ID: 1-090 ブースティングに基づく高速なメタラウンディング

https://arxiv.org/abs/2310.12629

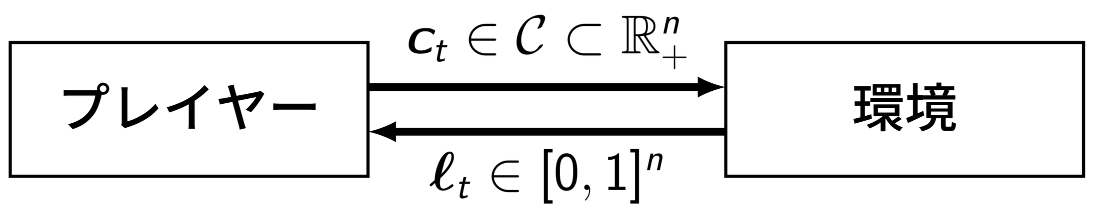
三星 諒太朗 九州大学/理研AIP ryotaro.mitsuboshi@inf.kyushu-u.ac.jp

畑埜 晃平 九州大学/理研AIP hatano@inf.kyushu-u.ac.jp

瀧本 英二 九州大学 eiji@inf.kyushu-u.ac.jp

オンライン組合せ線形最適化

各ラウンド $t = 1, 2, \dots, T$ において：



※$\mathcal{C}$ は組合せ集合

目標．

α-リグレット $R_T \triangleq \sum_{t=1}^T c_t \cdot \ell_t - \alpha \min_{c \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^T c \cdot \ell_t$ の最小化

- 決定集合 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n_+$ が離散集合なので難しい．
- 応用例：オンライン集合被覆，オンライン巡回セールスマン，等．

先行研究

一般に，組合せ集合上の最適化問題を解くのは困難．
$\mathcal{C}$ 上の α-近似オラクル $\mathcal{O}_\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$ が存在することを仮定．

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{O}_\mathcal{C}(\ell) \cdot \ell \le \alpha \min_{c \in \mathcal{C}} c \cdot \ell$$

手法	近似アルゴリズム	1ラウンドあたりのオラクル呼出回数	リグレット
Garber 2017	何でも良い	$O\left(n^2 \ln T\right)$	$O(T^{2/3})$
Garber 2017	何でも良い	$O\left(n^2 \sqrt{T} \ln T\right)$	$O(T^{1/2})$
Fujita et al. 2013	緩和ベース	$O\left(L^2 D_\infty^2 \ln(Ln)/\epsilon^2\right)$	$O(T^{1/2})$
本研究	緩和ベース	$O\left(D_\infty^2 \ln(n)/\epsilon^2\right)$	$O(T^{1/2})$

L は Fujita et al., 2013 中で扱う最適化問題の双対解の L_1-ノルム，
$D_\infty = \max_{c \in \mathcal{C}} \|c\|_\infty$．
提案手法は

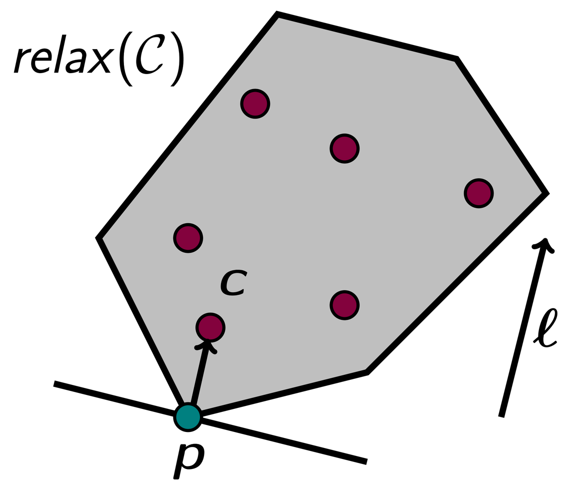
- Fujita et al. 2013 と同じ仮定のもと，オラクル呼出回数を改善．
- ラウンド数 T や α の値を知らなくて良い(Garber, 2017 では必要)．

オフラインでの緩和に基づくアプローチ [Fujita et al., 13]

緩和に基づく α-近似オラクル $\mathcal{R}_{relax(\mathcal{C})} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{C}$ を仮定．

$\mathcal{R}_{relax(\mathcal{C})}$ は $\ell \in \mathbb{R}^n_+$ を与えると次のように動作：

1. $\mathcal{C}$ を含む閉凸集合 $relax(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$ を構成．
2. $relax(\mathcal{C})$ 上で線形最適化．
$$x \in \arg\min_{x \in relax(\mathcal{C})} x \cdot \ell$$
3. x を基に「良い」実行可能解 $c \in \mathcal{C}$ を構成．（α-近似アルゴリズム）
$$\text{Find } c \in \mathcal{C} \quad \text{s.t.} \quad c \cdot \ell \le \alpha x \cdot \ell$$



オンラインでは $c \in \mathcal{C}$ を決めた後に ℓ を観測．
どんな $\ell \in \mathbb{R}^n_+$ が来ても良いようにする（メタラウンディング）．

メタラウンディング

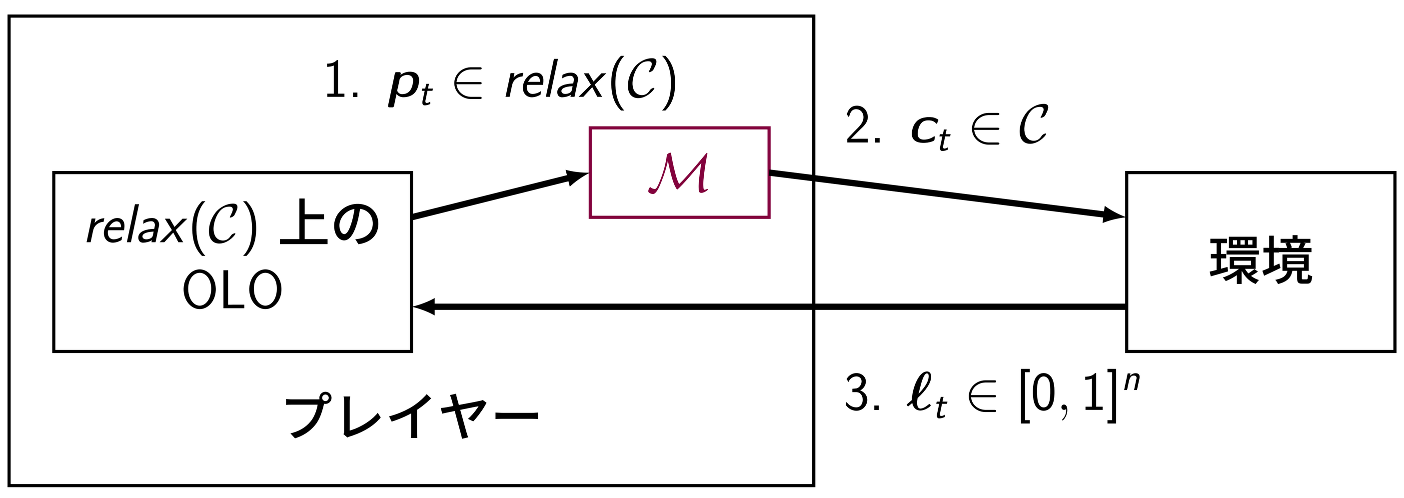
アルゴリズム $\mathcal{M} : relax(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ がメタラウンディングである

$$\iff \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^n_+, \quad \mathbb{E}\left[\mathcal{M}(x)\right] \cdot \ell \le \alpha x \cdot \ell$$

ここで，期待値は $\mathcal{M}$ 内部の確率変数上で取られる．

定理 [Fujita et al., 13]

$\mathcal{M}$ が存在 $\implies$ $R_T = O(\sqrt{T})$ であるアルゴリズムが存在．



α が未知の場合，次の最適化問題の最適解 λ に従って $c \in \mathcal{C}$ を選べばメタラウンディングになる．

$$\min_{\beta, \lambda} \beta \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}_{c \sim \lambda}[c] = \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c c \le \beta x, \quad \|\lambda\|_1 = 1, \quad \lambda \ge 0 \tag{1}$$

$$\max_{\gamma, \ell} \gamma \quad \text{s.t.} \quad \ell \cdot c \ge \gamma, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad \ell \cdot x = 1, \quad \ell \ge 0 \tag{2}$$

[Fujita et al., '13] では，
1. (1) をブースティングとして捉え，
2. 双対問題 (2) を解くアルゴリズムを提案し解析．

提案手法

本研究では，

1. ERLPBoost [Warmuth et al., 08] を基にしたアルゴリズムを提案．
2. 解析はフランク・ウルフ法のテクニック [Jaggi, '13] で行う．

解析をするために，(2) にエントロピーのような関数を正則化．

$$\max_{\gamma, \ell} \gamma - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \ell_i x_i \ln \frac{\ell_i x_i}{1/n} \quad \text{subject to} \quad \ell \cdot c \ge \gamma, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad \ell \cdot x = 1, \quad \ell \ge \mathbf{0}. \tag{3}$$

次の手順を実行することで，(1) の ϵ-近似解を求める．

1. $\mathcal{C}_0 := \emptyset$ から始め，
2. 各ラウンド $k = 0, 1, 2, \dots, K$ において
$\mathcal{C}_k$ 上での (3) の最適解を ℓ_k とし，$\mathcal{C}_{k+1} := \mathcal{C}_k \cup \{\mathcal{R}_{relax(\mathcal{C})}(\ell_k)\}$ とする．
3. $\mathcal{C}_{K+1}$ 上で (1) を解き，得られた $\lambda \in [0,1]^{\mathcal{C}_K}$ に従って $c \in \mathcal{C}_K$ を出力．

主結果

$\eta \ge 2\ln(n)/\epsilon$ を満たすように設定すれば，提案アルゴリズムは高々 $\lfloor 32 D_\infty^2 \ln(n)/\epsilon^2 \rfloor$ 回の反復の後 (1) の ϵ-近似解を見つける．

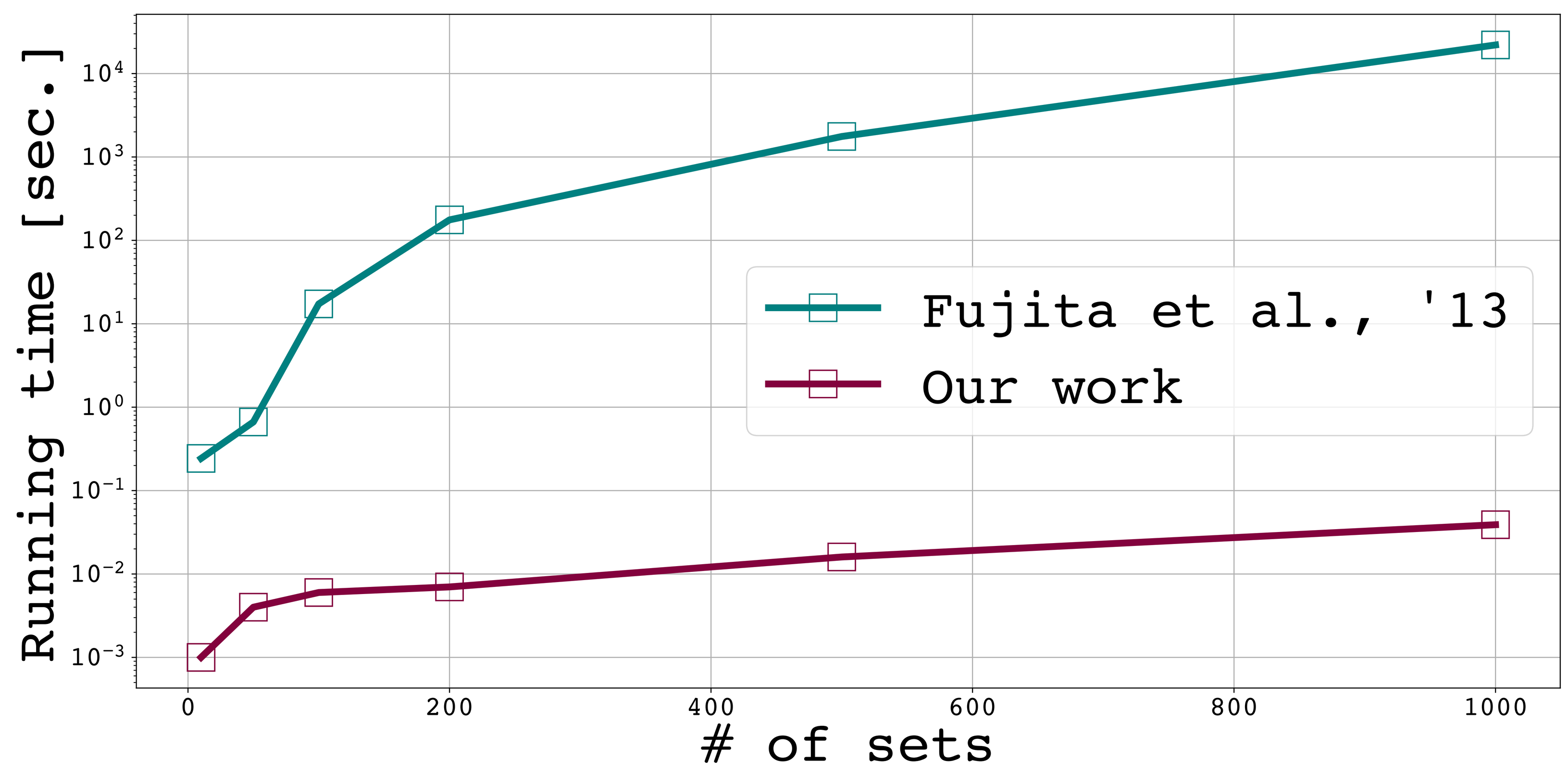
Note:

- 提案アルゴリズムは ERLPBoost の一般化（$x = \mathbf{1}$ で ERLPBoost）．
- 先行研究 [Fujita et al., '13] 同様，
真の近似率 α やラウンド数 T を知らなくて良い．
- (3) の Fenchel 双対問題は双対ギャップ 0 で，その目的関数は平滑．
- 提案手法は，(3) の双対問題をフランク・ウルフ法で解いている．
- 実際には適切な停止条件が設定されているので，多くの場合最大まで回す必要はない．
- α の上界を用いる先行研究 [Kakade et al., '09; Garber, '17] と異なり，より正確な α を計算できるのでリグレットが小さくなることが期待できる．

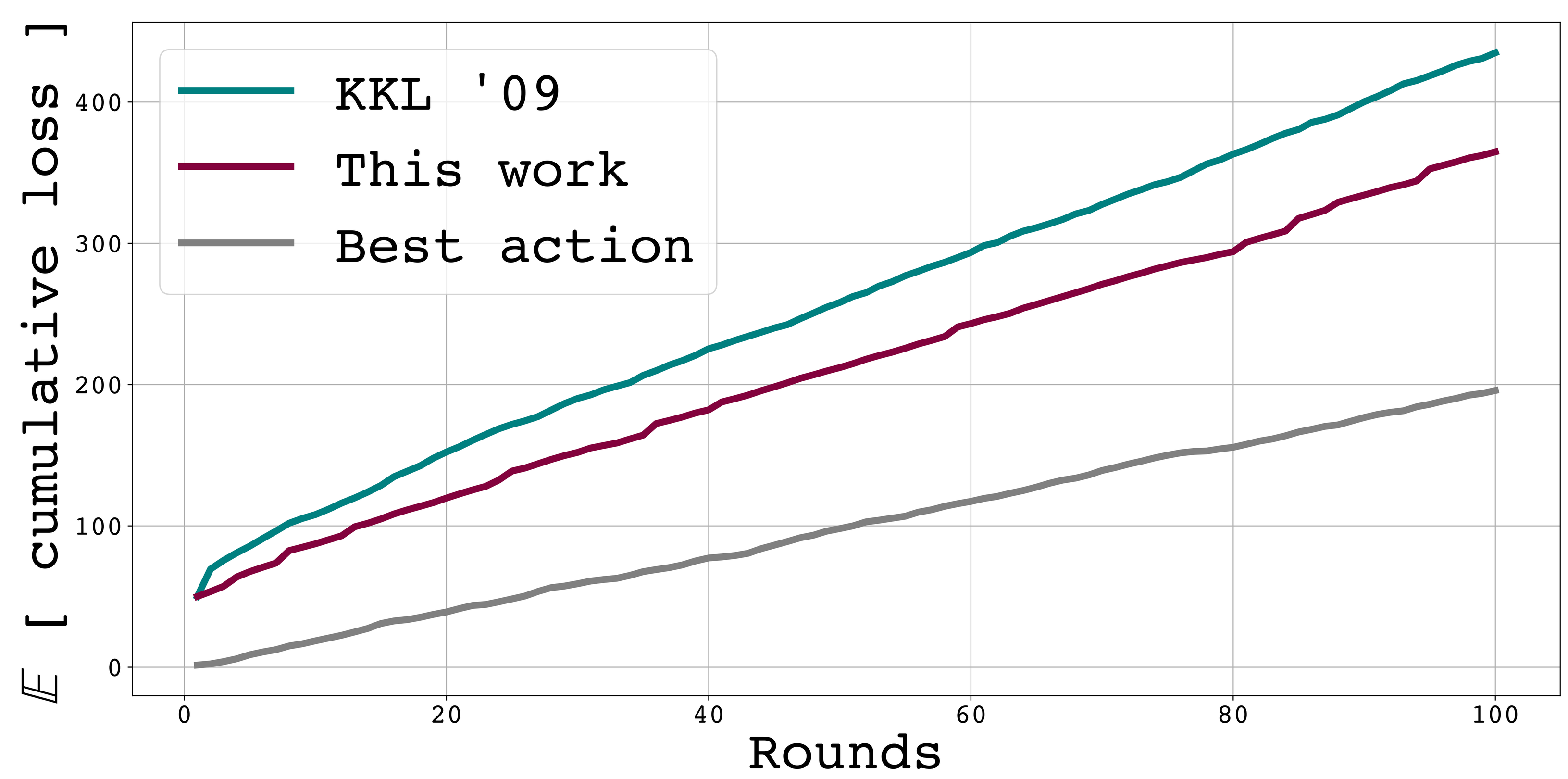
実験

人工的に生成した集合被覆のデータ上で実験（$n = 20$）．

- メタラウンディングの時間比較．vs. [Fujita et al., '13]



- 累積損失の比較．vs. [Kakade et al., '09]
（[Garber '17] は実装が間に合わず，その一つ前の手法と比較）
損失ベクトルはランダムに生成し，$|\mathcal{C}| = 100$ で実験．
どちらもリグレット保証は同じ．$R_T = O(\sqrt{T})$．



まとめ

- 本研究では，$\mathcal{R}_{relax(\mathcal{C})}$ の存在を仮定した上でより効率的なメタラウンディングを提案．
  - 数値実験で有効性を確認．
- 数値実験で，[Kakade et al., '17] の結果より優れた累積損失を達成．
- 提案アルゴリズムは ERLPBoost [Warmuth et al., '08] の一般化．
- 提案アルゴリズムは近似率 α やラウンド数 T を知らなくて良い．