Q1:

設 $n = M \times N$ ⇒ 總 pixel 數量，且 n_{r_j} 為 pixel 數量
r_j 為 intensity value

Histogram Equalization Transformation ⇒ $S_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} n_{r_j} / n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k} n_{r_j}$

△ 因為每個具有 r_k 的 pixel 都被 mapping 到 S_k 去了，因此 $n_{S_k} = n_{r_k}$

△ 進行第2次 histogram equalization 之後會產生出 V_k

$V_k = T(S_k) = \frac{1}{n} \times \sum_{j=0}^{k} n_{S_j}$ 而又因為 $n_{S_k} = n_{r_k}$ ⇒ $n_{S_j} = n_{r_j}$

所以，$V_k = T(S_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k} n_{r_j} = S_k$ #

Q2:

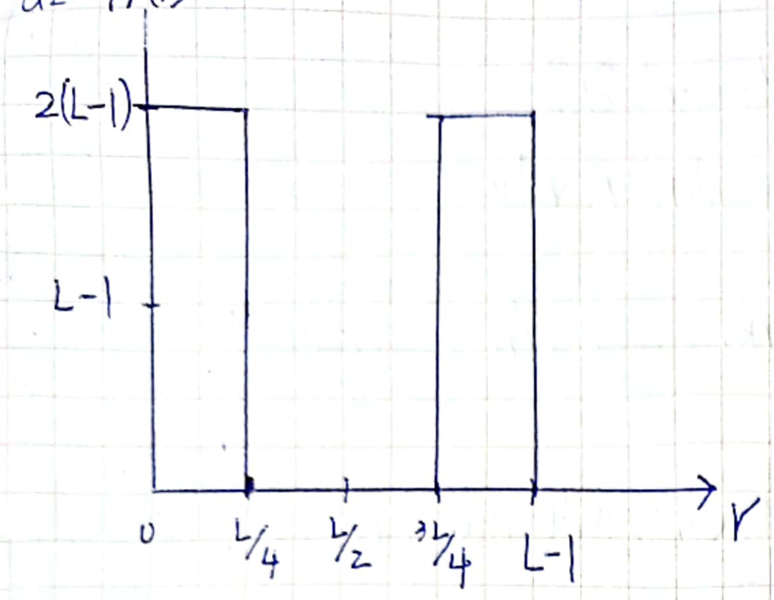

figure (1)

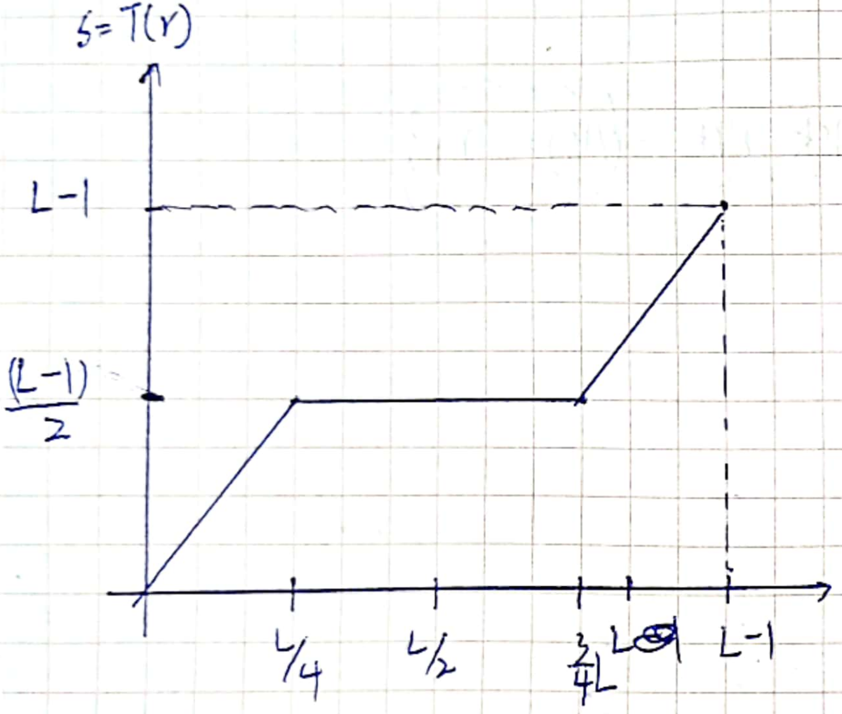

figure (2)

∵ $P_r(r)$ 是 probability density 函數而從 figure(2) 可知 $s \to r$ 的逆變換並非單值

而是有許多(∞)可能從 $s=(L-1)/2$ mapping 到 r 而 inverse transformation

非單值的原因是 $[L/4, 3L/4]$ 中 $P_r(r)$ 存在了間隔

Q3:

$$p_r(w)=(-2w+2)$$

$$s=T(r)=\int_0^r p_r(w)\,dw=\int_0^r(-2w+2)\,dw=-r^2+2r$$

$$p_z(w)=2w$$

又 $v=G(z)=\int_0^z p_z(w)\,dw=\int_0^z(2w)\,dw=z^2$

$z=G^{-1}(v)=\pm\sqrt{v}$ (取正值) 故 $z=\sqrt{v}$

而 v 替換成 s 代入 而 s 又 $=-r^2+2r$ 代回 $\Rightarrow z=\sqrt{-r^2+2r}$ #

Q4.

a. 若 mask 就恰好位在有 3 个 pixel gap 的中心点上，此時 3×3 的 mask 會包含了 1 个完全空白的区域，又因為題目要求是奇數長寬的 mask (pixel)

故最小 mask 尺寸會是 5×5

b. mask 產生的最小平均值 (當 mask 僅包含区段中的 2 个 pixel 時。)

→ 灰階而according binary

設此值為 x，而 thin segment 的 pixel binary value 是 y

明顯 x < y，∴我們將二進制的閾值設在比 x 略小，並且

在 mask 的中心創 1 个 binary pixel 其大小為 y 即可

Q5.

(x,y) 未旋轉，(x',y')：旋轉後

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

而 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$; $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

比較 $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}$

$$=-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

接著求導 $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos\theta\sin\theta-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta$

此時

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$ 可証明 Laplacian operator 和旋轉無關！#

Q6:

∵中心為−4的mask長這樣

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

只会在其中心上下左右產生銳化

而

中心為−8的mask

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

其周圍皆有產生銳化效果

因此相較於 −4 mask，−8 mask在对角線上亦有強度变化

故会有更銳利之效果。

Q1.

unsharp masking

$$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$

又 $g(x,y) = f(x,y) + k \cdot g_{mask}(x,y)$

by 不失一般性我們將k設為1 → 代回 $g(x,y) = 2f(x,y) - \bar{f}(x,y)$

才有 unsharp masking

當 $f(x,y)$ 使用 filter 3.32(a) 時，会產生 $\bar{f}(x,y)$ ⇒ 皆是 linear

∴使用 $f(x,y)$ 和 $\bar{f}(x,y)$ 可以作疊加形成了1个 mask

而這个 mask 再套用在 $f(x,y)$ 這張圖時會有新的圖 $g(x,y)$

→ 即為 unsharp masking 後的結果。