Q1.

by Eq.(4.5-7)

$$F(\mu,\nu)=\Im[f(t,z)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}dt\,dz$$

by Eq.(2.6-2) Fourier Transform Operation is linear if

$$\Im[a_1f_1(t,z)+a_2f_2(t,z)]=a_1\Im[f_1(t,z)]+a_2\Im[f_2(t,z)]$$

又 $\Im[a_1f_1(t,z)+a_2f_2(t,z)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[a_1f_1(t,z)+a_2f_2(t,z)]$

$$\times\ e^{-2j\pi(\mu t+\nu z)}dt\,dz$$

$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t,z)e^{-2\pi j(\mu t+\nu z)}dt\,dz$$

$$+a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t,z)e^{-2\pi j(\mu t+\nu z)}dt\,dz$$

$=a_1\Im[f_1(t,z)]+a_2\Im[f_2(t,z)]$ # 接著,

$$\Im[a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)]=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[a_1f_1(x,y)+a_2f_2(x,y)]e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$=a_1\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f_1(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}+a_2\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f_2(x,y)e^{-2\pi j(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$=a_1\Im[f_1(x,y)]+a_2\Im[f_2(x,y)]$ #

⇒ Inverse Transform 也可以用完全相同の方式証明!

Q2:

$$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{MN} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

計算 $f(x,y)$ 的 DFT $\Rightarrow F(0,0)$ 若 $F(0,0) = MN\bar{f}(x,y)$，則在IDFT之前 $\frac{1}{MN}$ 會在前項

$$\text{Eq}: F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-2\pi j\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

$$\text{而 } f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

我們可看到 $\frac{1}{MN}$ 在前面

而若 $F(0,0) = \bar{f}(x,y)$ 則執行DFT之前，$\frac{1}{MN}$ 在前面

最後，若 $F(0,0) = \sqrt{MN} \cdot \bar{f}(x,y)$ 則在DFT、IDFT的公式中都包含 $\frac{1}{\sqrt{MN}}$ 項

Q3.

A: 除非所有border(該圖)都是黑色的，不然若是用0去padding

則會在1or多个border上產生顯著的水平or垂直不連續邊緣。

而這些空間域中的sharping transition會在spectrum的垂直/水平引入高頻的components

Q4

(a)

$$\bar{f}(x,y)=\frac{1}{MN}\times\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

而 $\bar{f}_p(x,y)=\frac{1}{PQ}\sum_{x=0}^{P-1}\sum_{y=0}^{Q-1}f_p(x,y)=\frac{1}{PQ}\times\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{Q-1}f(x,y)$

$$=\frac{1}{PQ}\times MN\times\bar{f}(x,y)$$

因為image用0去padding，所以平均值(ratio) $=\frac{PQ}{MN}$ ⟶ 當PQ↑ r会↑

因又：是用0去padding ⟹ 所以填充後的image平均值会隨着PQ↑而↓

<PQ愈大，0愈多，avg value隨之下降> ⟵ 概念

(b) 是的，$F_p(0,0)=F(0,0)$

$F(0,0)=MN\bar{f}(x,y)$ ⟶ ①　　又by(a) $\bar{f}_p(x,y)=\frac{MN}{PQ}\times\bar{f}(x,y)$ ⟶ ③

$F_p(0,0)=PQ\bar{f}_p(x,y)$ ⟶ ②　　再將③代入②

$$PQ\cdot\frac{MN}{PQ}\cdot\bar{f}(x,y)$$

$$PQ\bar{f}_p(x,y)=MN\times\bar{f}(x,y)$$

故 $F(0,0)=F_p(0,0)$ #

Q5.

(a)

$$\nabla^2 f(t,z) = \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}$$

又 $\Im\left[\nabla^2 f(t,z)\right] = \Im\left[\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2}\right] + \Im\left[\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}\right]$

$= (j2\pi\mu)^2 F(\mu,v) + (j2\pi v)^2 F(\mu,v)$

$= -4\pi^2(\mu^2+v^2)F(\mu,v) \rightarrow G(\mu,z) = H(\mu,z)F(\mu,z)$

當 $H(\mu,z) = -4\pi^2(\mu^2+v^2)$

(b)

$H(\mu,v) = -4\pi^2(u^2+v^2)$

for $u = 0,1,2,3,\ldots(M-1)$

$v = 0,1,2,3,\ldots(N-1)$

$H(\mu,v) = -4\pi^2(u^2+v^2)$ 在進行中心化 transform 時

$H(u,v)$ 可改寫成 $-4\pi^2\left[\left(u-\frac{M}{2}\right)^2+\left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right]$

$$\nabla^2 f(x,y) \Leftrightarrow -4\pi^2\left[\left(u-\frac{M}{2}\right)^2+\left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right]F(u,v) \#$$

(c)

Laplacian Filter is isotropic ⇒ 因為有對稱性 → 可以用有額外對角線的 Laplacian mask

例如：A −8 in the center so that its response is 0 in areas of constant intensity.

Q6:

(a) The spatial average is

$$g(x,y)=\frac{1}{4}[f(x,y+1)+f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y-1)]$$

$$G(u,v)=\frac{1}{4}[e^{j2\pi v/N}+e^{j2\pi u/M}+e^{-j2\pi u/M}+e^{-j2\pi v/N}]F(u,v)$$

$$=H(u,v)F(u,v)$$

where $H(u,v)=\frac{1}{2}[\cos(2\pi u/M)+\cos(2\pi v/N)]$ 是 Frequency Domain 的 Filter Transfer Function

(b) 為証為低通 Filter

$$H(u,v)=\frac{1}{2}[\cos(2\pi(u-\frac{M}{2}))/M)+\cos(2\pi(v-\frac{N}{2}))/N)]$$

當 $u=0\to M-1$; $\cos(2\pi(u-\frac{M}{2}))/M$ 從 -1 開始 且 $u=\frac{M}{2}$ 時 $=1$ # (峰值)

$u=M=-1$

因此，Filter的振幅隨着距離中心化filter原点の距離而↓

此為低通filter之特性 #

Q17.

(a) The spatial average is

$$g(x,y)=\frac{1}{4}[f(x,y+1)+f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x-1,y-1)]$$

$$G(u,v)=\frac{1}{4}\left[e^{j2\pi v/N}+e^{j2\pi u/M}+e^{-j2\pi u/M}+e^{-j2\pi v/N}\right]F(u,v)$$

$$=H(u,v)F(u,v)$$

當 $H(u,v)=\frac{1}{2}[\cos(2\pi u/M)+\cos(2\pi v/N)]$ 是 Frequency Domain 的 Filter Transfer Function。

(b) 為證明為高通 filter

我們把 $H(u,v)$ 作成 $2j[\sin(\pi(u-\frac{M}{2}))/M)e^{j\pi u/M}+\sin(\pi(v-\frac{N}{2}))/N)e^{j\pi v/}$

而在 filter 的中心 $(u=\frac{M}{2})$, function value 是 0, 當 $u, v\uparrow$, filter 的值 $\downarrow$

並且在 $u=M-1$; $V=N-1$ 時接近 $-4j$ 的極限值.

而會是負的是因為取導數的順序所引起的若是採用

$f(x,y)-f(x+1,y)$ 和 $f(x,y)-f(x,y+1)$ 的差分 $\Rightarrow$ filter 將趨近正的極限值

而重点是 dc 項被消掉而且高頻率也有通过 $\Rightarrow$ 這也是 Highpass Filter 的特性。