

1) Argumente si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:

"Si usted corre una regresión de y contra X y luego otra regresión de X contra y no existe ningún caso en el que el resultado del coeficiente sea el mismo."

Sean las dos regresiones $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ y $X = \alpha_0 + \alpha_1 Y + v$

Como se demostró en clase:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = \sum_{i=1}^n (y_i) - \sum_{i=1}^n \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i - n \beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_0 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i = 0$$

$$\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x} = 0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}} \rightarrow \text{Estimador de } \hat{\beta}_0$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + u \quad \text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(\beta_0 + \beta_1 X + u, X)$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}} \rightarrow \text{Estimador de } \hat{\beta}_1$$

Entonces $\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)}$ para nuestras dos regresiones

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

$$\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y) \quad \text{propiedades de la covarianza.}$$

Para que los coeficientes sean iguales se necesita que

$$\frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

$$\frac{1}{\text{Var}(X)} = \frac{1}{\text{Var}(Y)}$$

Si $\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y) \neq 0 \rightarrow \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Cov}(X, Y)} = \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(Y)}$

Luego $\frac{1}{\text{Var}(X)} = \frac{1}{\text{Var}(Y)}$ ó $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$

Entonces la afirmación es FALSA porque dadas las dos regresiones si X y Y tienen la misma varianza $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$ entonces las pendientes $\hat{\alpha}_1$ y $\hat{\beta}_1$ son iguales.

Otro forma si $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) \rightarrow \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1$ porque

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} \wedge \text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y) \text{ propiedades Cov.}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

2) Considera el modelo de regresión lineal simple

$$y_i = S + Sx_i + u_i \text{ y supón que } x_i = e_i - u_i$$

de tal manera que no se cumple el supuesto de media condicional cero. Para ello supón que $e_i \sim (0, 1)$, $u_i \sim (0, 1)$ por lo cual $x_i \sim (0, 2)$. Si se estima $\hat{\beta}_1$

Usando MCU ¿Cuál será el valor del parámetro?

Visto de otra forma ¿Cuál es el sesgo de la estimación?

$$\text{Del problema 1 se tiene que } \beta_1 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

También se tiene que $e_i \sim (0, 1)$ y $u_i \sim (0, 1) \rightarrow x_i \sim (0, 2)$

$$\text{Como } y_i = S + Sx_i + u_i \rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, S + Sx_i + u_i)$$

De las propiedades de la covarianza

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, S) + S \cdot \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, u)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Cov}(X, Y) = 0 \quad + S \cdot \text{Var}(X) + \text{Cov}(X, u)$$

Como $X_i = e_i - u_i$, la variable independiente está correlacionada con el término de error y

$$\text{Cov}(X, u) = \text{Cov}(e_i - u_i, u_i)$$

Aplicando linealidad de la covarianza.

$$\text{Cov}(x_i u_i) = \text{Cov}(\varepsilon_i, u_i) - \text{Cov}(u_i, u_i)$$

Suponiendo que ε_i y u_i son independientes su covarianza es 0. Así

$$\text{Cov}(x_i u_i) = 0 - \text{Var}(u_i)$$

② También se tiene que $\varepsilon_i \sim (0, 1)$ y $u_i \sim (0, 1) \rightarrow x_i \sim (0, 2)$
lo que significa que $\text{Var}(u_i) = 1$ y $\text{Var}(x_i) = 2$

③ Por lo que $\text{Cov}(x_i u_i) = -1$

Con ①, ② y ③ podemos calcular $\text{Cov}(x, y)$

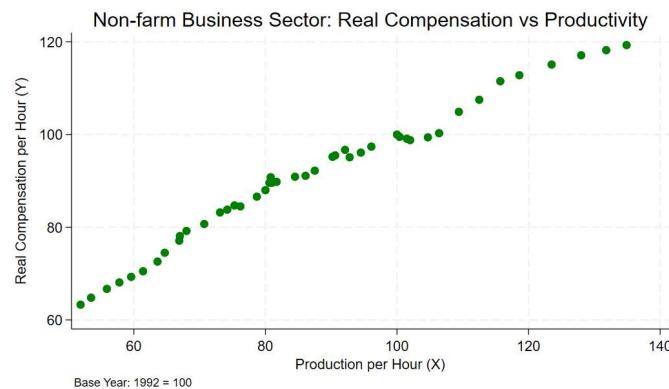
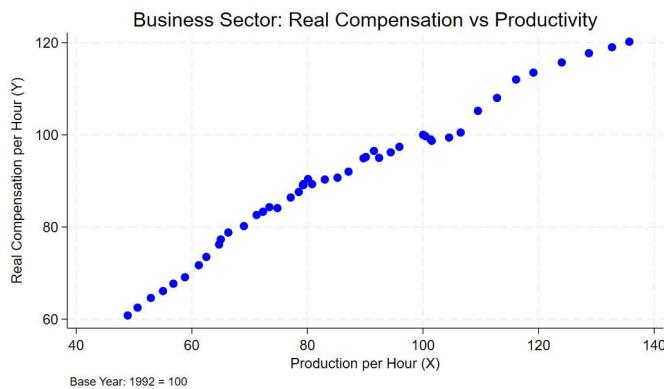
$$\text{Cov}(x, y) = 5 \text{Var}(x) + \text{Cov}(x, u) = 5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$\text{Luego } \hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} = \frac{9}{2} = 4,5$$

Finalmente, del modelo de regresión se tiene que $\beta_1 = 5$, pero
de acuerdo a los cálculos hechos el estimador $\hat{\beta}_1 = 4,5$, así que
 β_1 sesgo es $\hat{\beta}_1 - \beta_1 = 4,5 - 5 = -0,5$

PRÁCTICO

1. a) Grafique por separado y respecto de X para los dos sectores.



b) La teoría económica en la que se basa la relación entre ambas variables es la teoría de productividad marginal, y se describe así:

En un mercado competitivo las empresas maximizan la ganancia empleando trabajadores hasta un punto en donde el costo del último trabajador empleado iguala lo que ese trabajador produce:

$$W = P \cdot MPL$$

Donde W es el salario real, P es el precio de venta y MPL es el producto marginal del trabajo (el adicional producido por una hora más de trabajo)

El diagrama de dispersión apoya lo que dice la teoría:

Hay una relación positiva que muestra que altas productividades están correlacionadas con grandes remuneraciones como predice la teoría.

c) La regresión lineal está dada por $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ para los dos sectores.

Para el sector de negocios $\beta_0 = 32,74$ y $\beta_1 = 0,670$ (De Stata); así para, negocios $Y = 32,74 + 0,67X$.

así para negocios $\underline{Y = 32,74 + 0,67X}$.

Con un R^2 de 0,9765

Para el sector de negocios no agrícolas $\beta_0 = 32,39$ y $\beta_1 = 0,671$;

con lo que para negocios no agrícolas $\underline{Y = 32,38 + 0,671X}$

Con un R^2 de 0,9771.

Interpretación de resultados:

En ambas regresiones la pendiente es $0,67$, es decir por cada punto de incremento en el índice de producción la compensación real se incrementa en $0,67$ puntos.

El valor bastante alto de R^2 muestra una alta correlación entre la productividad y la remuneración,

Las pendientes prácticamente idénticas ^{tanto} en los sectores no agrícolas componen los demás sectores parecería mostrar que la relación productividad-remuneración es fuerte y que no depende de una industria específica

El intercepto β_0 representa el valor predicho de Y (remuneración real) cuando X (productividad) es cero. Matemáticamente si la productividad es cero, la compensación sería de 32.7, pero esto no tiene sentido económico.

d) Se supone que la elasticidad es independiente de la escala, en este caso un modelo log-log resulta y el modelo sería:

$$\ln(Y) = \alpha + \beta \ln(X) \text{ donde } \beta \text{ es la elasticidad (pendiente log-log)}$$

$$\ln(Y) = 1,607 + 0,652 \ln(X) \text{ para el sector negocios}$$

$$\ln(Y) = 1,575 + 0,658 \ln(X) \text{ para el sector negocios no agrícolas}$$

Un 1% de productividad lleva aproximadamente a 0,65%.
Un incremento en remuneración real.

Un 1% de productividad lleva aproximadamente a 0,65%.
de incremento en remuneración real.

Dn Flie

```
* =====
* PRODUCTIVITY AND COMPENSATION ANALYSIS
* Parts a, c, and d
* =====

* --- 1. SETUP ---
clear all

* Defining directory structure using local macros
global project_root "C:\repos\ujav-2502-econometrics"
global code_dir "$project_root\Code"
global figures_dir "$project_root\Figures"
global tables_dir "$project_root\Tables"
global data_dir "$project_root\Data"

cd "$project_root"

* --- 2. LOAD AND PREPARE DATA ---

* Import data from Excel
import excel "$data_dir/ecnm-2502-exam-0203.xlsx", sheet("Productividad y remuneración") firstrow
cellrange(A4) clear

* Rename variables
rename Año year
rename Producciónporhoranegocios x_business
rename Producciónporhoranegociosno x_nonfarm
rename RemuneraciónrealporhoraNego y_business
rename Remuneraciónrealporhoranego y_nonfarm

* =====
* PART A: SCATTER PLOTS
* =====

* Scatter plot for Business Sector
twoway (scatter y_business x_business, mcolor(blue) mszie(medium)), ///
    title("Business Sector: Real Compensation vs Productivity") ///
    xtitle("Production per Hour (X)") ///
    ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
    note("Base Year: 1992 = 100") ///
    graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-scatter_business.png", replace

* Scatter plot for Non-farm Business Sector
twoway (scatter y_nonfarm x_nonfarm, mcolor(green) mszie(medium)), ///
    title("Non-farm Business Sector: Real Compensation vs Productivity") ///
    xtitle("Production per Hour (X)") ///
    ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
    note("Base Year: 1992 = 100") ///
    graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-scatter_nonfarm.png", replace

* =====
* PART C: OLS REGRESSION
* =====

* Business Sector Regression
regress y_business x_business
estimates store business_reg

* Non-farm Business Sector Regression
regress y_nonfarm x_nonfarm
```

```

estimates store nonfarm_reg

* Compare both regressions
estimates table business_reg nonfarm_reg, stats(N r2 r2_a rmse)

* Scatter plots with fitted regression lines
twoway (scatter y_business x_business, mcolor(blue) msiz(small)) ///
    (lfit y_business x_business, lcolor(red) lwidth(medium)), ///
    title("Business Sector with OLS Fit") ///
    xtitle("Production per Hour (X)") ///
    ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
    legend(order(1 "Observed" 2 "Fitted") position(6)) ///
    note("Base Year: 1992 = 100") ///
    graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-regression_business.png", replace

twoway (scatter y_nonfarm x_nonfarm, mcolor(green) msiz(small)) ///
    (lfit y_nonfarm x_nonfarm, lcolor(red) lwidth(medium)), ///
    title("Non-farm Business Sector with OLS Fit") ///
    xtitle("Production per Hour (X)") ///
    ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
    legend(order(1 "Observed" 2 "Fitted") position(6)) ///
    note("Base Year: 1992 = 100") ///
    graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-regression_nonfarm.png", replace

* =====
* PART D: ELASTICITY ANALYSIS
* =====

* Log-log model for constant elasticity

generate ln_x_business = ln(x_business)
generate ln_y_business = ln(y_business)
generate ln_x_nonfarm = ln(x_nonfarm)
generate ln_y_nonfarm = ln(y_nonfarm)

* Business Sector log-log
regress ln_y_business ln_x_business
local elasticity_log_bus = _b[ln_x_business]
estimates store loglog_business

* Non-farm Business Sector log-log
regress ln_y_nonfarm ln_x_nonfarm
local elasticity_log_nf = _b[ln_x_nonfarm]
estimates store loglog_nonfarm

* Compare log-log models

estimates table loglog_business loglog_nonfarm, stats(N r2 r2_a)

```

a) En el mismo diagrama de dispersión, grafique los precios deoro, el IPC y el índice de la BVMV

Yo, Rafael E. Marulanda M. declaro bajo el juramento de honor que este parcial lo realicé de forma honesta y bajo las reglas establecidas durante el examen parcial, siguiéndome a las instrucciones dadas por el profesor.

