1) Argumente si la siguiente afirmación es falsa o verdadera:
"Si usted corre una regresión de y contra x y luego otra regresión de x contra y no existe ningún caso en el que el resultado del coeficiente sea el mismo"

Sean las dos regresiones $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u \wedge X = \alpha_0 + \alpha_1 Y + v$

Como se demostró en clase:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i) - \sum_{i=1}^{n} \beta_0 - \sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} - \beta_0 - \frac{\beta_1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \text{Multiplicando por } 1/n$$

$$\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x} = 0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}} \longrightarrow \text{Estimador de } \hat{\beta}_0$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \quad \text{cov}(y, x) = \text{cov}(\beta_0 + \beta_1 x + u, x)$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\text{cov}(y, x)}{\text{Var}(x)}} \longrightarrow \text{Estimador de } \hat{\beta}_1$$

Entonces $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} \wedge$ para nuestras dos regresiones

$\hat{\alpha}_1 = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$

$\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y)$ propiedades de la covarianza.

Para que los coeficientes sean iguales se necesita que

$$\frac{\text{Cov}(Y, X)}{\text{Var}(X)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

1

$$\frac{\quad}{Var(X)} = \frac{\quad}{Var(Y)}$$

Si $Cov(Y,X) = Cov(X,Y) \neq 0 \longrightarrow \frac{\cancel{Cov(Y,X)}^{\,1}}{\cancel{Cov(X,Y)}_{\,1}} = \frac{Var(X)}{Var(Y)}$

luego $\frac{1}{Var(X)} = \frac{1}{Var(Y)}$ ó $Var(X) = Var(Y)$

Entonces la afirmación es FALSA porque dadas las dos regresiones si X y Y tienen la misma varianza $Var(X) = Var(Y)$ entonces las pendientes α_1 y β_1 son iguales.

de otra forma si $Var(X) = Var(Y) \longrightarrow \alpha_1 = \beta_1$ porque

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(Y,X)}{Var(X)} \wedge \quad Cov(Y,X) = Cov(X,Y) \text{ propiedades cov.}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$$

2) Considere el modelo de regresión lineal simple $y_i = 5 + 5X_i + u_i$ y suponga que $X_i = e_i - u_i$ de tal manera que no se cumple el supuesto de media condicional cero. Para ello suponga que $e_i \sim (0,1)$, $u_i \sim (0,1)$ por lo cual $x_i \sim (0,2)$. Si se estima $\hat{\beta}_1$ usando MCO ¿Cuál será el valor del parámetro? o visto de otra forma ¿Cuál el sesgo de la estimación?

Del problema 1 se tiene que $\beta_1 = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$

También se tiene que $e_i \sim (0,1)$ y $u_i \sim (0,1) \longrightarrow x_i \sim (0,2)$

Como $y_i = 5 + 5x_i + u_i \longrightarrow Cov(x,y) = Cov(x, 5 + 5x + u)$

De las propiedades de la covarianza

1

$$Cov(x,y) = Cov(x,5) + 5 \cdot Cov(x,x) + Cov(x,u)$$

$$Cov(x,y) = \underbrace{0}_{\text{constante}} + 5 \cdot Var(x) + Cov(x,u)$$

Como $x_i = e_i - u_i$, la variable independiente está correlacionada con el término de error y

$$Cov(x,u) = Cov(e_i - u_i, u_i)$$

Aplicando linealidad de la covarianza.

$Cov(x,u) = Cov(e_i, u_i) - Cov(u_i, u_i)$

Suponiendo que e_i y u_i son independientes su covarianza es 0. Así

$Cov(x,u) = 0 - Var(u_i)$

2 También se tiene que $e_i \sim (0,1)$ y $u_i \sim (0,1) \longrightarrow x_i \sim (0,2)$ lo que significa que $Var(u_i) = 1$ y $Var(x) = 2$

3 por lo que $Cov(x,u) = -1$

Con 1, 2 y 3 podemos calcular $Cov(x,y)$

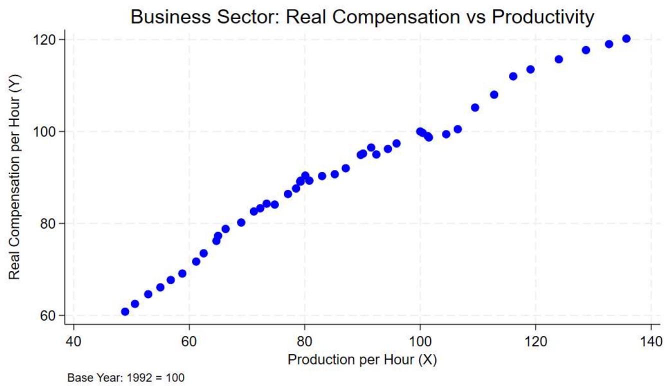
$Cov(x,y) = 5Var(x) + Cov(x,u) = 5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$

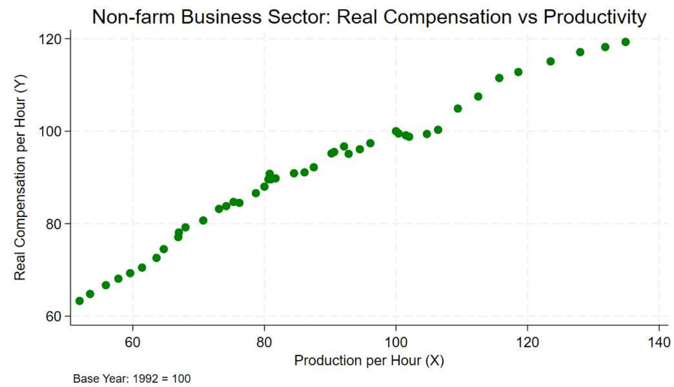
Luego $\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = \frac{9}{2} = 4,5$

Finalmente, del modelo de regresión se tiene que $\beta_1 = 5$, pero de acuerdo a los cálculos hechos el estimador $\hat{\beta}_1 = 4,5$, así que el sesgo es $\hat{\beta}_1 - \beta_1 = 4.5 - 5 = -0,5$

PRÁCTICO

1. a) Grafique por separado y respecto de X para los dos sectores.





b) La teoría económica en la que se basa la relación entre ambas variables es la teoría de productividad marginal, y se describe así:
En un mercado competitivo las empresas maximizan la ganancia empleando trabajadores hasta un punto en donde el costo del último trabajador empleado iguala lo que ese trabajador produce:

$$W = P \cdot MPL$$

Donde W es el salario real, P es el precio de venta y MPL es el producto marginal del trabajo (el adicional producido por una hora más de trabajo)

El diagrama de dispersión apoya lo que dice la teoría:
Hay una relación positiva que muestra que altas productividades están correlacionadas con grandes remuneraciones como predice la teoría.

c) La regresión lineal está dada por $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ para los dos sectores.
Para el sector de negocios $\beta_0 = 32,74$ y $\beta_1 = 0,670$ (De Stata);
así para negocios $Y = 32,74 + 0,67X$.

así para negocios $Y = 32,74 + 0,67X$.
Con un R^2 de 0,9765

Para el sector de negocios no agrícolas $\beta_0 = 32,39$ y $\beta_1 = 0,671$;
con lo que para negocios no agrícolas $Y = 32,38 + 0,671X$
Con un R^2 de 0,9771.

Interpretación de resultados:
En ambas regresiones la pendiente β_1 es 0,67, es decir por cada punto de incremento en el índice de producción la compensación real se incrementa en 0,67 puntos.

El valor bastante alto de R^2 muestra una altísima correlación entre la productividad y la remuneración.

Las pendientes prácticamente idénticas tanto en los sectores no agrícolas como en todos los demás sectores parecería mostrar que la relación productividad–remuneración es fuerte y que no depende de una industria específica

El intercepto β_0 representa el valor predicho de Y (remuneración real) cuando X (productividad) es cero. Matemáticamente si la productividad es cero, la compensación sería de 32.7, pero esto no tiene sentido económico.

d) Se supone que la elasticidad es independiente de la escala, en este caso un modelo log-log es útil y el modelo sería:

$\ln(Y) = \alpha + \beta \ln(X)$ en donde β es la elasticidad (pendiente log-log)

$\ln(Y) = 1,607 + 0,652 \ln(X)$ para el sector negocios

$\ln(Y) = 1,575 + 0,658 \ln(X)$ para el sector negocios no agrícolas

Un 1% de productividad lleva aproximadamente a 0,65% incremento en remuneración real.

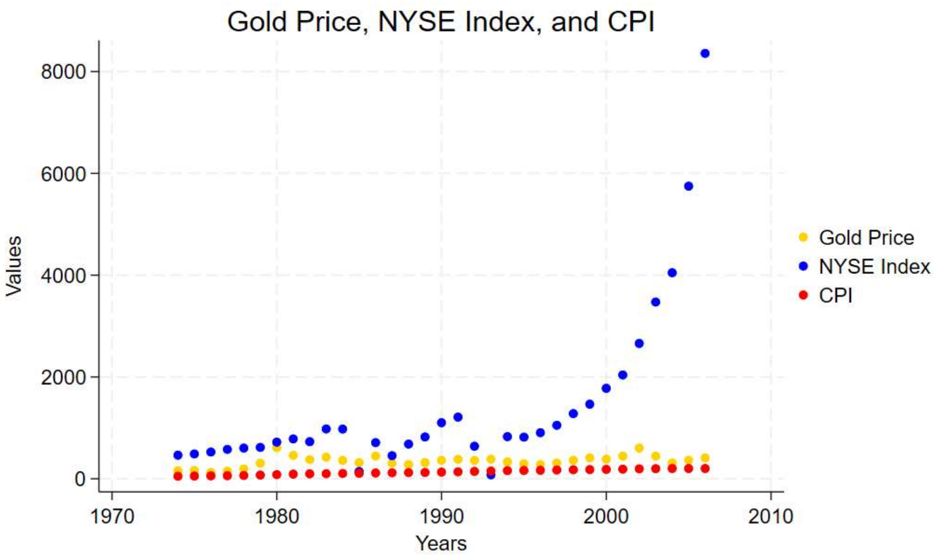
Un 1% de productividad lleva aproximadamente a 0,65%
de incremento en remuneración real.

Do file

```
* ==============================================================================
* PRODUCTIVITY AND COMPENSATION ANALYSIS
* Parts a, c, and d
* ==============================================================================

* --- 1. SETUP ---
clear all

* Defining directory structure using local macros
global project_root "C:\repos\ujav-2502-econometrics"
global code_dir "$project_root\Code"
global figures_dir "$project_root\Figures"
global tables_dir "$project_root\Tables"
global data_dir "$project_root\Data"

cd "$project_root"

* --- 2. LOAD AND PREPARE DATA ---

* Import data from Excel
import excel "$data_dir/ecnm-2502-exam-0203.xlsx", sheet("Productividad y remuneración") firstrow
cellrange(A4) clear

* Rename variables
rename Año year
rename Producciónporhoranegocios x_business
rename Producciónporhoranegociosno x_nonfarm
rename RemuneraciónrealporhoraNego y_business
rename Remuneraciónrealporhoranego y_nonfarm

* ==============================================================================
* PART A: SCATTER PLOTS
* ==============================================================================

* Scatter plot for Business Sector
twoway (scatter y_business x_business, mcolor(blue) msize(medium)), ///
   title("Business Sector: Real Compensation vs Productivity") ///
   xtitle("Production per Hour (X)") ///
   ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
   note("Base Year: 1992 = 100") ///
   graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-scatter_business.png", replace

* Scatter plot for Non-farm Business Sector
twoway (scatter y_nonfarm x_nonfarm, mcolor(green) msize(medium)), ///
   title("Non-farm Business Sector: Real Compensation vs Productivity") ///
   xtitle("Production per Hour (X)") ///
   ytitle("Real Compensation per Hour (Y)") ///
   note("Base Year: 1992 = 100") ///
   graphregion(color(white)) bgcolor(white)
graph export "$figures_dir/exam-0203-scatter_nonfarm.png", replace

* ==============================================================================
* PART C: OLS REGRESSION
* ==============================================================================

* Business Sector Regression
regress y_business x_business
estimates store business_reg

* Non-farm Business Sector Regression
regress y_nonfarm x_nonfarm
```

```
estimates store nonfarm_reg

* ==============================================================================
* PART D: ELASTICITY ANALYSIS
* ============================================================================

* Log-log model for constant elasticity

generate ln_x_business = ln(x_business)
generate ln_y_business = ln(y_business)
generate ln_x_nonfarm = ln(x_nonfarm)
generate ln_y_nonfarm = ln(y_nonfarm)

* Business Sector log-log
regress ln_y_business ln_x_business
local elasticity_log_bus = _b[ln_x_business]
estimates store loglog_business

* Non-farm Business Sector log-log
regress ln_y_nonfarm ln_x_nonfarm
local elasticity_log_nf = _b[ln_x_nonfarm]
estimates store loglog_nonfarm

* Compare log-log models

estimates table loglog_business loglog_nonfarm, stats(N r2 r2_a)
```

a) En el mismo diagrama de dispersión, grafique los precios del oro, el IPC y el índice de la BVNY



b) Se supone que una inversión es una protección contra la inflación si su precio o la tasa de rendimiento se mantiene por lo menos al ritmo de la inflación para probar esta hipótesis suponga que se decide ajustar:

$$\text{Precio Oro} = \beta_0 + \beta_1 \text{IPC} + u$$

$$\text{Índice BVNY} = \beta_0 + \beta_1 \text{IPC} + e$$

¿Que supuestos se incumplen?

Salida de Stata para las regresiones lineales

```
. ******************************************************************************
. * PART B: REGRESSION ANALYSIS
. ******************************************************************************
.
. regress GoldPrice CPI

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        33
-------------+----------------------------------   F(1, 31)        =      9.03
       Model |  90280.7151         1  90280.7151   Prob > F        =    0.0052
    Residual |  309788.388        31  9993.17381   R-squared       =    0.2257
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.2007
       Total |  400069.103        32  12502.1595   Root MSE        =    99.966

------------------------------------------------------------------------------
   GoldPrice | Coefficient  Std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         CPI |   1.072018   .3566615     3.01   0.005     .3446019    1.799434
       _cons |   204.3566   50.35878     4.06   0.000     101.6492     307.064
------------------------------------------------------------------------------

.
. regress NYSE CPI

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        33
-------------+----------------------------------   F(1, 31)        =     19.44
       Model |  36249807.3         1  36249807.3   Prob > F        =    0.0001
    Residual |  57800198.8        31  1864522.54   R-squared       =    0.3854
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.3656
       Total |  94050006.2        32  2939062.69   Root MSE        =    1365.5

------------------------------------------------------------------------------
        NYSE | Coefficient  Std. err.      t    P>|t|     [95% conf. interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         CPI |   21.48114   4.871788     4.41   0.000     11.54507    31.41722
       _cons |    -1399.2   687.8715    -2.03   0.051    -2802.123    3.723454
------------------------------------------------------------------------------
```

Interpretación Modelo del oro: 204, + 1,072 CPI

Por cada aumento en un punto del IPC, el precio del oro aumenta en $1,07 en promedio

Interpretación Modelo NYSE: − 1399 + 21,48 CPI.

Por cada aumento de 1 punto en IPC, el NYSE aumenta en 21,48 puntos en promedio.

Código de Stata:

```
******************************************************************************
* GOLD AND STOCKS
******************************************************************************

* --- 1. SETUP ---
clear all

* Defining directory structure
global project_root "C:\repos\ujav-2502-econometrics"
global code_dir "$project_root\Code"
global figures_dir "$project_root\Figures"
global tables_dir "$project_root\Tables"
global data_dir "$project_root\Data"

cd "$project_root"

* --- 2. LOAD AND PREPARE DATA ---

* Import data from Excel
import excel "$data_dir/ecnm-2502-exam-0204.xlsx", firstrow clear

* Rename variables to English
rename Año Year
rename Preciodeloro GoldPrice
rename BVNY NYSE
rename IPC CPI

* Check structure of dataset
describe

* Generate summary statistics
summarize

* Detailed summary statistics for all three variables
summarize GoldPrice CPI NYSE, detail

******************************************************************************
```

```
* PART A: SCATTER PLOT - ALL THREE VARIABLES IN ONE DIAGRAM
********************************************************************************
graph twoway (scatter GoldPrice Year, mcolor(gold)) ///
	(scatter NYSE Year, mcolor(blue)) ///
	(scatter CPI Year, mcolor(red)), ///
	title("Gold Price, NYSE Index, and CPI") ///
	xtitle("Years") ///
	ytitle("Values") ///
	legend(order(1 "Gold Price" 2 "NYSE Index" 3 "CPI"))

graph export "$figures_dir/combined_scatter.png", replace


********************************************************************************
* PART B: REGRESSION ANALYSIS
********************************************************************************

regress GoldPrice CPI

regress NYSE CPI
```

3 a) Estadísticas descriptivas de la inflación de todos los 181 bienes y servicios de la base de datos

Yo, Rafael E. Marulanda M. declaro bajo mi palabra de honor que este parcial lo realicé de forma honesta y bajo las reglas establecidas durante el examen parcial, ciñéndome a las instrucciones dadas por el profesor.