2) Considere el modelo de regresión lineal simple
$y_i = 5 + 5X_i + u_i$ y suponga que $X_i = e_i - u_i$
de tal manera que no se cumple el supuesto de media condicional cero. Para ello suponga que $e_i \sim (0,1)$, $u_i \sim (0,1)$ por lo cual $x_i \sim (0,2)$. Si se estima $\hat{\beta}_1$ usando MCO ¿Cuál será el valor del parámetro? o visto de otra forma ¿Cuál el sesgo de la estimación?

Del problema 1 se tiene que $\beta_1 = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$

También se tiene que $e_i \sim (0,1)$ y $u_i \sim (0,1) \longrightarrow x_i \sim (0,2)$

Como $y_i = 5 + 5x_i + u_i \longrightarrow Cov(x,y) = Cov(x, 5 + 5x + u)$

De las propiedades de la covarianza

1

$$Cov(x,y) = Cov(x,5) + 5 \cdot Cov(x,x) + Cov(x,u)$$

$$Cov(x,y) = \underset{\text{constante}}{0} + 5 \cdot Var(x) + Cov(x,u)$$

Como $x_i = e_i - u_i$, la variable independiente está correlacionada con el término de error y

$$Cov(x,u) = Cov(e_i - u_i, u_i)$$

Aplicando linealidad de la covarianza.

$$Cov(X,Y) = Cov(e_i, u_i) - Cov(u_i, u_i)$$

Suponiendo que e_i y u_i son independientes su covarianza es 0. Así

$$Cov(X,Y) = 0 - Var(u_i)$$

2 También se tiene que $e_i \sim (0,1)$ y $u_i \sim (0,1) \longrightarrow X_i \sim (0,2)$ lo que significa que $Var(u_i) = 1$ y $Var(X) = 2$

3 por lo que $Cov(X,Y) = -1$

Con 1, 2 y 3 podemos calcular $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = 5 Var(X) + Cov(X,Y) = 5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Luego $\hat{\beta}_1 = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

Finalmente, del modelo de regresión se tiene que $\beta_1 = 5$, pero de acuerdo a los cálculos hechos el estimador $\hat{\beta}_1 = 4{,}5$, así que el sesgo es $\hat{\beta}_1 - \beta_1 = 4.5 - 5 = -0{,}5$