ЛЕКЦІЯ 5

Відношення порядку

Відношення

Нехай дана множина:

$$A = \{3, 6, 1, 5, 2, 4\}$$

На множині A задаємо відношення R :

$$R \subset A \times A$$

предикатом

$$R = \{(a, b) | a < b;\ a, b \in A\}$$

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,5),(4,6),\\ (5,6)\}$$

R - **відношення порядку** задане на множині A, якщо

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Відношення порядку

Це відношення, що визначають порядок розташування елементів множини.

1. Умова відношення, коли елементами множини T є стани динамічної системи:

$$T = \left\{ t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1} \right\},$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1}$.

Предикат 1. «$t_i < t_j$»-t_j слідує за t_i при $i < j$.

Предикат 2. «$t_i < t_j$»-t_i передує t_j при $i < j$.

Символи «<» «>» використовують для порівняння величин відрізків часу, вимірюваних від початку відліку.

Задамо це відношення предикатом:

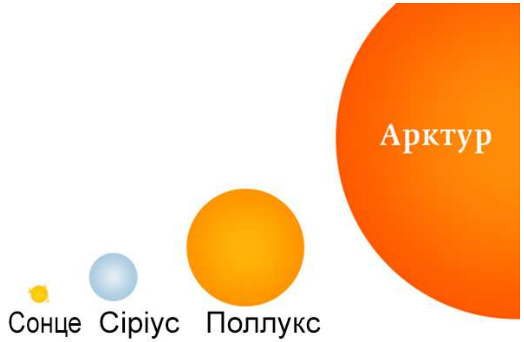
$$R_1 = \left\{ \left(t_i, t_j \right) \middle| t_i < t_j \text{ при } i < j \right\}$$

2. Умова відношення, коли елементами множини A є числа або об'єкти, що мають властивість, виражену числом: $A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n\}$,

де $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_i<\ldots<a_j<\ldots<a_n$.

Предикат1. « $a_j>a_i$ »- a_j > більше a_i

Предикат2. « $a_i<a_j$ »- a_i менше a_j



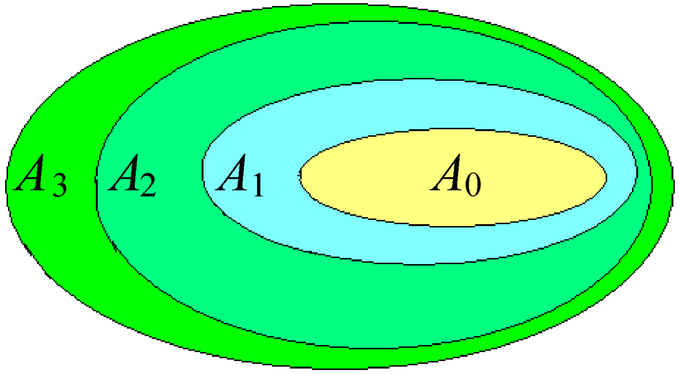
Символами «>» або «<» користуються для порівняння чисел.

Задамо відношення R предикатом $R\subset A\times A$.

$$R_1=\{(a_i,a_j)\,|\,a_i<a_j\ при\ i<j\}$$

3. Умова відношення, коли елементами множини A є множини:

$$A = \left\{ A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n \right\}.$$



«$A_i \subseteq A_j$ »- A_i входить в A_j ,

де

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_i \subseteq \ldots \subseteq A_j \subseteq \ldots \subseteq A_n$$

або

«$A_i \subset A_j$ » - A_i строго входить в A_j

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots \subset A_j \subset \ldots \subset A_n.$$

Задамо відношення R предикатом, задане $R \subset A \times A$.

$$R_1 = \left\{ \left(A_i, A_j \right) \middle| A_i \subseteq A_j \ при \ i < j \right\} \quad R_2 = \left\{ \left(A_i, A_j \right) \middle| A_i \subset A_j \ при \ i < j \right\}$$

У всіх випадках можна розташувати елементи множин у деякому порядку або, інакше кажучи, ввести відношення порядку на множині.

Визначення відношень порядку

Відношення порядку на множині A поділяють на:

- відношення строгого порядку;
- відношення нестрогого порядку.

Визначення 1. Відношення R називають **відношенням строгого порядку** на множині A, якщо воно має властивості:

- *антирефлексивності*, тобто якщо xRy то $x \neq y$.
- *антисиметричності*, тобто, якщо xRy і yRx, то $x = y$.
- *транзитивності*, тобто, якщо xRy і yRz, то xRz.

Визначення 2. Відношення R називають **відношенням нестрогого порядку** на множині A, якщо воно має властивості:

- *рефлексивності*, тобто, xRx .
- *антисиметричності*, тобто, якщо xRy і yRx, то $x = y$
- *транзитивності*, тобто, якщо xRy і yRz, то xRz.

Термінологія та позначення

1. **Відношення нестрогого порядку** позначають символом «$\leq$» за аналогією з відношенням «менше або дорівнює» на множині дійсних чисел. При цьому, якщо $a\leq b$, те говорять, що елемент a не перевищує b або елемент a підпорядкований b .

2. **Відношення строгого порядку**. Якщо $a \neq b$, то пишуть $a < b$ і говорять, що елемент a менший b або, елемент a строго підпорядкований b.

3. Загальний випадок відношень.

Відношення порядку на множинах: «$\subseteq$» і «$\subset$»

Від відношення порядку на числах: «$\leq$» і «<»

Від відношення порядку в часі: «$\preceq$» і «$\prec$»

Приклад. **Відношення порядку в** R^n

1. Відношення нестрогого порядку для кортежів:

$$(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) \le (b_1,\ldots,b_{i-1},b_i,b_{i+1},\ldots,b_n)$$

справедливе за умови, що

$$a_1 \le b_1,\ldots,\ a_{i-1} \le b_{i-1},\ a_i \le b_i,\ a_{i+1} \le b_{i+1},\ldots,\ a_n \le b_n$$

Однак для встановлення нестрогого порядку достатньо, щоб умова $a_i \le b_i$ була виконана хоча б по одній координаті, тобто

$$(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) \le (b_1,\ldots,b_{i-1},b_i,b_{i+1},\ldots,b_n),$$

якщо

$$a_1 < b_1,\ldots,\ a_{i-1} < b_{i-1},\ a_i \le b_i,\ a_{i+1} < b_{i+1},\ldots,\ a_n < b_n$$

2. Відношення строгого порядку для кортежів:

$$(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) < (b_1,\ldots,b_{i-1},b_i,b_{i+1},\ldots,b_n),$$

справедливе за умови, що

$$a_1 < b_1,\ldots,a_{i-1} < b_{i-1},a_i < b_i,a_{i+1} < b_{i+1},\ldots,a_n < b_n$$

Приклад. Відношення порядку в R^2

$(a_1, a_2) \le (b_1, b_2)$ **- відношення нестрогого порядку**

Це відношення справедливе, якщо $a_1 \le b_1$ **,** $a_2 \le b_2$

$(1,5) \le (1,7) \to 1 = 1$ і $5 < 7$**;** $(1,5)$ **?** $(7,1)$ **непорівнювані**

$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$**- відношення строгого порядку**

$(1,5) < (2,7) \to (1 < 2)$ **і** $5 < 7$ **;** $(1,5)$ **?** $(7,2)$ **непорівнювані**

Приклад. Відношення порядку в R^3

$(a_1, a_2, a_3) \le (b_1, b_2, b_3)$**- відношення нестрогого порядку**

Це відношення справедливе, якщо $a_1 \le b_1$**,** $a_2 \le b_2$ **,** $a_3 \le b_3$

$(1,2,3) \le (1,2,4) \to 1 = 1, \;\; 2 = 2, \;\; 3 < 4$

$(1,2,3)$ **?** $(4,2,1)$ **непорівнювані**

$(a_1, a_2, a_3) < (b_1, b_2, b_3)$**- відношення строгого порядку**

Це відношення справедливе, якщо $a_1 < b_1$ **,** $a_2 < b_2$ **,** $a_3 < b_3$

$(1,2,3) < (2,3,4) \to 1 < 2, \;\; 2 < 3, \;\; 3 < 4$ $\qquad (2,1,3)$ **?** $(4,2,1)$

Види відношень порядку:

1. Строгий повний порядок

Відношення строгого порядку задане **на всіх** елементах упорядкованої множини.

2. Строгий частковий порядок

Відношення строгого порядку задане **не на всіх** елементах упорядкованої множини.

3. Нестрогий повний порядок

Відношення нестрогого порядку задане **на всіх** елементах упорядкованої множини.

4. Нестрогий частковий порядок

Відношення нестрогого порядку задане **не на всіх** елементах упорядкованої множини.

Основні поняття про впорядковані множини

Упорядковані множини утворюють один з фундаментальних типів математичних структур.

Визначення впорядкованої множини

(множина + відношення порядку)

Упорядкованою множиною називають непусту множину X разом із заданим на ній бінарним нестрогим *відношенням порядку* «$\leq$ », яке за визначенням:

1) рефлексивне: $a \leq a$;
2)антисиметричне:$a < b \wedge b < a \Rightarrow a = b$(для будь-яких a, b, X).
3) транзитивне:$a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

або строгим «$<$» *відношенням порядку*, яке за визначенням:

1) антирефлексивне: $a < b \Rightarrow a \neq b$;
2) антисиметричне: $a < b \wedge b < a \Rightarrow a = b$
3) транзитивне:$a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

Визначення порівнюваності упорядкованих множин. Елементи a і b упорядкованої множини називають *порівнюваними,* якщо $a<b$, $a=b$ або $a>b$. Знаки $<$, $=$, $>$ мають звичайний зміст, якщо $a,b\in R$

Визначення лінійно впорядкованої множини (ланцюга). Упорядкована множина X називається *лінійно впорядкованою,* або *ланцюгом,* якщо будь-які два її елементи порівнювані.
і на ній задане відношення лінійного порядку, тобто $\forall a,b:(aRb\vee bRa)$, включаючи $a=b$

Отже, відношення лінійного порядку – це відношення, яке має властивість рефлексивності.
Такий порядок завжди повний та нестрогий.
Приклад лінійно впорядкованих множин

$$A=\{1,1,2,3,4,1234,4567,4567\}\quad R=\{(a_i,a_j)\mid a_i\le a_j \text{ при } i<j\}$$

$$B=\{a,b,b,c,d,d\}\quad R=\{(b_i,b_j)\mid b_i\prec b_j \text{ при } i<j\}$$

Ланцюг та антиланцюг

1.Ланцюг —лінійно впорядкована множина.
2.Ланцюг —лінійно впорядкована підмножина частково впорядкованої множини

Приклади лінійно впорядкованих множин (ланцюгів)
Натуральні числа — найменша лінійно впорядкована множина, що не має верхньої межі.
$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ - найменша
Цілі числа — найменша лінійно впорядкована множина, що не має ні верхньої, ні нижньої межі.
$A = \{.... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
Антиланцюг – упорядкована множина, у якій жодні два різні елементи не є порівнюваними.
$A = \{a, 1, \exists\}$

Властивості лінійно впорядкованих множин

1. **Покриття**

Нехай X – довільний ланцюг. Якщо $a<b$ при $a\in X, b\in X$ і не існує елемента $c\in X$ з умовою $a<c<b$ (розташованого між a і b), то співвідношення $a<b$ називають *покриттям.*

Приклад. $X=\{a,b,c,d,e,f\}$.

Покриття: $a<b,\ b<c,\ c<d,\ d<e,\ e<f$

Не є покриттями: $a<c$, оскільки $a<b<c$; $b<d$, оскільки $b<c<d$

2. **Взаємне положення елементів:** $X=\{a,b,c,d,e,f\}$

Елемент a *називають попереднім* для b

Елемент b називають *наступним* за a.

Елемент ланцюга, у якого немає попереднього або наступного елемента, називають *граничним елементом.*

Приклад: Нехай $X=\{1,2,3,4,5\}$. Тоді $1\in X$ та $5\in X$ -*граничні елементи множини* X.

3. Щільний ланцюг

Ланцюг називають *щільним,* якщо в ньому немає покриттів. У щільних ланцюгах між будь-якими елементами $a<b$ лежить нескінченна кількість елементів.

Приклад. Множина дійсних чисел в просторі R

Не є покриттями: $1<1.4$, оскільки $1<1.2<1.4$;
$1.4<2.345$, оскільки $1.4<2<2.345$ і т.д.

4. Повний зверху ланцюг

Ланцюг називають *повним зверху,* якщо його довільна непуста підмножина має sup (супремум).

5. Повний знизу ланцюг

Ланцюг називають *повним знизу,* якщо його довільна непуста підмножина має inf (інфімум).

6. Повний ланцюг

Ланцюг називають *повним,* якщо він повний зверху і знизу одночасно.

Цілком упорядкована множина

Найважливіший клас ланцюгів утворюють цілком упорядковані множини

Визначення.

Ланцюг називають <u>*цілком упорядкованою множиною*</u>, якщо будь-яка його непуста підмножина має найменший елемент.

Приклад1 . Ланцюг усіх натуральних чисел N

$$\mathrm{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

є цілком упорядкованою множиною, оскільки її найменший елемент – 1.

Приклад 2. Усі скінченні ланцюги є прикладами цілком упорядкованих множин.

Приклад 3. Будь-яка непуста підмножина цілком упорядкованої множини цілком упорядкована.

Частково впорядкована множина

Визначення відношення часткового порядку.

Бінарне відношення R на множині X називають відношенням ***часткового порядку***, якщо для деяких $a \in X$, $b \in X$ *не виконується ні відношення* aRb, *ні відношення* bRa.

Визначення частково впорядкованої множини.

Упорядковану множину називають частково впорядкованою, якщо на ній задане відношення часткового порядку.

Приклад: Нехай $X = \{x, y, z, 1, 2, 3\}$. Букви розміщені у алфавітному порядку, числа упорядковані за величиною, але букви і числа є непорівнянними. Отже X - частково упорядкована множина.

Властивості частково впорядкованих множин (строгий та нестрогий порядок)

Визначення для нестрогого порядку.

Відношення R на X є відношенням *нестрогого часткового порядку*, якщо воно має властивості:

рефлексивності - $\forall a\left(aRa\right)$,

антисиметричності - $\forall a,b\left(aRb\right)\wedge\left(bRa\right)\Rightarrow a=b$

транзитивності - $\forall a,b,c\left(aRb\right)\wedge\left(bRc\right)\Rightarrow aRc$.

Визначення для строгого порядку.

Відношення R на X є відношенням *строгого часткового порядку*, якщо воно має властивості:

антирефлексивності - $\forall a,b(aRb)\Rightarrow a\neq b$,

антисиметричності - $\forall a,b(aRb)\wedge(bRa)\Rightarrow a=b$

транзитивності - $\forall a,b,c(aRb)\wedge(bRc)\Rightarrow aRc$.

Приклад частково впорядкованої множини

Приклад 1. Нехай задано:

1. Нехай A- множина натуральних чисел від 1 до 30.
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots, 29, 30\}.$$
2. **Відношення** «$\leq$ », згідно якого m і n *є порівнюваними*: $m \leq n$ *за умови, що* n ділиться на m націло.

Нехай n=30 і m=5. Тоді n і m – є порівнюваними, оскільки 30 ділиться на 5 націло.

Нехай n=30 і m=7. Тоді n і m – непорівнювані, оскільки 30 не ділиться на 7 націло.

$$R = \{(m, 30) \mid m \leq 30 \wedge 30\%m == 0\}$$

Висновок.

1. Задане відношення порядку «$\leq$ » на множині A є відношенням часткового порядку.
2. Множина A *є частково упорядкованою множиною* на заданому відношенні.
$$T_1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \quad T_2 = \{4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, \ldots 29\}.$$

Розбиття частково впорядкованої множини на ланцюзі

Нехай є деяка множина A. Говорять, що множина A *розбита* на підмножини $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$, якщо:

1. $A_i \neq \varnothing, \; \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$ для всіх $i, j \in \left\{1, 2, 3, \ldots, m\right\}$;
3. $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$

Нехай A є частково впорядкованою множиною.

Розбиття множини A на ланцюзі називають *найменшим*, якщо воно має найменше число елементів m у порівнянні з іншими розбиттями A на ланцюзі.

Таке розбиття також називають мінімальним ланцюговим розбиттям (*МЛР*) множини A.

Приклад мінімального ланцюгового розбиття (МЛР)

Нехай дана множина A:

$$A=\{1,a,\angle,б,2,7,в,\triangle,1245,\square,д\},$$

на якій задані такі відношення часткового порядку:

$$R_1=\{(a,b)|a\le b\}$$

$$R_2=\{(a,b)|\text{"}a\ \text{слідує в алфавітному порядку за}\ b\text{"}\}$$

$$R_3=\{(a,b)|\text{"}a\ \text{має больше кутів, ніж}\ b\text{"}\}$$

Побудуємо розбиття цієї множини на ланцюзі

$$A_1=\{1,2\};A_2=\{7,1245\};A_3=\{a,б\};A_4=\{в,д\};A_5=\{\angle,\triangle,\square\}$$

$$m=5\quad A=\bigcup_{i=1}^{5}A_i,A_i\ne\varnothing(i=1,\ldots,5),$$

$A_i\cap A_j=\varnothing$ якщо $i\ne j$ для всіх $i,j\in\{1,2,3,4,5\}$.

$$m=3\quad A_1=\{1,2,7,1245\};A_2=\{a,б,в,д\};A_3=\{\angle,\triangle,\square\}$$

Отже, розбиття A_1,A_2,A_3 - МЛР

Визначення найбільшого елемента множини

Найбільшим елементом лінійно впорядкованої множини X відносно строгого «$<$ » або нестрогого «$\leq$ » упорядкування будемо називати такий елемент $a \in X$, що для будь-якого $x \in X$ вірно $x < a$ або $x \leq a$.

Теорема про єдиність найбільшого елемента.

Якщо існує найбільший елемент лінійно впорядкованої множини, то він є єдиним.

Доведення.

Припустимо a-найбільший елемент і a'– також найбільший елемент.

Тоді для будь-якого x виконується $x \leq a$ і $x \leq a'$.

Зокрема, $a \leq a'$ або $a' \leq a$.

За властивістю антисиметричності, то з $(aRa') \wedge (a'Ra)$ слідує $a = a'$.

Оскільки $a = a'$, то якщо існує найбільший елемент, то він єдиний.

Тому, якщо говорять про найбільший елемент множини, то мають на увазі **цілком визначений** її елемент.

Приклад. Необхідно знайти найбільший елемент лінійно впорядкованої множини $X = \{1,2,15,18\}$, заданої на відношенні нестрогого порядку $a \leq b$.

Згідно з визначенням:

1. **Усі** елементи даної множини **повинні бути меншими** або дорівнювати найбільшому.
2. Найбільший елемент – **єдиний**.

Порівняємо елементи множини X:

1) $1 \geq 1,\ 1 \not\geq 2,\ 1 \not\geq 15,\ 1 \not\geq 18.$

2) $2 \geq 1,\ 2 \geq 2,\ 2 \not\geq 15,\ 2 \not\geq 18.$

3) $15 \geq 1,\ 15 \geq 2,\ 15 \geq 15,\ 15 \not\geq 18.$

4) $18 \geq 1,\ 18 \geq 2,\ 18 \geq 15,\ 18 \geq 18.$

Необхідним умовам відповідає тільки елемент 18.

Визначення максимального елемента множини

Максимальним елементом частково впорядкованої множини X відносно строгого «<» (нестрогого «$\leq$ ») порядку називають такий її елемент $a \in X$, для якого наявна одна із двох ситуацій:

- або $x < a$ $(x \leq a)$,
- або a і x – непорівнювані.

Зауваження

На одній і тій же множині можуть бути задані **різні відношення** порядку.

За одним з них множина може бути лінійно впорядкованою, а за іншим – частково впорядкованою.

Приклад: Студенти групи упорядковані за списком і за одержаними оцінками по контрольній роботі.

Тоді за першим відношенням будемо говорити **про найбільший елемент**, а за другим – **про максимальний**.

Визначення найменшого і мінімального елементів множини

Найменшим елементом лінійно впорядкованої множини X відносно строгого «$<$» (нестрогого «$\leq$ ») впорядкування будемо називати такий елемент $a \in X$, що для всіх $x \in X$ вірно $a < x \; (a \leq x)$.

Мінімальним елементом частково впорядкованої множини X відносно строгого «$<$» або нестрогого «$\leq$ » впорядкування називають такий його елемент $a \in X$, для якого наявна одна з двох ситуацій:

- або $a < x, \; (a \leq x)$
- або a і x – непорівнювані.

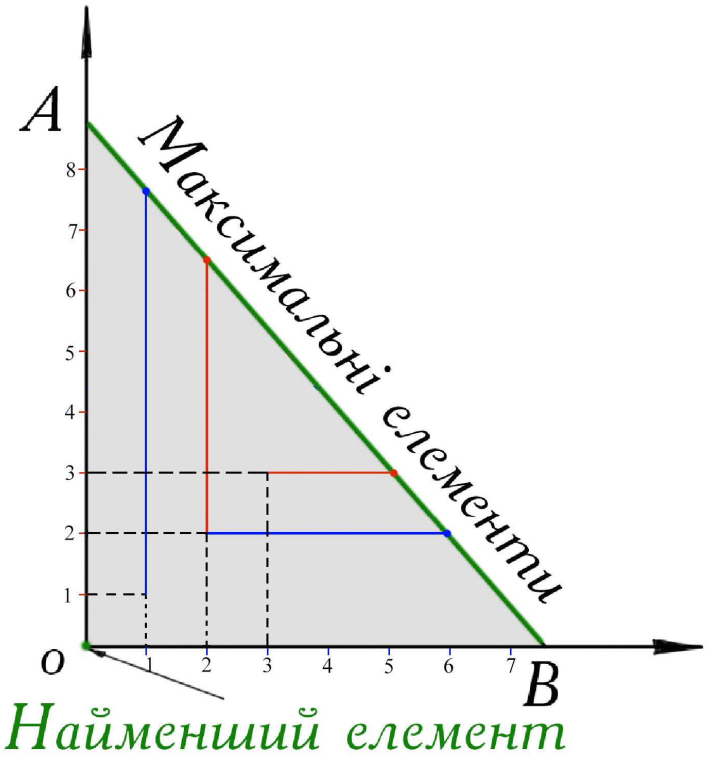
Зауваження.

Якщо на множині існує найменший елемент, то він є єдиним мінімальним.

Аналогічно, якщо на множині існує найбільший елемент, то він є єдиним максимальним.

Приклад. На множині точок $X \subset R^2$, обмеженій трикутником OAB, задаємо відношенням порядку:
$(a,b) \le (c,d)$ яке справедливе тоді і тільки тоді, коли $a \le c$ і $b \le d$.
Мінімальний елемент множини X – єдиний і збігається з найменшим елементом.

$$X_1 = \{(0,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,A)\}; X_2 = \{(0,0),(1,0),(2,0),\ldots,(A,0)\}$$



Точка $(0,0)$ є найменшим елементом даної множини.

$X_3 = \{(1,1),(1,2),\ldots(1,7.5)\}$;

$X_4 = \{(2,2),(2,3),(2,6.5)\}$

Максимальними елементами множини X є всі точки, що лежать на стороні AB трикутника OAB.

Найбільший елемент множини X *не існує*.

Визначення верхньої та нижньої граней множини

Визначення верхньої грані

Якщо A є частково впорядкована множина і $B \subseteq A$, то елемент $a \in A$ називають **верхньою гранню** множини B, якщо для кожного $b \in B$ існує нерівність $b \le a$.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{3,4,5\}$. Верхні грані: 5,6,7,8,9

Визначення нижньої грані

Якщо A є частково впорядкована множина і $B \subseteq A$, то елемент $a \in A$ називають нижньою гранню множини B, якщо для кожного $b \in B$ існує нерівність $a \le b$.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{5,6,7\}$. Нижні грані: 1,2,3,4,5

Визначення точної верхньої грані множини

Елемент $a \in A$ називають **точною верхньою гранню**, якщо $a = \min\limits_i a_i$, де a_i – верхня грань множини B.

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B = \{3,4,5\},\ a = \min\{5,6,7,8,9\} = 5$$

Найменший елемент a множини всіх верхніх граней називають точною верхньою гранню або *супремумом* і позначають $\sup B$.

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B = \{3,4,5\}.\quad \sup B = 5$$

Супремум є така верхня грань множини, яка є нижньою гранню множини всіх її верхніх граней.

Визначення точної нижньої грані множини

Елемент $a \in A$ називають **точною нижньою гранню,** якщо $a = \max\limits_i a_i$, де a_i – нижня грань множини B.

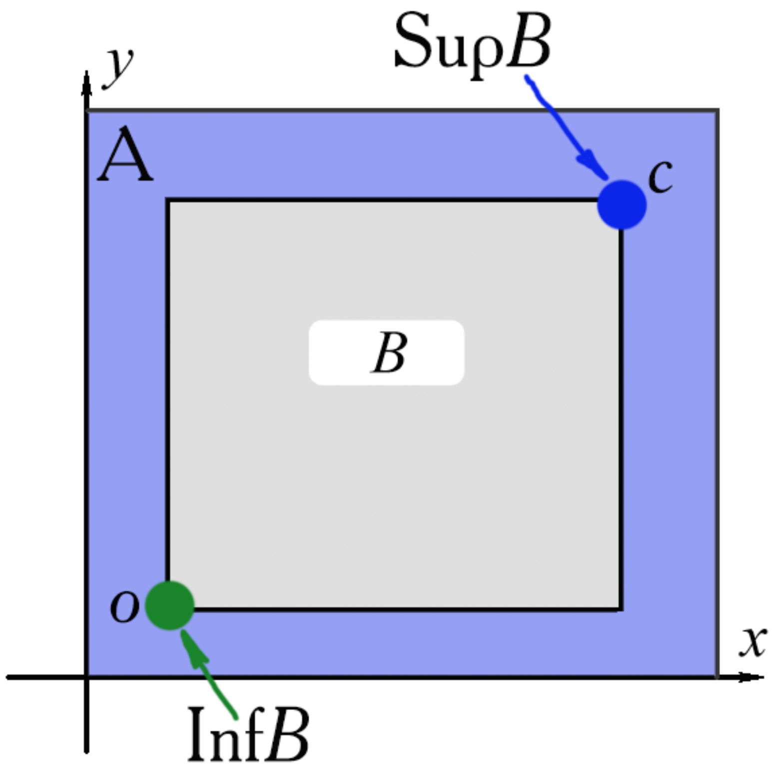
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B = \{5,6,7\}.\ a = \max\{1,2,3,4,5\} = 5$$

Найбільший елемент множини всіх нижніх граней називають точною нижньою гранню або *інфімумом* і позначають $\inf B$.

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ B = \{5,6,7\}.\ \inf B = 5.$$

Інфімумом є така нижня грань множини, яка є верхньою гранню множини всіх її нижніх граней.

Приклад. Розглянемо множину A точок прямокутника із заданим відношенням порядку на підмножині B :
$(a,b) \le (c,d)$ тоді і тільки тоді, коли $a \le c$ і $b \le d$.

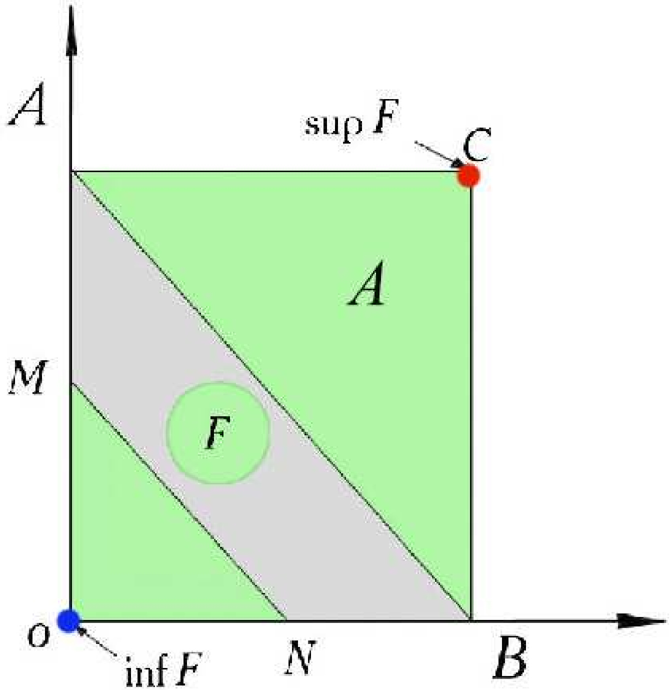


Точка *o* є точною нижньою гранню $\inf B \in A$.

Точка *c* є точною верхньою гранню $\sup B \in A$.

З рисунка видно, що обидві точки належать множині A.

Приклад. Розглянемо множину F точок трапеції $ABNM$ із заданим відношенням порядку: $(a,b) \le (c,d)$ тоді і тільки тоді, коли $a \le c$ і $b \le d$.



Приклад показує, що існує точна верхня грань $\sup F$ і точна нижня грань $\inf F$.

Однак жодна з граней не належить множині F .

$\sup F \notin F \quad \inf F \notin F$

$\sup F \in A, \inf F \in A, \quad F \subset A$

Діаграма Хассе

Для графічного представлення впорядкованої множини R використовують *діаграму Хассе.*

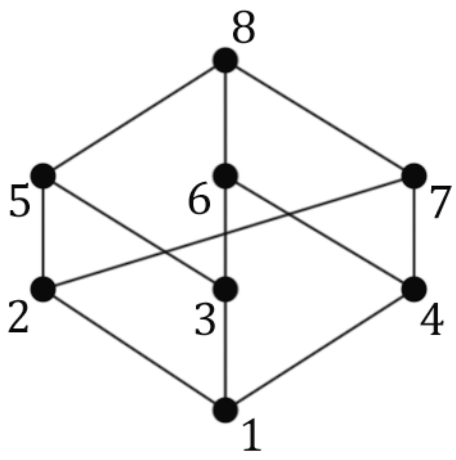
Цю діаграму будують у такий спосіб:

- Кожному елементу множини X ставлять у відповідність точку (вершину графа) на площині.
- Якщо aRb, то вершину, яка відповідає елементові a, розташовують нижче від вершини, яка відповідає елементові b.
- Вершини $a \in X$ і $b \in X$ з'єднують лінією (ребром), якщо aRb і не існує елемента $c \in X$ такого, що aRc й cRb.

Приклад. Нехай дана множина $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, на якій задано відношення

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(\mathbf{1,5}),(\mathbf{1,6}),(\mathbf{1,7}),(\mathbf{1,8}),$$
$$(2,5),(2,7),(\mathbf{2,8}),(3,5),(3,6),(\mathbf{3,8}),(4,6),(4,7),(\mathbf{4,8}),$$
$$(5,8),(6,8),(7,8)\}$$

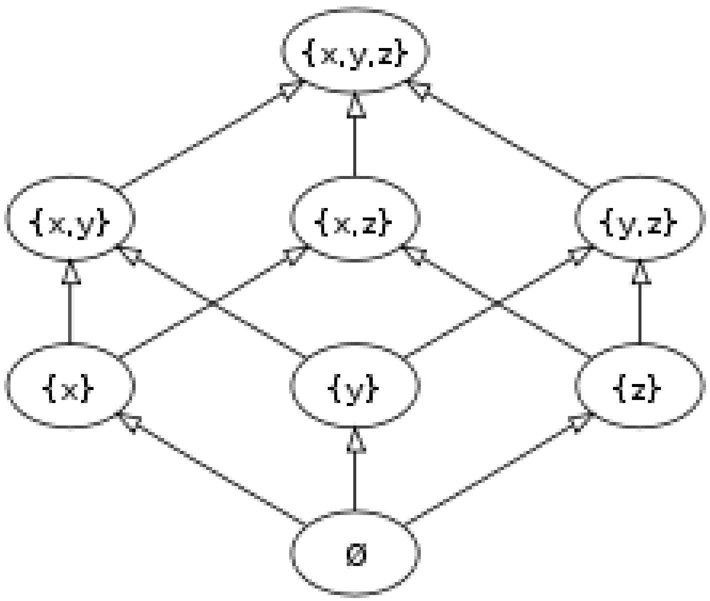
Діаграма Хассе даного відношення представлена на рисунку.



Приклад. Нехай $M = \{x, y, z\}$, а 2^M – **булеан** множини M:

$$2^M = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}, \{z, y, z\}\}$$

$T \in 2^M$, $V \in 2^M$ -елементи булеана



Визначимо відношення R:

$$R = \{(T, V) | T \subseteq V\}$$

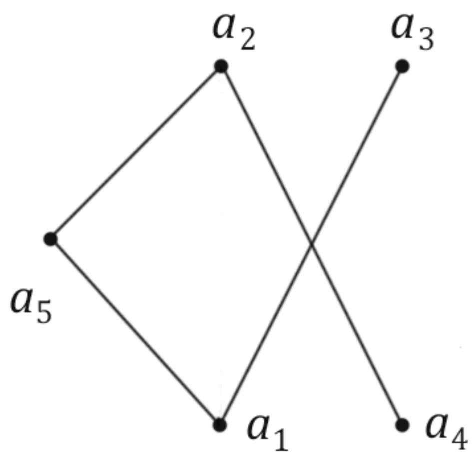
Наприклад, $(\{y\}, \{x, y\}) \in R$, оскільки $\{y\} \subseteq \{x, y\}$. Однак $(\{y, z\}, \{z\}) \notin R$, оскільки $\{y, z\} \not\subset \{z\}$.

Побудувавши відношення R, можна легко перевірити, що $(2^M, R)$ — частково упорядкована множина.

Приклад.

На рисунку представлений частковий порядок, породжений бінарним відношенням

$$R=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_5),(a_4,a_2),(a_5,a_2)\}.$$



Діаграма Хассе допомагає краще розуміти взаємозв'язок елементів, що належать одній і тій же впорядкованій множині (наприклад, приналежність одного і того ж ланцюга або одного і того ж антиланцюга).