

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«ПОИСК МИНИМУМА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ
СТАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ»
Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Цель работы	3
2	Постановка задачи	3
3	Экспериментальная часть	3
3.1	Исходные данные	3
3.2	Поиск глобального минимума	4
3.2.1	Без ограничений	4
3.2.2	С ограничением в виде равенства	4
3.2.3	С ограничением в виде неравенства	6
3.3	Градиентный поиск минимума	7
3.3.1	Метод Ньютона-Рафсона	7
3.3.2	Метод наискорейшего спуска	8
4	Вывод	10
A	Приложение	10

1. Цель работы

Исследовать методы статической оптимизации и найти минимум критерия качества $J(x, u)$.

2. Постановка задачи

Дан критерий качества $J(x, u)$ и ограничение $c(x, u)$. Необходимо:

1. Найти глобальный минимум $J(x, u)$ на основе необходимого и достаточного условий экстремума:
 - (a) Без ограничений;
 - (b) С ограничением в виде равенства $c(x, u) = 0$;
 - (c) С ограничением в виде неравенства $c(x, u) \leq 0$.
2. Осуществить градиентный поиск минимума критерия качества $J_1(x, u) = J(x, u)$:
 - (a) Методом Ньютона-Рафсона произвести пошаговый расчет экстремума.
 - (b) Методом наискорейшего спуска для двух различных γ (соответствующих колебательной и апериодической сходимостям) произвести пошаговый расчет экстремума.

3. Экспериментальная часть

3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, критерий качества:

$$J(x, u) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7$$

Ограничение:

$$c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2$$

3.2. Поиск глобального минимума

3.2.1. Без ограничений

Градиент критерия:

$$\text{grad } J(x, u) = \nabla J(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(x, u)}{\partial x} \\ \frac{\partial J(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x + 6u + 9 \\ 6x + 6u + 2 \end{bmatrix}$$

Приравняем производные к нулю и найдем x, u :

$$\begin{cases} 8x + 6u + 9 = 0, \\ 6x + 6u + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7/2, \\ u = 19/6 \end{cases}$$

Вычислим значение критерия:

$$J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = 4\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{19}{6}\right)^2 + 6\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{19}{6}\right) + 9\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(\frac{19}{6}\right) - 7,$$

$$J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) \approx -19.583$$

Таким образом, для точки $(-7/2, 19/6)$ значение критерия $J \approx -19.583$ – глобальный минимум без ограничений.

3.2.2. С ограничением в виде равенства

Ограничение: $c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0$.

Функция Лагранжа:

$$L(x, u, \lambda) = J(x, u) + \lambda c(x, u),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Подставим:

$$L(x, u, \lambda) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7 + \lambda(8x^2 + 7u + 2)$$

Система частных производных лагранжиана:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 6u + 9 + 16x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u} = 6x + 6u + 2 + 7\lambda = 0 \end{cases}$$

Выразим λ :

$$\lambda = -\frac{6x + 6u + 2}{7}$$

Подставим в $\partial L / \partial x$:

$$8x + 6u + 9 - 16x \left(\frac{6x + 6u + 2}{7} \right) = 0,$$

$$7(8x + 6u + 9) - 16x(6x + 6u + 2) = 0,$$

$$-96x^2 - 96xu + 24x + 42u + 63 = 0$$

Выразим u из $\partial L / \partial \lambda$:

$$u = -\frac{8x^2 + 2}{7}$$

Подставим:

$$-96x^2 + 96x \left(\frac{8x^2 + 2}{7} \right) + 24x - 42 \left(\frac{8x^2 + 2}{7} \right) + 63 = 0,$$

$$256x^3 - 336x^2 + 120x + 119 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx -0.40167, \\ x_{2,3} \approx 0.85708 \pm 0.65014i \end{cases}$$

В реальных задачах комплексные решения лагранжевых уравнений отбрасываются.

Подставим $x_1 = -0.40167$ в u :

$$u = -\frac{8(-0.40167)^2 + 2}{7} \approx -0.4701$$

Вычислим J при $x = -0.40167, u = -0.4701$:

$$\begin{aligned} J(-0.40167, -0.4701) = & 4(-0.40167)^2 + 3(-0.4701)^2 + \\ & + 6(-0.40167)(-0.4701) + 9(-0.40167) + \\ & + 2(-0.4701) - 7 \approx -9.11394 \end{aligned}$$

Так как реальное решение единственное, то единственным кандидатом на экстремум на границе $c(x, u) = 0$ является точка $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия в которой $J \approx -9.11394$ – глобальный минимум с ограничением в виде равенства.

3.2.3. С ограничением в виде неравенства

Ограничение: $c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2 \leq 0$.

Условие Куна-Таккера: $\lambda \geq 0$.

Условие дополняющей нежесткости: $\lambda c(x, u) = 0$.

Проверим, находится ли неограниченный минимум в области $c(x, u) \leq 0$ – подставим точку из пункта 3.2.1 $(x, u) = (-7/2, 19/6)$ в $c(x, u)$:

$$c\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = 8\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{19}{6}\right) + 2 \approx 122.17 > 0$$

Так как $c(-7/2, 19/6) \approx 122.17 > 0$, то неограниченный минимум лежит вне области ограничения – внутренний минимум невозможен.

Тогда, минимум достигается на границе:

$$c(x, u) = 0, \lambda > 0,$$

что соответствует решению из пункта 3.2.2:

$$(x^*, u^*) = (-0.40167, -0.4701), J \approx -9.11394$$

Таким образом, глобальный минимум достигается на границе $c(x, u) = 0$ в точке $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия $J \approx -9.11394$.

3.3. Градиентный поиск минимума

3.3.1. Метод Ньютона-Рафсона

Оптимизация:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - H^{-1}(\bar{x}^{(n)}) \text{grad } J(\bar{x}^{(n)}),$$

где:

$$\bar{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x^{(n)} \\ u^{(n)} \end{bmatrix}, \text{grad } J(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \\ \frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \end{bmatrix},$$

$$H(\bar{x}^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial J(\bar{x}^{(n)})}{\partial u} \right) \end{bmatrix}$$

При нулевой итерации градиент:

$$\nabla J(x, u) = \begin{bmatrix} 8x + 6u + 9 \\ 6x + 6u + 2 \end{bmatrix}$$

Матрица Гессе и обратная ей:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Пусть начальная точка $(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, тогда первая итерация:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - H^{-1}(\bar{x}^{(0)}) \text{grad } J(\bar{x}^{(0)})$$

Вычислим:

$$\nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \nabla J(0, 0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}^{(1)} = - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 19/6 \end{bmatrix}$$

Вторая итерация:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} - H^{-1}(\bar{x}^{(1)}) \text{grad } J(\bar{x}^{(1)}),$$

$$\nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \nabla J\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -H^{-1}(\bar{x}^{(1)})\nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Следовательно:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)}$$

Метод Ньютона-Рафсона сходится за одну итерацию – точка минимума такая же, как в пункте 3.2.1: $(-7/2, 19/6)$.

3.3.2. Метод наискорейшего спуска

Итерационная формула:

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \gamma \operatorname{grad} J(\bar{x}^{(n)})$$

Рассмотрим **колебательную сходимость** при $\gamma = 0.12$. Предоставим вычисление итераций матлабу:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 9 & 2 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -1.08 & -0.24 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -1.08 & -5.92 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -0.9504 & 0.4704 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 4.2192 & -0.88 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -1.4567 & 0.576 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.8024 & -3.2842 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} -1.553 & 0.9701 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(4)}) = \begin{bmatrix} 2.3967 & -1.4973 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(5)} &= \begin{bmatrix} -1.8406 & 1.1498 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1.1739 & -2.1449 \end{bmatrix}^T, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \bar{x}^{(8)} &= \begin{bmatrix} -2.305 & 1.7667 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(8)}) = \begin{bmatrix} 1.1606 & -1.2295 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(9)} &= \begin{bmatrix} -2.4442 & 1.9143 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(9)}) = \begin{bmatrix} 0.9316 & -1.1799 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{x}^{(10)} &= \begin{bmatrix} -2.556 & 2.0558 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(10)}) = \begin{bmatrix} 0.8868 & -1.0011 \end{bmatrix}^T, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \bar{x}^{(19)} &= \begin{bmatrix} -3.1701 & 2.7772 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(19)}) = \begin{bmatrix} 0.3024 & -0.3573 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(20)} &= \begin{bmatrix} -3.2064 & 2.8201 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(20)}) = \begin{bmatrix} 0.2694 & -0.3178 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(21)} &= \begin{bmatrix} -3.2387 & 2.8582 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(21)}) = \begin{bmatrix} 0.2396 & -0.2829 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \\
\bar{x}^{(171)} &\sim \begin{bmatrix} -3.5 & 3.1667 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(171)}) \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
&J(x^{(171)}) \sim -19.5833
\end{aligned}$$

Получили точку, как в пункте 3.2.1: $(-3.5, 3.1667) \sim (-7/2, 19/6)$.

Рассмотрим **апериодическую сходимость** при $\gamma = 0.05$:

$$\begin{aligned}
\bar{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 9 & 2 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -0.45 & -0.1 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4.8 & -1.3 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -0.69 & -0.035 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 3.27 & -2.35 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -0.8535 & 0.0825 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 2.667 & -2.626 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} -0.9869 & 0.2138 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(4)}) = \begin{bmatrix} 2.388 & -2.6383 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(5)} &= \begin{bmatrix} -1.1063 & 0.3457 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(5)}) = \begin{bmatrix} 2.2243 & -2.5632 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \\
\bar{x}^{(8)} &= \begin{bmatrix} -1.4227 & 0.7147 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(8)}) = \begin{bmatrix} 1.9066 & -2.2481 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(9)} &= \begin{bmatrix} -1.518 & 0.8271 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(9)}) = \begin{bmatrix} 1.8184 & -2.1456 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(10)} &= \begin{bmatrix} -1.6089 & 0.9343 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(10)}) = \begin{bmatrix} 1.7347 & -2.0475 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \\
\bar{x}^{(19)} &= \begin{bmatrix} -2.2606 & 1.7036 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(19)}) = \begin{bmatrix} 1.1368 & -1.342 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(20)} &= \begin{bmatrix} -2.3174 & 1.7707 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(20)}) = \begin{bmatrix} 1.0847 & -1.2804 \end{bmatrix}^T, \\
\bar{x}^{(21)} &= \begin{bmatrix} -2.3717 & 1.8347 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(21)}) = \begin{bmatrix} 1.0349 & -1.2217 \end{bmatrix}^T, \\
&\vdots \\
\bar{x}^{(165)} &= \begin{bmatrix} -3.4987 & 3.1651 \end{bmatrix}^T, \quad \nabla J(\bar{x}^{(165)}) = \begin{bmatrix} 0.0012 & -0.0014 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \bar{x}^{(424)} \sim \begin{bmatrix} -3.5 & 3.1667 \end{bmatrix}^T, \nabla J(\bar{x}^{(424)}) \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ J(x^{(424)}) \sim -19.5833 \end{array}$$

Получили точку, как в пункте 3.2.1: $(-3.5, 3.1667) \sim (-7/2, 19/6)$.

Замечание: точность сходимости в обоих случаях составляет 10^{-8} . Параметры сходятся несколько раньше при более низкой точности.

4. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были исследованы методы статической оптимизации: в случае метода Ньютона-Рафсона сходимости удалось достичь за 1 итерацию (квадратичная функция), в случае метода наискорейшего спуска при колебательной сходимости минимум был достигнут за 171 итерацию, при апериодической сходимости за 424 итерации. Точность сходимости последних двух случаев составляет 10^{-8} . Также был найден глобальный минимум критерия качества без ограничений, на границе ограничения и внутри ограничения. В результате получилось, что минимум внутри ограничения совпадает с минимумом на границе ограничения.

А. Приложение

```

1 %% Criteria and grad
2 J = @(x, u) 4*x.^2 + 3*u.^2 + 6*x.*u + 9*x + 2*u - 7;
3 gradJ = @(x, u) [8*x + 6*u + 9; ...
4                  6*x + 6*u + 2];
5
6 max_iter = 500;
7 tol = 1e-8;
8 x0 = 0; u0 = 0;
9
10 %% Aperiodic: g = 0.05
11 gamma_ap = 0.05;
12
13 x_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);
14 u_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);
15 J_hist_ap = zeros(max_iter+1, 1);

```

```

16 grad_hist_ap = zeros(2, max_iter+1);
17
18 x = x0; u = u0;
19 x_hist_ap(1) = x;
20 u_hist_ap(1) = u;
21 J_hist_ap(1) = J(x, u);
22 grad_hist_ap(:, 1) = gradJ(x, u);
23
24 n_ap = 1;
25
26 for k = 1:max_iter
27     g = grad_hist_ap(:, n_ap);
28
29     if norm(g) < tol
30         break;
31     end
32
33     x = x - gamma_ap * g(1);
34     u = u - gamma_ap * g(2);
35
36     n_ap = n_ap + 1;
37     x_hist_ap(n_ap) = x;
38     u_hist_ap(n_ap) = u;
39     J_hist_ap(n_ap) = J(x, u);
40     grad_hist_ap(:, n_ap) = gradJ(x, u);
41 end
42
43 x_hist_ap = x_hist_ap(1:n_ap);
44 u_hist_ap = u_hist_ap(1:n_ap);
45 J_hist_ap = J_hist_ap(1:n_ap);
46 grad_hist_ap = grad_hist_ap(:, 1:n_ap);
47
48
49 %% Oscillating: g = 0.12
50 gamma_os = 0.12;
51
52 x_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
53 u_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
54 J_hist_os = zeros(max_iter+1, 1);
55 grad_hist_os = zeros(2, max_iter+1);
56

```

```

57 x = x0; u = u0;
58 x_hist_os(1) = x;
59 u_hist_os(1) = u;
60 J_hist_os(1) = J(x, u);
61 grad_hist_os(:, 1) = gradJ(x, u);
62
63 n_os = 1;
64
65 for k = 1:max_iter
66     g = grad_hist_os(:, n_os);
67
68     if norm(g) < tol
69         break;
70     end
71
72     x = x - gamma_os * g(1);
73     u = u - gamma_os * g(2);
74
75     n_os = n_os + 1;
76     x_hist_os(n_os) = x;
77     u_hist_os(n_os) = u;
78     J_hist_os(n_os) = J(x, u);
79     grad_hist_os(:, n_os) = gradJ(x, u);
80 end
81
82 x_hist_os = x_hist_os(1:n_os);
83 u_hist_os = u_hist_os(1:n_os);
84 J_hist_os = J_hist_os(1:n_os);
85 grad_hist_os = grad_hist_os(:, 1:n_os);

```

Листинг 1: Программа для расчета итераций