## Лабораторна робота №4

## Середня кількість інформації та інформаційна пропускна здатність дискретних каналів зв'язку.

В технічних системах каналом зв’язку називають сукупність технічних засобів та фізичного середовища розповсюдження сигналу ( лінії зв’язку ), яка забезпечує передачу повідомлень від джерела до одержувача незалежно від передачі повідомлень між іншими джерелами та одержувачами по цій лінії зв’язку.

В теорії інформації під каналом зв’язку ( або просто каналом ), розуміють математичну модель, яка описує перетворення вхідного сигналу у вихідний.
Позначимо через $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_M\}$ алфавіт на вході дискретного каналу, а через $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N\}$ – алфавіт на його виході. M – потужність або об’єм алфавіту на вході каналу, N – на його виході. Якщо потужність алфавіту на вході M = 2, канал називають двійковим, при M = 3 – трійковим.

Для каналу без витирання потужності вхідного та вихідного алфавітів збігаються, тобто M = N. Для каналів з витиранням кількість символів вихідного алфавіту на одиницю перевищує кількість символів вхідного алфавіту, тобто N = M + 1. Цей додатковий символ вихідного алфавіту називають символом витирання. Поява символу витирання на виході каналу відповідає такій ситуації в реальному ( фізичному ) каналі, коли сигнал, за допомогою якого передавався символ, був істотно спотвореним. В цьому випадку прийняття рішення пристроєм, що вирішує, який входить до складу дискретного каналу зв’язку, про передачу конкретного символу призведе з високою ймовірністю до невірного результату. Таким чином, наявність символу витирання у вихідному алфавіті каналу знижує ймовірність помилок, але ж виникнення символу витирання у послідовності символів на виході каналу вносить суттєву невизначеність відносно того, який символ було передано. Ця невизначеність зменшується у реальних системах зв’язку відповідними засобами (завадостійке кодування, повторна передача спотворених символів по командам зворотного зв’язку ).

Дискретний канал вважають цілком заданим, якщо можна визначити ймовірність переходу будь-якої послідовності символів на вході каналу для будь-яких фіксованих моментів часу у будь-яку послідовність символів на виході каналу для тих же моментів часу. Для деяких каналів достатньо мати матрицю перехідних ймовірностей:

$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \ldots & p(y_N/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \ldots & p(y_N/x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(y_1/x_M) & p(y_2/x_M) & \ldots & p(y_N/x_M) \end{bmatrix}$$

Тут $p(y_k|x_i)$ – умовна ймовірність появи на виході каналу в деякий момент часу символу $y_k$ при умові, що на вході каналу в цей же момент мав місце символ $x_i$. Сума кожного рядка матриці дорівнює одиниці.

Для двійкового каналу без пам'яті з витиранням, матрицю перехідних ймовірностей набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & p_n & p_B \\ p_n & q & p_B \end{bmatrix}.$$

**Середня кількість інформації** ***I(Y,X)***, яка міститься в символі на виході каналу про символ, що передається (тобто має місце на вході каналу), розраховується за виразами для повної взаємної інформації I(Y,X)=H(X)-H(X|Y); I(Y,X)=I(X,Y)=H(Y)-H(Y|X). Іншими словами, це є кількість інформації, що переноситься в середньому одним словом.

"Інформаційна" пропускна здатність каналу для дискретного каналу без пам'яті, визначається як: $\boldsymbol{C=max_{p(x)}I(X;Y)}$ для усіх можливих вхідних розподілів *p(x)*.

Сумісна ентропія H(X,Y) сукупності символів $x_i$, $y_k$ або ентропія об'єднання алфавітів X та Y визначається як:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i, y_k)\cdot log_2 p(x_i, y_k)$$

Для обчислення H(X,Y) слід мати набір або матрицю ймовірностей p(xi,yk) сумісної появи xi та yk:

$$\begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & \dots & p(x_M,y_1) \\ p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & \dots & p(x_M,y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(x_1,y_N) & p(x_2,y_N) & \dots & p(x_M,y_N) \end{bmatrix}$$

Сума елементів k-го рядка цієї матриці дорівнює безумовній імовірності $p(y_k)$ появи символу $y_k$ на виході другого джерела, а сума елементів і-го стовпця – безумовній ймовірності $p(x_i)$ появи символу $x_i$ на виході першого джерела:

$$p(y_k) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i, y_k) \ ; \qquad p(x_i) = \sum_{k=1}^{N} p(x_i, y_k) \ .$$

Маючи безумовні ймовірності $p(x_i)$ та $p(y_k)$ появи символів $x_i$ та $y_k$ на виході кожного з джерел, а також ймовірності $p(x_i,y_k)$ сумісної їх появи, можна обчислити умовні ймовірності $p(x_i|y_k)$ та $p(y_k|x_i)$, користуючись виразом:

$$p(x_i, y_k) = p(x_i)\cdot p(y_k/x_i) = p(y_k)\cdot p(x_i/y_k)$$

Середня або повна умовна ентропія:

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{M}p(x_i)\cdot H(Y/x_i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}p(x_i)\cdot p(y_k/x_i)\cdot log_2 p(y_k/x_i)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}p(x_i,y_k)\cdot log_2 p(y_k/x_i)\quad ,$$

**Завдання**

1. Задано трійковий стаціонарний канал без пам’яті та без витирання. Ймовірності $p(x_i,y_k)$ сумісного виникнення символу $x_i$ на вході каналу та символу $y_k$ – на його виході для різних варіантів наведені у другому стовпці таблиці 1. Знайти середню кількість *I(Y,X)* інформації, що переноситься одним символом та інформаційну пропускну здатність C каналу.

2. Розрахувати пропускну здатність C двійкового стаціонарного симетричного по входу каналу без пам’яті із витиранням. Вихідні дані, а саме, ймовірності:

– правильного прийому двійкового символу q ;

– помилки при його передачі по каналу $p_П$ ;

– витирання символу $p_В$ ,

для різних варіантів наведені у таблиці 2.

Таблиця 1.

| № варіанта | $\begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_2,y_1) & p(x_3,y_1) \\ p(x_1,y_2) & p(x_2,y_2) & p(x_3,y_2) \\ p(x_1,y_3) & p(x_2,y_3) & p(x_3,y_3) \end{bmatrix}$ |
|---|---|
| 1 | $\begin{bmatrix} 0{,}170 & 0{,}015 & 0{,}050 \\ 0{,}020 & 0{,}255 & 0{,}025 \\ 0{,}010 & 0{,}030 & 0{,}425 \end{bmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $\begin{bmatrix} 0,360 & 0,016 & 0,012 \\ 0,024 & 0,360 & 0,008 \\ 0,016 & 0,024 & 0,180 \end{bmatrix}$ | |
| 3 | $\begin{bmatrix} 0,075 & 0,020 & 0,100 \\ 0,020 & 0,300 & 0,025 \\ 0,005 & 0,080 & 0,375 \end{bmatrix}$ | |
| 4 | $\begin{bmatrix} 0,200 & 0,015 & 0,060 \\ 0,025 & 0,120 & 0,060 \\ 0,025 & 0,015 & 0,480 \end{bmatrix}$ | |
| 5 | $\begin{bmatrix} 0,255 & 0,007 & 0,048 \\ 0,024 & 0,085 & 0,042 \\ 0,021 & 0,008 & 0,51 \end{bmatrix}$ | |
| 6 | $\begin{bmatrix} 0,105 & 0,025 & 0,120 \\ 0,030 & 0,175 & 0,060 \\ 0,015 & 0,050 & 0,420 \end{bmatrix}$ | |
| 7 | $\begin{bmatrix} 0,276 & 0,010 & 0,015 \\ 0,009 & 0,184 & 0,025 \\ 0,015 & 0,006 & 0,460 \end{bmatrix}$ | |
| 8 | $\begin{bmatrix} 0,255 & 0,015 & 0,040 \\ 0,030 & 0,255 & 0,020 \\ 0,015 & 0,030 & 0,340 \end{bmatrix}$ | |
| 9 | $\begin{bmatrix} 0,045 & 0,018 & 0,030 \\ 0,003 & 0,405 & 0,020 \\ 0,002 & 0,027 & 0,450 \end{bmatrix}$ | |
| 10 | $\begin{bmatrix} 0,450 & 0,015 & 0,020 \\ 0,120 & 0,225 & 0,005 \\ 0,030 & 0,060 & 0,075 \end{bmatrix}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | | $\begin{bmatrix} 0,280 & 0,020 & 0,045 \\ 0,035 & 0,160 & 0,045 \\ 0,035 & 0,020 & 0,360 \end{bmatrix}$ |
| 12 | | $\begin{bmatrix} 0,425 & 0,021 & 0,016 \\ 0,040 & 0,255 & 0,014 \\ 0,035 & 0,024 & 0,170 \end{bmatrix}$ |
| 13 | | $\begin{bmatrix} 0,385 & 0,015 & 0,060 \\ 0,110 & 0,105 & 0,030 \\ 0,055 & 0,030 & 0,210 \end{bmatrix}$ |
| 14 | | $\begin{bmatrix} 0,552 & 0,015 & 0,003 \\ 0,018 & 0,276 & 0,005 \\ 0,030 & 0,009 & 0,092 \end{bmatrix}$ |
| 15 | | $\begin{bmatrix} 0,170 & 0,035 & 0,010 \\ 0,020 & 0,595 & 0,005 \\ 0,010 & 0,070 & 0,085 \end{bmatrix}$ |

Таблиця 2.

| № варіанта | $q$ | $p_П$ | $p_В$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,90 | 0,02 | 0,08 |
| 2 | 0,87 | 0,01 | 0,12 |
| 3 | 0,95 | 0,01 | 0,04 |
| 4 | 0,88 | 0,03 | 0,09 |
| 5 | 0,83 | 0,03 | 0,14 |
| 6 | 0,80 | 0,02 | 0,18 |
| 7 | 0,92 | 0,02 | 0,06 |
| 8 | 0,80 | 0,05 | 0,15 |
| 9 | 0,91 | 0,01 | 0,08 |
| 10 | 0,88 | 0,02 | 0,10 |

| № варіанта | $q$ | $p_П$ | $p_В$ |
|---|---|---|---|
| 11 | 0,90 | 0,03 | 0,07 |
| 12 | 0,95 | 0,01 | 0,04 |
| 13 | 0,87 | 0,03 | 0,10 |
| 14 | 0,84 | 0,04 | 0,12 |
| 15 | 0,94 | 0,01 | 0,05 |
| 16 | 0,81 | 0,02 | 0,17 |
| 17 | 0,88 | 0,02 | 0,10 |
| 18 | 0,86 | 0,03 | 0,11 |
| 19 | 0,93 | 0,01 | 0,06 |
| 20 | 0,89 | 0,01 | 0,10 |