Математичний аналіз I
Розрахункова робота №1

Божко Роман Вячеславович, ТР-02

24 жовтня 2020 р.

0.1 Завдання №1

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}=[\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}]\overset{(\text{а})}{=}\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{((1-n)-(1+n))((1-n)^2+(1-n)(1+n)+(1+n)^2)}=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{-2n((1-n)^2+(1-n)(1+n)+(1+n)^2)}\overset{(\text{б})}{=}\\
&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{((3-n)-(2-n))((3-n)+(2-n))((3-n)^2+(2-n)^2)}{n((1-n)^2+(1-n)(1+n)+(1+n)^2)}=\\
&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(5-2n)((3-n)^2+(2-n)^2)}{n((1-n)^2+(1-n)(1+n)+(1+n)^2)}=\\
&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(5-2n)(2n^2-10n+13)}{n((1-n)^2+1-n^2+(1+n)^2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-30n^2+76n-65}{n(n^2+3)}=\\
&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(4-\frac{30}{n}+\frac{76}{n^2}-\frac{65}{n^3})}{n(n^2+3)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(4-\frac{30}{n}+\frac{76}{n^2}-\frac{65}{n^3})}{n^3+3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(4-\frac{30}{n}+\frac{76}{n^2}-\frac{65}{n^3})}{n^3(1+\frac{3}{n^2})}=\\
&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4-0+0-0}{1+0}=\frac{1}{2}*4=2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В кроці (а) була використана формула скороченого множення для різниці кубів. В кроці (б) була використана формула скороченого множення для різниці виразів четвертої степені.

0.2 Завдання №2

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}=[\infty-\infty]\overset{(\text{а})}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt[3]{n^3-5})(n\sqrt{n})(n^2+n\sqrt[3]{n^3-5}+(\sqrt[3]{n^3-5})^2)}{(n^2+n\sqrt[3]{n^3-5}+(\sqrt[3]{n^3-5})^2)}=\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-n^3+5)(n\sqrt{n})}{(n^2+n\sqrt[3]{n^3-5}+(\sqrt[3]{n^3-5})^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^{\frac{3}{2}}}{n^2+n\sqrt[3]{n^3(1-\frac{5}{n^3})}+(\sqrt[3]{n^3(1-\frac{5}{n^3})})^2}\overset{(\text{б})}{=}\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{5n^{\frac{3}{2}}}{3n^2}=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{5}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В кроці (а) була використана формула скороченого множення для різниці кубів. В кроці (б) були відкинуті елементи знаменника, котрі прямують до 0.

0.3 Завдання №3

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^4} = [1^\infty] = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+(\frac{1}{-n^2})\right)^{-n^2}\right)^{\frac{n^4}{-n^2}} \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = 0 \tag{3}$$

В кроці (a) була використана друга чудова границя.

0.4 Завдання №4

$$\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to-1}\frac{((x+1)(x+2))^2}{(x+1)(x^2+x-2)} \overset{(a)}{=} \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x+2)^2}{(x+1)(x^2+x-2)} =$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)^2}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)}{x-1} = \frac{0*1}{-2} = 0 \tag{4}$$

В кроці (a) відкриваємо дужки, підносячи кожен член до квадрата.

0.5 Завдання №5

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = [\frac{0}{0}] \overset{(a)}{=} \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt[3]{x^2-1})} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt[3]{x^2-1})} =$$
$$\lim_{x\to1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to1}(x^2-1)^{\frac{1}{6}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{0}{2} = 0 \tag{5}$$

В кроці (a) вираз був домножений на спряжений.

0.6 Завдання №6

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to0}\frac{3x(3x^2-5x)}{3x\sin 3x} \overset{(a)}{=} \lim_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{3x} =\\ &\lim_{x\to0}\frac{3x-5}{3} = \lim_{x\to0}\frac{0-5}{3} = -\frac{5}{3}\end{aligned} \tag{6}$$

В кроці (a) була використана перша чудова границя.

0.7 Завдання №7

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}=[\frac{0}{0}]\overset{(а)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos 3(t+\pi)}{\sin^2 7(t+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(3t+3\pi)}{\sin^2(7t+7\pi)}\overset{(б)}{=}\\ \lim_{t\to 0}\frac{1+\cos 3t\cos 3\pi-\sin 3t\sin 3\pi}{(\sin 7t\cos 7\pi+\sin 7\pi\cos 7t)^2}\overset{(в)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 3t}{(-\sin 7t)^2}\overset{(г)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3t}{2}}{(-\sin 7t)^2}\overset{(д)}{=}\\ \lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3t}{2}}{(-2\sin\frac{7t}{2}\cos\frac{7t}{2})^2}\overset{(е)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3t}{2}}{4\sin^2\frac{7t}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{3t}{2}*\sin\frac{3t}{2}}{\sin\frac{7t}{2}*\sin\frac{7t}{2}}\overset{(ж)}{=}\\ \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{9t^2}{4}*\frac{4}{49t^2}=\frac{9}{98}\end{gathered} \tag{7}$$

В кроці (а) була використана заміна: $t = x - \pi; t \to 0; x = t + \pi$. В кроці (б) була використана формула додавання для тригонометричних функцій: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. В кроці (в) вирази були спрощені за допомогою членів, котрі прямують до остаточних значень: $\cos 3\pi, \cos 7\pi \to -1; \sin 3\pi, \sin 7\pi \to 0$. В кроці (г) була використана формула тригонометричної функції подвійного аргументу: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. В кроці (д) була використана формула тригонометричної функції подвійного аргументу: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. В кроці (е) була використана формула скороченого множення для різниці кубів. В кроці (ж) була використана еквівалентність: $\sin x \sim x$.

0.8 Завдання №8

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}=[\frac{0}{0}]=\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{2x(\frac{\sin 3x}{2x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{2x(\frac{3\sin 3x}{2*3x}-1)}\overset{(а)}{=}\\ \lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{2x*(\frac{1}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-1-(7^{-2x}-1)}{x}\overset{(б)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-1}{x}-\frac{7^{-2x}-1}{x}=\\ \lim_{x\to 0}\frac{2(6^{2x}-1)}{2x}-\frac{(-2)(7^{-2x}-1)}{-2x}\overset{(в)}{=}2\ln 6+2\ln 7=\ln 42^2=\ln(1764)\end{gathered} \tag{8}$$

В кроці (а) була використана перша чудова границя. В кроці (б) була використана властивість арифметики границь, а саме, що границя різниці двох функцій дорівнює різниці границь цих функцій. В кроці (в) була використана чудова границя: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{b^\alpha-1}{\alpha} = \ln b$.

0.9 Завдання №9

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}=[\frac{0}{0}]\overset{(а)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sin(x+1)}\overset{(б)}{=}\lim_{x\to -1}x^2-x+1=3 \tag{9}$$

В кроці (а) була використана формула скороченого множення для суми кубів. В кроці (б) була використана перша чудова границя.

0.10 Завдання №10

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{\frac{2}{(x+2)}} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\sin 4x}{4x}\right)^{\frac{2}{(x+2)}} \overset{(a)}{=} \lim_{x\to 0} 4^{\frac{2}{(x+2)}} = 4 \qquad (10)$$

В кроці (а) була використана перша чудова границя.