Inferência Estatística Comparada

AULA 8 - INFERÊNCIA BAYESIANA

Introdução

- Abordagem à Inferência Estatística baseada na interpretação subjetiva de probabilidade.
- Ideia fundamental:

  PROBABILIDADE como medida, representação númerica de **INCERTEZA**.
- Sob essa ideia, uma (medida de) probabilidade é **a** representação de incerteza de **um indivíduo** ("Your probabilities"); é a representação numérica que decorre, sob certas condições, da avaliação do indivíduo sobre eventos desconhecidos.
- Construção de probabilidade subjetiva: impõe que para quantidades/eventos desconhecidos (onde há incerteza), devemos fazer uso de probabilidades para quantificar, representar incerteza.

Introdução

- Abordagem à Inferência Estatística baseada na interpretação subjetiva de probabilidade.
- Ideia fundamental:

  PROBABILIDADE como medida, representação númerica de **INCERTEZA**.
- Sob essa ideia, uma (medida de) probabilidade é **a** representação de incerteza de **um indivíduo** ("Your probabilities"); é a representação numérica que decorre, sob certas condições, da avaliação do indivíduo sobre eventos desconhecidos.
- Construção de probabilidade subjetiva: impõe que para quantidades/eventos desconhecidos (onde há incerteza), devemos fazer uso de probabilidades para quantificar, representar incerteza.

Introdução

- Abordagem à Inferência Estatística baseada na interpretação subjetiva de probabilidade.
- Ideia fundamental:

  PROBABILIDADE como medida, representação númerica de **INCERTEZA**.
- Sob essa ideia, uma (medida de) probabilidade é **a** representação de incerteza de **um indivíduo** ("Your probabilities"); é a representação numérica que decorre, sob certas condições, da avaliação do indivíduo sobre eventos desconhecidos.
- Construção de probabilidade subjetiva: impõe que para quantidades/eventos desconhecidos (onde há incerteza), devemos fazer uso de probabilidades para quantificar, representar incerteza.

Introdução

- Abordagem à Inferência Estatística baseada na interpretação subjetiva de probabilidade.
- Ideia fundamental:

  PROBABILIDADE como medida, representação númerica de **INCERTEZA**.
- Sob essa ideia, uma (medida de) probabilidade é **a** representação de incerteza de **um indivíduo** ("Your probabilities"); é a representação numérica que decorre, sob certas condições, da avaliação do indivíduo sobre eventos desconhecidos.
- Construção de probabilidade subjetiva: impõe que para quantidades/eventos desconhecidos (onde há incerteza), devemos fazer uso de probabilidades para quantificar, representar incerteza.

Introdução

- Abordagem à Inferência Estatística baseada na interpretação subjetiva de probabilidade.
- Ideia fundamental:

  PROBABILIDADE como medida, representação númerica de **INCERTEZA**.
- Sob essa ideia, uma (medida de) probabilidade é **a** representação de incerteza de **um indivíduo** ("Your probabilities"); é a representação numérica que decorre, sob certas condições, da avaliação do indivíduo sobre eventos desconhecidos.
- Construção de probabilidade subjetiva: impõe que para quantidades/eventos desconhecidos (onde há incerteza), devemos fazer uso de probabilidades para quantificar, representar incerteza.

Construção de probabilidade subjetiva

- Breve resumo:

  A partir da especificação de uma relação de "crença" entre "eventos", $\preceq$, que atenda certos requisitos, assegura-se a existência de uma (única) medida de probabilidade que "representa" , "coincide" com a relação de crença $\preceq$.

- Suposições: (M. H. DeGroot (1970))
- $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de Ω.

- Supõe-se que um indivíduo especifica $\preceq \subset \mathcal{F}^2$ com a seguinte interpretação:

  $(A, B) \in \preceq$ (ou $A \preceq B$) se "ele não acredita mais em A do que em B" ("acredita em B ao menos como acredita em A").

Construção de probabilidade subjetiva

- Breve resumo:

  A partir da especificação de uma relação de "crença" entre "eventos", $\preceq$, que atenda certos requisitos, assegura-se a existência de uma (única) medida de probabilidade que "representa" , "coincide" com a relação de crença $\preceq$.

- Suposições: (M. H. DeGroot (1970))
- $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de Ω.
- Supõe-se que um indivíduo especifica $\preceq \subset \mathcal{F}^2$ com a seguinte interpretação:

  $(A, B) \in \preceq$ (ou $A \preceq B$) se "ele não acredita mais em A do que em B" ("acredita em B ao menos como acredita em A").

Construção de probabilidade subjetiva

- Breve resumo:

  A partir da especificação de uma relação de "crença" entre "eventos", $\preceq$, que atenda certos requisitos, assegura-se a existência de uma (única) medida de probabilidade que "representa" , "coincide" com a relação de crença $\preceq$.

- Suposições: (M. H. DeGroot (1970))

- $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de Ω.

- Supõe-se que um indivíduo especifica $\preceq \subset \mathcal{F}^2$ com a seguinte interpretação:

  $(A, B) \in \preceq$ (ou $A \preceq B$) se "ele não acredita mais em A do que em B" ("acredita em B ao menos como acredita em A").

Construção de probabilidade subjetiva

- Breve resumo:

  A partir da especificação de uma relação de "crença" entre "eventos", $\preceq$, que atenda certos requisitos, assegura-se a existência de uma (única) medida de probabilidade que "representa" , "coincide" com a relação de crença $\preceq$.

- Suposições: (M. H. DeGroot (1970))
- $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de Ω.
- Supõe-se que um indivíduo especifica $\preceq\, \subset \mathcal{F}^2$ com a seguinte interpretação:

  $(A, B) \in\, \preceq$ (ou $A \preceq B$) se "ele não acredita mais em A do que em B" ("acredita em B ao menos como acredita em A").

Construção de probabilidade subjetiva

- Breve resumo:

  A partir da especificação de uma relação de "crença" entre "eventos", $\preceq$, que atenda certos requisitos, assegura-se a existência de uma (única) medida de probabilidade que "representa" , "coincide" com a relação de crença $\preceq$.

- Suposições: (M. H. DeGroot (1970))
- $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\Omega \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de Ω.
- Supõe-se que um indivíduo especifica $\preceq \subset \mathcal{F}^2$ com a seguinte interpretação:

  $(A, B) \in \preceq$ (ou $A \preceq B$) se "ele não acredita mais em A do que em B" ("acredita em B ao menos como acredita em A").

Construção de probabilidade subjetiva

- Exemplo (próxima partida entre as equipes X e Y): $\Omega = \mathbb{N}^2$ e $\mathcal{F}(\Omega)$. Ω representa o conjunto de possíveis placares do jogo.
- Alguns elementos de $\preceq$, segundo o indivíduo que contempla o placar do jogo em questão:
- $\{(7,1)\} \preceq \{(1,0)\}$

  $\{(0,i)\} \preceq \{(i,0)\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$

  $\{(i,j)\} \preceq \{(j,i)\}$, para $j > i$

  $\{(j+1,i)\} \preceq \{(j,i)\}$ para $j > i$

  $\{(i,0) : i \in \mathbb{N}\} \preceq \{(0,i) : i \in \mathbb{N}\}$

  etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Exemplo (próxima partida entre as equipes X e Y): $\Omega = \mathbb{N}^2$ e $\mathcal{F}(\Omega)$. Ω representa o conjunto de possíveis placares do jogo.

- Alguns elementos de $\preceq$, segundo o indivíduo que contempla o placar do jogo em questão:

- $\{(7,1)\} \preceq \{(1,0)\}$

  $\{(0,i)\} \preceq \{(i,0)\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$

  $\{(i,j)\} \preceq \{(j,i)\}$, para $j > i$

  $\{(j+1,i)\} \preceq \{(j,i)\}$ para $j > i$

  $\{(i,0) : i \in \mathbb{N}\} \preceq \{(0,i) : i \in \mathbb{N}\}$

  etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Exemplo (próxima partida entre as equipes X e Y): $\Omega = \mathbb{N}^2$ e $\mathcal{F}(\Omega)$. Ω representa o conjunto de possíveis placares do jogo.
- Alguns elementos de $\preceq$, segundo o indivíduo que contempla o placar do jogo em questão:
- $\{(7,1)\} \preceq \{(1,0)\}$

  $\{(0,i)\} \preceq \{(i,0)\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$

  $\{(i,j)\} \preceq \{(j,i)\}$, para $j > i$

  $\{(j+1,i)\} \preceq \{(j,i)\}$ para $j > i$

  $\{(i,0) : i \in \mathbb{N}\} \preceq \{(0,i) : i \in \mathbb{N}\}$

  etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Exemplo (próxima partida entre as equipes X e Y): $\Omega = \mathbb{N}^2$ e $\mathcal{F}(\Omega)$. Ω representa o conjunto de possíveis placares do jogo.

- Alguns elementos de $\preceq$, segundo o indivíduo que contempla o placar do jogo em questão:

- $\{(7,1)\} \preceq \{(1,0)\}$

  $\{(0,i)\} \preceq \{(i,0)\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$

  $\{(i,j)\} \preceq \{(j,i)\}$, para $j > i$

  $\{(j+1,i)\} \preceq \{(j,i)\}$ para $j > i$

  $\{(i,0) : i \in \mathbb{N}\} \ \preceq \ \{(0,i) : i \in \mathbb{N}\}$

  etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Condições sobre $\preceq$:

  C1)Para todo $A, B \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ ou $B \preceq A$

  C2) Para $A, B, C \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ e $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$

  C3) $\emptyset \preceq A$, $\forall A \in \mathcal{F}$

  $+$ condições adicionais.

- **TEOREMA** Considere $\preceq \subset \mathcal{F}^2$. Se $\preceq$ satisfaz as condições de C1 a C?, então

  $\exists! \, \mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ medida de probabilidade tal que para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$,

  $A \preceq B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}$ representa $\preceq$

Construção de probabilidade subjetiva

- Condições sobre $\preceq$:

  C1)Para todo $A, B \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ ou $B \preceq A$

  C2) Para $A, B, C \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ e $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$

  C3) $\emptyset \preceq A$, $\forall A \in \mathcal{F}$

  $+$ condições adicionais.

- **TEOREMA** Considere $\preceq \subset \mathcal{F}^2$. Se $\preceq$ satisfaz as condições de C1 a C?, então

  $\exists!\ \mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ medida de probabilidade tal que para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$,

  $A \preceq B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}$ representa $\preceq$

Construção de probabilidade subjetiva

- Condições sobre $\preceq$:

  C1)Para todo $A, B \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ ou $B \preceq A$

  C2) Para $A, B, C \in \mathcal{F}$, $A \preceq B$ e $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$

  C3) $\emptyset \preceq A$, $\forall A \in \mathcal{F}$

  $+$ condições adicionais.

- **TEOREMA** Considere $\preceq \subset \mathcal{F}^2$. Se $\preceq$ satisfaz as condições de C1 a C?, então

  $\exists!\ \mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ medida de probabilidade tal que para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$,

  $A \preceq B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ $\mathbb{P}$ representa $\preceq$

Construção de probabilidade subjetiva

- Observações:

- A partir do Teorema, o indivíduo "pode" ("deve") fazer uso das regras do cálculo de probabilidades usuais para lidar com SUA incerteza.

- Outras construções de probabilidade subjetiva: DeFinetti, Savage, French, Kadane,...

- Unicidade da representação (unicidade de $\mathbb{P}$)

- Outras representações de incerteza: lógica (conjuntos) "fuzzy" , probabilidades imprecisas, medidas possibilistas, etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Observações:

- A partir do Teorema, o indivíduo "pode" ("deve") fazer uso das regras do cálculo de probabilidades usuais para lidar com SUA incerteza.

- Outras construções de probabilidade subjetiva: DeFinetti, Savage, French, Kadane,...

- Unicidade da representação (unicidade de $\mathbb{P}$)

- Outras representações de incerteza: lógica (conjuntos) "fuzzy" , probabilidades imprecisas, medidas possibilistas, etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Observações:
- A partir do Teorema, o indivíduo "pode" ("deve") fazer uso das regras do cálculo de probabilidades usuais para lidar com SUA incerteza.
- Outras construções de probabilidade subjetiva: DeFinetti, Savage, French, Kadane,...
- Unicidade da representação (unicidade de $\mathbb{P}$)
- Outras representações de incerteza: lógica (conjuntos) "fuzzy" , probabilidades imprecisas, medidas possibilistas, etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Observações:
- A partir do Teorema, o indivíduo "pode" ("deve") fazer uso das regras do cálculo de probabilidades usuais para lidar com SUA incerteza.
- Outras construções de probabilidade subjetiva: DeFinetti, Savage, French, Kadane,...
- Unicidade da representação (unicidade de $\mathbb{P}$)
- Outras representações de incerteza: lógica (conjuntos) "fuzzy" , probabilidades imprecisas, medidas possibilistas, etc..

Construção de probabilidade subjetiva

- Observações:

- A partir do Teorema, o indivíduo "pode" ("deve") fazer uso das regras do cálculo de probabilidades usuais para lidar com SUA incerteza.

- Outras construções de probabilidade subjetiva: DeFinetti, Savage, French, Kadane,...

- Unicidade da representação (unicidade de $\mathbb{P}$)

- Outras representações de incerteza: lógica (conjuntos) "fuzzy" , probabilidades imprecisas, medidas possibilistas, etc..

Modelo Bayesiano

- Usualmente, num problema de inferência estatística, são desconhecidos, pré-experimentação, θ, o parâmetro de interesse, e X, a amostra, o resultado do experimento.
- Assim, sob certas condições, devemos atribuir probabilidades para o par (θ, X). Mais precisamente, devemos especificar (no caso Θ e $\mathcal{X}$ finitos)
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x)$ para cada par $(i, x) \in \Theta \times \mathcal{X}$
- Comumente, reescrevemos a distribuição conjunta acima por
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) = \mathbb{P}(\theta = i)\,\mathbb{P}(X = x|\theta = i)$

Modelo Bayesiano

- Usualmente, num problema de inferência estatística, são desconhecidos, pré-experimentação, θ, o parâmetro de interesse, e X, a amostra, o resultado do experimento.
- Assim, sob certas condições, devemos atribuir probabilidades para o par (θ, X). Mais precisamente, devemos especificar (no caso Θ e $\mathcal{X}$ finitos)
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x)$ para cada par $(i, x) \in \Theta \times \mathcal{X}$
- Comumente, reescrevemos a distribuição conjunta acima por
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) = \mathbb{P}(\theta = i)\, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$

Modelo Bayesiano

- Usualmente, num problema de inferência estatística, são desconhecidos, pré-experimentação, θ, o parâmetro de interesse, e X, a amostra, o resultado do experimento.
- Assim, sob certas condições, devemos atribuir probabilidades para o par (θ, X). Mais precisamente, devemos especificar (no caso Θ e $\mathcal{X}$ finitos)
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x)$ para cada par $(i, x) \in \Theta \times \mathcal{X}$
- Comumente, reescrevemos a distribuição conjunta acima por
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) = \mathbb{P}(\theta = i)\,\mathbb{P}(X = x|\theta = i)$

Modelo Bayesiano

- Usualmente, num problema de inferência estatística, são desconhecidos, pré-experimentação, θ, o parâmetro de interesse, e X, a amostra, o resultado do experimento.
- Assim, sob certas condições, devemos atribuir probabilidades para o par (θ, X). Mais precisamente, devemos especificar (no caso Θ e $\mathcal{X}$ finitos)
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x)$ para cada par $(i, x) \in \Theta \times \mathcal{X}$
- Comumente, reescrevemos a distribuição conjunta acima por
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) = \mathbb{P}(\theta = i)\, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$

Modelo Bayesiano

- Usualmente, num problema de inferência estatística, são desconhecidos, pré-experimentação, θ, o parâmetro de interesse, e X, a amostra, o resultado do experimento.
- Assim, sob certas condições, devemos atribuir probabilidades para o par (θ, X). Mais precisamente, devemos especificar (no caso Θ e $\mathcal{X}$ finitos)
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x)$ para cada par $(i, x) \in \Theta \times \mathcal{X}$
- Comumente, reescrevemos a distribuição conjunta acima por
- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \; = \; \mathbb{P}(\theta = i) \, \mathbb{P}(X = x | \theta = i)$

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \;=\; \mathbb{P}(\theta = i)\; \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \; = \; \mathbb{P}(\theta = i) \; \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X} \, , \, \mathcal{F} \, , \, \mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X} \, , \, \mathcal{F} \, , \, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \;=\; \mathbb{P}(\theta = i)\;\mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X}\;,\;\mathcal{F}\;,\;\mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X}\;,\;\mathcal{F}\;,\;\mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) = \mathbb{P}(\theta = i)\, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \;=\; \mathbb{P}(\theta = i)\;\mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X}\;,\;\mathcal{F}\;,\;\mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X}\;,\;\mathcal{F}\;,\;\mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Modelo Bayesiano

- $\mathbb{P}(\theta = i, X = x) \; = \; \mathbb{P}(\theta = i)\; \mathbb{P}(X = x|\theta = i)$, onde
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i)))_{i \in \Theta}$ é a distribuição a A PRIORI (pré-amostragem) para θ (distribuição marginal de θ) e
- $((x, \mathbb{P}(X = x|\theta = i)))_{x \in \mathcal{X}}$ é a distribuição para a AMOSTRA X dado $\theta = i$.
- Assim, comumente, o modelo estatístico bayesiano é dado por:
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$, onde $\mathcal{F}$ é sigma-álgebra de subconjuntos de $\Theta \times \mathcal{X}$ e $\mathbb{P}$ é a (única) probabilidade que representa incerteza sobre (θ, X) pré-experimentação.
- $(\Theta \times \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{F}\ ,\ \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

Operação Bayesiana

- Operação Bayesiana: combina a incerteza inicial sobre θ, representada pela distribuição a priori, com a informação revelada sobre o parâmetro pelos dados, $x \in \mathcal{X}$, expressa por $V_x(\cdot)$.

- **TEOREMA DE BAYES**

  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Seja $(A_1, ..., A_k)$ partição de Ω e $D \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(D) > 0$. Então, para $i = 1, ..., k$,

$$\mathbb{P}(A_i|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(D|A_j)\ \mathbb{P}(A_j)}$$

- No modelo bayesiano, se $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$, definindo $A_i = \{\theta = i\}$, $i = 1, ..., k$, e $D = \{X = x\}$, obtemos, pelo Teorema de Bayes, que

Operação Bayesiana

- Operação Bayesiana: combina a incerteza inicial sobre θ, representada pela distribuição a priori, com a informação revelada sobre o parâmetro pelos dados, $x \in \mathcal{X}$, expressa por $V_x(\cdot)$.

- **TEOREMA DE BAYES**

  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Seja $(A_1, ..., A_k)$ partição de Ω e $D \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(D) > 0$. Então, para $i = 1, ..., k$,

$$\mathbb{P}(A_i|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(D|A_j)\ \mathbb{P}(A_j)}$$

- No modelo bayesiano, se $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$, definindo $A_i = \{\theta = i\}$, $i = 1, ..., k$, e $D = \{X = x\}$, obtemos, pelo Teorema de Bayes, que

Operação Bayesiana

- Operação Bayesiana: combina a incerteza inicial sobre θ, representada pela distribuição a priori, com a informação revelada sobre o parâmetro pelos dados, $x \in \mathcal{X}$, expressa por $V_x(\cdot)$.

- **TEOREMA DE BAYES**

  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Seja $(A_1, ..., A_k)$ partição de Ω e $D \in \mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(D) > 0$. Então, para $i = 1, ..., k$,

  $$\mathbb{P}(A_i|D) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(D|A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(D|A_j)\ \mathbb{P}(A_j)}$$

- No modelo bayesiano, se $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$, definindo $A_i = \{\theta = i\}$, $i = 1, ..., k$, e $D = \{X = x\}$, obtemos, pelo Teorema de Bayes, que

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i | X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X=x|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)}$
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i|X = x)))_{i \in \Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.
- Extensões comuns (além do caso discreto):
- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta|X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta \mathbb{P}(X=x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta|x) \quad = \quad \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i|X = x) \;=\; \dfrac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)}$
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i|X = x)))_{i\in\Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.
- Extensões comuns (além do caso discreto):
- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta|X = x) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \;\propto\; \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta|x) \;=\; \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \;\propto\; f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i | X = x) = \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(X=x|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)}$
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i | X = x)))_{i \in \Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.
- Extensões comuns (além do caso discreto):
- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta | X = x) = \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta)\ f(\theta)}{\int_{\Theta}\ \mathbb{P}(X=x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta | x) = \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_{\Theta}\ f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i|X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)}$
- $((i, \mathbb{P}(\theta = i|X = x)))_{i\in\Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.
- Extensões comuns (além do caso discreto):
- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta|X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta|x) \quad = \quad \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \propto f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i | X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)}$

- $((i, \mathbb{P}(\theta = i | X = x)))_{i\in\Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.

- Extensões comuns (além do caso discreto):

- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta | X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ \mathbb{P}(X{=}x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \ \propto\ \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta|x) \quad = \quad \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \ \propto\ f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- $\mathbb{P}(\theta = i|X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=1}^{k}\ \mathbb{P}(X=x|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)}$

- $((i, \mathbb{P}(\theta = i|X = x)))_{i\in\Theta}$: distribuição a posteriori para θ dada a informação revelada pela observação $X = x$.

- Extensões comuns (além do caso discreto):

- 1) X discreto e θ contínuo:

$$f(\theta|X = x) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ \mathbb{P}(X=x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \ \propto\ \mathbb{P}(X = x|\theta)\ f(\theta)$$

- 2) (θ, X) contínuo:

$$f(\theta|x) \quad = \quad \frac{f(x|\theta)\ f(\theta)}{\int_\Theta\ f(x|\theta')\ f(\theta')\ d\theta'} \ \propto\ f(x|\theta)\ f(\theta)$$

Operação Bayesiana

- Exemplo 1: Uma urna contém θ bolas brancas e $5-\theta$ bolas verdes, $\theta \in \Theta = \{0,1,2,3,4,5\}$. Duas bolas são extraídas uma a uma , sem reposição, da urna. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada é branca e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, X_2)$. Suponha $\theta \sim Uniforme(\Theta)$.

- Se são observadas, em sequência, uma bola verde e uma bola branca, temos, a posteriori, para $i = 0,1,2,3,4,5$, que

- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} \quad =$

- $= \quad \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{i}{4}\ \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\ \frac{j}{4}\ \frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \quad = \quad \frac{i(5-i)}{20}$

Operação Bayesiana

- Exemplo 1: Uma urna contém θ bolas brancas e $5-\theta$ bolas verdes, $\theta \in \Theta = \{0,1,2,3,4,5\}$. Duas bolas são extraídas uma a uma , sem reposição, da urna. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada é branca e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, X_2)$. Suponha $\theta \sim Uniforme(\Theta)$.
- Se são observadas, em sequência, uma bola verde e uma bola branca, temos, a posteriori, para $i = 0,1,2,3,4,5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} \;=$
- $= \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{i}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\ \frac{j}{4}\frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \;=\; \frac{i(5-i)}{20}$

Operação Bayesiana

- Exemplo 1: Uma urna contém θ bolas brancas e $5-\theta$ bolas verdes, $\theta \in \Theta = \{0,1,2,3,4,5\}$. Duas bolas são extraídas uma a uma , sem reposição, da urna. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada é branca e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, X_2)$. Suponha $\theta \sim Uniforme(\Theta)$.
- Se são observadas, em sequência, uma bola verde e uma bola branca, temos, a posteriori, para $i = 0,1,2,3,4,5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) = \frac{\mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5} \mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} =$
- $= \frac{\frac{(5-i)}{5}\frac{i}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\frac{(5-j)}{5}\frac{j}{4}\frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) = \frac{i(5-i)}{20}$

Operação Bayesiana

- Exemplo 1: Uma urna contém θ bolas brancas e $5-\theta$ bolas verdes, $\theta \in \Theta = \{0,1,2,3,4,5\}$. Duas bolas são extraídas uma a uma , sem reposição, da urna. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada é branca e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, X_2)$. Suponha $\theta \sim Uniforme(\Theta)$.

- Se são observadas, em sequência, uma bola verde e uma bola branca, temos, a posteriori, para $i = 0,1,2,3,4,5$, que

- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X=(0,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} \quad =$

- $= \quad \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{i}{4}\ \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\ \frac{j}{4}\ \frac{1}{6}} \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \ = \ \frac{i(5-i)}{20}$

Operação Bayesiana

- Exemplo 1: Uma urna contém θ bolas brancas e $5-\theta$ bolas verdes, $\theta \in \Theta = \{0,1,2,3,4,5\}$. Duas bolas são extraídas uma a uma , sem reposição, da urna. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada é branca e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, X_2)$. Suponha $\theta \sim Uniforme(\Theta)$.
- Se são observadas, em sequência, uma bola verde e uma bola branca, temos, a posteriori, para $i = 0,1,2,3,4,5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}(0{,}1)|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X{=}(0{,}1)|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)} \quad =$
- $= \quad \frac{\frac{(5-i)}{5}\frac{i}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\frac{j}{4}\frac{1}{6}} \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(\theta = i | X = (0,1)) \quad = \quad \frac{i(5-i)}{20}$

Operação Bayesiana

- Se são observadas duas bolas brancas, temos, a posteriori, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X=(1,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X=(1,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} \quad =$
- $= \quad \frac{\frac{i}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{5}\frac{(j-1)}{4}\frac{1}{6}} \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) \ = \ \frac{i(i-1)}{40}$

Operação Bayesiana

- Se são observadas duas bolas brancas, temos, a posteriori, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) = \frac{\mathbb{P}(X=(1,1)|\theta=i)\ \mathbb{P}(\theta=i)}{\sum_{j=0}^{5} \mathbb{P}(X=(1,1)|\theta=j)\ \mathbb{P}(\theta=j)} =$
- $= \frac{\frac{i}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5} \frac{j}{5}\frac{(j-1)}{4}\frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) = \frac{i(i-1)}{40}$

Operação Bayesiana

- Se são observadas duas bolas brancas, temos, a posteriori, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X{=}(1{,}1)|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X{=}(1{,}1)|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)} \;=$
- $= \frac{\frac{i}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{5}\frac{(j-1)}{4}\frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X = (1,1)) \;=\; \frac{i(i-1)}{40}$

Operação Bayesiana

- Se são observadas duas bolas brancas, temos, a posteriori, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, que
- $\mathbb{P}(\theta = i|X = (1,1)) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X{=}(1{,}1)|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X{=}(1{,}1)|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)} \quad =$
- $= \frac{\frac{i}{5}\frac{(i-1)}{4}\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{5}\frac{(j-1)}{4}\frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i|X = (1,1)) \quad = \quad \frac{i(i-1)}{40}$

Operação Bayesiana

- Exemplo 2: Considere um processo de produção no qual os itens produzidos são classificados como não defeituosos ou defeituosos. Para avaliar a fração não conforme do processo, θ, uma amostra de $n = 10$ itens é selecionada da produção e cada unidade amostrada é classificada como defeituosa ou não defeituosa. Para $i = 1, ..., n$, seja $X_i = 1$ se o i-ésimo item observado é classificado como não conforme e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, ..., X_{10})$. Suponhamos, a priori, $\theta \sim Beta(1, 19)$.

- Se você é informado que $X = x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

Operação Bayesiana

- Exemplo 2: Considere um processo de produção no qual os itens produzidos são classificados como não defeituosos ou defeituosos. Para avaliar a fração não conforme do processo, θ, uma amostra de $n = 10$ itens é selecionada da produção e cada unidade amostrada é classificada como defeituosa ou não defeituosa. Para $i = 1, ..., n$, seja $X_i = 1$ se o i-ésimo item observado é classificado como não conforme e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, ..., X_{10})$. Suponhamos, a priori, $\theta \sim Beta(1, 19)$.
- Se você é informado que $X = x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

Operação Bayesiana

- Exemplo 2: Considere um processo de produção no qual os itens produzidos são classificados como não defeituosos ou defeituosos. Para avaliar a fração não conforme do processo, θ, uma amostra de $n = 10$ itens é selecionada da produção e cada unidade amostrada é classificada como defeituosa ou não defeituosa. Para $i = 1, ..., n$, seja $X_i = 1$ se o i-ésimo item observado é classificado como não conforme e $X_i = 0$, caso contrário. Seja $X = (X_1, ..., X_{10})$. Suponhamos, a priori, $\theta \sim Beta(1, 19)$.

- Se você é informado que $X = x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

Operação Bayesiana

- $\theta \sim Beta(1+0, 19+10-0) \ \sim \ Beta(1, 29)$

- Lembrete: Se $\theta \sim Beta(a, b)$, $a, b > 0$, e $(X_1, ..., X_n)$ é AAS do modelo Bernoulli (θ), então

  $\theta | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \sim Beta(a + \sum_{i=1}^{n} x_i, b + n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$

- Por outro lado, se o resultado do experimento é $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

- $\theta \sim Beta(1+1, 19+10-1) \ \sim \ Beta(2, 28)$

Operação Bayesiana

- $\theta \sim Beta(1+0, 19+10-0) \ \sim \ Beta(1, 29)$
- Lembrete: Se $\theta \sim Beta(a, b)$, $a, b > 0$, e $(X_1, ..., X_n)$ é AAS do modelo Bernoulli (θ), então

  $$\theta | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \sim Beta(a + \sum_{i=1}^{n} x_i, b + n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

- Por outro lado, se o resultado do experimento é $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que
- $\theta \sim Beta(1+1, 19+10-1) \ \sim \ Beta(2, 28)$

Operação Bayesiana

- $\theta \sim Beta(1+0, 19+10-0) \ \sim \ Beta(1, 29)$

- Lembrete: Se $\theta \sim Beta(a, b)$, $a, b > 0$, e $(X_1, ..., X_n)$ é AAS do modelo Bernoulli (θ), então

  $$\theta | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \sim Beta(a + \sum_{i=1}^{n} x_i, b + n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

- Por outro lado, se o resultado do experimento é $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

- $\theta \sim Beta(1+1, 19+10-1) \ \sim \ Beta(2, 28)$

Operação Bayesiana

- $\theta \sim Beta(1+0, 19+10-0) \;\sim\; Beta(1, 29)$
- Lembrete: Se $\theta \sim Beta(a, b)$, $a, b > 0$, e $(X_1, ..., X_n)$ é AAS do modelo Bernoulli (θ), então

  $$\theta | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \sim Beta(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i)$$

- Por outro lado, se o resultado do experimento é $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que
- $\theta \sim Beta(1+1, 19+10-1) \;\sim\; Beta(2, 28)$

Operação Bayesiana

- $\theta \sim Beta(1+0, 19+10-0) \ \sim \ Beta(1, 29)$

- Lembrete: Se $\theta \sim Beta(a, b)$, $a, b > 0$, e $(X_1, ..., X_n)$ é AAS do modelo Bernoulli (θ), então

  $\theta | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n \sim Beta(a + \sum_{i=1}^{n} x_i, b + n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$

- Por outro lado, se o resultado do experimento é $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, temos, admitindo que X é AAS do modelo Bernoulli (θ), que

- $\theta \sim Beta(1+1, 19+10-1) \ \sim \ Beta(2, 28)$

Operação Bayesiana

- Comentários:
- 1) Distribuição a posteriori: inferência plena (mais completa) sob a perspectiva bayesiana.
- 2) Sequencialidade da operação bayesiana
- Exemplo 1: Inicialmente, observação "apenas" de $X_1 = 0$:

$$\mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0|\theta = i)\ \mathbb{P}(\theta = i)}{\sum_{j=0}^{5} \mathbb{P}(X_1 = 0|\theta = j)\ \mathbb{P}(\theta = j)} =$$

$$= \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5} \frac{(5-j)}{5}\ \frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) = \frac{(5-i)}{15}$$

Operação Bayesiana

- Comentários:
- 1) Distribuição a posteriori: inferência plena (mais completa) sob a perspectiva bayesiana.
- 2) Sequencialidade da operação bayesiana
- Exemplo 1: Inicialmente, observação "apenas" de $X_1 = 0$:

$$\mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) = \frac{\mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)} =$$

$$= \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\ \frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) = \frac{(5-i)}{15}$$

Operação Bayesiana

- Comentários:
- 1) Distribuição a posteriori: inferência plena (mais completa) sob a perspectiva bayesiana.
- 2) Sequencialidade da operação bayesiana
- Exemplo 1: Inicialmente, observação "apenas" de $X_1 = 0$:

$$\mathbb{P}(\theta = i|X_1 = 0) = \frac{\mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}i)\ \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}j)\ \mathbb{P}(\theta{=}j)} =$$

$$= \frac{\frac{(5-i)}{5}\ \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{(5-j)}{5}\ \frac{1}{6}} \Rightarrow \mathbb{P}(\theta = i|X_1 = 0) = \frac{(5-i)}{15}$$

Operação Bayesiana

- Comentários:
- 1) Distribuição a posteriori: inferência plena (mais completa) sob a perspectiva bayesiana.
- 2) Sequencialidade da operação bayesiana
- Exemplo 1: Inicialmente, observação "apenas" de $X_1 = 0$:

$$\mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) \; = \; \frac{\mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}i) \; \mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5} \; \mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}j) \; \mathbb{P}(\theta{=}j)} \; =$$

$$= \; \frac{\frac{(5-i)}{5} \, \frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5} \; \frac{(5-j)}{5} \, \frac{1}{6}} \; \Rightarrow \; \mathbb{P}(\theta = i | X_1 = 0) \; = \; \frac{(5-i)}{15}$$

Operação Bayesiana

- Comentários:
- 1) Distribuição a posteriori: inferência plena (mais completa) sob a perspectiva bayesiana.
- 2) Sequencialidade da operação bayesiana
- Exemplo 1: Inicialmente, observação "apenas" de $X_1 = 0$:

$$\mathbb{P}(\theta = i|X_1 = 0) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}i)\;\mathbb{P}(\theta{=}i)}{\sum_{j=0}^{5}\;\mathbb{P}(X_1{=}0|\theta{=}j)\;\mathbb{P}(\theta{=}j)} \;=$$

$$= \;\frac{\frac{(5-i)}{5}\,\frac{1}{6}}{\sum_{j=0}^{5}\;\frac{(5-j)}{5}\,\frac{1}{6}} \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(\theta = i|X_1 = 0) \;=\; \frac{(5-i)}{15}$$

Operação Bayesiana

- Em seguida, após a observação de $X_2 = 1$:
- $\mathbb{P}(\theta = i | X_2 = 1, X_1 = 0) \quad =$

$$= \quad \frac{\mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}i,X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}i|X_1{=}0)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}j,X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}j|X_1{=}0)} \quad =$$

$$= \quad \frac{\frac{i}{4}\,\frac{(5-i)}{15}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{4}\,\frac{(5-j)}{15}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\theta = i | X_2 = 1, X_1 = 0) \quad = \quad \frac{i(5-i)}{20}$$

Operação Bayesiana

- Em seguida, após a observação de $X_2 = 1$:
- $\mathbb{P}(\theta = i | X_2 = 1, X_1 = 0) \quad =$

$$= \quad \frac{\mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}i, X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}i|X_1{=}0)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}j, X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}j|X_1{=}0)} \quad =$$

$$= \quad \frac{\frac{i}{4}\ \frac{(5-i)}{15}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{4}\ \frac{(5-j)}{15}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\theta = i | X_2 = 1, X_1 = 0) \quad = \quad \frac{i(5-i)}{20}$$

Operação Bayesiana

- Em seguida, após a observação de $X_2 = 1$:
- $\mathbb{P}(\theta = i|X_2 = 1, X_1 = 0) \quad =$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}i, X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}i|X_1{=}0)}{\sum_{j=0}^{5}\ \mathbb{P}(X_2{=}1|\theta{=}j, X_1{=}0)\ \mathbb{P}(\theta{=}j|X_1{=}0)} =$$

$$= \frac{\frac{i}{4}\ \frac{(5-i)}{15}}{\sum_{j=0}^{5}\ \frac{j}{4}\ \frac{(5-j)}{15}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\theta = i|X_2 = 1, X_1 = 0) \quad = \quad \frac{i(5-i)}{20}$$

Operação Bayesiana

- No Exemplo 2, suponhamos a observação, primeiramente, de $X_1 = ... = X_5 = 0$. Então,

  $$\theta|X_1 = ... = X_5 = 0 \sim Beta(1+0; 19+5-0) \sim Beta(1,24)$$

  Em seguida, observadas $X_6 = ... = X_{10} = 0$, temos

  $$\theta|X_6 = ... = X_{10} = 0, X_1 = ... = X_5 = 0 \sim$$

  $$\sim Beta(1+0, 24+5-0) \sim Beta(1,29)$$

  Analogamente, se $X_6 = X_7 = X_8 = 0, X_9 = 1, X_{10} = 0$, temos

  $$\theta|X_6 = X_7 = X_8 = 0, X_9 = 1, X_{10} = 0, X_1 = ... = X_5 = 0 \sim$$

  $$\sim Beta(1+1, 24+5-1) \sim Beta(2,28).$$

Operação Bayesiana

- No Exemplo 2, suponhamos a observação, primeiramente, de $X_1 = ... = X_5 = 0$. Então,

  $$\theta | X_1 = ... = X_5 = 0 \sim Beta(1 + 0; 19 + 5 - 0) \sim Beta(1, 24)$$

  Em seguida, observadas $X_6 = ... = X_{10} = 0$, temos

  $$\theta | X_6 = ... = X_{10} = 0, X_1 = ... = X_5 = 0 \sim$$

  $$\sim Beta(1 + 0, 24 + 5 - 0) \ \sim \ Beta(1, 29)$$

  Analogamente, se $X_6 = X_7 = X_8 = 0, X_9 = 1, X_{10} = 0$, temos

  $$\theta | X_6 = X_7 = X_8 = 0, X_9 = 1, X_{10} = 0, X_1 = ... = X_5 = 0 \sim$$

  $$\sim Beta(1 + 1, 24 + 5 - 1) \ \sim \ Beta(2, 28).$$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \;\sim\; \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \;\sim\; \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \;\sim\; \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta|X_1 = 0, X_2 = 1 \;\sim\; \theta|X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta|X_1 = x_1, X_2 = x_2 \;\sim\; \theta|X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta|X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \;\sim\; \theta|\sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta|X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta|X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta|X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta|X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta|X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta|\sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- 3) **Suficiência**
- No exemplo 1, note que (exercício !!!),
- $\theta | X_1 = 0, X_2 = 1 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = 1$
- Na verdade, (exercício!!!) para todo $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}$,
- $\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ \sim \ \theta | X_1 + X_2 = x_1 + x_2$
- No exemplo 2, de modo similar,
- $\theta | X_1 = ... = X_8 = X_{10} = 0, X_9 = 1 \ \sim \ \theta | \sum_{i=1}^{10} X_i = 1$

Suficiência

- **Suficiência:** Estatística Suficiente preserva toda a informação relevante da amostra sobre θ. É razoável imaginar que a inferência baseada na informação da amostra X coincida com a inferência baseada na informação ("parcial") do valor da estatística suficiente $T(X)$.
- Como a inferência é A distribuição a posteriori para θ, parece razoável a seguinte definição de suficiência:
- **(Suficiência Bayesiana)** Uma estatística T é suficiente para θ se, para toda priori para θ e para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\theta \mid T(X) = T(x) \quad \sim \quad \theta \mid X = x$$

Suficiência

- **Suficiência:** Estatística Suficiente preserva toda a informação relevante da amostra sobre θ. É razoável imaginar que a inferência baseada na informação da amostra X coincida com a inferência baseada na informação ("parcial") do valor da estatística suficiente $T(X)$.

- Como a inferência é A distribuição a posteriori para θ, parece razoável a seguinte definição de suficiência:

- **(Suficiência Bayesiana)** Uma estatística T é suficiente para θ se, para toda priori para θ e para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\theta \mid T(X) = T(x) \quad \sim \quad \theta \mid X = x$$

Suficiência

- **Suficiência:** Estatística Suficiente preserva toda a informação relevante da amostra sobre θ. É razoável imaginar que a inferência baseada na informação da amostra X coincida com a inferência baseada na informação ("parcial") do valor da estatística suficiente $T(X)$.

- Como a inferência é A distribuição a posteriori para θ, parece razoável a seguinte definição de suficiência:

- **(Suficiência Bayesiana)** Uma estatística T é suficiente para θ se, para toda priori para θ e para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\theta \mid T(X) = T(x) \quad \sim \quad \theta \mid X = x$$

Suficiência

- **Suficiência:** Estatística Suficiente preserva toda a informação relevante da amostra sobre θ. É razoável imaginar que a inferência baseada na informação da amostra X coincida com a inferência baseada na informação ("parcial") do valor da estatística suficiente $T(X)$.

- Como a inferência é A distribuição a posteriori para θ, parece razoável a seguinte definição de suficiência:

- **(Suficiência Bayesiana)** Uma estatística T é suficiente para θ se, para toda priori para θ e para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\theta \mid T(X) = T(x) \quad \sim \quad \theta \mid X = x$$

Suficiência

- **Suficiência:** Estatística Suficiente preserva toda a informação relevante da amostra sobre θ. É razoável imaginar que a inferência baseada na informação da amostra X coincida com a inferência baseada na informação ("parcial") do valor da estatística suficiente $T(X)$.

- Como a inferência é A distribuição a posteriori para θ, parece razoável a seguinte definição de suficiência:

- **(Suficiência Bayesiana)** Uma estatística T é suficiente para θ se, para toda priori para θ e para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\theta \mid T(X) = T(x) \quad \sim \quad \theta \mid X = x$$

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,
- $f(\theta|x) \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\, f(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \propto$
- $\propto \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,
- $f(\theta|x) \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\, f(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\, (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\, f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \propto$
- $\propto \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\, (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\, f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\, (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\, f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,

- $f(\theta|x) \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\, f(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$

- Além disso, temos que

- $f(\theta| \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \propto$

- $\propto \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta) \Rightarrow$

- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$

- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$,

- $f(\theta|x) \ \propto \ \mathbb{P}(X = x|\theta) \ f(\theta) \ = \ \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \ (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \ f(\theta)$

- Além disso, temos que

- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \ \propto$

- $\propto \ \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \ \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \ (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \ f(\theta) \ \Rightarrow$

- $\Rightarrow \ f(\theta|(T(X) = T(x)) \ \propto \ \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \ (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \ f(\theta)$

- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \ \sim \ \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,

- $f(\theta|x) \;\propto\; \mathbb{P}(X = x|\theta)\; f(\theta) \;=\; \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$

- Além disso, temos que

- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \;\propto$

- $\propto\; \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta) \;\Rightarrow$

- $\Rightarrow\; f(\theta|(T(X) = T(x))\; \propto\; \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$

- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \;\sim\; \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,
- $f(\theta|x) \;\propto\; \mathbb{P}(X = x|\theta)\; f(\theta) \;=\; \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta)f(\theta) \;\propto$
- $\propto \; \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\; \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta) \;\Rightarrow$
- $\Rightarrow \; f(\theta|(T(X) = T(x)) \;\propto\; \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \;\sim\; \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$,
- $f(\theta|x) \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\, f(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta| \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i|\theta) f(\theta) \propto$
- $\propto \binom{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Bernoulli (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$,
- $f(\theta|x) \propto \mathbb{P}(X = x|\theta)\, f(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \propto \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i|\theta) f(\theta) \propto$
- $\propto \binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\, f(\theta) = \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta| \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\, f(\theta) \propto$
- $\propto \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\, f(\theta) = \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta| \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\, f(\theta) \propto$
- $\propto \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \;\propto\; f(x|\theta)\; f(\theta) \;=\; \theta^n\; e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n x_i) \;\propto\; f(\sum_{i=1}^n x_i|\theta)\; f(\theta) \;\propto$
- $\propto\; \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, (\sum_{i=1}^n x_i)^{n-1}\; e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta) \;\Rightarrow$
- $\Rightarrow\; f(\theta|(T(X) = T(x)) \;\propto\; \theta^n\; e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}\; f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \;\sim\; \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \;\propto\; f(x|\theta)\; f(\theta) \;=\; \theta^n\; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \;\propto\; f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\; f(\theta) \;\propto$
- $\propto\; \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\; (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}\; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta) \;\Rightarrow$
- $\Rightarrow\; f(\theta|(T(X) = T(x)) \;\propto\; \theta^n\; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \;\sim\; \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \;\propto\; f(x|\theta)\; f(\theta) \;=\; \theta^n \; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta| \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \;\propto\; f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\; f(\theta) \;\propto$
- $\propto\; \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\; (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}\; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta) \;\Rightarrow$
- $\Rightarrow\; f(\theta|(T(X) = T(x)) \;\propto\; \theta^n\; e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\; f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \;\sim\; \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \ \propto \ f(x|\theta)\ f(\theta) \ = \ \theta^n \ e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \ \propto \ f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\ f(\theta) \ \propto$
- $\propto \ \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta) \ \Rightarrow$
- $\Rightarrow \ f(\theta|(T(X) = T(x)) \ \propto \ \theta^n \ e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \ \sim \ \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\, f(\theta) = \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta|\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\, f(\theta) \propto$
- $\propto \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta) \Rightarrow$
- $\Rightarrow f(\theta|(T(X) = T(x)) \propto \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}\, f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \sim \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Exemplo 2: Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ AAS do modelo Exp (θ). Seja $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
- $f(\theta|x) \ \propto \ f(x|\theta)\ f(\theta) \ = \ \theta^n \ e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta)$
- Além disso, temos que
- $f(\theta| \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} x_i) \ \propto \ f(\sum_{i=1}^{n} x_i|\theta)\ f(\theta) \ \propto$
- $\propto \ \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta) \ \Rightarrow$
- $\Rightarrow \ f(\theta|(T(X) = T(x)) \ \propto \ \theta^n \ e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \ f(\theta)$
- Como para todo x, $\theta|T(X) = T(x) \ \sim \ \theta|X = x$, resulta que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Suficiência

- Comentários:
- Suficiência Clássica $\Rightarrow$ Suficiência Bayesiana
- Há equivalência entre Suficiência Clássica e Suficiência Bayesiana nos casos dominados (para toda $\mathbb{P}_\theta$ com mesma medida σ-finita dominante).
- 4) Justificativa para adoção de modelos paramétricos:

  o que é (significa) θ ? Por que AAS ?

  Justificativa: Permutabilidade + Condições adicionais

Suficiência

- Comentários:
- Suficiência Clássica $\Rightarrow$ Suficiência Bayesiana
- Há equivalência entre Suficiência Clássica e Suficiência Bayesiana nos casos dominados (para toda $\mathbb{P}_\theta$ com mesma medida σ-finita dominante).
- 4) Justificativa para adoção de modelos paramétricos:

  o que é (significa) θ ? Por que AAS ?

  Justificativa: Permutabilidade + Condições adicionais

Suficiência

- Comentários:
- Suficiência Clássica $\Rightarrow$ Suficiência Bayesiana
- Há equivalência entre Suficiência Clássica e Suficiência Bayesiana nos casos dominados (para toda $\mathbb{P}_\theta$ com mesma medida σ-finita dominante).
- 4) Justificativa para adoção de modelos paramétricos:

  o que é (significa) θ ? Por que AAS ?

  Justificativa: Permutabilidade + Condições adicionais

Suficiência

- Comentários:
- Suficiência Clássica $\Rightarrow$ Suficiência Bayesiana
- Há equivalência entre Suficiência Clássica e Suficiência Bayesiana nos casos dominados (para toda $\mathbb{P}_\theta$ com mesma medida σ-finita dominante).

- 4) Justificativa para adoção de modelos paramétricos:

  o que é (significa) θ ? Por que AAS ?

  Justificativa: Permutabilidade + Condições adicionais

Suficiência

- Comentários:
- Suficiência Clássica $\Rightarrow$ Suficiência Bayesiana
- Há equivalência entre Suficiência Clássica e Suficiência Bayesiana nos casos dominados (para toda $\mathbb{P}_\theta$ com mesma medida σ-finita dominante).
- 4) Justificativa para adoção de modelos paramétricos:

  o que é (significa) θ ? Por que AAS ?

  Justificativa: Permutabilidade + Condições adicionais

Permutabilidade

- Permutabilidade: julgamento/opinião fundamental (sob a perspectiva bayesiana) acerca de quantidades observáveis (potenciais observações amostrais).
- Revela a "indistinguibilidade" entre as unidades amostrais quanto a uma variável/característica (resposta) desconhecida (sob apreciação por um indivíduo). "Simetria" entre as variáveis/características associadas às unidades amostrais.
- Noção menos restritiva sobre quantidades observáveis que a noção de "variáveis IID".
- Por outro lado, traz/permite, sob certas condições, uma interpretação para o (a existência do) parâmetro θ bem como para a suposição de "variáveis IID".

Permutabilidade

- Permutabilidade: julgamento/opinião fundamental (sob a perspectiva bayesiana) acerca de quantidades observáveis (potenciais observações amostrais).
- Revela a "indistinguibilidade" entre as unidades amostrais quanto a uma variável/característica (resposta) desconhecida (sob apreciação por um indivíduo). "Simetria" entre as variáveis/características associadas às unidades amostrais.
- Noção menos restritiva sobre quantidades observáveis que a noção de "variáveis IID".
- Por outro lado, traz/permite, sob certas condições, uma interpretação para o (a existência do) parâmetro θ bem como para a suposição de "variáveis IID".

Permutabilidade

- Permutabilidade: julgamento/opinião fundamental (sob a perspectiva bayesiana) acerca de quantidades observáveis (potenciais observações amostrais).
- Revela a "indistinguibilidade" entre as unidades amostrais quanto a uma variável/característica (resposta) desconhecida (sob apreciação por um indivíduo). "Simetria" entre as variáveis/características associadas às unidades amostrais.
- Noção menos restritiva sobre quantidades observáveis que a noção de "variáveis IID".
- Por outro lado, traz/permite, sob certas condições, uma interpretação para o (a existência do) parâmetro θ bem como para a suposição de "variáveis IID".

Permutabilidade

- Permutabilidade: julgamento/opinião fundamental (sob a perspectiva bayesiana) acerca de quantidades observáveis (potenciais observações amostrais).

- Revela a "indistinguibilidade" entre as unidades amostrais quanto a uma variável/característica (resposta) desconhecida (sob apreciação por um indivíduo). "Simetria" entre as variáveis/características associadas às unidades amostrais.

- Noção menos restritiva sobre quantidades observáveis que a noção de "variáveis IID".

- Por outro lado, traz/permite, sob certas condições, uma interpretação para o (a existência do) parâmetro θ bem como para a suposição de "variáveis IID".

Permutabilidade

- Permutabilidade: julgamento/opinião fundamental (sob a perspectiva bayesiana) acerca de quantidades observáveis (potenciais observações amostrais).
- Revela a "indistinguibilidade" entre as unidades amostrais quanto a uma variável/característica (resposta) desconhecida (sob apreciação por um indivíduo). "Simetria" entre as variáveis/características associadas às unidades amostrais.
- Noção menos restritiva sobre quantidades observáveis que a noção de "variáveis IID".
- Por outro lado, traz/permite, sob certas condições, uma interpretação para o (a existência do) parâmetro θ bem como para a suposição de "variáveis IID".

Permutabilidade

- **DEFINICÃO :** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ um vetor aleatório discreto. Dizemos que $X_1, ..., X_n$ são permutáveis (X é permutável ou $\mathbb{P}$ é permutável) se para toda permutação dos índices $1, ..., n$ (isto é, para toda $\pi : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., n\}$ injetora) e para todo valor x_i, $i = 1, ..., n$,

- $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$

- Extensões "naturais" para o caso geral em termos de função de distribuição ou função densidade do vetor aleatório X.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO :** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ um vetor aleatório discreto. Dizemos que $X_1, ..., X_n$ são permutáveis (X é permutável ou $\mathbb{P}$ é permutável) se para toda permutação dos índices $1, ..., n$ (isto é, para toda $\pi : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., n\}$ injetora) e para todo valor x_i, $i = 1, ..., n$,
- $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$
- Extensões "naturais" para o caso geral em termos de função de distribuição ou função densidade do vetor aleatório X.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO :** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ um vetor aleatório discreto. Dizemos que $X_1, ..., X_n$ são permutáveis (X é permutável ou $\mathbb{P}$ é permutável) se para toda permutação dos índices $1, ..., n$ (isto é, para toda $\pi : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., n\}$ injetora) e para todo valor x_i, $i = 1, ..., n$,
- $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$
- Extensões "naturais" para o caso geral em termos de função de distribuição ou função densidade do vetor aleatório X.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO :** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ um vetor aleatório discreto. Dizemos que $X_1, ..., X_n$ são permutáveis (X é permutável ou $\mathbb{P}$ é permutável) se para toda permutação dos índices $1, ..., n$ (isto é, para toda $\pi : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., n\}$ injetora) e para todo valor x_i, $i = 1, ..., n$,

- $\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$

- Extensões "naturais" para o caso geral em termos de função de distribuição ou função densidade do vetor aleatório X.

Permutabilidade

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ v. a. independentes e identicamente distribuídas Bernoulli (θ_0), $\theta_0 \in (0, 1)$. Para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ...n$, temos

$$\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{\pi(i)} = x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1 - \theta_0)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Exemplo 2: $X = (X_1, X_2)$ v. a. de Bernoulli com distribuição dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, 2$,

$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \dfrac{1}{3\binom{2}{x_1 + x_2}}$. Permutando X,

$$\mathbb{P}(X_2 = x_1, X_1 = x_2) = \frac{1}{3\binom{2}{x_2 + x_1}} =$$

$$= \frac{1}{3\binom{2}{x_1 + x_2}} = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Permutabilidade

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ v. a. independentes e identicamente distribuídas Bernoulli (θ_0), $\theta_0 \in (0,1)$. Para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ...n$, temos

$$\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{\pi(i)} = x_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Exemplo 2: $X = (X_1, X_2)$ v. a. de Bernoulli com distribuição dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, 2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{3\binom{2}{x_1+x_2}}.$$ Permutando X,

$$\mathbb{P}(X_2 = x_1, X_1 = x_2) = \frac{1}{3\binom{2}{x_2+x_1}} =$$

$$= \frac{1}{3\binom{2}{x_1+x_2}} = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Permutabilidade

- Exemplo 1: $X = (X_1, ..., X_n)$ v. a. independentes e identicamente distribuídas Bernoulli (θ_0), $\theta_0 \in (0,1)$. Para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ...n$, temos

$$\mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, ..., X_{\pi(n)} = x_n) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{\pi(i)} = x_i) \ =$$

$$= \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \ = \ \theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \ (1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Exemplo 2: $X = (X_1, X_2)$ v. a. de Bernoulli com distribuição dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, 2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \ = \ \frac{1}{3\binom{2}{x_1+x_2}}$$. Permutando X,

$$\mathbb{P}(X_2 = x_1, X_1 = x_2) \ = \ \frac{1}{3\binom{2}{x_2+x_1}} \ =$$

$$= \ \frac{1}{3\binom{2}{x_1+x_2}} \ = \ \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- Logo, X_1 e X_2 são permutáveis.
- Note que, no exemplo 2, $X_1 \sim X_2 \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$. No entanto, X_1 e X_2 NÃO são independentes!!
- Alguns resultados:
- **Resultado 1:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias IID. Então, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.
- Assim, todo vetor de variáveis IID é de variáveis permutáveis. Por outro lado, há vetores permutáveis cujas componentes não são independentes (ver Exemplo 2).

Permutabilidade

- **Resultado 2:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias permutáveis. Então, $X_1, ..., X_n$ são identicamente distribuídas.
- Assim, todo vetor de variáveis permutáveis é de variáveis identicamente distribuídas (ID). Por outro lado, há vetores de variáveis ID que não são permutáveis.
- Exemplo: Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com distribuição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) \ =$$

$$= \ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) \ = \ \frac{1}{3}$$

Note que $X_1 \sim X_2 \sim U\{-1, 0, 1\}$. No entanto,

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ \neq \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = -1)$$

Permutabilidade

- **Resultado 2:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias permutáveis. Então, $X_1, ..., X_n$ são identicamente distribuídas.

- Assim, todo vetor de variáveis permutáveis é de variáveis identicamente distribuídas (ID). Por outro lado, há vetores de variáveis ID que não são permutáveis.

- Exemplo: Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com distribuição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) \ =$$

$$= \ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) \ = \ \frac{1}{3}$$

Note que $X_1 \sim X_2 \sim U\{-1, 0, 1\}$. No entanto,

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ \neq \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = -1)$$

Permutabilidade

- **Resultado 2:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias permutáveis. Então, $X_1, ..., X_n$ são identicamente distribuídas.
- Assim, todo vetor de variáveis permutáveis é de variáveis identicamente distribuídas (ID). Por outro lado, há vetores de variáveis ID que não são permutáveis.
- Exemplo: Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com distribuição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) \ =$$

$$= \ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) \ = \ \frac{1}{3}$$

Note que $X_1 \sim X_2 \sim U\{-1, 0, 1\}$. No entanto,

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ \neq \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = -1)$$

Permutabilidade

- **Resultado 2:** Sejam $X_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias permutáveis. Então, $X_1, ..., X_n$ são identicamente distribuídas.

- Assim, todo vetor de variáveis permutáveis é de variáveis identicamente distribuídas (ID). Por outro lado, há vetores de variáveis ID que não são permutáveis.

- Exemplo: Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com distribuição de probabilidade dada por

  $$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) \ =$$

  $$= \ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) \ = \ \tfrac{1}{3}$$

  Note que $X_1 \sim X_2 \sim U\{-1, 0, 1\}$. No entanto,

  $$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) \ \neq \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = -1)$$

Permutabilidade

- Resumidamente:
- **IID** $\Rightarrow$ **Permutabilidade** $\Rightarrow$ **ID**
- **Resultado 3:** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ vetor aleatório de variáveis aleatórias permutáveis. Então, qualquer marginal k-dimensional, $k < n$, de X é também permutável.
- No que segue, estendemos a definição de vetor permutável para sequências de variáveis aleatórias.

Permutabilidade

- Resumidamente:
- **IID** $\Rightarrow$ **Permutabilidade** $\Rightarrow$ **ID**
- **Resultado 3:** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ vetor aleatório de variáveis aleatórias permutáveis. Então, qualquer marginal k-dimensional, $k < n$, de X é também permutável.
- No que segue, estendemos a definição de vetor permutável para sequências de variáveis aleatórias.

Permutabilidade

- Resumidamente:
- **IID** $\Rightarrow$ **Permutabilidade** $\Rightarrow$ **ID**
- **Resultado 3:** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ vetor aleatório de variáveis aleatórias permutáveis. Então, qualquer marginal k-dimensional, $k < n$, de X é também permutável.
- No que segue, estendemos a definição de vetor permutável para sequências de variáveis aleatórias.

Permutabilidade

- Resumidamente:
- **IID** $\Rightarrow$ **Permutabilidade** $\Rightarrow$ **ID**
- **Resultado 3:** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ vetor aleatório de variáveis aleatórias permutáveis. Então, qualquer marginal k-dimensional, $k < n$, de X é também permutável.
- No que segue, estendemos a definição de vetor permutável para sequências de variáveis aleatórias.

Permutabilidade

- Resumidamente:
- **IID** $\Rightarrow$ **Permutabilidade** $\Rightarrow$ **ID**
- **Resultado 3:** Seja $X = (X_1, ..., X_n)$ vetor aleatório de variáveis aleatórias permutáveis. Então, qualquer marginal k-dimensional, $k < n$, de X é também permutável.
- No que segue, estendemos a definição de vetor permutável para sequências de variáveis aleatórias.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO:** Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é de variáveis permutáveis (ou o processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável) se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.

- Exemplo 1: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis IID Bernoulli (θ). É fácil ver que $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável.

- Exemplo 2: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável. Note que as variáveis $X_1, X_2, ...$ NÃO são independentes.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO:** Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é de variáveis permutáveis (ou o processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável) se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.

- Exemplo 1: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis IID Bernoulli (θ). É fácil ver que $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável.

- Exemplo 2: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável. Note que as variáveis $X_1, X_2, ...$ NÃO são independentes.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO:** Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é de variáveis permutáveis (ou o processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável) se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.

- Exemplo 1: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis IID Bernoulli (θ). É fácil ver que $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável.

- Exemplo 2: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável. Note que as variáveis $X_1, X_2, ...$ NÃO são independentes.

Permutabilidade

- **DEFINICÃO:** Uma sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ é de variáveis permutáveis (ou o processo estocástico $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável) se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n$ são permutáveis.

- Exemplo 1: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis IID Bernoulli (θ). É fácil ver que $(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável.

- Exemplo 2: $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ é permutável. Note que as variáveis $X_1, X_2, ...$ NÃO são independentes.

Permutabilidade

- **Teorema da Representação de De Finetti (variáveis 0-1)**

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis de Bernoulli. Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu([0,1]) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \int_{[0,1]} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} d\mu(\theta)$$

Além disso,

$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo μ.

Permutabilidade

- **Teorema da Representação de De Finetti (variáveis 0-1)**

  Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis de Bernoulli. Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu([0,1]) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

  $$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \int_{[0,1]} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} d\mu(\theta)$$

  Além disso,

  $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo μ.

Permutabilidade

- No exemplo 1, $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis IID Bernoulli (θ_0). Para cada $n \geq 1$, e $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$, temos que

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \; = \; \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \; =$$

$$= \; \int_{[0,1]} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \, d\mu_0(\theta) \quad ,$$

onde μ_0 é a medida de probabilidade concentrada (degenerada) em $\{\theta_0\}$ ($\mathbb{P}(\theta = \theta_0) = 1$).

Permutabilidade

- No exemplo 1, $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis IID Bernoulli (θ_0). Para cada $n \geq 1$, e $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$, temos que

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \; = \; \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \; =$$

$$= \; \int_{[0,1]} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \, d\mu_0(\theta) \; ,$$

onde μ_0 é a medida de probabilidade concentrada (degenerada) em $\{\theta_0\}$ ($\mathbb{P}(\theta = \theta_0) = 1$).

Permutabilidade

- Voltando ao exemplo 2, onde $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

Note que, para cada $n \geq 1$, e $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\int_0^1 \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\, 1\, d\theta = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}.$$

Assim, μ corresponde à distribuição uniforme sobre $[0, 1]$. Isto é, $\theta \sim U(0, 1)$.

Permutabilidade

- Voltando ao exemplo 2, onde $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis de Bernoulli cuja distribuição marginal de $X_1, ..., X_n$, para cada $n \geq 1$, é dada por: para $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \;=\; \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

Note que, para cada $n \geq 1$, e $x_i = 0, 1$, $i = 1, ..., n$,

$$\int_0^1 \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\, 1\, d\theta \;=\; \frac{1}{(n+1)\binom{n}{\sum_{i=1}^n x_i}} \;.$$

Assim, μ corresponde à distribuição uniforme sobre $[0, 1]$. Isto é, $\theta \sim U(0, 1)$.

Permutabilidade

- Comentários:
- A medida μ que aparece no Teorema da Representação é denominada medida de De Finetti.
- Do Teorema da Representação, θ é o limite da sequência de frequências relativas $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Num certo sentido, θ é não-observável.
- Inferência sobre θ

  X

  Inferência para coleções finitas de variáveis de $(X_n)_{n\geq 1}$ (inferência preditiva). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Permutabilidade

- Comentários:

- A medida μ que aparece no Teorema da Representação é denominada medida de De Finetti.

- Do Teorema da Representação, θ é o limite da sequência de frequências relativas $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Num certo sentido, θ é não-observável.

- Inferência sobre θ

  X

  Inferência para coleções finitas de variáveis de $(X_n)_{n\geq 1}$ (inferência preditiva). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Permutabilidade

- Comentários:
- A medida μ que aparece no Teorema da Representação é denominada medida de De Finetti.
- Do Teorema da Representação, θ é o limite da sequência de frequências relativas $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Num certo sentido, θ é não-observável.
- Inferência sobre θ

  X

  Inferência para coleções finitas de variáveis de $(X_n)_{n\geq 1}$ (inferência preditiva). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Permutabilidade

- Comentários:
- A medida μ que aparece no Teorema da Representação é denominada medida de De Finetti.
- Do Teorema da Representação, θ é o limite da sequência de frequências relativas $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Num certo sentido, θ é não-observável.
- Inferência sobre θ

  X

  Inferência para coleções finitas de variáveis de $(X_n)_{n\geq 1}$ (inferência preditiva). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Permutabilidade

- Comentários:
- A medida μ que aparece no Teorema da Representação é denominada medida de De Finetti.
- Do Teorema da Representação, θ é o limite da sequência de frequências relativas $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$. Num certo sentido, θ é não-observável.
- Inferência sobre θ

  X

  Inferência para coleções finitas de variáveis de $(X_n)_{n\geq 1}$ (inferência preditiva). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Permutabilidade

- O Teorema da Representação **não** se aplica a vetores permutáveis **finito-dimensionais**. Por exemplo, seja $X = (X_1, X_2)$ vetor aleatório com distribuição uniforme em $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$. Para que a distribuição de X admita a representação integral do Teorema, deveríamos ter:

  $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \int_{[0,1]}(1-\theta)^2\, d\mu(\theta) = \mathbb{E}[(1-\theta)^2] = 0,$

  donde $\mathbb{P}(\theta = 1) = 1$ e, consequentemente,

  $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1$!!!!!!!!!! (absurdo!!)

- Teorema da Representação fornece condições para a consideração de AAS do modelo Bernoulli (θ).

- Extensões, fortalecimentos para outros modelos paramétricos (**teoremas tipo de De Finetti**). Exemplos:

Permutabilidade

- O Teorema da Representação **não** se aplica a vetores permutáveis **finito-dimensionais**. Por exemplo, seja $X = (X_1, X_2)$ vetor aleatório com distribuição uniforme em $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$. Para que a distribuição de X admita a representação integral do Teorema, deveríamos ter:

  $$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \int_{[0,1]} (1-\theta)^2 \, d\mu(\theta) = \mathbb{E}[(1-\theta)^2] = 0,$$

  donde $\mathbb{P}(\theta = 1) = 1$ e, consequentemente,

  $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1$!!!!!!!!!! (absurdo!!)

- Teorema da Representação fornece condições para a consideração de AAS do modelo Bernoulli (θ).

- Extensões, fortalecimentos para outros modelos paramétricos (**teoremas tipo de De Finetti**). Exemplos:

Permutabilidade

- O Teorema da Representação **não** se aplica a vetores permutáveis **finito-dimensionais**. Por exemplo, seja $X = (X_1, X_2)$ vetor aleatório com distribuição uniforme em $\{(1,1), (1,0), (0,1)\}$. Para que a distribuição de X admita a representação integral do Teorema, deveríamos ter:

  $$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \int_{[0,1]} (1-\theta)^2 \, d\mu(\theta) = \mathbb{E}[(1-\theta)^2] = 0,$$

  donde $\mathbb{P}(\theta = 1) = 1$ e, consequentemente,

  $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1$!!!!!!!!!! (absurdo!!)

- Teorema da Representação fornece condições para a consideração de AAS do modelo Bernoulli (θ).

- Extensões, fortalecimentos para outros modelos paramétricos (**teoremas tipo de De Finetti**). Exemplos:

Permutabilidade

- O Teorema da Representação **não** se aplica a vetores permutáveis **finito-dimensionais**. Por exemplo, seja $X = (X_1, X_2)$ vetor aleatório com distribuição uniforme em $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$. Para que a distribuição de X admita a representação integral do Teorema, deveríamos ter:

  $$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \int_{[0,1]} (1-\theta)^2 \, d\mu(\theta) = \mathbb{E}[(1-\theta)^2] = 0,$$

  donde $\mathbb{P}(\theta = 1) = 1$ e, consequentemente,

  $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1$!!!!!!!!!! (absurdo!!)

- Teorema da Representação fornece condições para a consideração de AAS do modelo Bernoulli (θ).

- Extensões, fortalecimentos para outros modelos paramétricos (**teoremas tipo de De Finetti**). Exemplos:

Permutabilidade

- **Teorema:** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis a valores em $\mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n | \sum_{i=1}^n X_i = t \sim Multinomial(t; (1/n, ..., 1/n))$, isto é,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{t!}{\prod_{i=1}^n x_i!} \left(\frac{1}{n}\right)^t \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x_i) \, \mathbb{I}_{\{t\}}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i = 0, 1, 2, ..., i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-n\theta} \, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} d\mu(\theta)$$

Além disso, $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo μ.

Permutabilidade

- **Teorema:** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis a valores em $\mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, ..., X_n | \sum_{i=1}^{n} X_i = t \sim Multinomial(t; (1/n, ..., 1/n))$, isto é,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \frac{t!}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \left(\frac{1}{n}\right)^t \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x_i)\, \mathbb{I}_{\{t\}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i = 0, 1, 2, ..., i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-n\theta}\ \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} d\mu(\theta)$$

Além disso, $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo μ.

Permutabilidade

- **Teorema:** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_1, ..., X_n | \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = t \; \sim \; Uniforme(S_t^{(n)}) \quad ,$$

onde $S_t^{(n)} = \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = t\}, t > 0$.

Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \; = \; \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^{n} \Phi(\frac{x_i}{\sqrt{\theta}}) \, d\mu(\theta)$$

Além disso, $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo a medida μ.

Permutabilidade

- **Teorema:** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis permutáveis tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_1, ..., X_n | \sum_{i=1}^n X_i^2 = t \sim Uniforme(S_t^{(n)}) \quad ,$$

onde $S_t^{(n)} = \{(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n u_i^2 = t\}$, $t > 0$.

Então, existe uma (única) medida de probabilidade μ tal que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$ e tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a marginal de $X_1, ..., X_n$ é dada por: para $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^n \Phi(\frac{x_i}{\sqrt{\theta}}) \, d\mu(\theta)$$

Além disso, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{q.c.} \theta$, onde θ é distribuído segundo a medida μ.

Permutabilidade

- Observação:
- Há versões finitas de teoremas tipo de De Finetti: são avaliadas as distâncias entre marginais de um vetor permutável com certas características e misturas de variáveis IID (de modelos paramétricos). Usualmente, são estabelecidos majorantes para tais distâncias.

Permutabilidade

- Observação:

- Há versões finitas de teoremas tipo de De Finetti: são avaliadas as distâncias entre marginais de um vetor permutável com certas características e misturas de variáveis IID (de modelos paramétricos). Usualmente, são estabelecidos majorantes para tais distâncias.

Permutabilidade

- Observação:
- Há versões finitas de teoremas tipo de De Finetti: são avaliadas as distâncias entre marginais de um vetor permutável com certas características e misturas de variáveis IID (de modelos paramétricos). Usualmente, são estabelecidos majorantes para tais distâncias.

Permutabilidade

- **Inferencia Preditiva:** Inferência para "observações futuras" (em oposição à inferência para limites de médias ou frequências relativas - "θ").

- Distribuição preditiva (a posteriori) para observações futuras:

- 1) Suponhamos $(X_n)_{n\geq 1}$, dado θ, condicionalmente independentes (θ contínuo)

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$\int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta, x_1, ..., x_n) f(\theta | x_1, ..., x_n) d\theta$$

$$= \int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

Permutabilidade

- **Inferencia Preditiva:** Inferência para "observações futuras" (em oposição à inferência para limites de médias ou frequências relativas - "θ").
- Distribuição preditiva (a posteriori) para observações futuras:
- 1) Suponhamos $(X_n)_{n\geq 1}$, dado θ, condicionalmente independentes (θ contínuo)
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$\int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta, x_1, ..., x_n) f(\theta | x_1, ..., x_n) d\theta$$

$$= \int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

Permutabilidade

- **Inferencia Preditiva:** Inferência para "observações futuras" (em oposição à inferência para limites de médias ou frequências relativas - "θ").
- Distribuição preditiva (a posteriori) para observações futuras:
- 1) Suponhamos $(X_n)_{n\geq 1}$, dado θ, condicionalmente independentes (θ contínuo)
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$\int_\Theta \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta, x_1, ..., x_n) f(\theta | x_1, ..., x_n) d\theta$$

$$= \int_\Theta \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

Permutabilidade

- **Inferencia Preditiva:** Inferência para "observações futuras" (em oposição à inferência para limites de médias ou frequências relativas - "θ").

- Distribuição preditiva (a posteriori) para observações futuras:

- 1) Suponhamos $(X_n)_{n\geq 1}$, dado θ, condicionalmente independentes (θ contínuo)

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$\int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta, x_1, ..., x_n) f(\theta | x_1, ..., x_n) d\theta$$

$$= \int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

Permutabilidade

- **Inferencia Preditiva:** Inferência para "observações futuras" (em oposição à inferência para limites de médias ou frequências relativas - "θ").

- Distribuição preditiva (a posteriori) para observações futuras:

- 1) Suponhamos $(X_n)_{n\geq 1}$, dado θ, condicionalmente independentes (θ contínuo)

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$\int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta, x_1, ..., x_n) f(\theta | x_1, ..., x_n) d\theta$$

$$= \int_{\Theta} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

Permutabilidade

- Assim,
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$= \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+i} = x_{n+i} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

- Exemplo: $(X_n)_{n \geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli permutáveis. Então, para $k = 1$, temos

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$$

$$= \int_{[0,1]} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta =$$

$$= \int_{[0,1]} \theta \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta = \mathbb{E}(\theta | x_1, ..., x_n)$$

Permutabilidade

- Assim,
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$$= \int_\Theta \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+i} = x_{n+i} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$$

- Exemplo: $(X_n)_{n \geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli permutáveis. Então, para $k = 1$, temos

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$$

$$= \int_{[0,1]} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta =$$

$$= \int_{[0,1]} \theta \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta = \mathbb{E}(\theta | x_1, ..., x_n)$$

Permutabilidade

- Assim,
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \ =$

$$= \ \int_{\Theta} \ \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+i} = x_{n+i} | \theta) \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta$$

- Exemplo: $(X_n)_{n \geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli permutáveis. Então, para $k = 1$, temos

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \ =$$

$$= \ \int_{[0,1]} \ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \theta) \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta \ =$$

$$= \ \int_{[0,1]} \ \theta \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta \ = \ \mathbb{E}(\theta | x_1, ..., x_n)$$

Permutabilidade

- Assim,
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_{n+k} = x_{n+k} | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \; =$

  $= \; \int_\Theta \; \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_{n+i} = x_{n+i} | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta$
- Exemplo: $(X_n)_{n \geq 1}$ sequência de variáveis de Bernoulli permutáveis. Então, para $k = 1$, temos

  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \; =$

  $= \; \int_{[0,1]} \; \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \theta) \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta \; =$

  $= \; \int_{[0,1]} \; \theta \; f(\theta | x_1, ..., x_n) \; d\theta \; = \; \mathbb{E}(\theta | x_1, ..., x_n)$

Permutabilidade

- $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_{n+i} = t | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$

$= \sum_{A_t} \mathbb{P}(X_{n+1} = u_1, ..., X_{n+k} = u_k \mid x_1, ..., x_n) =$

$= \sum_{A_t} \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+i} = u_i | \theta) \, f(\theta | x_1, ..., x_n) \, d\theta =$

$= \sum_{A_t} \int_{\Theta} \theta^{\sum_{i=1}^{k} u_i} \, (1-\theta)^{k - \sum_{i=1}^{k} u_i} \, f(\theta | x_1, ..., x_n) \, d\theta =$

$= \int_{\Theta} \sum_{A_t} \theta^t \, (1-\theta)^{k-t} \, f(\theta | x_1, ..., x_n) \, d\theta =$

$= \int_{\Theta} \binom{k}{t} \theta^t \, (1-\theta)^{k-t} \, f(\theta | x_1, ..., x_n) \, d\theta =$

$= \binom{k}{t} \mathbb{E}[\, \theta^t \, (1-\theta)^{k-t} \mid x_1, ..., x_n] \;,$

onde $A_t = \{(u_1, ..., u_k) \in \{0,1\}^k : \sum_{i=1}^{k} u_i = t\}$, $0 \le t \le k$.

Permutabilidade

- $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_{n+i} = t | X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \ =$

$$= \ \sum_{A_t} \mathbb{P}(X_{n+1} = u_1, ..., X_{n+k} = u_k \mid x_1, ..., x_n) \ =$$

$$= \ \sum_{A_t} \ \int_{\Theta} \ \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+i} = u_i | \theta) \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta \ =$$

$$= \ \sum_{A_t} \ \int_{\Theta} \ \theta^{\sum_{i=1}^{k} u_i} \ (1-\theta)^{k - \sum_{i=1}^{k} u_i} \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta =$$

$$= \ \int_{\Theta} \ \sum_{A_t} \ \theta^t \ (1-\theta)^{k-t} \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta =$$

$$= \ \int_{\Theta} \ \binom{k}{t} \ \theta^t \ (1-\theta)^{k-t} \ f(\theta | x_1, ..., x_n) \ d\theta =$$

$$= \ \binom{k}{t} \ \mathbb{E}[\ \theta^t \ (1-\theta)^{k-t} \mid x_1, ..., x_n] \ \ ,$$

onde $A_t = \{(u_1, ..., u_k) \in \{0,1\}^k : \sum_{i=1}^{k} u_i = t\}, \ 0 \leq t \leq k$.