

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4**  
по дисциплине  
**«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»**  
на тему  
**«СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. МЕТОД  
ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА»**  
Вариант 31

Выполнил: студент гр. Р3441  
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель  
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург  
2025

## **Содержание**

<b>1 Цель работы</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>3 Экспериментальная часть</b>	<b>3</b>
3.1 Исходные данные . . . . .	3
3.2 Синтез оптимального управления . . . . .	4
3.3 Моделирование системы . . . . .	6
3.4 Критерий при отклонениях параметров регулятора . . . . .	8
3.5 Моделирование системы с отклонением . . . . .	8
<b>4 Вывод</b>	<b>10</b>

## 1. Цель работы

Исследовать оптимальный регулятор, синтезированный с помощью метода динамического программирования Беллмана.

## 2. Постановка задачи

Дан линейный объект управления:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0)$$

и критерий качества:

$$J = \int_0^{\infty} x^T(\tau) Q x(\tau) + r u^2(\tau) d\tau$$

Необходимо:

1. Построить оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана и промоделировать его работу на заданном интервале времени. Начальные условия  $x(0) = [1, 0]^T$ . Построить графики  $u, x, J$ ;
2. Построить критерий при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений.

## 3. Экспериментальная часть

### 3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, матрицы  $A, b, Q$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Параметр  $r = 4$ .

### 3.2. Синтез оптимального управления

Принцип Беллмана:

$$J(x_0) = \min_u \left\{ \int_0^{dt} L(x, u) dt + J(x(dt)) \right\}$$

Предел при  $dt \rightarrow 0$ :

$$J(x) = \min_u \{L(x, u) dt + J(x) + dt \nabla J(x) f(x, u) + o(dt)\}$$

После преобразований уравнение Беллмана:

$$\min_u \{L(x, u) + \nabla V(x)^T f(x, u)\} = 0,$$

где  $L(x, u)$  – мгновенная стоимость (интегrand в функционале  $J$ ).

Функция Беллмана  $V$  должна быть такой, чтобы при оптимальном управлении выражение под минимумом обращалось в нуль.

Тогда, при линейной системе и квадратичном критерии квадратичная форма функционала ценности:

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \nabla V = 2Px,$$

где  $P = P^T$  – искомая матрица.

Условие минимума по  $u$  в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\min_u \{x^T Q x + r u^2 + \nabla V(x) (Ax + bu)\} = 0$$

Подставим  $V(x)$  и  $\nabla V(x)$ :

$$\frac{d}{du} (r u^2 + 2x^T P b u) = 0 \Rightarrow 2ru + 2b^T Px = 0$$

Выразим  $u$ :

$$u(t) = -r^{-1} b^T Px(t) = -Kx(t), \quad K = r^{-1} b^T P$$

Найдем  $u^2(t)$ :

$$u^2 = x^T P^T br^{-2} b^T Px$$

Подставим в условие минимума по  $u$  выражения  $\nabla V(x), u^2(t)$ :

$$x^T Qx + x^T P^T br^{-1} b^T Px + (2Px)^T (Ax + bu) = 0,$$

$$x^T Qx + x^T P^T br^{-1} b^T Px + 2x^T PAx + 2x^T Pbu = 0$$

Найдем  $2x^T Pbu$ :

$$2x^T Pbu = 2x^T Pb (-r^{-1} b^T Px) = -2x^T Pbr^{-1} b^T Px$$

Тогда,  $ru^2 + 2x^T Pbu$ :

$$ru^2 + 2x^T Pbu = x^T Pbr^{-1} b^T Px - 2x^T Pbr^{-1} b^T Px = -x^T Pbr^{-1} b^T Px$$

Подставим:

$$x^T Qx + 2x^T PAx - x^T Pbr^{-1} b^T Px = 0$$

Перепишем  $2x^T PAx$ :

$$2x^T PAx = x^T (PA + A^T P)x$$

Подставим  $2x^T PAx$  и вынесем  $x^T, x$ :

$$x^T (Q + PA + A^T P - Pbr^{-1} b^T P)x = 0$$

Данное условие должно выполняться для всех  $x$ , следовательно подматрица:

$$A^T P + PA - Pbr^{-1} b^T P + Q = 0$$

Получили непрерывное алгебраическое уравнение Риккати.

Уравнение Риккати – частный случай уравнения Беллмана для LQR.

Решим уравнение Риккати, получим:

$$P \approx \begin{bmatrix} 40.795 & -39.0667 \\ -39.0667 & 38.101 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -6.31 & 7.594 \end{bmatrix}$$

Собственные числа замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-2.1961, -11.6695\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

### 3.3. Моделирование системы

Схема моделирования:

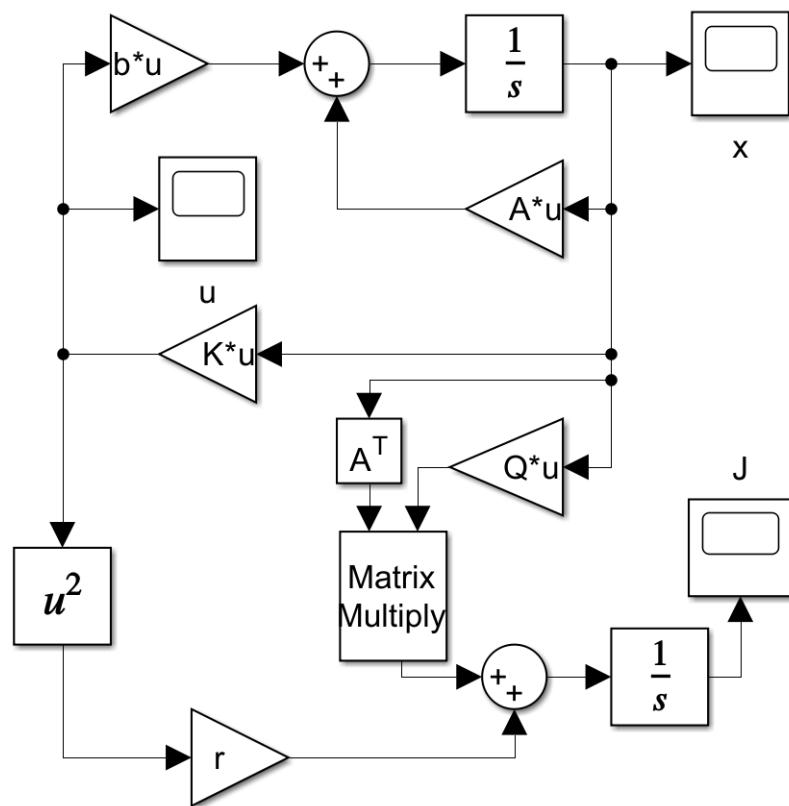


Рис. 1: Схема моделирования замкнутой системы,  $u = -Kx$

Построим графики  $x, u, J$ :

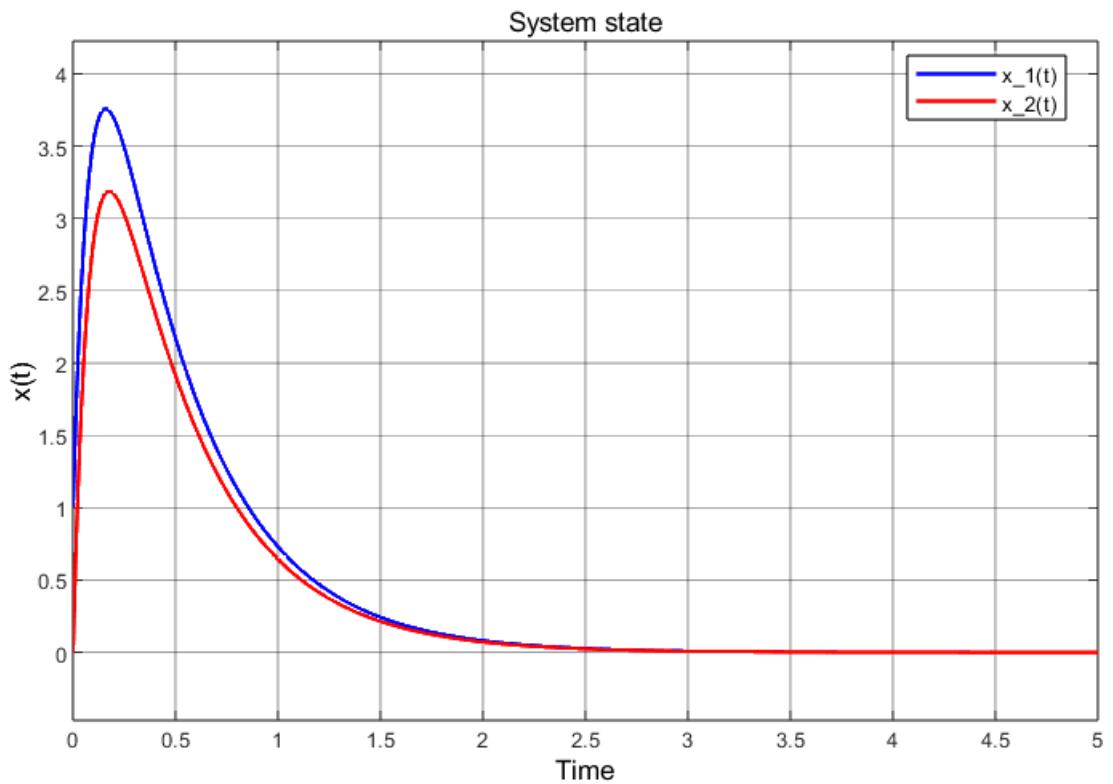


Рис. 2: Вектор состояния объекта  $x(t)$ ,  $u = -Kx$

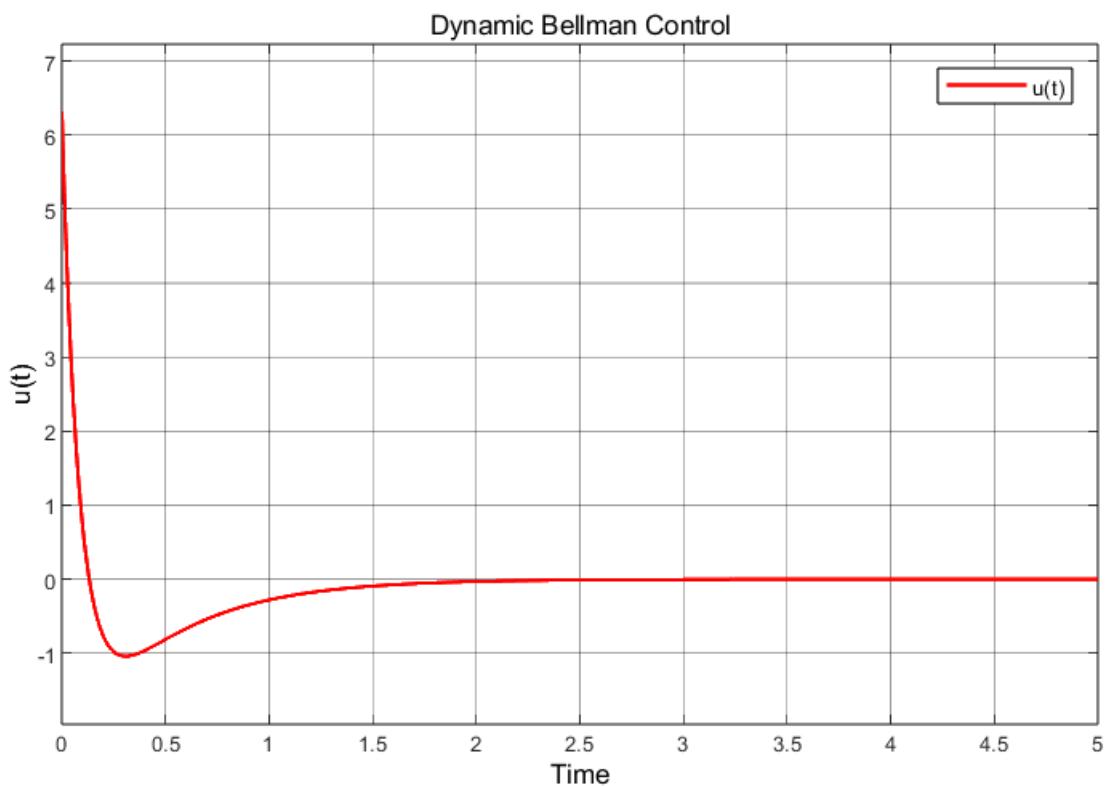


Рис. 3: Управление  $u = -Kx$

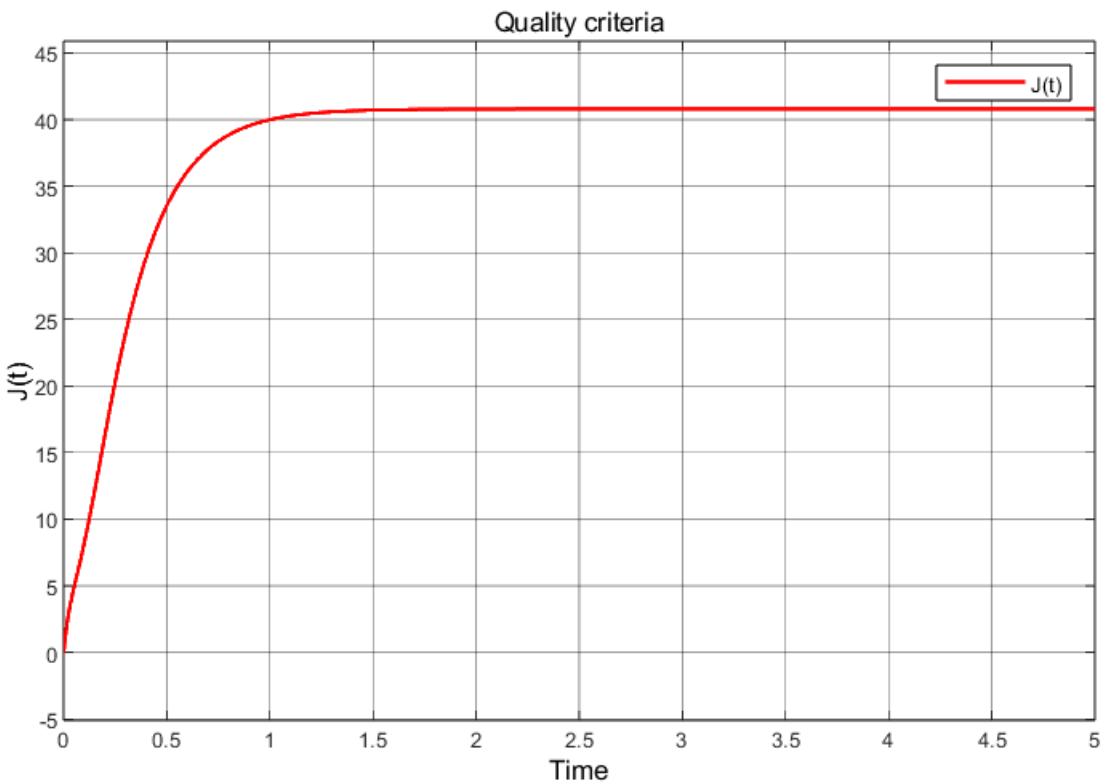


Рис. 4: Критерий качества  $J(t)$ ,  $u = -Kx$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило  $J = 40.795$ .

### 3.4. Критерий при отклонениях параметров регулятора

Отклоним расчетные значения  $K$  на 10%:

$$K_b = 1.1K = \begin{bmatrix} -6.941 & 8.3534 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-2.0589, -13.5937\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

### 3.5. Моделирование системы с отклонением

Промоделируем систему аналогично предыдущему пункту:

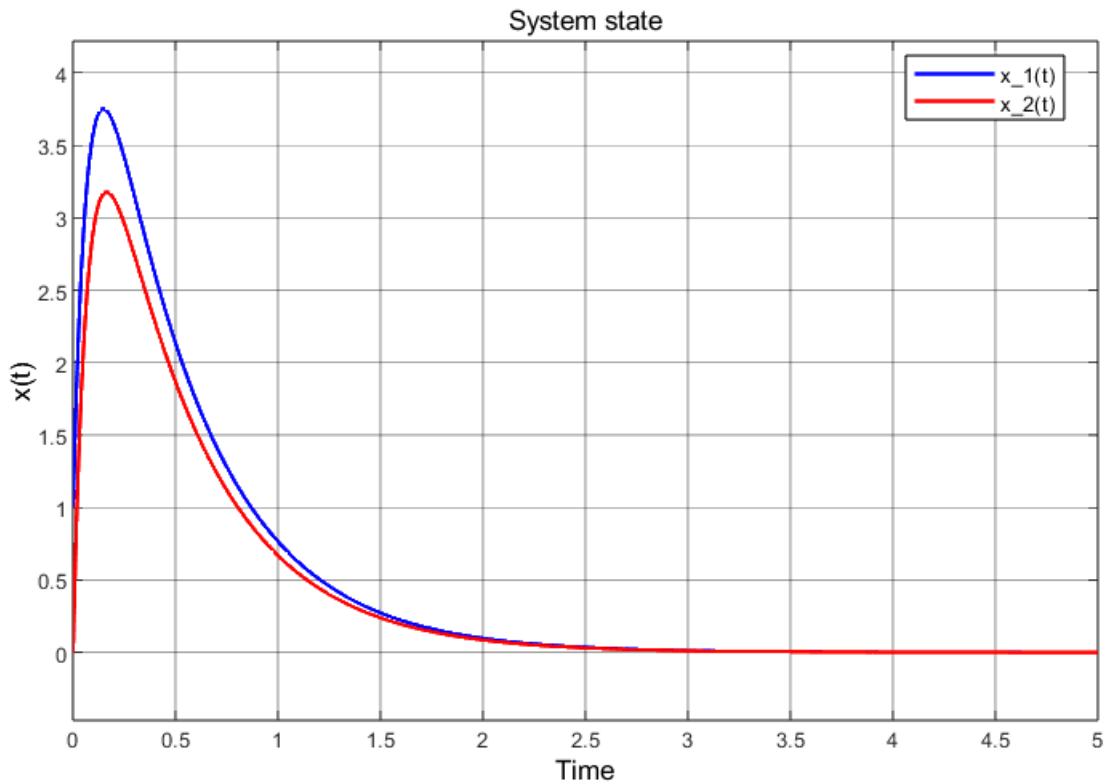


Рис. 5: Вектор состояния объекта  $x(t)$ ,  $u = -K_b x$

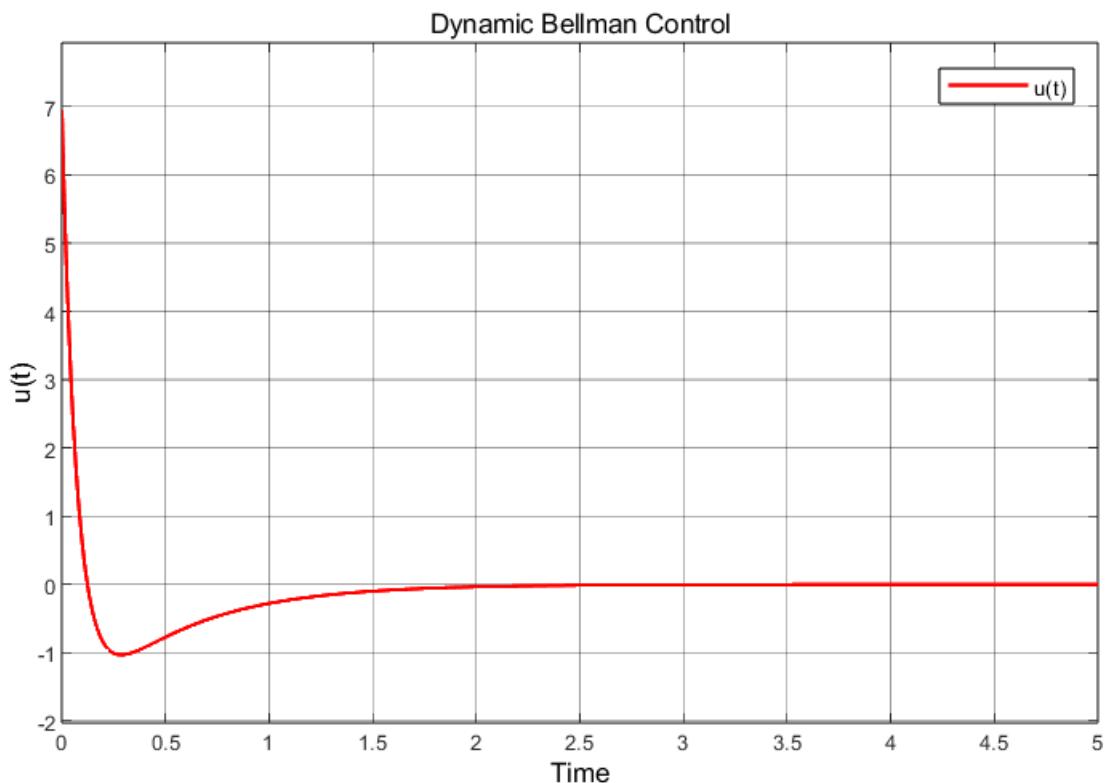


Рис. 6: Управление  $u = -K_b x$

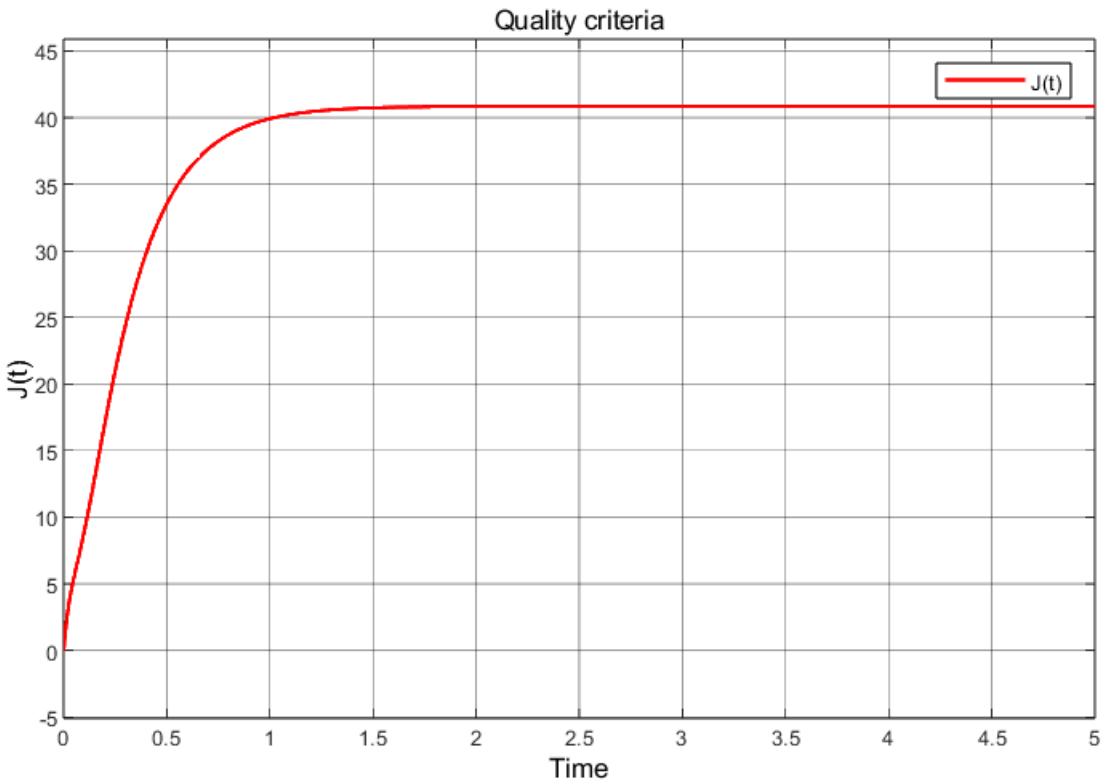


Рис. 7: Критерий качества  $J(t)$ ,  $u = -K_b x$

Установившееся значение критерия качества на интервале моделирования составило  $J = 40.85$ .

С отклоненными параметрами на стабилизацию системы затрачивается несколько больше управления.

Критерий  $J_b = 40.85$  отклонился от эталонного  $J = 40.795$  на  $+0.1348\%$ , регулятор остался достаточно эффективным, но менее эффективным, чем в эталонном случае.

#### 4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был синтезирован оптимальный регулятор методом динамического программирования Беллмана. В результате получилось алгебраическое уравнение Риккати. Были промоделированы эталонный регулятор и с отклоненными на 10% коэффициентами. Результаты моделирования показали корректность проведенных расчетов и достаточную эффективность обоих регуляторов.