

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

**ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5**  
по дисциплине  
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»  
на тему  
«СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ (ФИЛЬТРА  
КАЛМАНА) И ЛКГ-СИНТЕЗ»  
Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441  
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель  
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Экспериментальная часть</b>	<b>4</b>
3.1	Исходные данные . . . . .	4
3.2	Расчет матрицы коррекции наблюдателя . . . . .	4
3.3	Моделирование системы . . . . .	4
3.4	Моделирование системы с отклонениями коэффициентов в матрице коррекции наблюдателя . . . . .	6
3.5	Моделирование системы с отклонениями значений в матрице энергии $W$ . . . . .	9
3.6	Моделирование системы с отклонением значения в матрице энергии $V$ . . . . .	10
3.7	Моделирование системы с ЛКГ регулятором и фильтром Калмана	13
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>15</b>
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>15</b>

## 1. Цель работы

Исследовать оптимальный наблюдатель (фильтр Калмана) и линейно квадратичный гауссовский регулятор.

## 2. Постановка задачи

Дан объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu + Gw, & x(0), \\ y = Cx + \nu, \end{cases}$$

где  $w, \nu$  – сигналы вида «белый шум» с нулевыми математическими ожиданиями  $M[w] = M[\nu] = 0$  и автокорреляционными функциями  $M[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau)$ ,  $M[\nu(t)\nu(\tau)] = V\delta(t - \tau)$  с известными постоянными спектральными плотностями (энергиями)  $W$  и  $V$  соответственно.

Задача заключается в построении оптимального наблюдателя, генерирующего оценку  $\hat{x}$ :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \Delta \quad \forall t \geq T,$$

где  $\Delta$  и  $T$  – максимальная ошибка и время настройки наблюдателя соответственно. Критерий оптимальности представлен следующим функционалом:

$$J = M[e_L^T e_L],$$

где  $e_L = x - \hat{x}$  – ошибка наблюдения,  $M[\cdot]$  – математическое ожидание.

Наблюдатель задается следующей структурой:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0),$$

где матрица  $L$  рассчитывается на основе уравнения Риккати:

$$\begin{cases} AP + PA^T + GWG^T - PC^T V^{-1} CP = 0, \\ L = PC^T V^{-1} \end{cases}$$

### 3. Экспериментальная часть

#### 3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, матрицы  $A, b, C, G, W, Q$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Параметры  $V = 1, r = 4$ .

#### 3.2. Расчет матрицы коррекции наблюдателя

Решим в матлабе уравнение Риккати, получим:

$$P = \begin{bmatrix} 2.3813 & 0.0739 \\ 0.0739 & 0.7678 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 2.3813 \\ 0.0739 \end{bmatrix}$$

Собственные числа замкнутой системы:

$$\sigma(A - LC) = \{-3.1907 \pm 2.7713i\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

#### 3.3. Моделирование системы

Схема моделирования системы представлена на рис. (1).

Начальные условия:

```
1 set_param('sim1/A', 'Gain', mat2str(A));
2 set_param('sim1/A1', 'Gain', mat2str(A));
3 set_param('sim1/b', 'Gain', mat2str(b));
4 set_param('sim1/b1', 'Gain', mat2str(b));
5 set_param('sim1/C', 'Gain', mat2str(C));
6 set_param('sim1/C1', 'Gain', mat2str(C));
7 set_param('sim1/L', 'Gain', mat2str(L));
8 set_param('sim1/G', 'Gain', mat2str(G));
9 set_param('sim1/W', 'Gain', mat2str(W));
```

Листинг 1: Начальные условия схемы моделирования

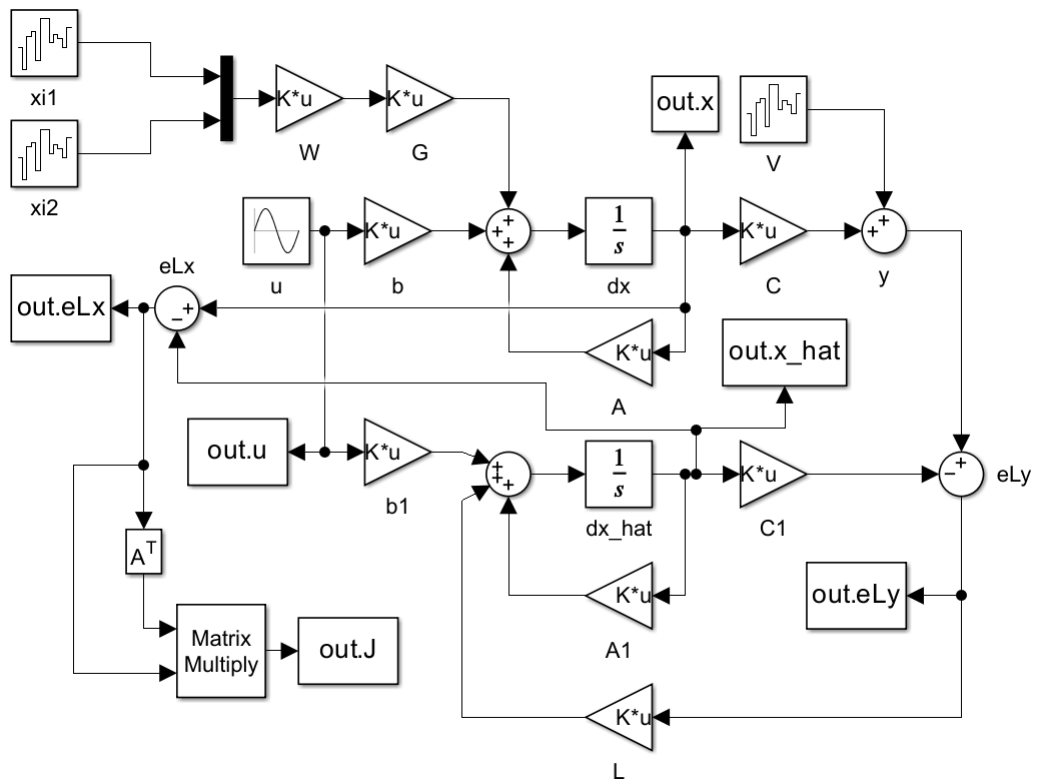


Рис. 1: Схема моделирования системы

Промоделируем систему при  $u = \sin t$ ,  $x(0) = [1, 0]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0, 0]^T$ :

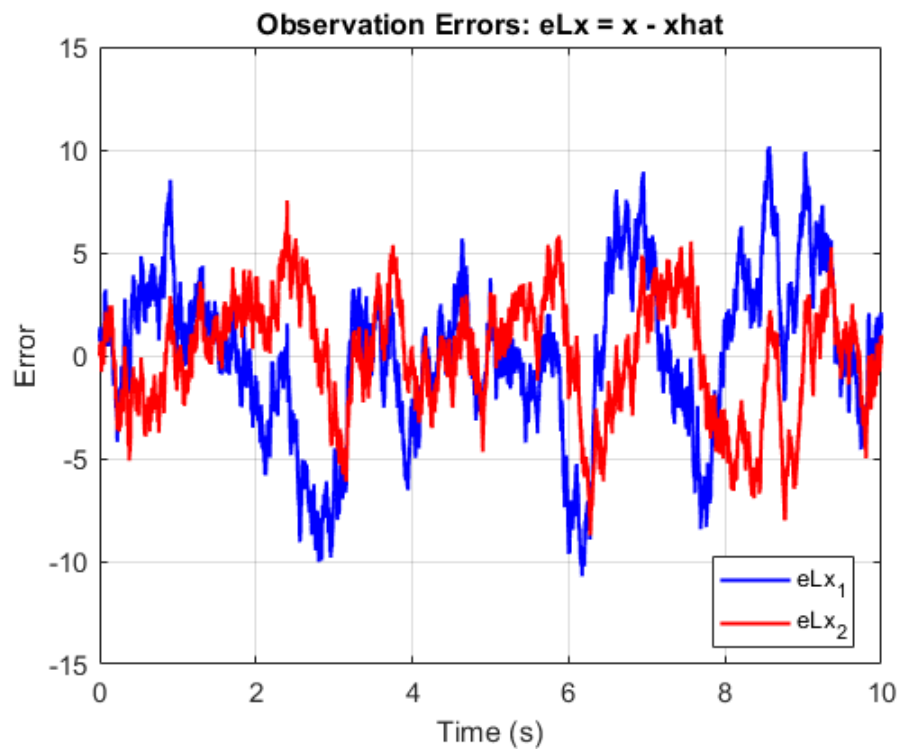


Рис. 2: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $L$

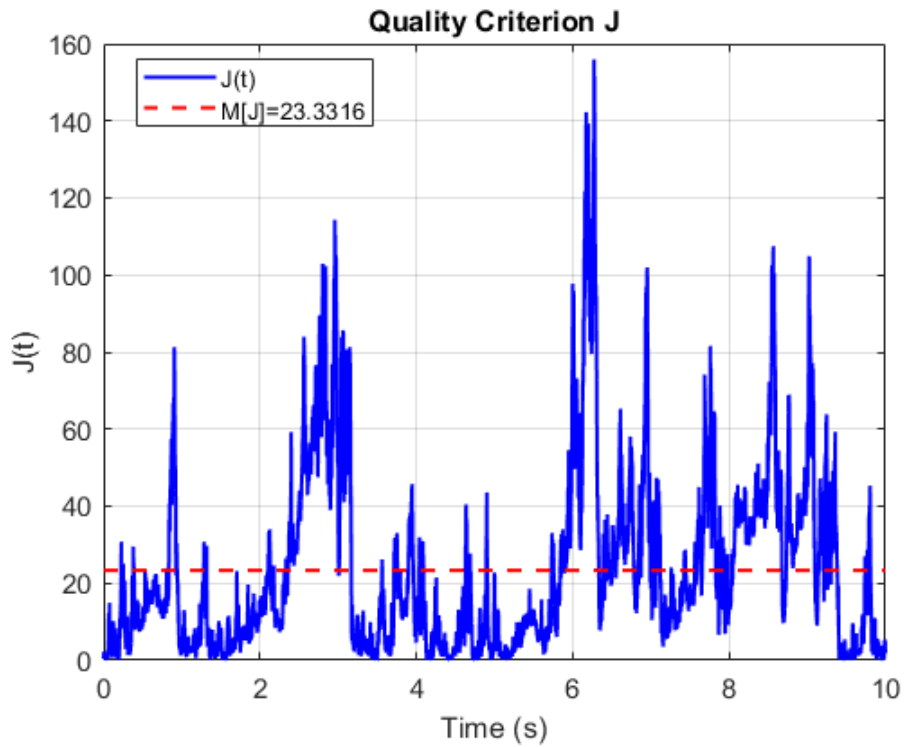


Рис. 3: Критерий качества при  $L$

Среднее значение критерия качества  $M[J] = 23.3316$ .

### 3.4. Моделирование системы с отклонениями коэффициентов в матрице коррекции наблюдателя

Отклоним коэффициенты матрицы коррекции наблюдателя:

$$L_b = 1.2L = \begin{bmatrix} 3.4577 \\ 0.1072 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - L_b C) = \{-3.7288 \pm 2.8216i\}$$

Замкнутая система осталась асимптотически устойчивой.

Проведем аналогичное моделирование при  $L_b$ :

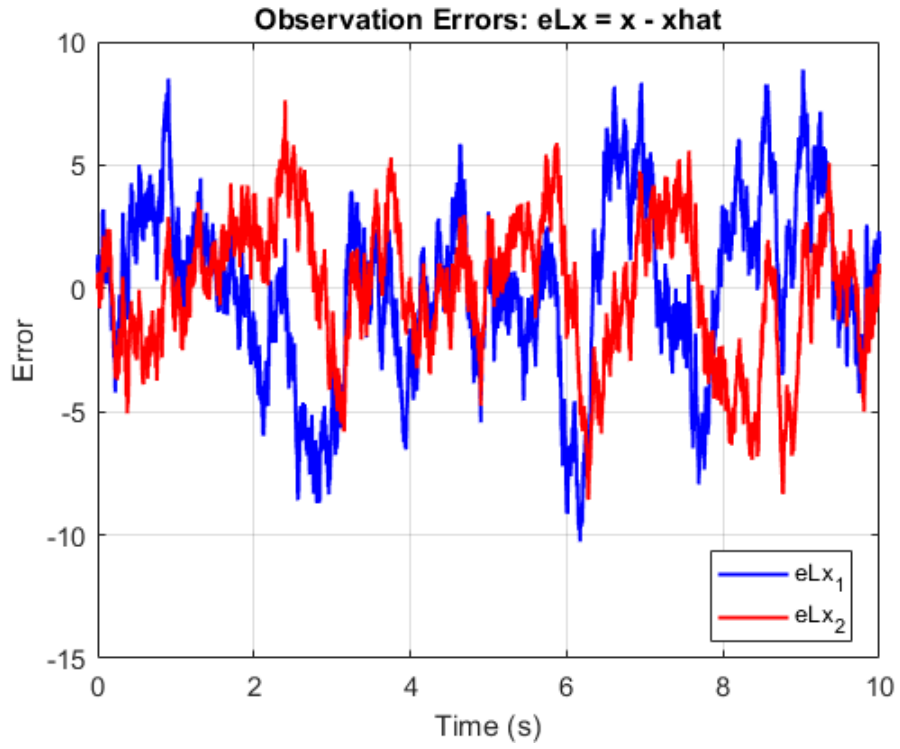


Рис. 4: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $L_b = 1.2L$

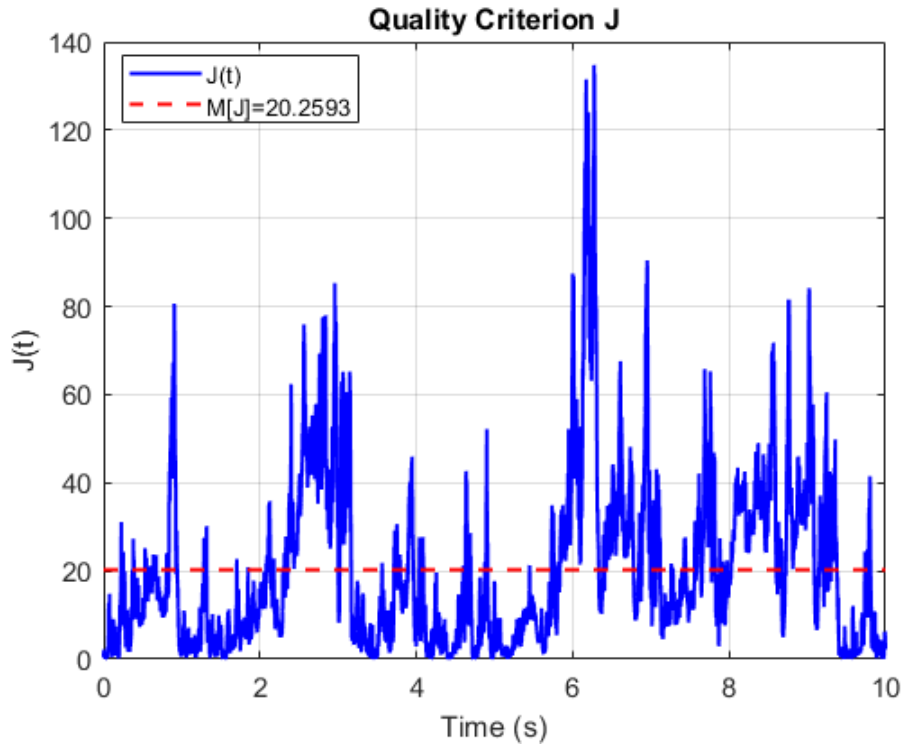


Рис. 5: Критерий качества при  $L_b = 1.2L$

Среднее значение критерия качества  $M[J] = 20.2593$ . По сравнению с эталоном значение уменьшилось на  $\approx 13.17\%$ .

Проверим  $L_b = 0.8L = [1.905, 0.0591]^T$ :

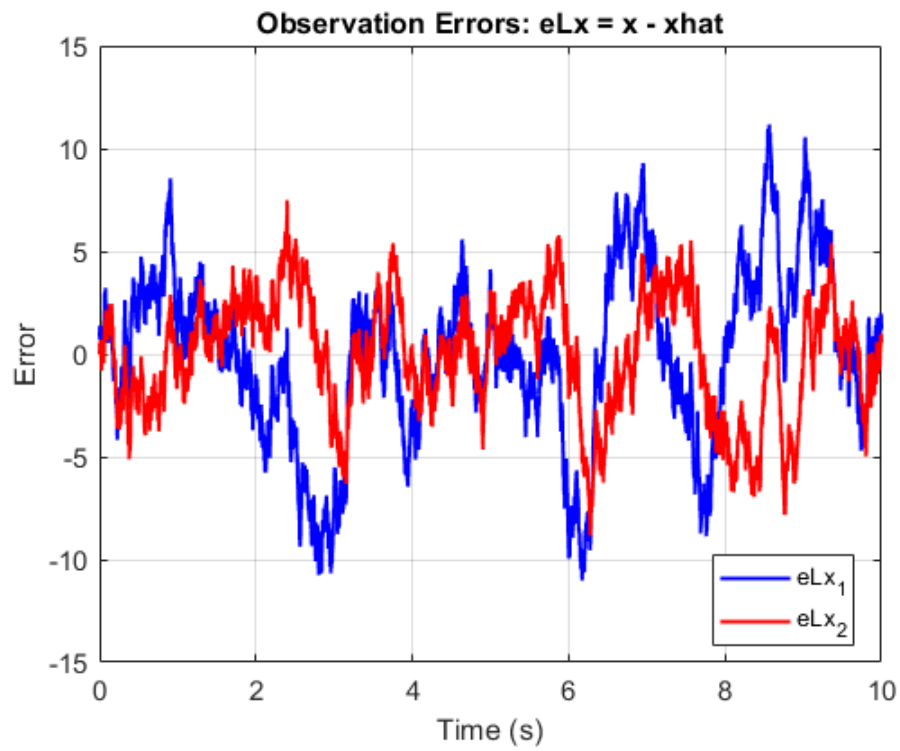


Рис. 6: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $L_b = 0.8L$

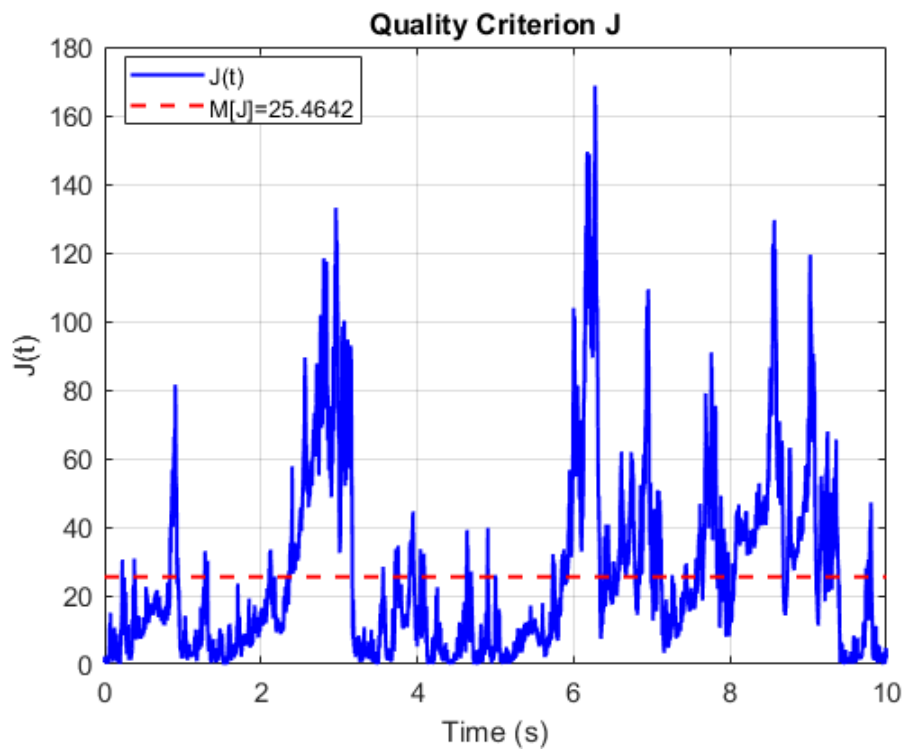


Рис. 7: Критерий качества при  $L_b = 0.8L$

Среднее значение критерия качества  $M[J] = 25.4642$  увеличилось.



### 3.5. Моделирование системы с отклонениями значений в матрице энергии $W$

Отклоним значения в матрице  $W$ :

$$W_b = 0.5W = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.5 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1.4575 \\ 0.0764 \end{bmatrix}$$

Собственные числа  $W_b$  :  $\{0.3688, 2.8812\}$ .

Матрица  $W_b$  симметрична и ее спектр не содержит неположительных чисел, следовательно матрица  $W_b$  положительно определена.

Проведем аналогичное моделирование системы:

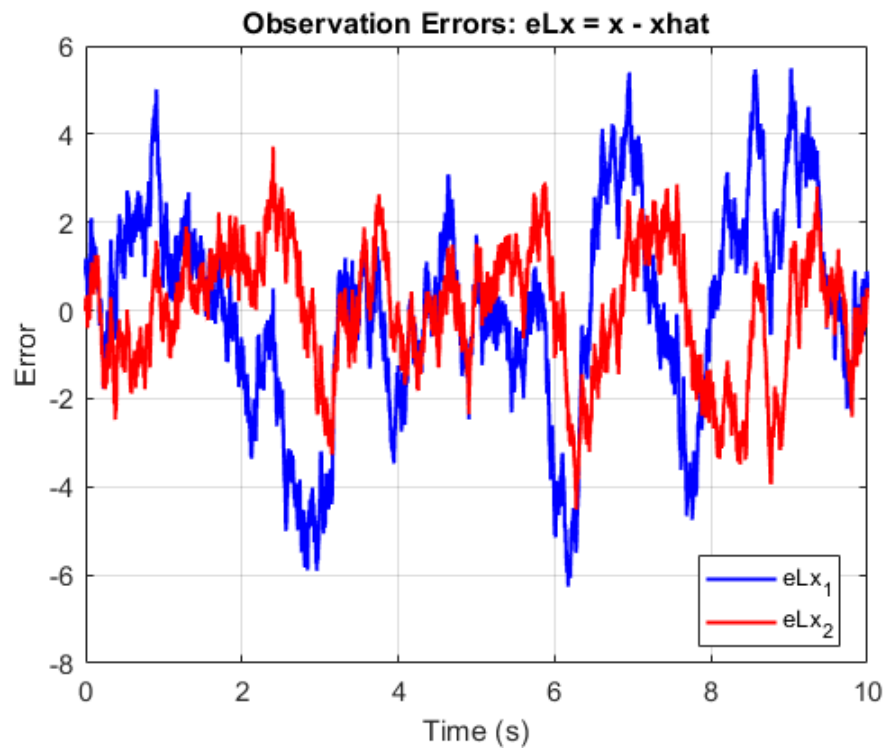


Рис. 8: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $W_b = 0.5W$

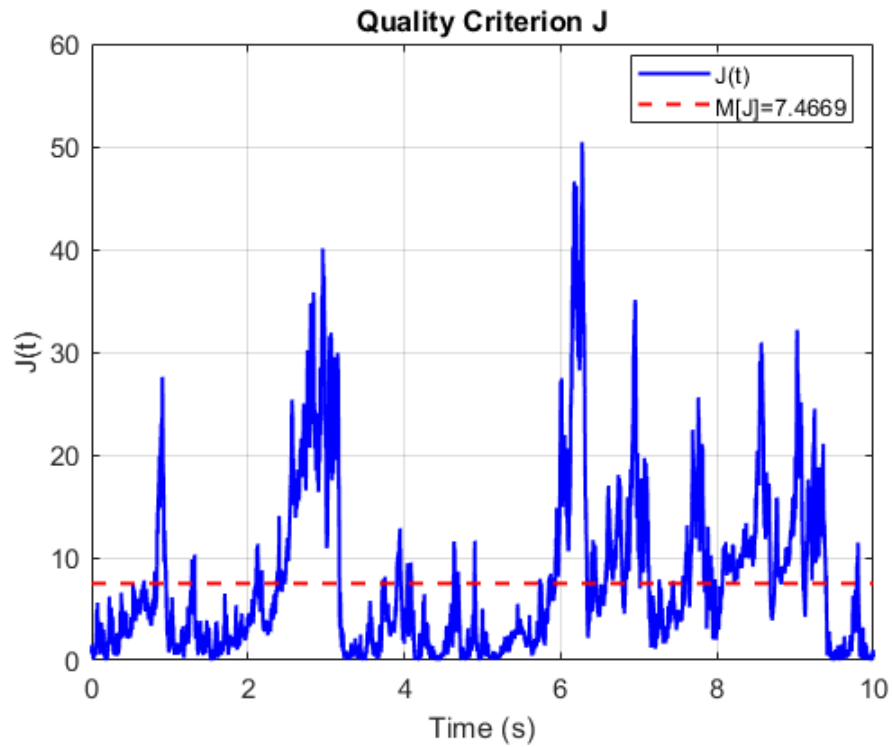


Рис. 9: Критерий качества при  $W_b = 0.5W$

Среднее значение  $M[J] = 7.4669$  значительно уменьшилось, ошибка наблюдения уменьшилась.

### 3.6. Моделирование системы с отклонением значения в матрице энергии $V$

Отклоним значение матрицы  $V$ :

$$V_b = 0.5V = 0.5 > 0 \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3.6943 \\ 0.0196 \end{bmatrix}$$

Проведем аналогичное моделирование системы при  $V_b, W$ :

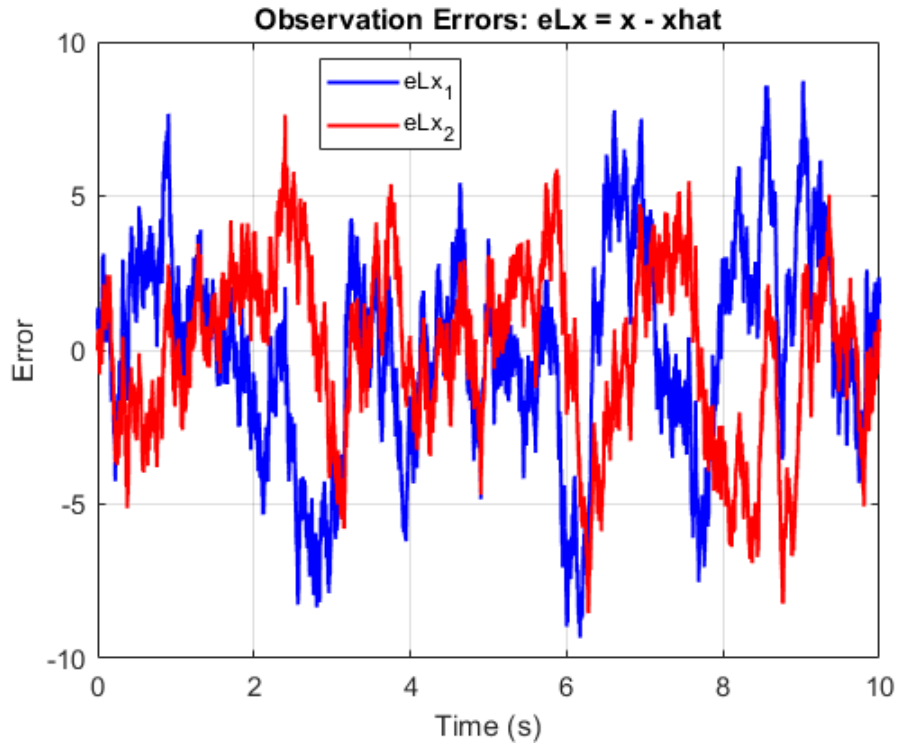


Рис. 10: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $V_b = 0.5V, W$

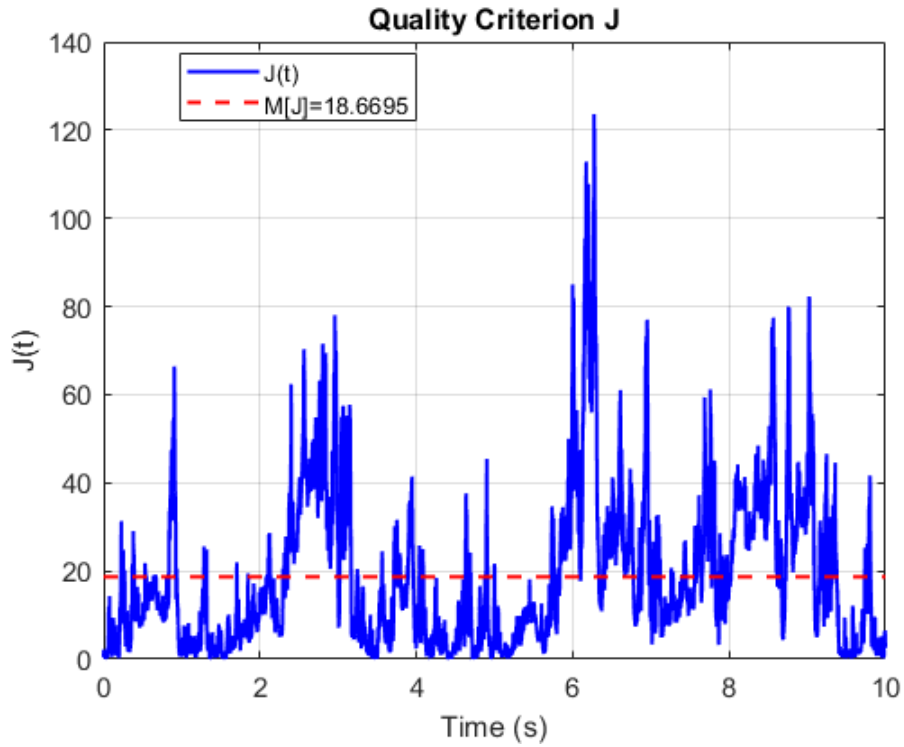


Рис. 11: Критерий качества при  $V_b = 0.5V, W$

Критерий качества в среднем  $M[J] = 18.6695$  и ошибка уменьшились менее значимо, чем в случае с  $W_b = 0.5W$ .

Промоделируем систему при  $V_b = 0.5V, W_b = 0.5W, L = [2.3813, 0.0739]^T$ :

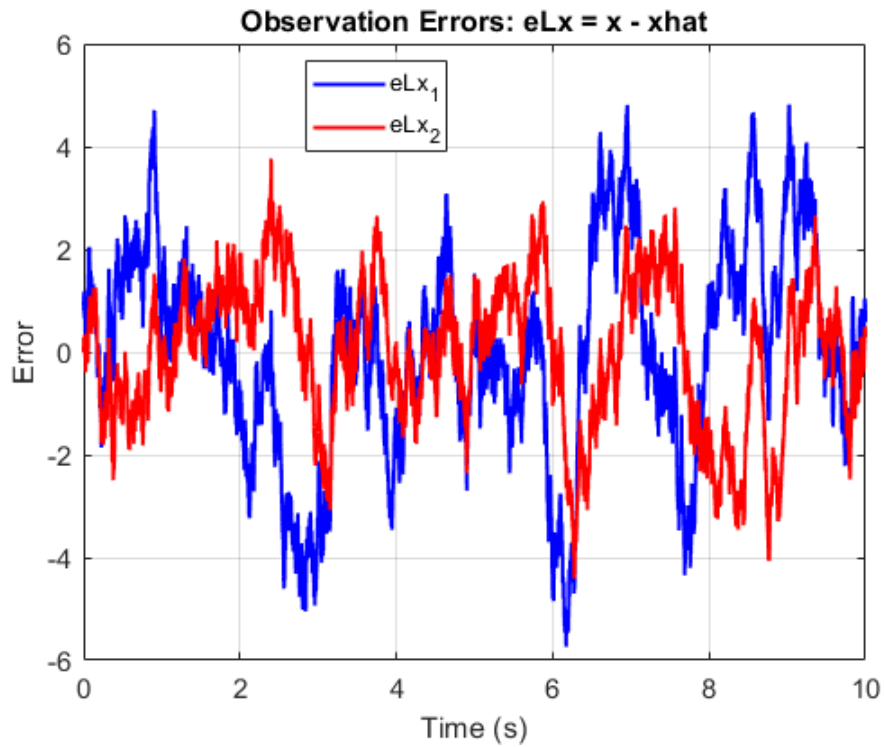


Рис. 12: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $V_b = 0.5V$ ,  $W_b = 0.5W$

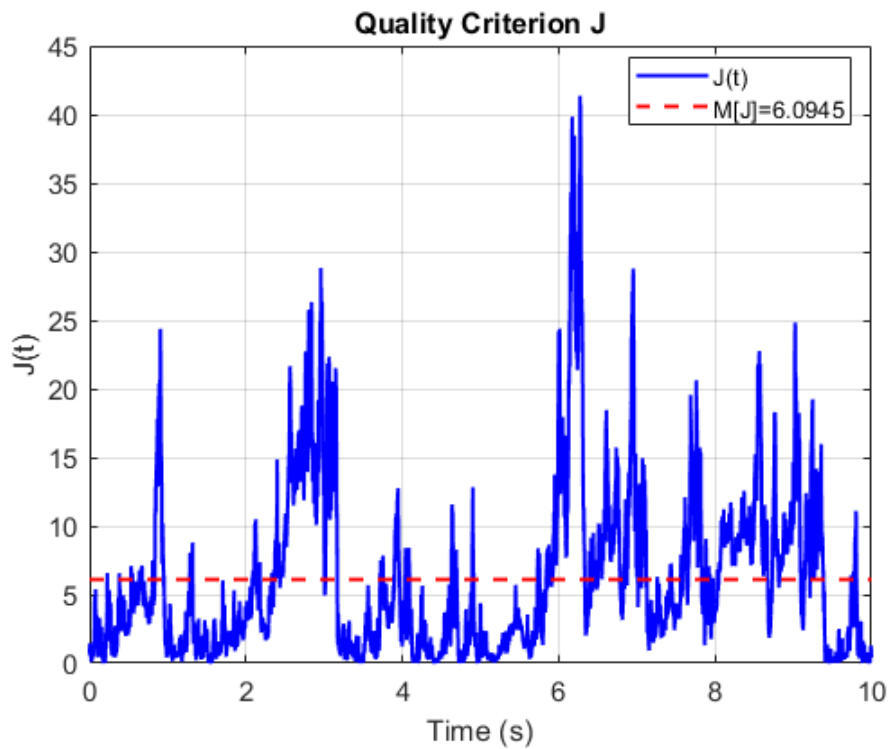


Рис. 13: Критерий качества при  $V_b = 0.5V$ ,  $W_b = 0.5W$

Среднее значения критерия качества  $M[J] = 6.0945$  получилось наименьшим из всех по сравнению с предыдущими пунктами – мы уменьшили влияния обеих помех. С ошибкой наблюдения аналогично.

### 3.7. Моделирование системы с ЛКГ регулятором и фильтром Калмана

Система замкнута регулятором  $u = -K\hat{x}$ . Оценка вектора состояния формируется на базе фильтра Калмана. Для расчета  $K$  используем LQR:

$$P = \begin{bmatrix} 0.56854 & -0.4901 \\ -0.4901 & 1.415 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.7106 & -0.6126 \end{bmatrix}$$

Спектр замкнутой системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-3.7765 \pm 2.4264i\}$$

Замкнутая система асимптотически устойчива.

Схема моделирования системы:

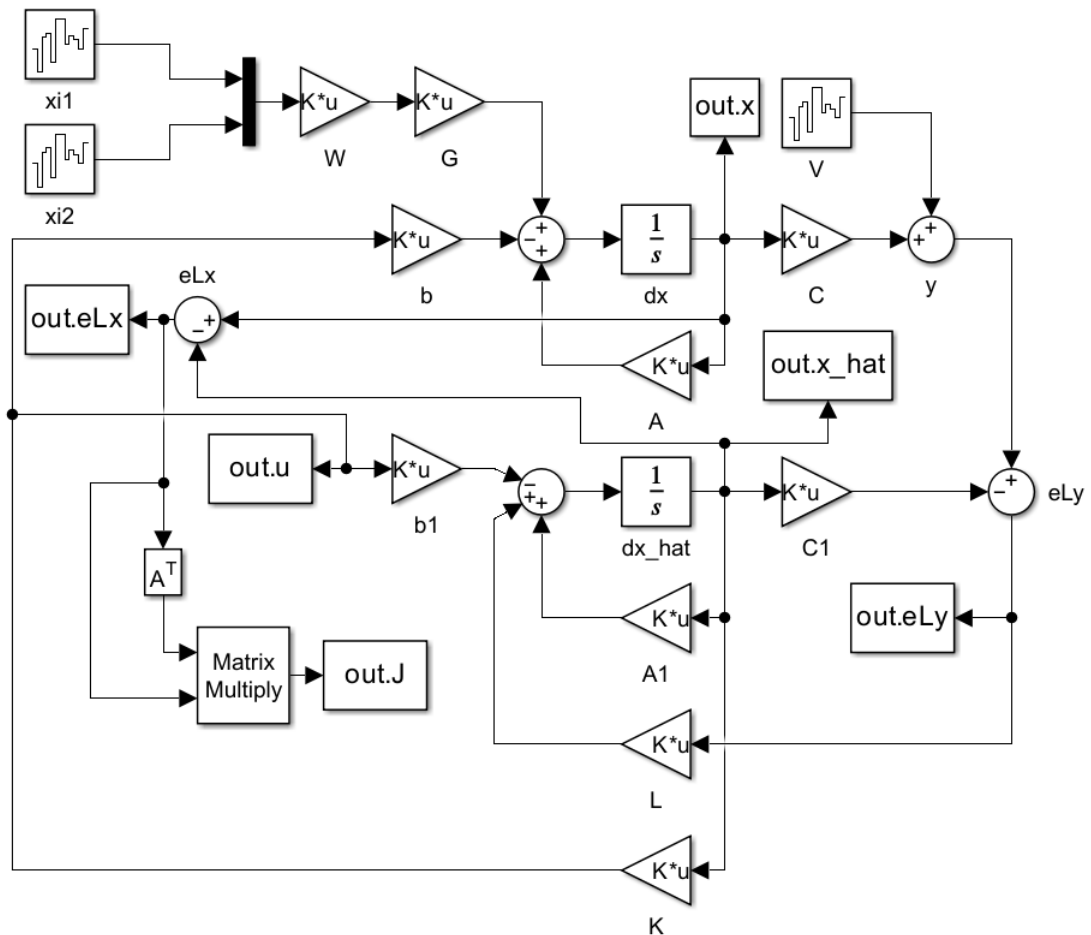


Рис. 14: Схема моделирования системы с ЛКГ и фильтром Калмана

Проведем аналогичное моделирование:

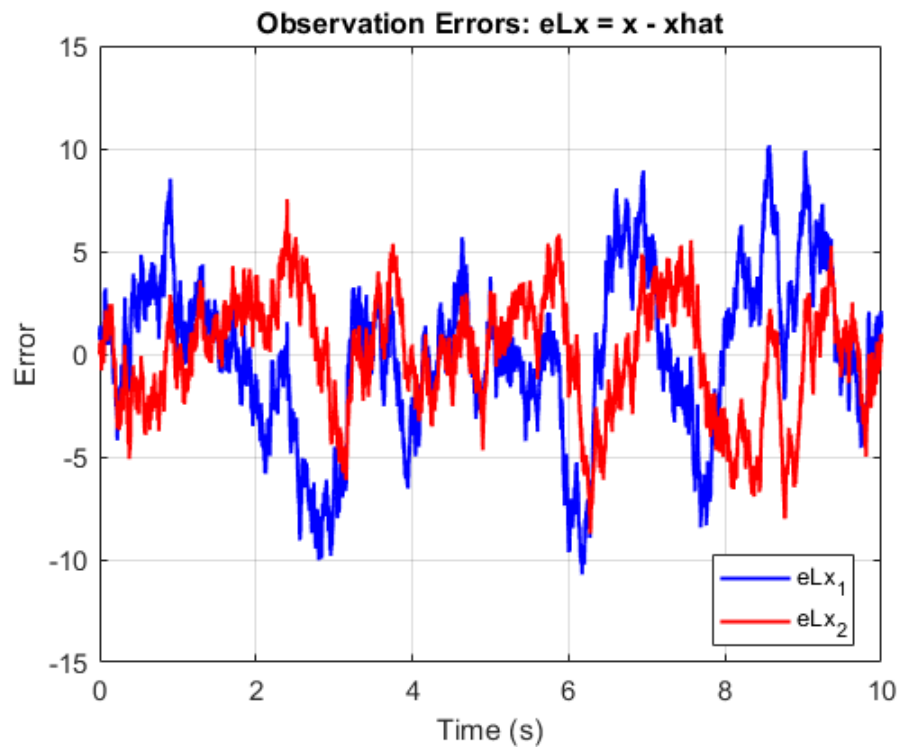


Рис. 15: Ошибка наблюдения  $e_L = x - \hat{x}$  при  $u = -K\hat{x}$

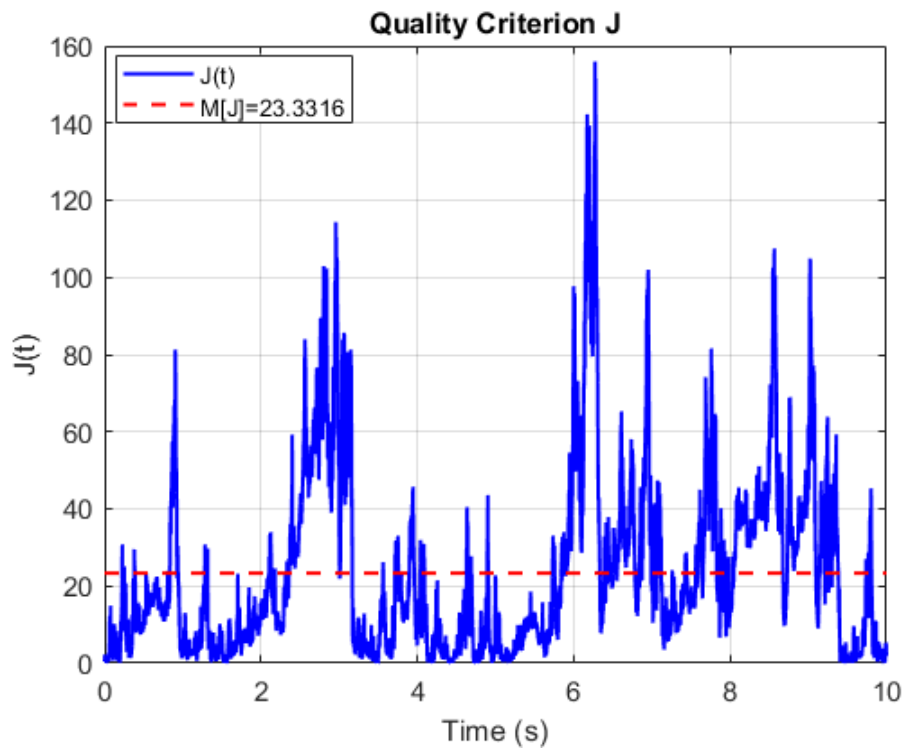


Рис. 16: Критерий качества при  $u = -K\hat{x}$

Среднее значение критерия качества такое же, как в пункте 3.3:  $M[J] = 23.3316$ . Это потому, что динамика ошибки оценивания определяется только параметрами наблюдателя (матрица коррекции  $L$  – замкнутая система  $A - LC$ )

и характеристиками помех  $W, V$ . Изменив управление, но не поменяв  $W, V$ , результат остался такой же. Управление  $u$  сокращается в уравнениях ошибки.

#### 4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был синтезирован наблюдатель (фильтр Калмана). Было проведено моделирование системы с полученным наблюдателем. Результаты показали, что наблюдатель синтезирован корректно – он обеспечивает минимальную ошибку при заданных интенсивностях помех. При отклонении коэффициентов матрицы коррекции наблюдателя на  $+20\%$  наблюдатель стал работать эффективнее – значения собственных чисел замкнутой системы уменьшились. При отклонении на  $-20\%$  наблюдатель стал работать хуже. При уменьшении влияния помех наблюдатель работает эффективнее. Управление не влияет на эффективность наблюдения.

#### А. Приложение

```
1 %% plant parameters
2 A=[0 -9;
3     1 -4];
4 b=[5;
5     0];
6 C=[1 0];
7 G=eye(2);
8 W=[7 5;
9     5 6];
10 Q=[3 0;
11     0 4];
12 V=1;
13 r=4;
14
15 %% Riccati L
16 GWGT=G*W*G';
17 [P,L,e]=icare(A',C',GWGT,V);
18 P
19 L=P*C'*V^-1
20 e=eig(A-L*C)
21
22 %% Riccati K
```

```
23 v=1 ;  
24 [PK,K,e]=icare(A,sqrt(v)*b,Q,r);  
25 PK  
26 K=inv(r)*b'*PK  
27 eK=eig(A-b*K)
```

Листинг 2: Программа для поиска  $L, K$