МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

по дисциплине
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»
на тему
«ПОИСК МИНИМУМА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ СТАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ»
Вариант 31

Выполнил: студент гр. R3441
Румянцев А. А.

Проверил: преподаватель
Парамонов А. В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Цель работы

Исследовать методы статической оптимизации и найти минимум критерия качества $J(x, u)$.

2. Постановка задачи

Дан критерий качества $J(x, u)$ и ограничение $c(x, u)$. Необходимо:

1. Найти глобальный минимум $J(x, u)$ на основе необходимого и достаточного условий экстремума:
   (a) Без ограничений;
   (b) С ограничением в виде равенства $c(x, u) = 0$;
   (c) С ограничением в виде неравенства $c(x, u) \leq 0$.
2. Осуществить градиентный поиск минимума критерия качества $J_1(x, u) = J(x, u)$:
   (a) Методом Ньютона Рафсона произвести пошаговый расчет экстремума.
   (b) Методом наискорейшего спуска для двух различных γ (соответствующих колебательной и апериодической сходимостям) произвести пошаговый расчет экстремума.

3. Экспериментальная часть

3.1. Исходные данные

Согласно варианту 31, критерий качества:

$$J(x, u) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7$$

Ограничение:

$$c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2$$

3.2. Поиск глобального минимума

3.2.1. Без ограничений

Градиент критерия:

$$\operatorname{grad} J(x,u) = \nabla J(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(x,u)}{\partial x} \\ \frac{\partial J(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x+6u+9 \\ 6x+6u+2 \end{bmatrix}$$

Приравняем производные к нулю и найдем x, u:

$$\begin{cases} 8x+6u+9=0, \\ 6x+6u+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7/2, \\ u=19/6 \end{cases}$$

Вычислим значение критерия:

$$J\left(-\frac{7}{2},\frac{19}{6}\right) = 4\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{19}{6}\right)^2 + 6\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{19}{6}\right) + 9\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(\frac{19}{6}\right) - 7,$$

$$J\left(-\frac{7}{2},\frac{19}{6}\right) \approx -19.583$$

Таким образом, для точки $(-7/2, 19/6)$ значение критерия $J \approx -19.583$ – глобальный минимум без ограничений.

3.2.2. С ограничением в виде равенства

Ограничение: $c(x,u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0$.

Функция Лагранжа:

$$L(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda c(x,u),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Подставим:

$$L(x,u,\lambda) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7 + \lambda\left(8x^2 + 7u + 2\right)$$

Система частных производных лагранжиана:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c(x,u) = 8x^2 + 7u + 2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 6u + 9 + 16x\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{u} = 6x + 6u + 2 + 7\lambda = 0 \end{cases}$$

Выразим λ:

$$\lambda = -\frac{6x + 6u + 2}{7}$$

Подставим в $\partial L / \partial x$:

$$8x + 6u + 9 - 16x\left(\frac{6x + 6u + 2}{7}\right) = 0,$$

$$7\left(8x + 6u + 9\right) - 16x\left(6x + 6u + 2\right) = 0,$$

$$-96x^2 - 96xu + 24x + 42u + 63 = 0$$

Выразим u из $\partial L / \partial \lambda$:

$$u = -\frac{8x^2 + 2}{7}$$

Подставим:

$$-96x^2 + 96x\left(\frac{8x^2 + 2}{7}\right) + 24x - 42\left(\frac{8x^2 + 2}{7}\right) + 63 = 0,$$

$$256x^3 - 336x^2 + 120x + 119 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx -0.40167, \\ x_{2,3} \approx 0.85708 \pm 0.65014i \end{cases}$$

В реальных задачах комплексные решения лагранжевых уравнений отбрасываются.

Подставим $x_1 = -0.40167$ в u:

$$u = -\frac{8\left(-0.40167\right)^2 + 2}{7} \approx -0.4701$$

Вычислим J при $x = -0.40167, u = -0.4701$:

$$J(-0.40167, -0.4701) = 4(-0.40167)^2 + 3(-0.4701)^2 + \\ + 6(-0.40167)(-0.4701) + 9(-0.40167) + \\ + 2(-0.4701) - 7 = \approx -9.11394$$

Так как реальное решение единственное, то единственным кандидатом на экстремум на границе $c(x, u) = 0$ является точка $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия в которой $J \approx -9.11394$ – глобальный минимум с ограничением в виде равенства.

3.2.3. С ограничением в виде неравенства

Ограничение: $c(x, u) = 8x^2 + 7u + 2 \leq 0$.

Условие Куна-Таккера: $\lambda \geq 0$.

Условие дополняющей нежесткости:$\lambda c(x, u) = 0$.

Проверим, находится ли неограниченный минимум в области $c(x, u) \leq 0$ – подставим точку из пункта 3.2.1 $(x, u) = (-7/2, 19/6)$ в $c(x, u)$:

$$c\left(-\frac{7}{2}, \frac{19}{6}\right) = 8\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{19}{6}\right) + 2 \approx 122.17 > 0$$

Так как $c(-7/2, 19/6) \approx 122.17 > 0$, то неограниченный минимум лежит вне области ограничения – внутренний минимум невозможен.

Тогда, минимум достигается на границе:

$$c(x, u) = 0,\ \lambda > 0,$$

что соответствует решению из пункта 3.2.2:

$$(x^*, u^*) = (-0.40167, -0.4701),\ J \approx -9.11394$$

Таким образом, глобальный минимум достигается на границе $c(x, u) = 0$ в точке $(-0.40167, -0.4701)$, значение критерия $J \approx -9.11394$.