Övning 13

Robert Mattila

De regulatorer som vi analyserat i kursen

- PID $$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

- Lead-lag $$U(s) = K\,\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\,\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\,E(s)$$

- Tillståndsåterkoppling och observatör

$$u = -Lx + r$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

för

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

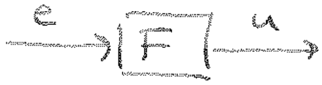
är kontinuerliga i tid.

Dessa samband kan implementeras praktiskt mha. t.ex. analoga elektriska eller mekaniska kretsar.

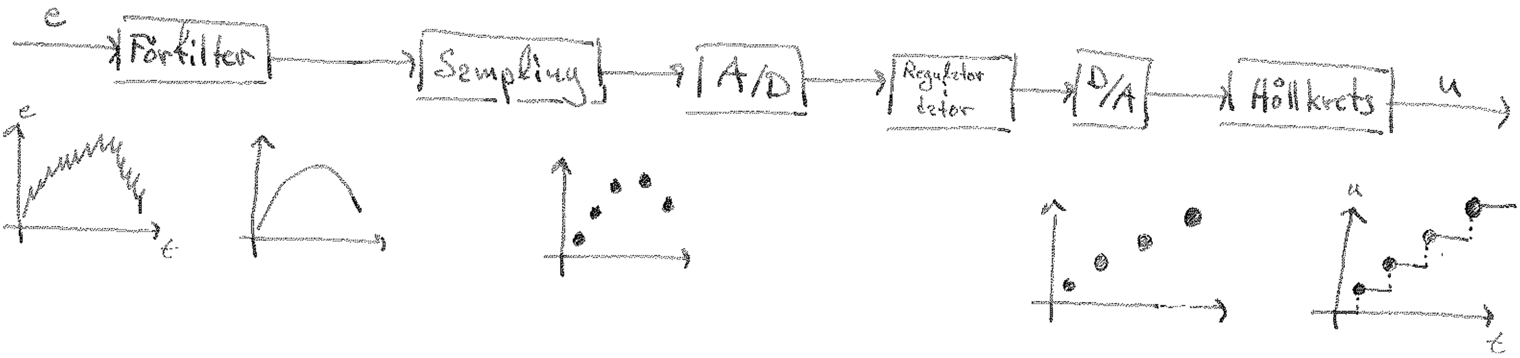
Nuförtiden implementeras oftast regulatorer mha. datorer, som arbetar diskret.

För analog implementation:
Hitta ett fysiskt system vars uppförande beskrivs av en differentialekvation på samma form som regulatorn. Tolka sedan värdena i det fysiska systemet som e och u, och koppla på något sätt samman med systemet som regleras. systemet som önskas

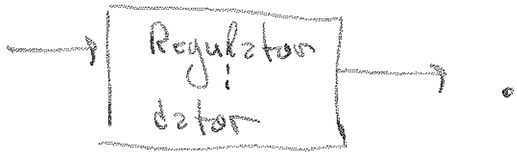
Vid datorimplementation byts regulatorblocket



ut mot



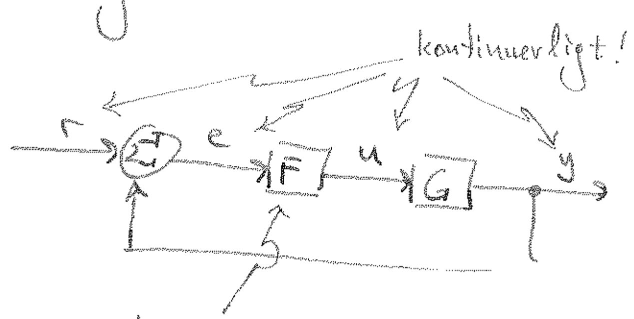
Vi approximerar de kontinuerliga differentialekvationerna som beskriver system och regulator med diskreta differensekvationer, som kan implementeras i blocket



.

OBS!

Systemet vi reglerar är fortfarande kontinuerligt!



insignal (e) och utsignal (u) är kontinuerliga! Men internt implementeras regleringen diskret!

Diskret approximation av derivata

- Euler bakåt

$$\dot{x}(t) \approx \underbrace{\tfrac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)}$$

$\Delta_e x(t) =$

- Tustins formel (rekursiv)

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$$

där

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\right) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

och $\Delta_t x(0) = 0.$

Operatornotation

Inför

- Deriveringsoperator p:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = pX(t)$$

- Förskjutningsoperator q_T:

$$x(t+T) = q_T\, x(t)$$

$$x(t-T) = q_T^{-1}\, x(t)$$

Vi kan då omformulera Euler bakåt som

$$\dot{x}(t) = p x(t)$$

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right) x(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p \approx \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right) \quad \text{för Euler bakåt}} \quad \begin{matrix}(10.16)\\ \text{s. } 213\end{matrix}$$

och Tustin som:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\right) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + q_T^{-1}\right)\Delta_t x(t) = \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right) x(t) \Longrightarrow$$

$$\Delta_t x(t) = \frac{2}{T}\,\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}}\, x(t)$$

Kom ihåg $p x(t) = \dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$, så

$$\boxed{p \approx \frac{2}{T}\,\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}} \quad \text{för Tustin}} \; . \quad \begin{matrix}(10.17)\\ \text{s. } 213\end{matrix}$$

Sampling

- Samplingsintervall, T
- Samplingsfrekvens, ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

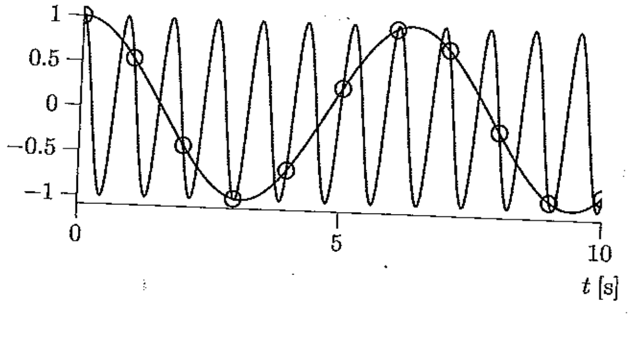
- Nyquistfrekvens, ω_N

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

dvs. halva samplingsfrekvensen.

Aliaseffekten

Vid sampling kan inte frekvenser snabbare (i.e. större) än ω_N skiljas från frekvenser under ω_N.



(s. 218)

Varje gång systemet samplas, dvs. vid $t = T, 2T, 3T, \ldots$ antar båda kurvorna samma värde.

$\Longrightarrow$ Kan ej skiljas!

Upg 11.2 1

Givet att $\dot{y}(t) = u(t)$ och att $u(t) = u_k$
för $kT \leq t < (k+1)T$.

Vi söker $y_{k+1} = y((k+1)T)$.

Kom ihåg

$$\underbrace{z(t)}_{} = \underbrace{z(t_0)}_{\text{värde i } t_0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \dot{z}(r)\,dr}_{\text{ändring mellan } t_0 \text{ och } t}$$

$$= z(t_0) + \left[z(r)\right]_{r=t_0}^{t} =$$

$$= z(t_0) + z(t) - z(t_0)$$

$$= z(t)$$

Vi skriver

$$y_{k+1} = y((k+1)T) = y(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \dot{y}(r)\,dr = \left\{ \dot{y} = u \right\} =$$

$$= y(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} u(r)\,dr = \left\{ \begin{array}{l} u \text{ konstant} \\ \text{på detta} \\ \text{intervall} \end{array} \right\} =$$

$$= y(kT) + u_k \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} dr}_{=T} = y_k + T \cdot u_k .$$

b, P-regulatorn $u_k = -Ky_k$ insatt i föregående ekvation ger

$$y_{k+1} = y_k + Tu_k = y_k + T(-Ky_k) =$$

$$= (1-TK)y_k .$$

Vi har då rekursivt att

$y_0 = y(0)$ ⟵ given

$y_1 = (1-TK)y_0$

$y_2 = (1-TK)y_1 = (1-TK)(1-TK)y_0 = (1-TK)^2 y_0$

$\vdots$

$y_n = (1-TK)^n y_0$

Systemet är stabilt om utsignalen inte går mot oändligheten, dvs.

$$\lim_{n\to\infty} |y_n| < \infty \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} |1-TK|^n |y_0| < \infty \implies \{y_0 \neq \infty\}$$

$$|1-TK| \leq 1 \implies$$

$$-1 \leq 1 - TK \leq 1 \Rightarrow$$

$$-2 \leq -TK \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{T} \geq K \geq 0$$

Upg 11.1

I tidsdomänen svarar

$$U(s) = KN \frac{s+b}{s+bN} E(s)$$

mot

$$sU(s) + bNU(s) = KN\left(sE(s) + bE(s)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\dot{u}(t) + bNu(t) = KN\left(\dot{e}(t) + be(t)\right).$$

Använder vi nu operatornotationen och Tustins approximation för derivata

$$p \approx \frac{2}{T} \frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}} \qquad (10.17) \quad \text{s. } 213$$

fås

$$pu(t) + bNu(t) = KN\left(pe(t) + be(t)\right) \rightsquigarrow$$

$$\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}u(t) + bNu(t) = KN\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}e(t) + KNbe(t) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{T}(1-q_T^{-1})u(t) + bN(1+q_T^{-1})u(t) = \frac{2KN}{T}(1-q_T^{-1})e(t) + KNb(1+q_T^{-1})e(t) \Rightarrow$$

$$u(t)\left[\frac{2}{T}+bN\right] + \underbrace{q_T^{-1}u(t)}_{=u(t-T)} \cdot \left[-\frac{2}{T}+bN\right] = e(t)\left[\frac{2KN}{T}+KNb\right] + \underbrace{q_T^{-1}e(t)}_{=e(t-T)} \left[-\frac{2KN}{T}+KNb\right] \Rightarrow$$

$$\left[\frac{2}{T}+bN\right]u(t) = \left[\frac{2}{T}-bN\right]u(t-T) + KN\left[\frac{2}{T}+b\right]e(t) + KN\left[-\frac{2}{T}+b\right]e(t-T)$$

dvs. om $u(t)$ löses ut

$$u(t) = \underbrace{\frac{\frac{2}{T} - bN}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \beta_1} u(t-T) + \underbrace{KN \frac{\frac{2}{T} + b}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \alpha_1} e(t) + \underbrace{KN \frac{-\frac{2}{T} + b}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \alpha_2} e(t-T) .$$

Vi identifierar parametrarna:

$$\beta_1 = \frac{2 - bNT}{2 + bNT}$$

$$\alpha_1 = \frac{2 + bT}{2 + bNT} NK$$

$$\alpha_2 = \frac{-2 + bT}{2 + bNT} NK$$

Upg 11.3

Vi samplar med samplingsintervall T.
Samplingsfrekvens är då $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ och
Nyquistfrekvens $\omega_N = \frac{\pi}{T}$.

Alla signaler över ω_N kommer uppfattas som lägre frekvenser.

Vår insignal är

$$u = u_0 + u_1$$

u_0: frekvens $0 < \omega < \pi/T = \omega_N$

u_1: frekvens $\omega_N = \frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T} = \omega_s$

u_0:s frekvens ligger under ω_N och kommer inte uppfattas annorlunda. u_1:s frekvens ligger över ω_N och kommer uppfattas som signal under ω_N.

Dvs.

$y = y_0 + y_1$ där y_0 fås från u_0 och y_1 från u_1.

Vårt filter är LTI, så sinus in → sinus ut gäller.

Vi är intresserade av hur u_1 övergår till y_1.

$$u_1(t) = \sin \omega_2 t \qquad \frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T}$$

Detta ger, innan sampling, en utsignal från filtret

$$\bar{y}_1(t) = \bar{A}\sin(\omega_2 t + \bar{\varphi})$$

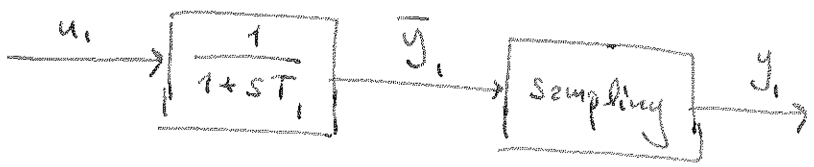
där

$$\bar{A} = |G(i\omega_2)| = \left|\frac{1}{1+sT_1}\right|\Bigg|_{s=i\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}},$$

och

$$\bar{\varphi} = \arg G(i\omega_2) = \arg\frac{1}{1+i\omega_2 T_1} =$$

$$= \underbrace{\arg 1}_{} - \arg(1+i\omega_2 T_1) = -\arctan\left(\frac{\omega_2 T_1}{1}\right).$$



Efter sampling har vi

$$y_1(kT) = \bar{y}_1(kT) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi})$$

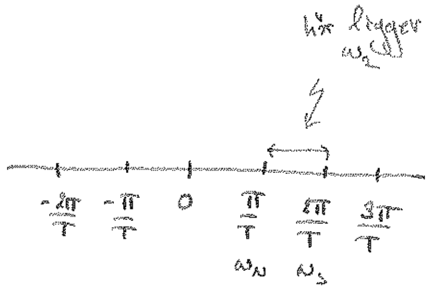
signalen vi uppfattar

den faktiska signalen vi samplar

Vi vill nu skriva om detta så att frekvensen ligger mellan noll och ω_N (eftersom vi vet att ω_2 kommer uppfattas där).

Vi gör detta genom att lägga till eller dra bort multipler av samplingsfrekvensen.

$$y_1(kT) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi}) =$$

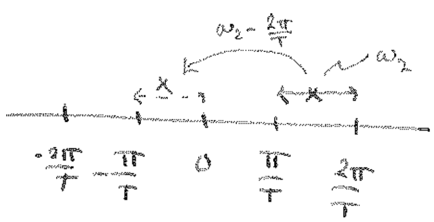


$$= \bar{A}\sin\left(\left(\omega_2 - \frac{2\pi}{T}\right)kT + \bar{\varphi}\right) =$$

obs! detta ändrar inte sinusen!

$$\bar{A}\sin(\omega_2 kT - 2\pi k + \bar{\varphi}) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi})$$

$$= \left\{ \left|\omega_2 - \frac{2\pi}{T}\right| < \omega_N \text{ men på "fel" sida om noll} \right\} = \left\{ \sin(-x) = -\sin x \right\} =$$



$$= -\bar{A}\sin\left(\left(\frac{2\pi}{T}-\omega_2\right)kT-\bar{\varphi}\right) = \left\{\sin(x+\pi) = -\sin x\right\} =$$

$$= \underbrace{\bar{A}}_{=A}\sin\left(\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}-\omega_2\right)}_{=\omega_1}kT\underbrace{-\bar{\varphi}+\pi}_{=\varphi}\right) =$$

$$= A\sin(\omega_1 kT+\varphi)$$

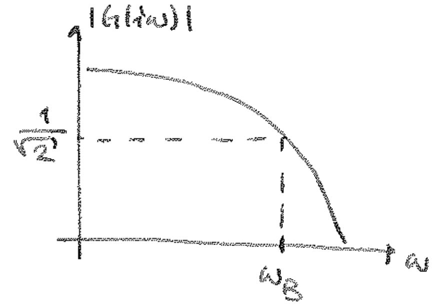
där $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}-\omega_2$ är mellan noll och Nyquistfrekvensen, $A = \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}}$ och

$$\varphi = \pi - \bar{\varphi} = \pi - (-\arctan\omega_2 T_1) = \pi + \arctan\omega_2 T_1 .$$

b, u_0 passerar också vårt filter.

Med sinus in $\longrightarrow$ sinus ut får vi att alla frekvenskomponenter : u_0 skalas med en faktor

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega T_1^2}} .$$



Eftersom $|G(i\omega)|$ är avtagande kommer alla frekvenser större än ω_B dämpas med mer än $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = |G(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B^2 T_1^2}} \Longrightarrow$$

$$2 = 1 + \omega_B^2 T_1^2 \Longrightarrow$$

$$\omega_B = \frac{1}{T_1} .$$

Vi har givet att u_0 har frekvensinnehåll mellan 0 och $\frac{\pi}{T}$, och att inget av detta ska dämpas mer än $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{T} \leqslant \omega_B = \frac{1}{T_1}$$

$$\Longrightarrow \quad T_1 \leqslant \frac{T}{\pi} .$$

Dette värde på tidskonstanten i filtret
ger oss en minsta amplitud på

$$A = \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2\left(\frac{T}{\pi}\right)^2}}$$

hos signalen y_1.