmatrix}-2.3717 & 1.8347\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(21)}) = \begin{bmatrix}1.0349 & -1.2217\end{bmatrix}^T,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\bar{x}^{(165)} = \begin{bmatrix}-3.4987 & 3.1651\end{bmatrix}^T,\ \nabla J(\bar{x}^{(165)}) = \begin{bmatrix}0.0012 & -0.0014\end{bmatrix}^T,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{x}^{(424)} \sim \begin{bmatrix} -3.5 & 3.1667 \end{bmatrix}^T, \ \nabla J(\bar{x}^{(424)}) \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$J(x^{(424)}) \sim -19.5833$$

Получили точку, как в пункте 3.2.1: $(-3.5, 3.1667) \sim (-7/2, 19/6)$.

Замечание: точность сходимости в обоих случаях составляет 10^{-8}. Параметры сходятся несколько раньше при более низкой точности.

4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были исследованы методы статической оптимизации: в случае метода Ньютона-Рафсона сходимости удалось достичь за 1 итерацию (квадратичная функция), в случае метода наискорейшего спуска при колебательной сходимости минимум был достигнут за 171 итерацию, при апериодической сходимости за 424 итерации. Точность сходимости последних двух случаев составляет 10^{-8}. Также был найден глобальный минимум критерия качества без ограничений, на границе ограничения и внутри ограничения. В результате получилось, что минимум внутри ограничения совпадает с минимумом на границе ограничения.

A. Приложение

```
%% Criteria and grad
J = @(x, u) 4*x.^2 + 3*u.^2 + 6*x.*u + 9*x + 2*u - 7;
gradJ = @(x, u) [8*x + 6*u + 9; ...
                 6*x + 6*u + 2];

max_iter = 500;
tol = 1e-8;
x0 = 0; u0 = 0;

%% Aperiodic: g = 0.05
gamma_ap = 0.05;

x_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);
u_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);
J_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);
```

```
grad_hist_ap = zeros(2, max_iter+1);

x = x0; u = u0;
x_hist_ap(1) = x;
u_hist_ap(1) = u;
J_hist_ap(1) = J(x, u);
grad_hist_ap(:, 1) = gradJ(x, u);

n_ap = 1;

for k = 1:max_iter
    g = grad_hist_ap(:, n_ap);

    if norm(g) < tol
        break;
    end

    x = x - gamma_ap * g(1);
    u = u - gamma_ap * g(2);

    n_ap = n_ap + 1;
    x_hist_ap(n_ap) = x;
    u_hist_ap(n_ap) = u;
    J_hist_ap(n_ap) = J(x, u);
    grad_hist_ap(:, n_ap) = gradJ(x, u);
end

x_hist_ap = x_hist_ap(1:n_ap);
u_hist_ap = u_hist_ap(1:n_ap);
J_hist_ap = J_hist_ap(1:n_ap);
grad_hist_ap = grad_hist_ap(:, 1:n_ap);


%% Oscillating: g = 0.12
gamma_os = 0.12;

x_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
u_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
J_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
grad_hist_os = zeros(2, max_iter+1);

```

```
x = x0; u = u0;
x_hist_os(1) = x;
u_hist_os(1) = u;
J_hist_os(1) = J(x, u);
grad_hist_os(:, 1) = gradJ(x, u);

n_os = 1;

for k = 1:max_iter
    g = grad_hist_os(:, n_os);

    if norm(g) < tol
        break;
    end

    x = x - gamma_os * g(1);
    u = u - gamma_os * g(2);

    n_os = n_os + 1;
    x_hist_os(n_os) = x;
    u_hist_os(n_os) = u;
    J_hist_os(n_os) = J(x, u);
    grad_hist_os(:, n_os) = gradJ(x, u);
end

x_hist_os = x_hist_os(1:n_os);
u_hist_os = u_hist_os(1:n_os);
J_hist_os = J_hist_os(1:n_os);
grad_hist_os = grad_hist_os(:, 1:n_os);
```

Листинг 1: Программа для расчета итераций