**1.** Considere uma urna contendo $\theta$ bolas numeradas de 1 a $\theta$, $\theta \in \{1, 2, 3, ...\}$, $\theta$ desconhecido. Considere o experimento que consiste em retirar uma bola da urna e registrar $X$: número marcado na bola extraída da urna.

(a) Determine o erro quadrático médio (EQM) do estimador não-viesado para $\theta$.

(b) Determine o EQM do estimador de máxima verossimilhança (EMV) para $\theta$.

**2.** No exercício anterior, considere a seguinte função $L : \{1, 2, 3, ...\}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $L(u, v) = 1$, se $u \neq v$, e $L(u, v) = 0$, se $u = v$.

(a) Determine a função de risco do EMV para $\theta$ contra a função $L$.

(b) Determine a função de risco do estimador não-viesado para $\theta$ contra a função $L$.

Observação: Para o estimador $\delta : \mathcal{X} \to \Theta$, o risco (função de risco) de $\delta$ contra uma função $L$ é dado por $R(\delta, \theta) = \mathbb{E}[L(\delta(X), \theta)]$ (note que quando $L(u, v) = (u - v)^2$, o risco de $\delta$ é seu EQM)

**3.** Considerando novamente o exercício 1, determine o estimador de Bayes com relação à perda quadrática ($L(u, v) = (u - v)^2$), considerando, a priori, que a distribuição de $\theta$ é dada por

(a) $\mathbb{P}(\theta = j) = \frac{12}{(j+1)(j+2)(j+3)} \mathbb{I}_{\{1,2,...\}}(j)$

(b) $\mathbb{P}(\theta = j) = \frac{2}{(j+1)(j+2)} \mathbb{I}_{\{1,2,...\}}(j)$

**4.** No exercício anterior, determine o EQM dos estimadores obtidos em (a) e (b).

**5.** Ainda nas condições do exercício 1, determine o estimador de Bayes com relação à perda $0 - 1$ (descrita no exercício 2), considerando, a priori, que

(a) $\theta - 1 \sim Poisson(\lambda_0)$, com $\lambda_0 \in \{1, 2, 3, ...\}$.

(b) $\theta - 1 \sim Binomial(N - 1, \frac{1}{2})$, com $N > 1$.

(c) a distribuição de $\theta$ é dada por $\mathbb{P}(\theta = j) = \frac{2}{(j+1)(j+2)} \mathbb{I}_{\{1,2,...\}}(j)$.

**6. (Schervish (1995))** Sejam $X_1, X_2, X_3$ variáveis aleatórias cuja distribuição conjunta é dada por:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \ = \ \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \ =$$

$$= \ \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \ = \frac{1}{3}$$

(a) Mostre que $X_1, X_2, X_3$ são permutáveis.

(b) Prove que se $X_4 \in \{0,1\}$ é uma outra variável aleatória, então $X_1, X_2, X_3, X_4$ não são permutáveis.

**7. (Schervish (1995))** Seja $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias IID com função de distribuição $F$. Seja $Z$ uma variável aleatória independente de $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ com função de distribuição $G$ e, para cada $n$, seja $X_n = Y_n + Z$. Mostre que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ são permutáveis.

**8. (Schervish (1995))** Suponha que para todo $m = 1, 2, 3, ...$, a função de probabilidade conjunta de $X_1, ..., X_m$ é dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_m = x_m) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{10^m}, \sum_{i=0}^{10} \; a_i \; i^x \; (10-i)^{m-x} & \text{if all } x_i \in \{0,1\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$, e os números $a_i$ são não-negativos e somam 1. Seja $\theta = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} X_j}{m}$. Mostre que a distribuição a priori de $\theta$ é $\mathbb{P}(\theta = \frac{i}{10}) = a_i$, $i = 0, 1, ..., 10$.

**9. (Schervish (1995))** Sejam $X_1, .., X_{14}$ variáveis aleatórias de Bernoulli permutáveis. Seja $M = \sum_{i=1}^{14} X_i$. Considere que a distribuição de $M$ é dada por:

$\mathbb{P}(M = 2) = 0.3 \quad \mathbb{P}(M = 8) = 0.2 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(M = 13) = 0.5$

(a) Determine $\mathbb{P}(X_{i_1} = 1, X_{i_2} = 1, X_{i_3} = 0, X_{i_4} = 1)$, com $i_j \neq i_l$ se $j \neq l$.

(b) Suponha que $\sum_{i=1}^{4} X_i = 1$. Determine todas as probabilidades de $k$ "sucessos" em $n$ "tentativas" futuras para $n = 1, ..., 10$ e $k = 0, ..., n$.

**10.** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli permutáveis. Mostre que $COV(X_i, X_j) = VAR(\theta)$, $i \neq j$, onde $\theta$ é o limite (quase certo) de $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$.

**11. (Schervish (1995))** Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias permutáveis com variância finita.

(a) Mostre que $COV(X_i, X_j) \geq 0$, se $i \neq j$.

(b) Exiba um exemplo de uma tal sequência permutável na qual $COV(X_i, X_j) = 0$, se $i \neq j$, mas as variáveis aleatórias sendo dependentes (não independentes).

**12. (Schervish (1995))** Seja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli permutáveis. Seja

$Y \;=\; \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \geq 2\}$ ,

isto é, $Y$ é o tempo até o segundo "sucesso" (por exemplo, se $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$, então $Y = 3$).

(a) Obtenha a distribuição de $Y$ usando a forma do Teorema da Representação de De Finetti para variáveis de Bernoulli.

(b) Obtenha a distribuição condicional de $\{X_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ dado $Y = n$.

(c) Mostre que a distribuição em (b) coincide com a distribuição condicional de $\{X_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ dado que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 2$.

**13.** Sejam $(X_1, ..., X_n)$ variáveis aleatórias que, dado $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, são condicionalmente independentes e identicamente distribuídas segundo o modelo Normal de média $\theta_1$ e variância $\theta_2$. Proponha um teste para testar $H_0 : \theta = (m_0, v_0)$ contra $H_1 : \theta = (m_1, v_1)$. (Considere, $m_0 < m_1$ e $0 < v_0 < v_1$)

**14.** Considere $\Theta = \{0, 1\}$. Suponha que $X|\theta = 0 \sim U\{0, 1, 2, ..., 19\}$ e que $X|\theta = 1 \sim Bin(19, \frac{1}{2})$. Considere as hipóteses $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$.

(a) Quantos testes (não-aleatorizados) de nível de significância $\alpha = 0,05$ para testar $H_0$ versus $H_1$ existem?

(b) Obtenha o (um) teste mais poderoso de nível de significância $\alpha = 0,05$ para $H_0$ versus $H_1$. Você adotaria outro valor para $\alpha$?

(c) Obtenha o teste de Bayes para $H_0$ versus $H_1$ considerando a perda $0 - a_1 - a_2$.

**15.** Refaça o exercício anterior supondo que $X|\theta = 0 \sim U\{0, 1, 2, ..., 99\}$ e que $X|\theta = 1 \sim Bin(99, \frac{1}{2})$. Que nível de significância $\alpha$ você adotaria para testar $H_0$ versus $H_1$?

**16.** Considere $\Theta = \{0, 1\}$. Suponha que $X|\theta = 0 \sim U\{1, 2, 3, ..., 100\}$ e que $X|\theta = 1 \sim Geo(\frac{95}{100})$.

(a) Obtenha o teste MP de nível $\alpha = 0,05$ para as hipóteses $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$. Determine o valor de $\frac{\mathbb{P}(X=5|\theta=1)}{\mathbb{P}(X=5|\theta=0)}$. Qual é sua decisão se $X = 5$? E se $X = 2$?

(b) Para conduzir um teste MP para $H_0$ versus $H_1$, qual valor de $\alpha$ você adotaria?

(c) Obtenha o teste MP de nível (aproximadamente) $\alpha = 0,05$ para as hipóteses $H_0' : \theta = 1$ versus $H_1' : \theta = 0$. Qual é sua decisão se $X = 2$?

**17.** Seja $X|\theta \sim Exp(\theta)$. Considere as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$, com $\theta_0 > 0$. Para $x > 0$, determine o p-valor com relação à classe de testes UMP para $H_0$.

**18.** Seja $X|\theta \sim N(\theta, 1)$. Considere as hipóteses $H_0 : \theta \in [a, b]$ versus $H_1 : \theta \notin [a, b]$, com $a < b$. Para $x > b$, determine o p-valor com relação à classe de testes RVG para $H_0$.

**19.** Sejam $X_1, ..., X_{14}$ variáveis aleatórias de Bernoulli com distribuição conjunta dada por

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_{14} = x_{14}\ |\theta) = \frac{\theta\ (\sum_{i=1}^{14} x_i)!\ (\theta+n-1-\sum_{i=1}^{14} x_i)!}{(\theta+14)!} \quad ,$$

para $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, ...14$, com $\theta \in \{1, 2, 3, ...\}$. Obtenha, se possível, o teste MP de nível de significância $\alpha = 0,05$ para $H_0 : \theta \in \{2, 3, 4, ...\}$ versus $H_1 : \theta = 1$.