Лінійна алгебра і аналітична геометрія
Розрахункова робота №1

Божко Роман Вячеславович, ТР-02

3 листопада 2020 р.

0.1 Завдання №1

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 2*(-1)*16-(5*1*(-1)+3*2*10) = -87 \\
&\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 2*(-1)*16-(5*1*(-1)+3*2*10) = -87 \\
&\text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 2*\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} - 0*\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 2*(-46)+5 = -87 \\
&\text{г) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -27 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} -6 & -27 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = -60-27 = -87
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В кроці (1) від першого рядка був віднятий 3-й рядок помножений на 2.

0.2 Завдання №2

$$
\begin{aligned}
&C = A^3 + AB - 7BA + 3E, A = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&AB = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 & -27 \\ 24 & 11 \end{pmatrix} \\
&BA = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -69 \\ -8 & -19 \end{pmatrix} \\
&C = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -59 & -27 \\ 24 & 11 \end{pmatrix} - 7*\begin{pmatrix} -29 & -69 \\ -8 & -19 \end{pmatrix} + 3*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 & 444 \\ 82 & 152 \end{pmatrix} \\
&C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} 152 & -82 \\ -444 & 142 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-14824}\begin{pmatrix} 152 & -82 \\ -444 & 142 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-7412}\begin{pmatrix} 76 & -222 \\ -41 & 71 \end{pmatrix} \\
&E = C^{-1}C = \frac{1}{-3706}\begin{pmatrix} 76 & -222 \\ -41 & 71 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 71 & 222 \\ 41 & 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

0.3 Завдання №3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 6x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$1)|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -79, |A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -79, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -5 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -158,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 79, x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 2, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -1$$

$$2)AX = B, X = A^{-1}B = \frac{1}{-79} \begin{pmatrix} -11 & -8 & -6 \\ -42 & -9 & 13 \\ 8 & 13 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3)\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & -13 & -9 & -17 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & -79 & -79 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 2x_3 = 3 \\ \quad - 10x_2 - 13x_3 = -7 \\ \qquad\qquad 79x_3 = -79 \end{cases} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

$$\text{Перевірка}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = B \tag{3}$$

В кроці (1) від 2-го рядочка було віднято перший помноженний на 4, від 3-го рядочка було віднятий перший помноженний на 6. В кроці (2) від 3-го рядочка помноженного на 10 було віднято другий помноженний на 13.

0.4 Завдання №4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $BCX = 2D + A, BC = F = \begin{pmatrix} 13 & -52 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}, 2D + A = G = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

$$FX = G, X = F^{-1}G, F^{-1} = \frac{1}{1014}\begin{pmatrix} 26 & -13 \\ 52 & 13 \end{pmatrix}^T = \frac{13}{1014}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = F^{-1}G = \frac{13}{1014}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \frac{13}{1014}\begin{pmatrix} -24 & 6 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

б) $DXA = B - C, B - C = F = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, X = D^{-1}FA^{-1}$

$$D^{-1}F = G = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 3 & 27 \\ -15 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = GA^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 3 & 27 \\ -15 & -7 \end{pmatrix} * \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-120}\begin{pmatrix} 15 & 57 \\ -75 & -29 \end{pmatrix} \tag{4}$$

0.5 Завдання №5

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases} \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & 22 & 10 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 8 & 6 & 20 & 14 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\rightarrow} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \rightarrow rang(A) = 3,$$

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 15 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow rang(\tilde{A}) = 3 \rightarrow rang(A) = rang(\tilde{A}) \neq n, \text{ де n - к-лсть змінних} \overset{(7)}{\rightarrow}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 7x_3 + 6x_4 = 15 \end{cases} \overset{(8)}{\rightarrow}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 + \frac{1}{7}(15 - 6x_4) - x_4 + 3x_4 \\ x_2 = -2 + \frac{1}{7}(15 - 6x_4) - x_4 \\ x_3 = \frac{1}{7}(15 - 6x_4) \\ x_4 = C,\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = \frac{(-6 + 8C)}{7}, x_2 = \frac{(1 - 13C)}{7}, x_3 = \frac{(15 - 6C)}{7}, x_4 = C,\ C \in \mathbb{R} \tag{5}$$

В кроці (1) від 1-го рядочка було віднято другий рядок. В кроці (2) від 2-го рядочка було віднято перший помноженний на 2. Від 3-го рядочка було віднято перший помноженний на 9. Від 4-го рядочка було віднято перший помноженний на 2. Від 5-го рядочка було віднято перший помноженний на 7. В кроці (3) з матриці були вилучені лінійно залежні рядки. В кроці (4) від 2-го рядочка було віднято третій. В кроці (5) від 3-го рядочка було віднято другий помноженний на 4. В кроці (6) початкова матриця була зведена до трикутного виду. Знайдемо визначники матриці коефіцієнтів і розширеної матриці для того, аби встановити ранги цих матриць і визначити сумісність/несумісність системи. В кроці (7) була використана теорема Кронекера-Капелі, а саме: СЛАР має безліч рішень, оскільки ранг матриць не дорівнює кількості змінних. В кроці (8) залежні змінні були виражені через вільні.