Tarea: Conjuntos. Operatoria. Introducción a la lógica.

Estimados estudiantes,

Resolver los siguientes ejercicios en el formato adjunto y cargar en la tarea correspondiente.

Ejercicios sobre divisibilidad, y en particular: paridad, imparidad, primalidad.

Ejercicio: Determine el conjunto A de los números impares en el intervalo [1,55] y B los primos menores que 56. * Calcule los cardinales de $A \cup B, A \cap B, A - B, \mathcal{P}(B), B \times A$

Ejercicio: Recuerde que se dice que a divide a b (o que b es divisible por a) si existe c tal que b=ac. Demuestre que 2n(n+1) siempre divide a (3n+3)(8n).

Ejercicio: Si n es divisible por un primo p, determine razonadamente si es posible que p divida a 2n+1.

Ejercicio: Suponga que la raíz cuadrada de n es menor que 20. Determine la mayor cantidad de primos p que hay que probar si dividen a n para verificar la primalidad de n, buscando hacer el menor número de residuos.

Ejercicios sobre conjuntos, operatoria.

Ejercicio: Sean $A = \{1, 5, 9, 23\}$ y $B = \{$ primos menores que 40 $\}$. Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cup B$. (b) $A \cap B$. (c) $A - B$. (d) $B - A$.

Ejercicio: Encuentre los cardinales siguientes:

(a) $|A|$ cuando $A = \{4, 5, 6, \ldots, 23\}$.

(b) $|A|$ cuando $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 1000\}$.

(c) $|A \cap B|$ cuando $A = \{x \in N \mid x \leq 20\}$ y $B = \{x \in N \mid x \text{ es primo}\}$.

(d) Sea A encuentre $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia y su cardinal (analice inciso por inciso). (d.1) $A = \{a, b, c, d\}$ (d.2) A=los múltiplos positivos de 5 menores que 11

(e) Sea $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. ¿Cuántos subconjuntos de A contienen exactamente un elemento (es decir, ¿cuántos subconjuntos singleton hay)? ¿Cuántos subconjuntos doubleton (que contienen exactamente dos elementos) hay?

(f) Sea $X = \{n \in N \mid 8 \leq n \leq 20\}$. Encuentre ejemplos de conjuntos con las propiedades siguientes (*) Un conjunto $A \subseteq N$ con $|A| = 9$ tal que $X - A = \{10, 12, 16\}$. (*) Un conjunto $B \in \mathcal{P}(X - \{pares\})$ con $|B| = 5$. (*) Un conjunto $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $|C| = 5$. (*) Un conjunto $D \subseteq X \times X$ con $|D| = 5$. (*) Un conjunto $E \subseteq X$ tal que $|E| \in E$.

Ejercicio: Considere los conjuntos A y B, donde $A = \{3, 4\}$ y $B = \{1, |A|, |B|\}$. ¿Cuáles son los conjuntos?

Ejercicio: Explique por qué no hay un conjunto A que satisfaga $A = \{2, A\}$.

Ejercicio: Dados los conjuntos A, B definidos por $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{$ divisores positivos de 30 $\}$ calcule $||A| - |B \cap A| - |B - A||$

Ejercicios sobre negaciones cuantificadas. Use el contexto que se le brinda para ayudarle.

Ejercicio: En el contexto de los límites se tiene la definición : $\lim_{x \to a} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Use esto para verificar: (a) $\lim_{x \to 3} 5x - 5 \neq 9$. (b) $\lim_{x \to 0}(x + 6)/3 = 2$

Ejercicio: En el contexto de la trigonometría se tiene que; un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto (de medida $\pi/2$ radianes) y, un triángulo isósceles tiene dos ángulos congruentes en la base. Entonces cuantifique y resuelva: (a) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, si 0 < x < \pi/2$ (b) Si un isósceles contiene un ángulo obtuso entonces los otros dos deben ser agudos.

Ejercicio: En el contexto de la divisibilidad de enteros se tiene que; a divide a b es equivalente a que b es divisible por a lo que matemáticamente equivale a $a|b \equiv \exists c : b = ac \equiv (b, a) = 0$. Entonces cuantifique y muestre que: (a) $8,051 \mid 8,026,847$ (b) si el residuo de X-Y y de U-V es divisible por n entonces tanto XU-YV como X+U-(Y+V) también son divisibles por n.

Ejercicio: Sea P(x) la proposición de que el entero x sea primo y O(x) que sea impar, pruebe el teorema $\forall x((P(x) \vee (\int_0^x 4t dt = 18)) \Rightarrow (O(x) \vee x = 2 \vee x = 3))$

Ejercicio: Aplique la negación sobre la proposición cuantificada siguiente $\neg(\forall x \forall y((x - y = 6) \wedge (xy = 1 \vee y + x > 3)))$

Ejercicio: Extraiga la negación en $\exists x(\neg P(x) \Rightarrow \forall y : \neg P(y) \wedge Q(y)))$

Ejercicio: Distribuya la negación sobre la proposición cuantificada siguiente $\neg(\forall x \forall y \exists z(x > y \vee y < x \Rightarrow P(x, y, z)))$