

z-Transformation

Warum z-Transformation?

Die z-Transformation führt Polynome und rationale Funktionen in die Analyse der linearen zeitdiskreten Systeme ein.

Die Faltung geht über in die Multiplikation von Polynomen.

Algebraischen Operationen wie Division, Multiplikation und Faktorisierung entsprechen dem Zerlegen bzw. Zusammen-setzen von LTI Systemen.

Im allgemeinen sind die z-Transformationen rationale Funktionen, d.h. sie bestehen aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom. Die Wurzeln dieser Polynome sind wichtig, da die meisten Eigenschaften digitaler Filter von der Lage dieser Wurzeln abhängen.

n —, $\hat{\omega}$ —, z — Bereich

n Zeitbereich (Time domain)

Impulsantwort, Differenzengleichungen,
"wirklicher" Signalbereich

$\hat{\omega}$ Frequenzbereich (Frequency domain)

Frequenzantworten, Spektraldarstellungen
Analyse von Tönen

z z — Domain

Operatoren, Pole und Nullstellen
mathematische Analyse und Synthese

Eingangssignale

- ✓ Impuls
- ✓ Komplexe Exponentialfunktion

- $x[n] = z^n$

z-Transformation und FIR-Filter

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

als Filtergleichung oder mit der Faltungssumme

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k]$$

Zur Erinnerung:

$$z = e^{j\hat{\omega}}$$

Wir verwenden das Signal

$$x[n] = z^n \quad \{\text{für alle } n\}, z \text{ beliebige (komplexe) Zahl}$$

als Eingangssignal

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^M b_k z^n z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) z^n$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad \dots \text{Systemfunktion}$$

Die Systemfunktion $H(z)$ ist die z – Transformation der Impulsantwort:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n - k] \quad \Leftrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Für das Eingangssignal z^n folgt

$$y[n] = h[n] * z^n = H(z)z^n$$

wobei $H(z)$ die z – Transformierte von $h[n]$ ist.

$$h[n] \quad \Leftrightarrow \quad H(z)$$

$$b_k = \{1, 2, 1\} \Leftrightarrow H(z) = b_0 z^{-0} + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + 1z^{-2} =$$

$$= 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2}$$

Die Systemfunktion ist eine gebrochen rationale Funktion mit dem Zählerpolynom

$$z^2 + 2z + 1$$

und dem Nennerpolynom

$$z^2$$

Aus der Impulsantwort

$$h[n] = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + b_2\delta[n-2]$$

wird durch z-Transformation die Systemfunktion

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} = \frac{b_0z^2 + b_1z + b_2}{z^2}$$

Darstellung von Signalen

Ein Signal endlicher Länge kann dargestellt werden

$$x[n] = \sum_{k=0}^N x[k] \delta[n-k]$$

die z – Transformation dieses Signales ist definiert

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] z^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad \dots \text{Systemfunktion}$$

z ist eine beliebige komplexe Zahl, d.h. z ist die unabhängige (komplexe) Variable der z -Transformation.

Man kann auch schreiben

$$X(z) = \sum_{k=0}^N x[k] (z^{-1})^k$$

was nicht anderes bedeutet, dass $X(z)$ ein Polynom der Ordnung N der Variablen z^{-1} ist !

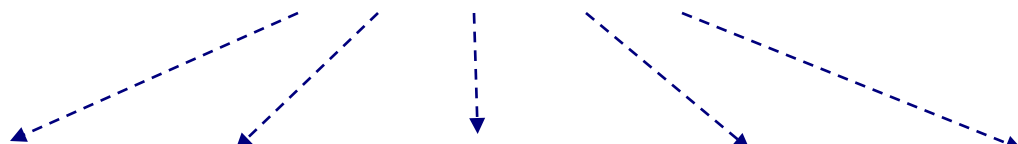
Transformieren

Den Übergang von $n \rightarrow z$ nennt man die z-Transformation von $x[n]$.

Um $X[z]$ zu erhalten ist es lediglich erforderlich ein Polynom in z^{-1} , dessen Koeffizienten die Werte der Folge $x[n]$ sind, zu bilden.

z.B.:

n	$n < -1$	-1	0	1	2	3	4	5	$n > 5$
x[n]	0	0	2	4	6	4	2	0	0


$$X(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

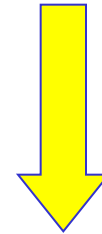
$n - \text{Domain}$



$z - \text{Domain}$

$$x[\textcolor{red}{n}] = \sum_{k=0}^N x[k] \delta[\textcolor{red}{n} - k] \quad \Leftrightarrow \quad X(\textcolor{violet}{z}) = \sum_{k=0}^N x[k] \textcolor{violet}{z}^{-k}$$

$$x[\textcolor{red}{n}] \Leftrightarrow X(\textcolor{violet}{z})$$



Beispiel:

$$x[n] = \delta[n - n_o]$$

$$X[z] = z^{-n_o}$$

$$z = e^{j\omega} \rightarrow \textcolor{red}{DFT}$$

$$z = re^{j\omega} \rightarrow \sum_{k=0}^N x[k] r^{-k} e^{-j\omega k}$$

$\textcolor{red}{DFT}$ von $x[k] r^{-k}$

Die Systemfunktion $H(z)$ ist eine Funktion der komplexen Variablen z .

Die z – Transformation eines FIR-Filters ist ein Polynom M – ten Grades und hat daher M Nullstellen, die das Polynom (bis auf eine multiplikative Konstante) vollständig definieren (Fundamentalsatz der Algebra).

Beispiel:

$$y[n] = 6x[n] - 5x[n-1] + x[n-2]$$

$$H(z) = 6 - 5z^{-1} + z^{-2} = (3 - z^{-1})(2 - z^{-1}) = 6 \frac{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}{z^2}$$

Nullstellen bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$

Eigenschaften der z-Transformation

Linearität

$$ax_1[n] + bx_2[n] \quad \Leftrightarrow \quad aX_1(z) + bX_2(z)$$

Time-delay

z^{-1} im z – Bereich entspricht einer Zeitverzögerung von 1 im n – Bereich (Zeitbereich)

n	n < 0	0	1	2	3	4	5	n > 5
x[n]	0	3	1	4	1	5	9	0

$$X(z) = 3 + z^{-1} + 4z^{-2} + z^{-3} + 5z^{-4} + 9z^{-5}$$

$$Y(z) = z^{-1}X(z) =$$

$$= (0z^0) + 3z^{-1} + z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4} + 5z^{-5} + 9z^{-6}$$

z-Transformation als Operator

Unit-Delay Operator **D**

$$y[n] = \mathbf{D}\{x[n]\} = x[n-1]$$

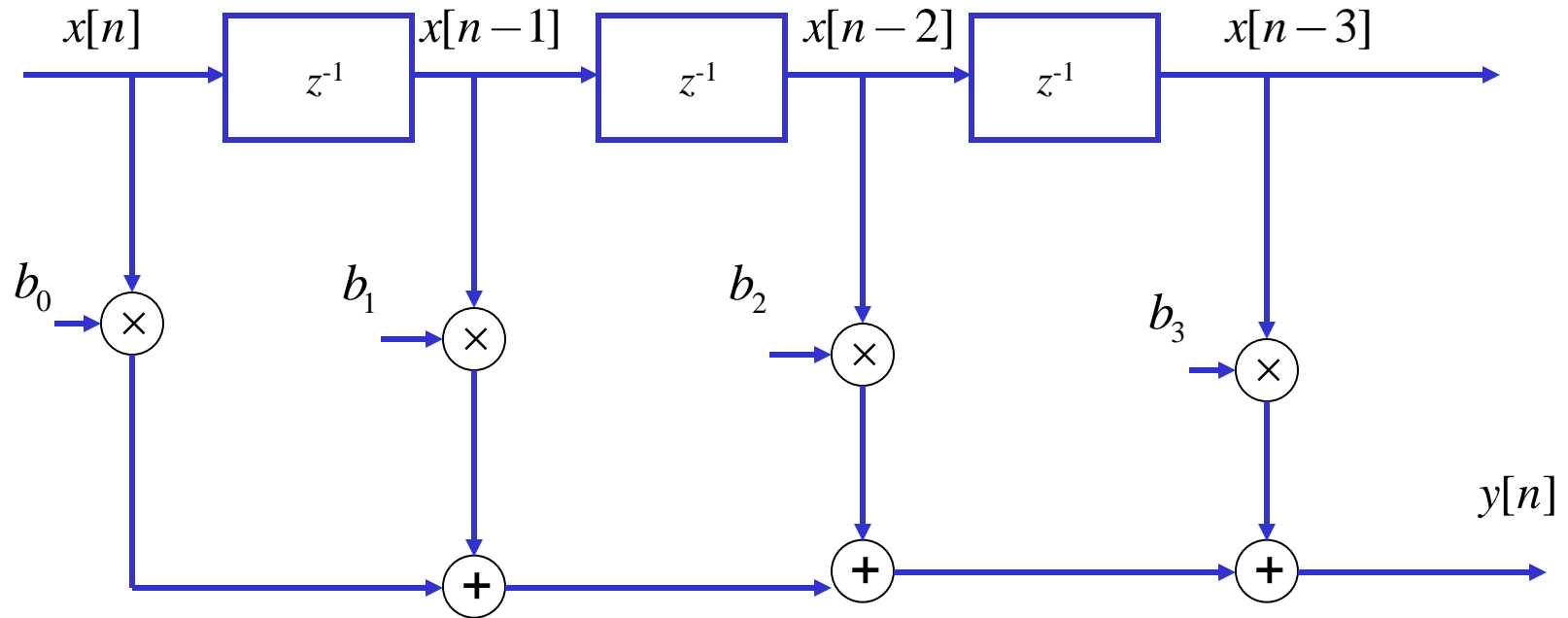
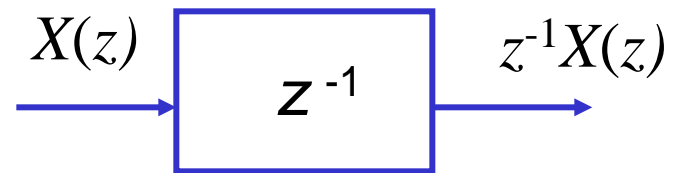
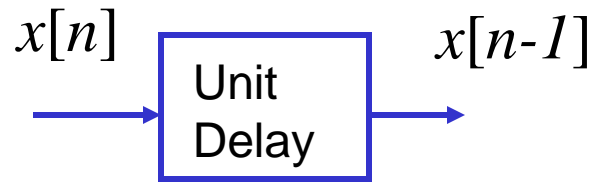
$$x[n] = z^n \quad \text{für alle } n$$

$$y[n] = \mathbf{D}\{x[n]\} = \mathbf{D}\{z^n\} = z^{n-1} = z^{-1}z^n = z^{-1}x[n]$$

Der Ausdruck $z^{-1}x[n]$ gilt nur für $x[n] = z^n$!

Es ist allerdings üblich, die Größe z^{-1} alternativ zum Unit-Delay Operatorsymbol **D** zu verwenden!

$$y[n] = z^{-1}\{x[n]\} = x[n-1]$$



Faltung und z-Transformation

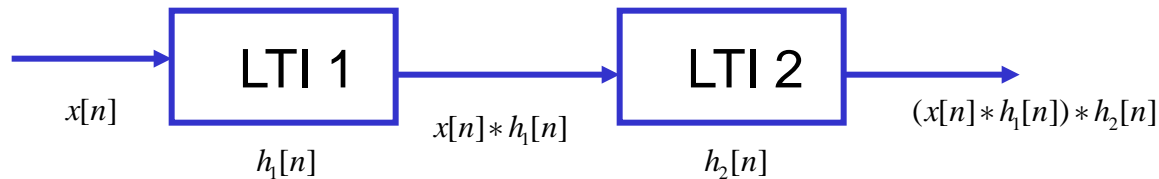
n – Domain

\Leftrightarrow z – Domain

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

Kaskadieren von Systemen



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$\Leftrightarrow H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

Partitionierung

Beispiel:

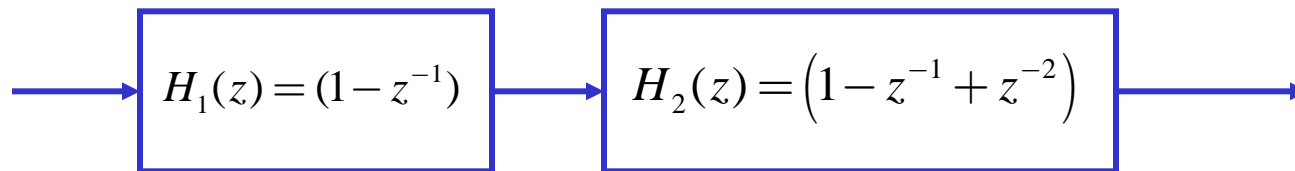
$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$$

Eine Wurzel dieses Polynoms liegt bei $z = 1$, damit ergibt sich

$$H(z) = H_2(z)(1 - z^{-1}) \Rightarrow H_1(z) = (1 - z^{-1})$$

$$H_2 = \frac{H(z)}{H_1(z)} = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{1 - z^{-1}} = 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})$$



z - Bereich

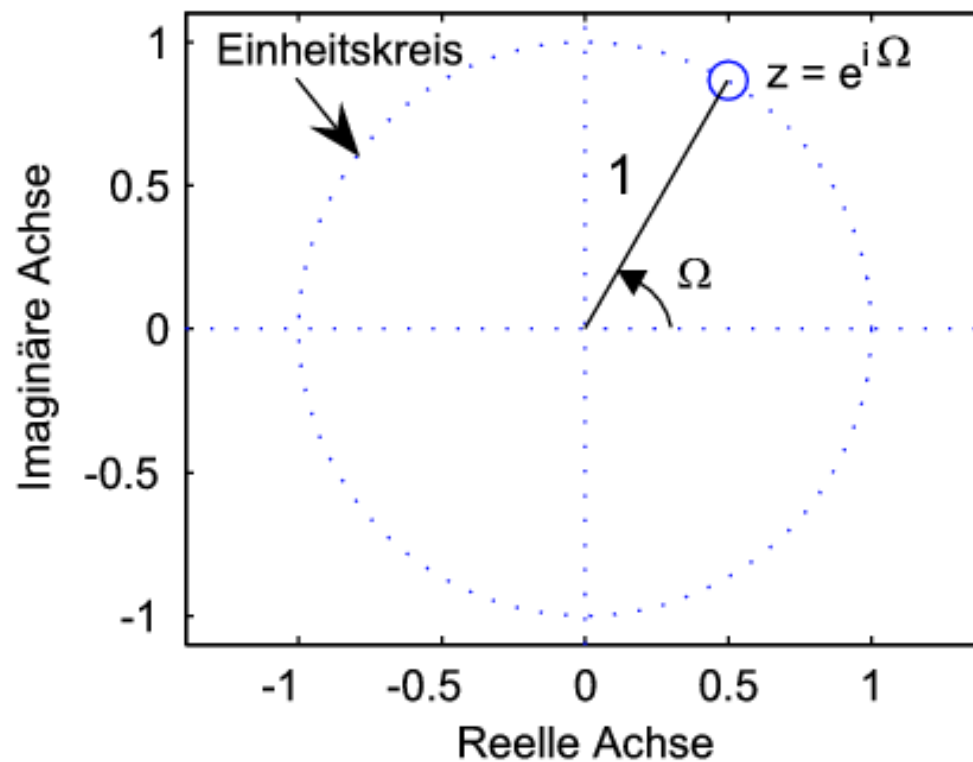


$\hat{\omega}$ - Bereich

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$



$$H(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

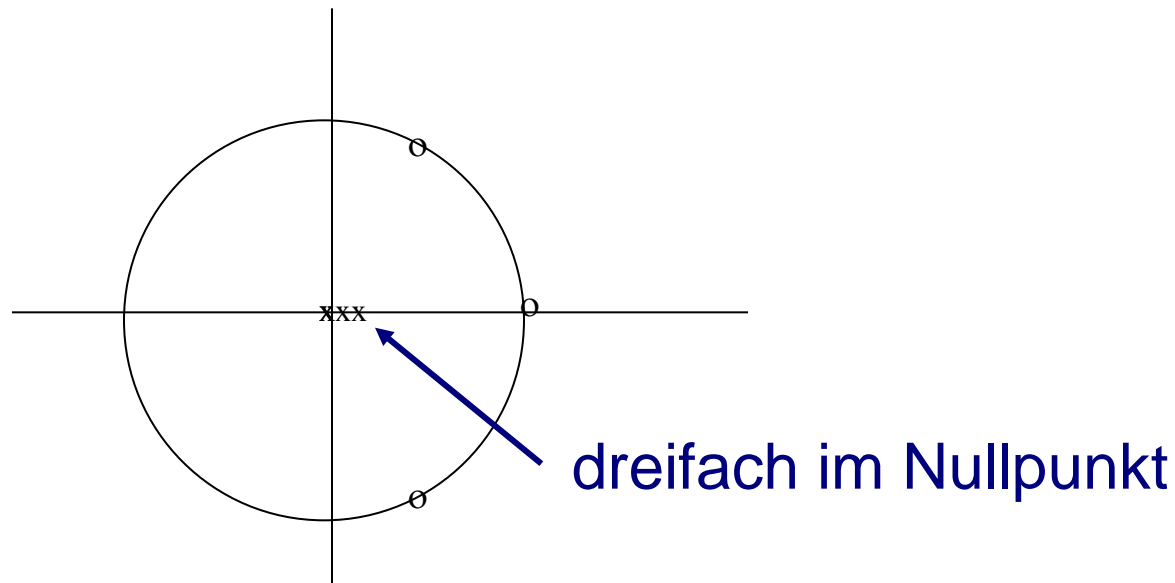


$z = e^{j\hat{\omega}}$... Einheitskreis in der komplexen Ebene

Pole und Nullstellen

z.B.:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \\ &= (1 - z^{-1})(1 - e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 - e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}) = \\ &= \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3} = \frac{(z - 1)(z - e^{j\frac{\pi}{3}})(z - e^{-j\frac{\pi}{3}})}{z^3} \end{aligned}$$



Was bedeutet eine Nullstelle?

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] - x[n-3]$$

$$x[n] = e^{j\pi\frac{n}{3}}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j\pi\frac{n}{3}} - 2e^{j\pi\frac{n-1}{3}} + 2e^{j\pi\frac{n-2}{3}} - e^{j\pi\frac{n-3}{3}} = \\ &= e^{j\pi\frac{n}{3}} (1 - 2e^{j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\pi}) = \\ &= e^{j\pi\frac{n}{3}} \left[1 - (1 - j\sqrt{3}) + (-1 - j\sqrt{3}) + 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Die komplexen Eingangsgrößen

$$(z_1)^n = 1, \quad (z_2)^n = e^{j\pi\frac{n}{3}}, \quad (z_3)^n = e^{-j\pi\frac{n}{3}}$$

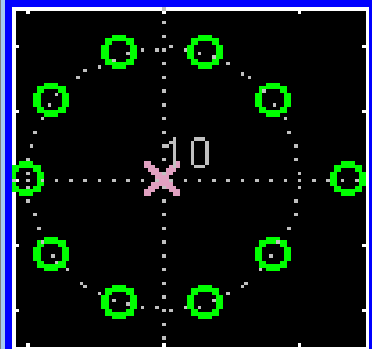
werden unterdrückt!

Nulling Filter (Sperrfilter)

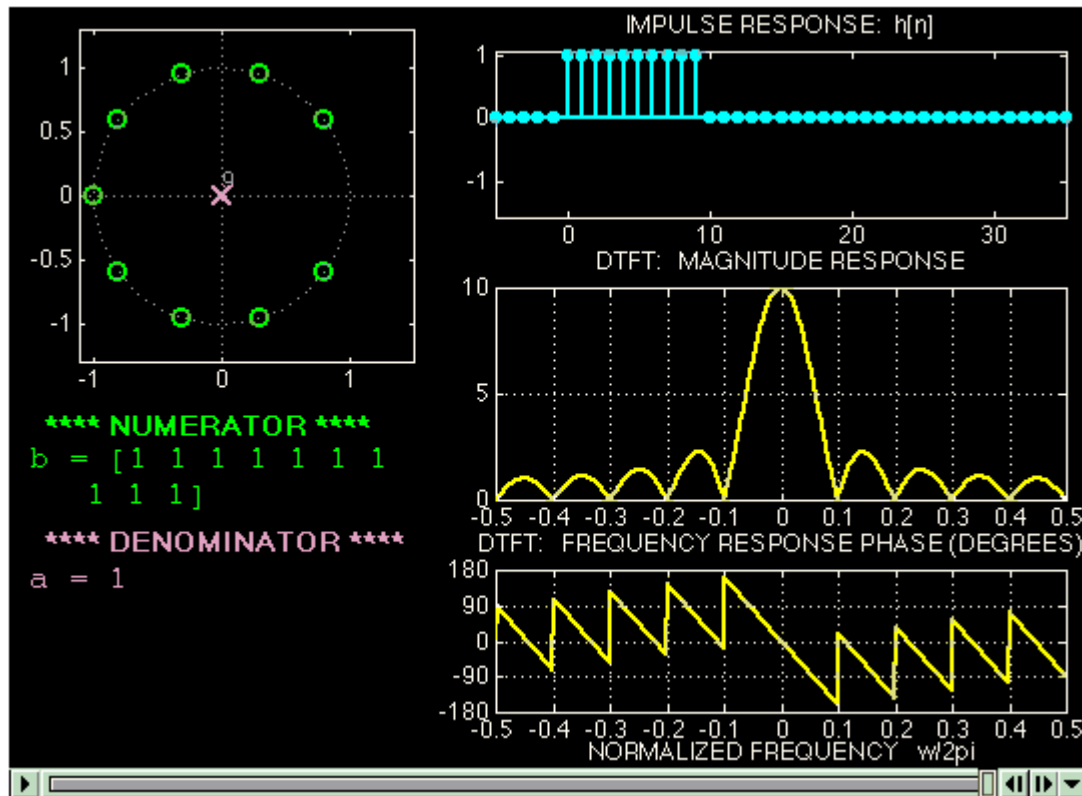
Nullstellen in der z – Ebene "entfernen" Signale der Form $x[n] = z_0^n$.

Um ein Kosinussignal $\cos(\hat{\omega}_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\hat{\omega}_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\hat{\omega}_0 n}$ zu entfernen müssen zwei Eingangsgrößen entfernt werden!
Die Nullstellen liegen konjugiert komplex!

PN-Video



FIR filter with ten zeros equally spaced around the unit circle. Notice changes in the impulse response $h[n]$ and the frequency response as the zero at $z = 1$, is moved radially.

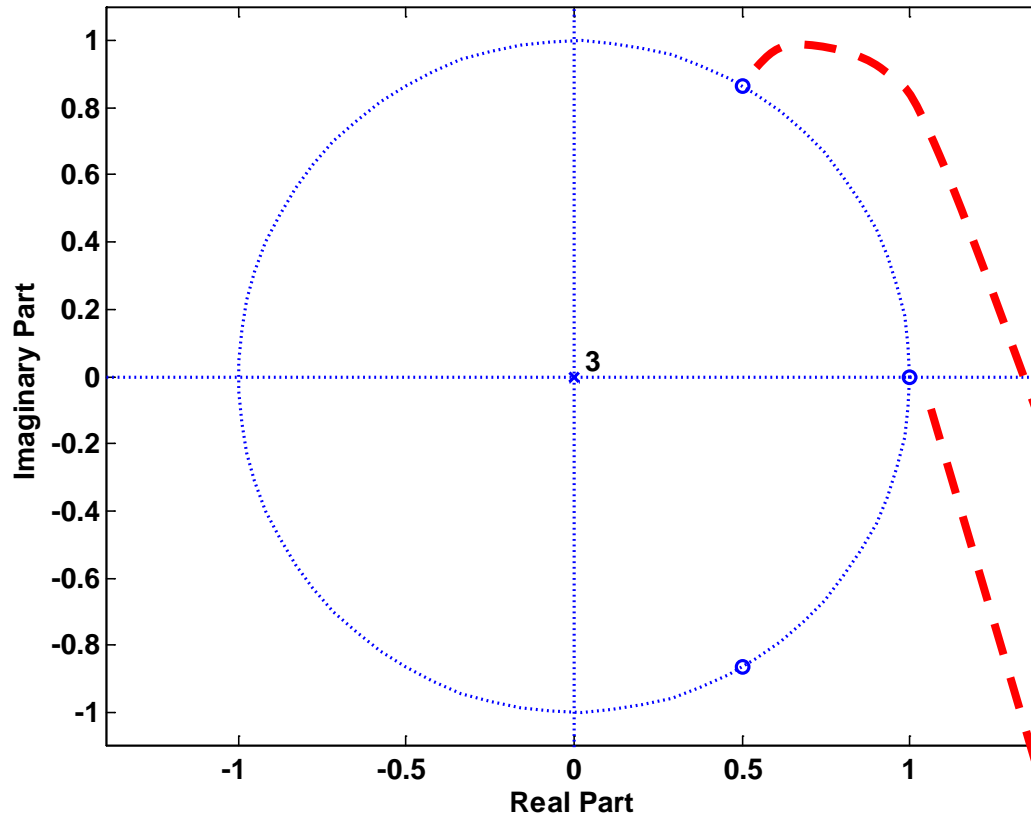


$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \prod_{k=1}^{L-1} (1 - e^{\frac{j2\pi k}{L}} z^{-1})$$

10-point running average $L = 10$

$$H(z) = \sum_{k=0}^9 z^{-k} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{10} - 1}{z^9(z - 1)}$$

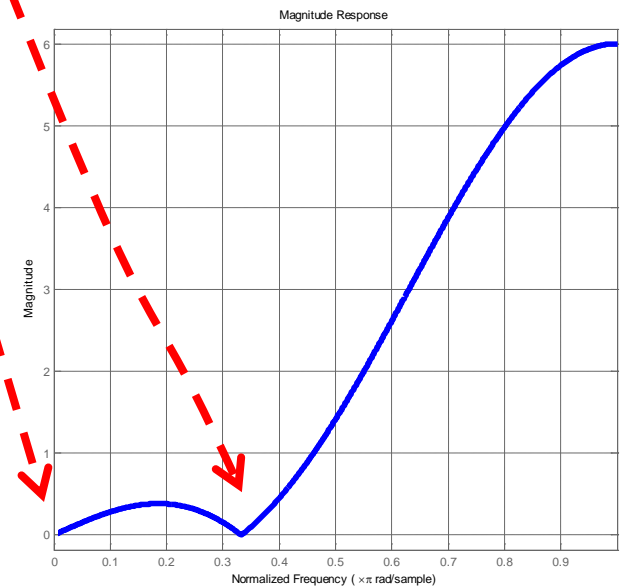
$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3}$$



B = [1 -2 2 -1]
A = [1]
zplane(B,A)

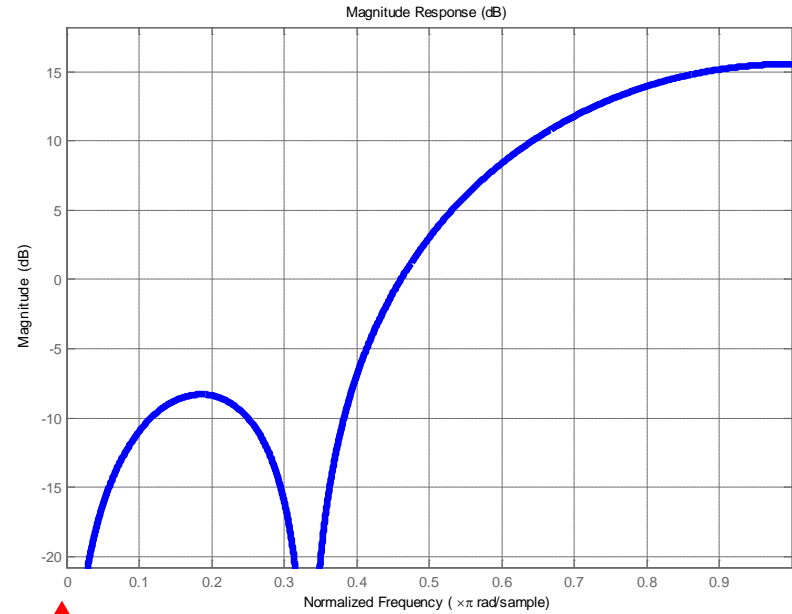
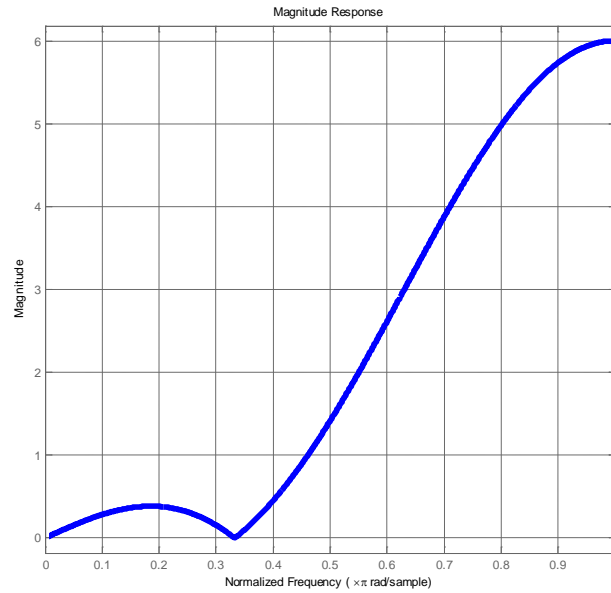
$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = (z-1)(z-e^{j\pi/3})(z-e^{-j\pi/3}) = 0$$

$$z_0 = 1, \pm e^{j\pi/3}$$

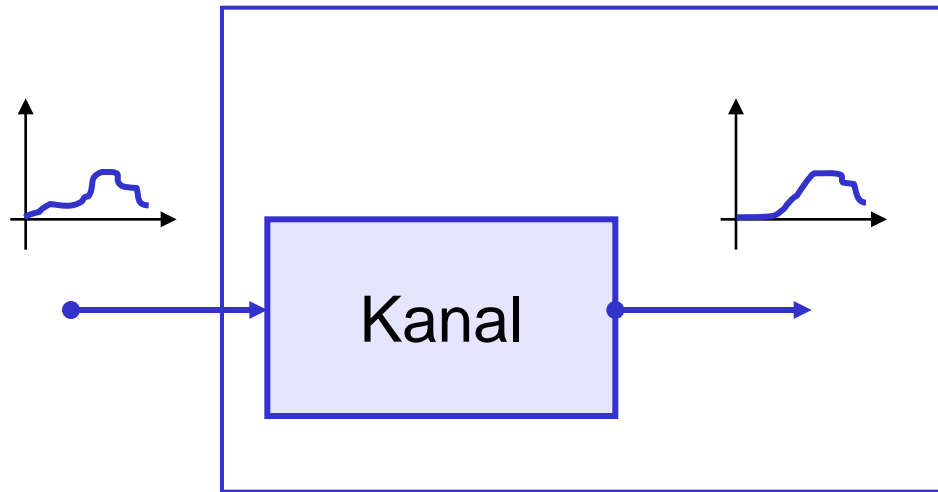


lin

log



Inverse Filterung (1)



Ausgangssignal bekannt

Kanal bekannt

Eingangssignal gesucht

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$x[n] = ?$ Inverse Faltung
Deconvolution

Inverse Filterung (2)

Lösung im Zeitbereich schwer/nicht möglich

→ Lösung im z-Bereich

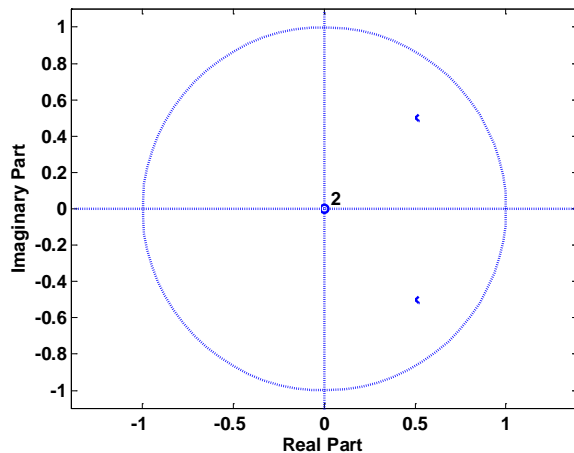
$$Y(z) = \underbrace{H_1(z)}_{\text{Kanal}} \underbrace{H_2(z)}_{\text{Korrektur}} X(z) = H(z) X(z)$$

$$H_1(z)H_2(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$

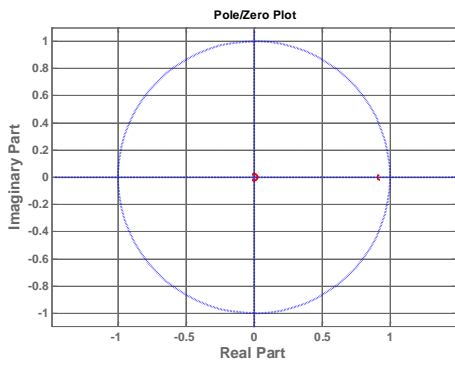
Inverse Filterung (3)

$$H_1(z) = (1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})$$

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{\underbrace{(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}}$$



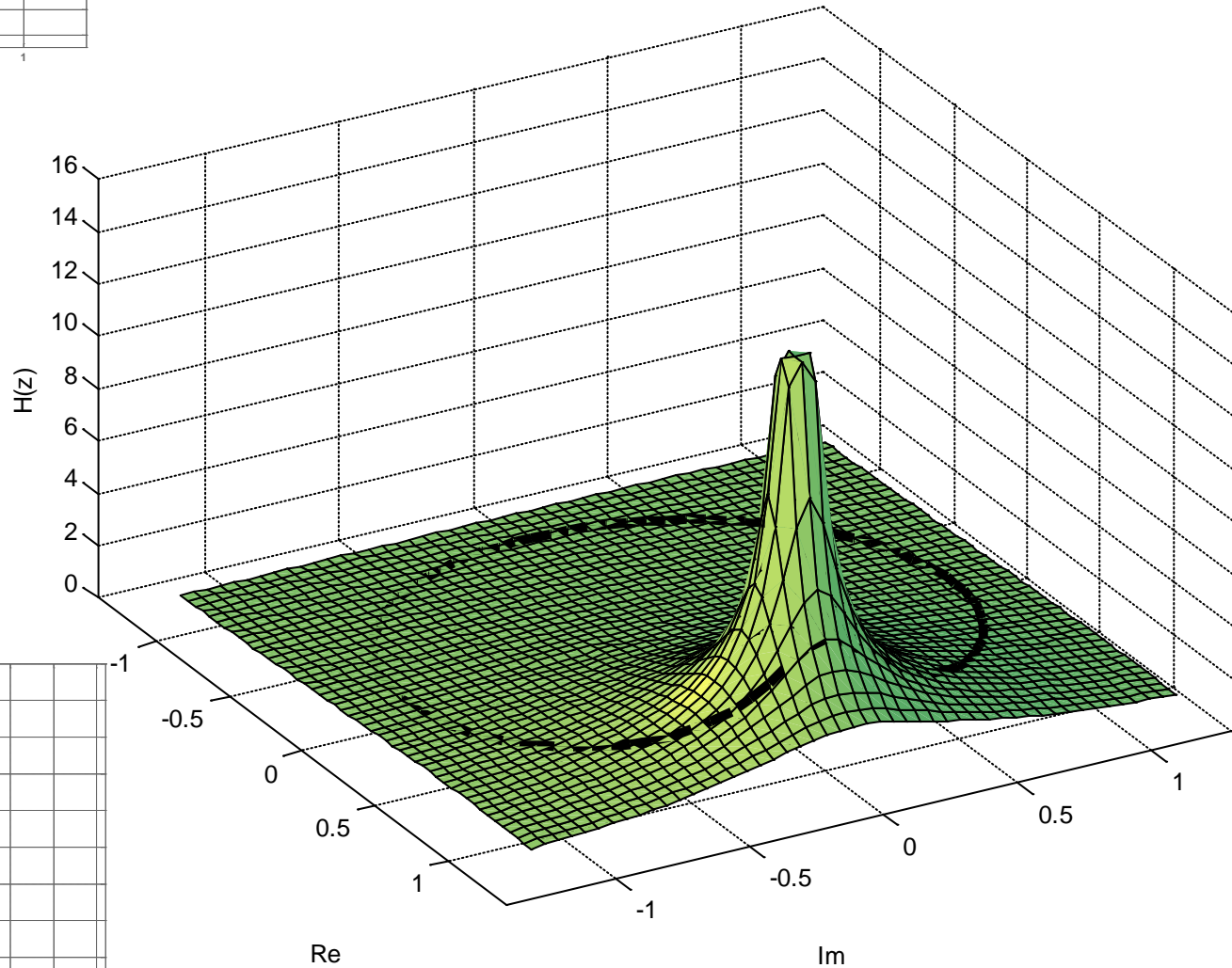
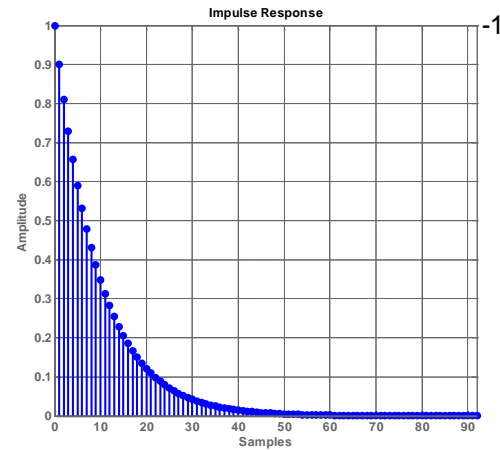
Nullstellen in Nenner
(außerhalb von Null)
→ Polstellen



$$|H(z)| = \left| \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \right|$$

PN-Diagramm

Impulsantwort



$$|H(z)| = \left| \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \right|$$

