Tarea: Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden 1 caso general.

Estimados estudiantes,

Resolver los siguientes ejercicios en el formato adjunto y cargar en la tarea correspondiente.

Ejercicios.

Calcule la solución general de $x' = Mx$ para cada una de las siguientes matrices descritas por sus autovalores y multiplicidades, junto con sus matrices de cambio de base.

RESPECTO DEL CAMBIO DE BASE: Es posible que un autovalor λ repetido, supongamos 7 veces, le corresponda no solo un bloque de Jordan de la forma $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

SINO varias combinaciones como las siguientes (note en la primera los mini-bloques 2x2, 3x3, 2x2, y en la segunda uno 3x3 y otro 4x4)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Esto depende de la matriz de cambio de base P (y asuntos de dimensiones de los autosubespacios (también llamados eigen-subespacios) iterados que no deseamos especificar), nosotros trabajaremos solamente las P que producen un solo bloque de Jordan asociado a la multiplicidad de cada autovalor (no combinaciones internas).

Entonces para cada inciso use las especificaciones de cada autovalor y su multiplicidad ($\lambda \to m$) junto a la matriz P asociada.

$$* \ M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline -2 & 5 \\ 3-i & 1 \end{array}, P = diagonal(3/5) = (3/5)I_7$$

$$* \ M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline \pi & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}, P = diagonal(3,3,3,2,4,5)$$

$$* \ M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline 3\pi & 2 \\ 8i & 1 \\ 1 & 2 \end{array}, P = Householder \ \ de \ \ u = v/|v|, v = (1, 1/2, 3, 0, 0, -2)$$

* $M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline 1/3 & 3 \\ 3-\sqrt{3}i & 1 \end{array}, P = Householder\ \ de\ \ u = v/|v|, v = (0, 9, 5, 1/3, -2)$

* $M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline \sqrt{3} & 5 \\ 3-5i & 1 \end{array}, P = diagonal(2/3) = (2/3)I_7$

* $M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline \pi & 3 \\ -8 & 1 \\ 10 & 2 \end{array}, P = diagonal(2, 3, 2, 2, 4, 5)$

* $M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline \pi & 2 \\ 8i & 1 \\ 1 & 2 \end{array}, P = Householder\ \ de\ \ u = v/|v|, v = (1, -1, -3, 0, 0, -8)$

* $M : \begin{array}{cc} \lambda & m \\ \hline i-1/3 & 3 \\ 3-2i & 1 \end{array}, P = Householder\ \ de\ \ u = v/|v|, v = (0, 1, -3, 0, 0)$

Ahora, en los siguientes 8 ejercicios resuelva los problemas diferenciales no homogéneos $x' = Mx + F(t)$ para cada una de las matrices M anteiores. Recordando que si $X(t)$ es una matriz fundamental (e.g. la exponencial e^{Mt}) para el problema homogeneo $x_h' = Mx_h$ con condiciones iniciales (es un PVI) $x_h(t_0) = x_0$ entonces $x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)F(s)ds$ es la única solución al problema no homogéneo $x' = Mx + F(t)$ con condiciones iniciales $x_h(t_0) = x_0$.

* $F(t) = (3t^2\cos(-2t), 2e^{-t}\sin(t), -3t, 4t, 5t^2, 6e^{5t}, 7t)^T$
* $F(t) = (t\cos(t) + 2, 0, -t, 1, e^t, -\sin(5t))^T$
* $F(t) = (0, 0, 0, 2t^3\cos(-3t), -1t^3\cos(2t) - 3e^{-2t}\sin(3t), 2e^{-2t})^T$
* $F(t) = (2t^3\cos(-3t), -1t^3\cos(2t) - 3e^{-2t}\sin(3t), 2e^{-5t}\sin(8t), 0, 0, t, 1)^T$
* $F(t) = (2t^6, \cos(-3t), -10t^3\cos(2t), -3e^{-2t}\sin(3t), 0, 0)^T$
* $F(t) = (2t^3\cos(-3t), 0, 0, 0, 0, 2e^{-2t}\sin(t))^T$
* $F(t) = (1, t^2, \cos(9t), -3, 0, -2t)^T$
* $F(t) = (t, -9\cos(16t), t-7, e^{7t}\sin(17t), 0)^T$

Para los siguientes primero aplique eliminación de ser necesario, y resuelva el PVI (Problema de Valores Iniciales) con ecuaciones
DifferentialOperators1 $= f_1(t)$
DifferentialOperators2 $= f_2(t)$
$\vdots$
DifferentialOperatorsN $= f_N(t)$,
que también se escriben horizontalmente DifferentialOperators1 $= f_1(t)$, DifferentialOperators2 $= f_2(t), ...,$ DifferentialOperatorsN $= f_N(t)$, y condiciones iniciales que se especifican en cada inciso siguiente
además use dónde necesite a los polinomios
$A_1(D) = 6D^2 + -6, A_2(D) = -1D + -2$ y $B_1(D) = 2D^2 + 18, B_2(D) = -9D + 2$.

* $B_2(D)y - x = \cos(2t), Dx - 3y = te^t, x(0) = y(0) = 2$

* $A_2(D)y - Dx = t\sin(3t), D^2x - 3y = t^3$, Con todas las condiciones iniciales necesarias en el tiempo $t = 0$ iguales a 1.

$(3D + -1)y - x = \sin(3t), Dx - 3y - z = te^t, x - Dz + y = tx(1) = y(1) = z(1) = 3$

$A_1(D)B_2(D)y - B_1(D)x = \cos(3t), A_2(D)x - y = e^t$ Con todas las condiciones iniciales necesarias en el tiempo $t = 0$ iguales a 2.

$(D+1)y - x = t\sin(2t), Dx - 3y = e^t$ Con condiciones iniciales: $x(0) = y(0) = 1$

$(3D - 1)y - Dx = t^3, D^2x - 3y = \cos(t)$ Con todas las condiciones iniciales necesarias en el tiempo $t = 0$ iguales a 0.

$(3D - 1)y - x = \sin(3t), Dx - 3y - z = t^2e^t$ Con condiciones iniciales: $x(1) = y(1) = z(1) = 2$

$A_1(D)B_1(D)y - Dx = \cos(6t), A_2(D)x - y = e^{2t}$ Con todas las condiciones iniciales necesarias en el tiempo $t = 0$ iguales a 1.