ЛЕКЦІЯ 7

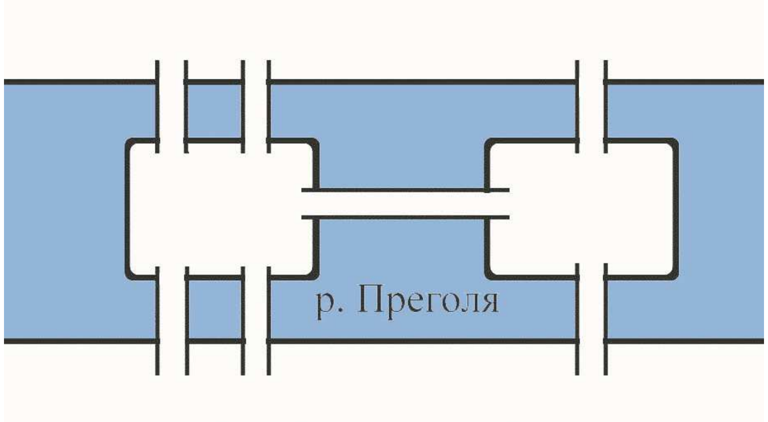
ТЕОРІЯ ГРАФІВ

ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Історія виникнення теорії графів

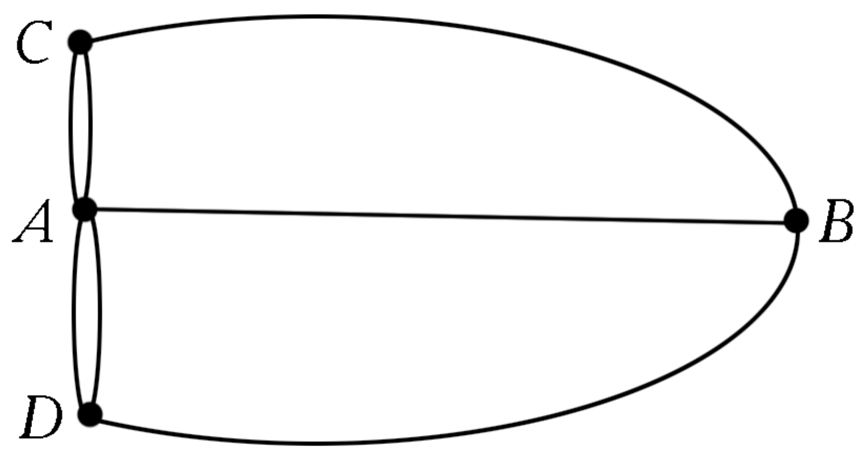
Леонард Ейлер (1707-1783рр.)

Історія теорії графів почалася із задачі про кенігсбергські мости, придуманої і розв’язаної Ейлером в 1736 році. Ейлер поставив собі за мету обійти всі чотири частини суші, пройшовши по кожному з мостів тільки один раз, і повернутися у початкове місце. Мости, по яких ходив Ейлер, розташовувалися, як показано на малюнку.



Для розв'язування цієї задачі Ейлер позначив ділянки суші точками, а мости, що з'єднують їх, лініями, одержавши таким чином перше представлення графа.

Один з варіантів графа задачі про кенігсбергські мости виглядає в так:



Як видно з рисунка, граф складається з точок та ліній. Точки називають вершинами. Лінії, що з'єднують вершини, називають ребрами.

Основні визначення

Визначення неорієнтованого графа.

Графом G називають кортеж з двох множин (V, E):

– V - непустої множини *вершин*;

– E - множини неупорядкованих пар елементів множини V (E - множина *ребер*): (v_i, v_j)

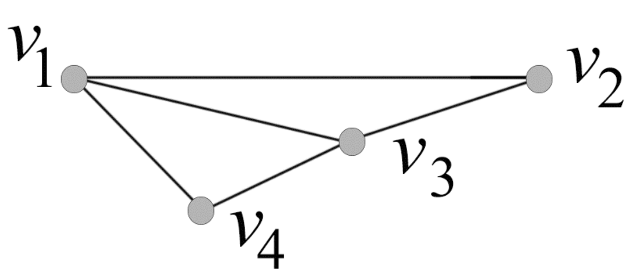
$$G: \quad (V, E),\ V \neq \varnothing,\ E \subset V \times V,\ E = E^{-1}.$$

Також позначають у вигляді функції: $G(V, E)$

Кількість вершин графа G позначимо через p,

Кількість ребер графа G позначимо через q .

$$p = p(G) = |V| \ , \ q = q(G) = |E|$$



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$$

$$\|$$

$$E^{-1} = \{(v_2, v_1), (v_3, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_3, v_2)\}$$

Визначення орієнтованого графа

Орієнтованим графом G називають кортеж (V, E) двох множин:

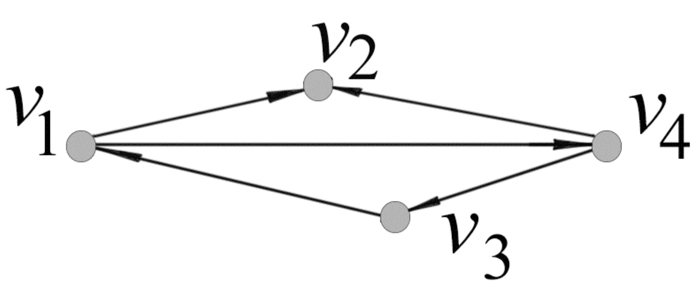
– V - непустої множини вузлів;

– E - множини упорядкованих пар елементів множини V (E - множина дуг).

Також позначають у вигляді функції: $G(V, E)$

Якщо елементами множини E є впорядковані пари, то граф називають *орієнтованим* (або орграфом).

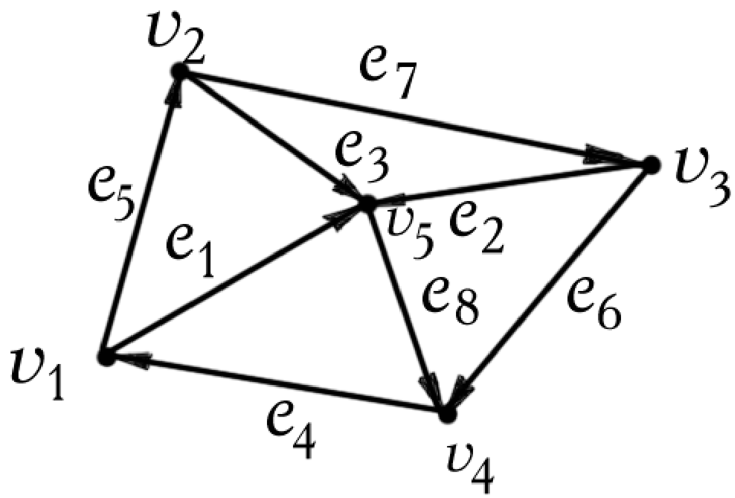
Дуги зображуються лініями зі стрілками, що вказують напрямок.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_4, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_1), (v_4, v_3)\}$$

Приклад. Дано орграф $G(V,E)$:



Визначити впорядковані пари множини

$$E=\left\{e_i \middle| i=1,2,3,\dots,7\right\},$$

яка задає дуги даного орграфа.

Розвязок.

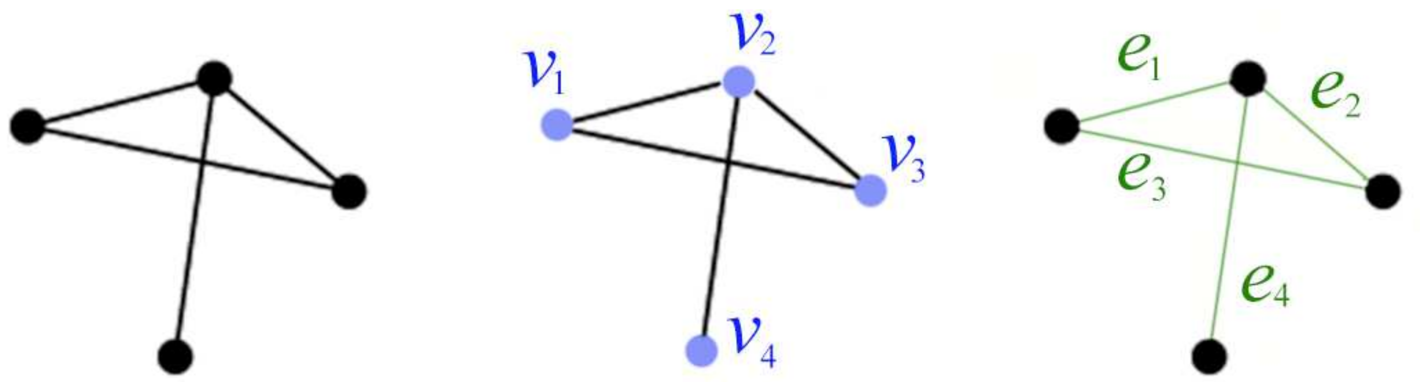
$$E=\{(v_1,v_5),(v_3,v_5),(v_2,v_5),(v_4,v_1),(v_1,v_2),(v_3,v_4),(v_2,v_3)\}$$

$$e_1=(v_1,v_5),\quad e_2=(v_3,v_5),\quad e_3=(v_2,v_5),$$

$$e_4=(v_4,v_1),\quad e_5=(v_1,v_2),\quad e_6=(v_3,v_4),\quad e_7=(v_2,v_3)$$

Помічені графи

Якщо задана функція $F:V \to M$ або $F:E \to M$, то множина M називають множиною *міток*, а граф називають *поміченим графом.*



А **Б** **В**

А – непомічений граф

Б – граф з поміченими вершинами $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(вершинно-помічений граф)

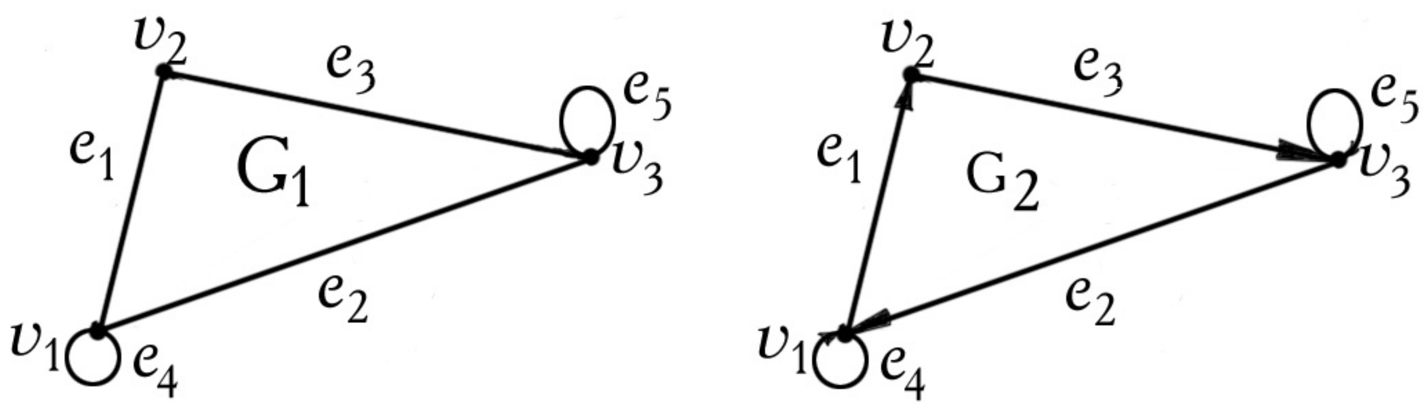
В – граф з поміченими ребрами $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(реберно-помічений граф)

Граф з петлями

Якщо серед елементів множини E зустрічаються пари, які містять однакові вершини, то такий граф називають *графом з петлями*.

Приклад. На рисунку показаний граф з петлями і орграф з петлями.



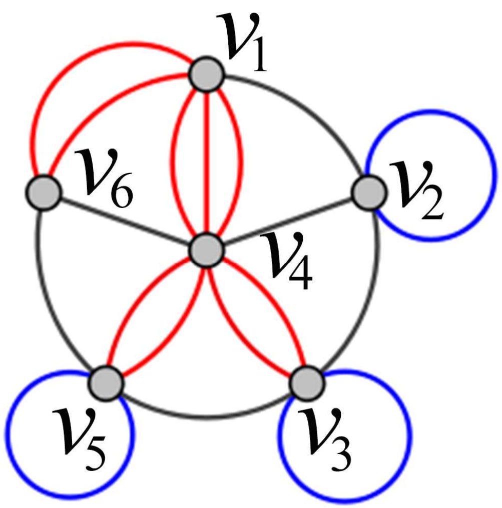
$$G_1(V_1,E_1);\;\; V_1=\{v_1,v_2,v_3\};\;\; E_1=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_1,v_3)(v_1,v_1),(v_3,v_3)\}$$

$$G_2(V_2,E_2);\; V_2=\{v_1,v_2,v_3\};\; E_2=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)(v_1,v_1),(v_3,v_3)\}$$

Мультиграф

Якщо множина E містить повторювані елементи, то відповідний граф $G(V,E)$ включає кратні ребра. Тоді його називають мультиграфом.

Приклад. Мультиграф з петлями $G(V,E)$



$$V=\{v_1,v_2,v_2,v_4,v_5,v_6\}$$

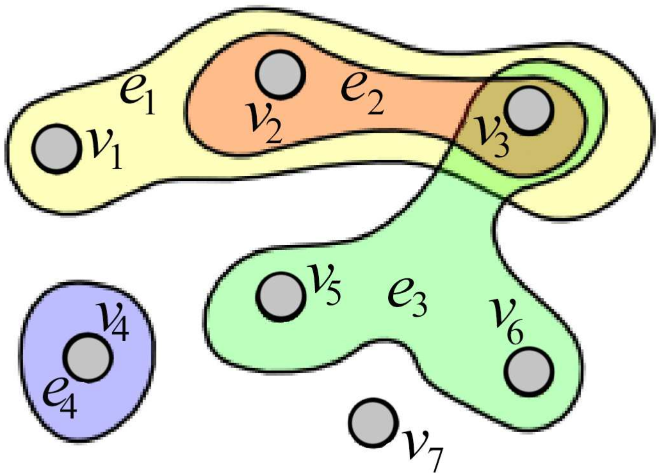
$$E=\{(v_1,v_2),$$
$$(v_1,v_6),(v_1,v_6),$$
$$(v_1,v_4),(v_1,v_4),(v_1,v_4),$$
$$(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_4),$$
$$(v_3,v_3),(v_3,v_5),$$
$$(v_3,v_4),(v_3,v_4),$$
$$(v_4,v_5),(v_4,v_5),$$
$$(v_4,v_6),(v_5,v_6),(v_5,v_5)\}$$

Гіперграф

Гіпергра́ф — узагальнення графа, в якому ребром називають довільну підмножину вершин графа.

Математично, гіперграф $G(V,E)$, де

V — непорожня множина вершин гіперграфа,
E — непорожня множина ребер гіперграфа.

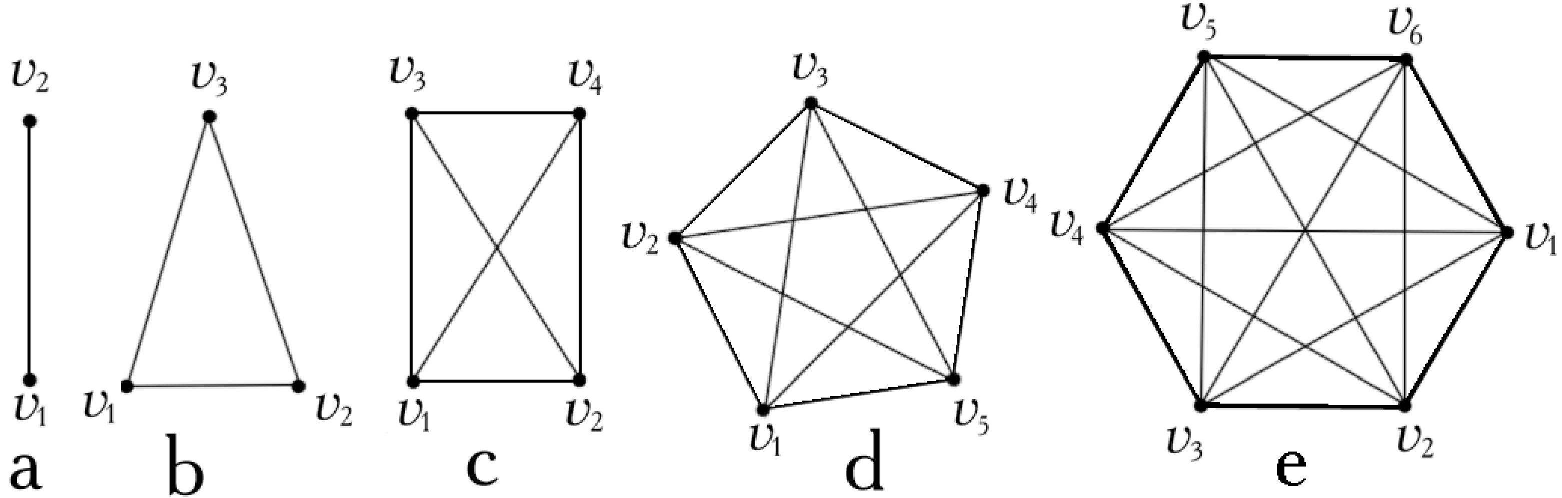


$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$$
$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\};$$
$$e_1=\{v_1,v_2,v_3\},\ e_2=\{v_2,v_3\}, e_3=\{v_3,v_5,v_6\}, e_4=\{v_4\}$$

Повний граф

Якщо кожна пара вершин графа $G=(V,E)$ з'єднана ребром, то такий граф називають *повним.* Повний граф з n вершин позначають K_n.

Приклад. На рисунку представлені повні графи: a)K_2, b)K_3, c) K_4 d)K_5, e) K_6.



Дводольний граф

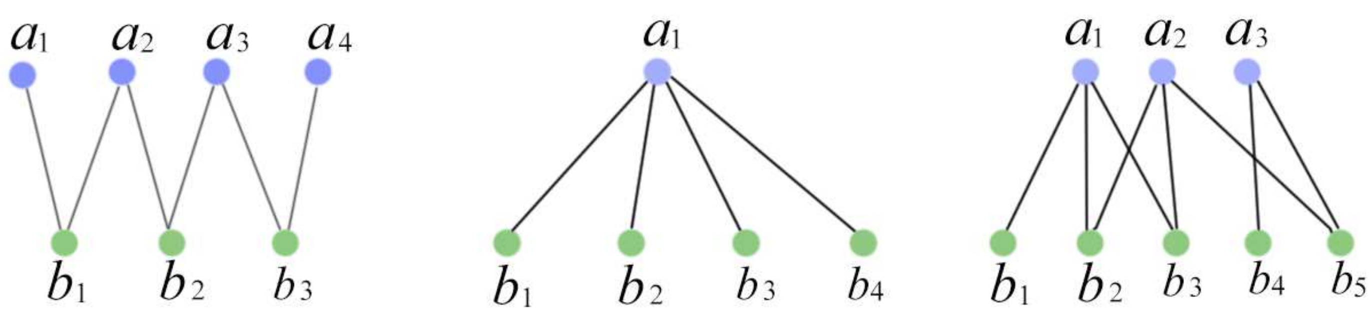
Граф $G=(V,E)$ називають *дводольним*, якщо його множину вершин V можна представити розбиттям множин.

Нехай $V=A\cup B$, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$

де $A=\{a_1,...,a_i,...,a_n\}$ і $B=\{b_1,...,b_j,...,b_m\}$,

Тоді в дводольному графі існують тільки ребра (a_i,b_j) або (b_j,a_i), $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$

Таким чином, кожне ребро зв'язує вершину, яка належить множині A з вершиною, яка належить множині B, але ніякі дві вершини з A або дві вершини з B не мають спільних ребер.



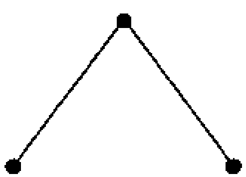
Повний дводольний граф

Дводольний граф називають *повним дводольним* графом $K_{m,n}$, якщо A містить m вершин, B містить n вершин і кожна вершина з множини A з’єднана ребром з кожною вершиною з множини B.

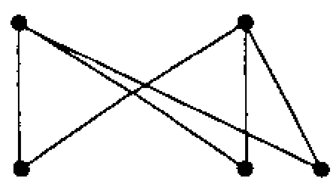
$$K_{m,n} \to V = A \cup B,\; A \cap B = \varnothing$$

$$\forall\; a \in A,\;\; b \in B\; \exists\;\; (a,b) \in E$$

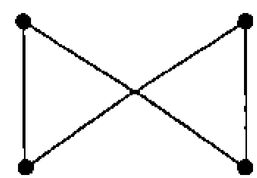
На малюнку представлені повні дводольні графи $K_{1,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,2}$, $K_{3,3}$.



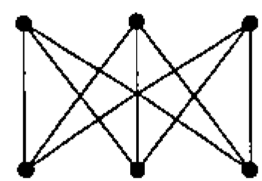
$K_{1,2}$



$K_{2,3}$



$K_{2,2}$



$K_{3,3}$

Суміжність та інцидентність

Нехай $v_1 \in V$ і $v_2 \in V$ – вершини,

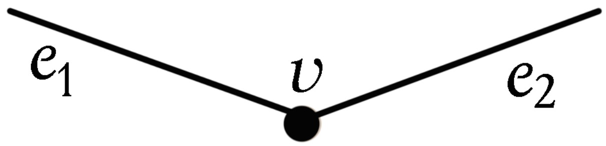
$e = (v_1, v_2)$ – ребро, що з'єднує вершини v_1 й v_2, $e \in E$.

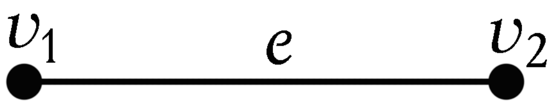
Тоді вершина v_1 й ребро e інцидентні.

Також вершина v_2 й ребро e інцидентні.

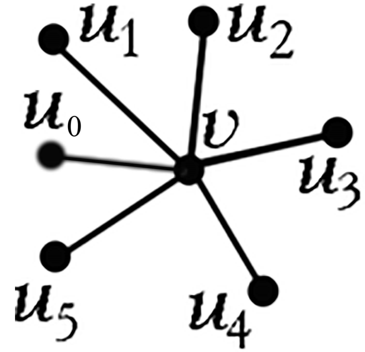
Два ребра, які інцидентні одній вершині, називають *суміжними ребрами*.

Дві вершини, які інцидентні одному ребру, називають *суміжними вершинами*.



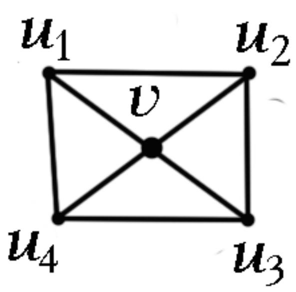


Множину вершин, суміжних з вершиною v, називають ***множиною суміжності вершини*** або відображенням вершини v, і позначають $\Gamma(v)$.



$\Gamma(v) = \{u_i \in V \,|\, (u_i, v) \in E,\ 0 \le i \le p-1\}$, де $p = |V|$

Приклад.



$$\Gamma(v) = \{u_i \in V \,|\, (u_i, v) \in E,\ i = 1,\dots,4\}$$

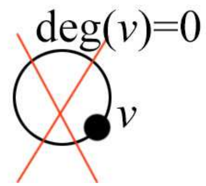
$$V = \{v, u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$p = |V| = 5,\ q = |E| = 8$$

$$E = \{(u_1, v), (u_2, v), (u_3, v), (u_4, v), (u_1, u_2), (u_1, u_4), (u_3, u_4), (u_3, u_2)\}$$

Степінь вершини

Степенем вершини v називають кількість ребер, інцидентних цій вершині.



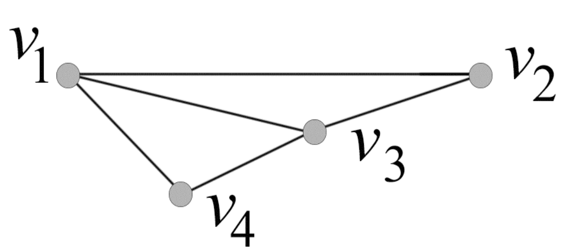
Степінь вершини позначають $\deg(v)$ або $d(v)$,

$$\forall v \in V \;\; 0 \le \deg(v) \le p-1, \text{ де } p = |V|.$$

Степінь вершини дорівнює потужності множини суміжності: $\deg(v) = |\Gamma(v)|$.

Позначимо **мінімальний степінь** вершини графа G через $\delta(G)$, а **максимальний** – через $\Delta(G)$.

Тоді $\delta(G) = \min\limits_{v\in V} \deg(v)$, $\Delta(G) = \max\limits_{v\in V} \deg(v)$



$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}, |\Gamma(v_1)| = 3, \deg(v_1) = 3,$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, p = |V| = 4, \deg(v_2) = 2$

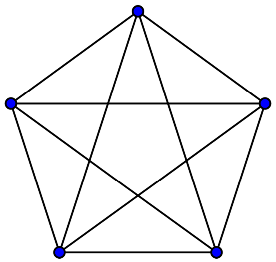
$\delta(G) = \deg(v_2) = \deg(v_4) = 2$

$\Delta(G) = \deg(v_1) = \deg(v_3) = 3$

Регулярний граф

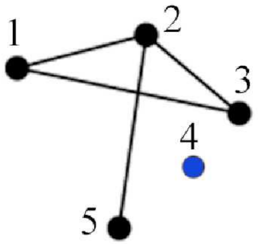
Якщо степені всіх вершин дорівнюють k, то граф називають ***регулярним графом*** зі степенем k. Для регулярного k-графа справедливе співвідношення:

$$\delta(G) = \Delta(G) = k.$$



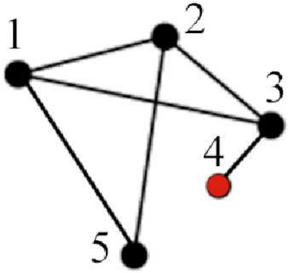
Приклад. Повний граф K_5 є регулярним графом, оскільки $\delta(K_5) = 4$, $\Delta(K_5) = 4$

Ізольована вершина



Вершину v, для якої $\deg(v) = 0$, називають ***ізольованою.*** Наприклад: $\deg(4) = 0$

Висяча вершина

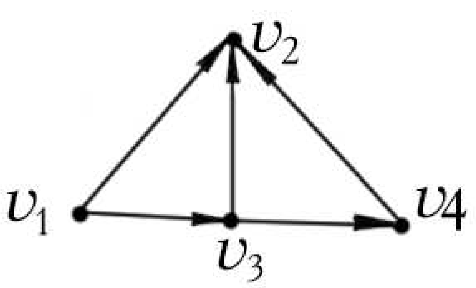


Вершину v, для якої $\deg(v) = 1$, називають ***кінцевою або висячою.*** Наприклад: $\deg(4) = 1$.

Напівстепені у орграфі

Для орграфа кількість дуг, які **виходять** з вузла v, називають **напівстепенем виходу або прямим відображенням, і позначається** $\deg^{+}(v)=\left|\Gamma^{+}(v)\right|$.

Кількість дуг, які **входять** у вузол v називають **напівстепенем входу або зворотним відображенням,** і позначається $\deg^{-}(v)=\left|\Gamma^{-}(v)\right|$ **.**



Приклад. $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$\Gamma^{+}(v_1)=\{v_2,v_3\}$, $\deg^{+}(v_1)=\left|\Gamma^{+}(v_1)\right|=2$,

$\Gamma^{-}(v_2)=\{v_1,v_3,v_4\}$, $\deg^{-}(v_2)=\left|\Gamma^{-}(v_2)\right|=3$

$\Gamma^{+}(v_3)=\{v_2,v_4\}$, $\deg^{+}(v_3)=2$,

$\Gamma^{-}(v_3)=\{v_1\}$, $\deg^{-}(v_3)=1$,

$\Gamma^{+}(v_4)=\{v_2\}$, $\deg^{+}(v_4)=1$,

$\Gamma^{-}(v_4)=\{v_3\}$, $\deg^{-}(v_4)=1$,

Теорема про суму степенів вершин графа

ТЕОРЕМА. *Сума степенів вершин графа завжди парна.*

Доведення.

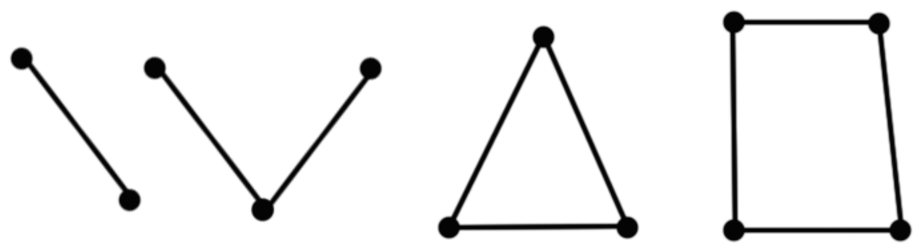
Кожне ребро графа має два кінці.

Тому кожне ребро збільшує степінь кожної з 2-х інцидентних вершин на одиницю.

Таким чином, кожне ребро збільшує суму степенів усіх вершин на 2.

Отже, сума степенів усіх вершин завжди кратна 2, тобто, парна.

Приклад.



$S = 2$ $S = 4$ $S = 6$ $S = 8$

ТЕОРЕМА. *У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.*

Доведення.

Доведення методом від протилежного:

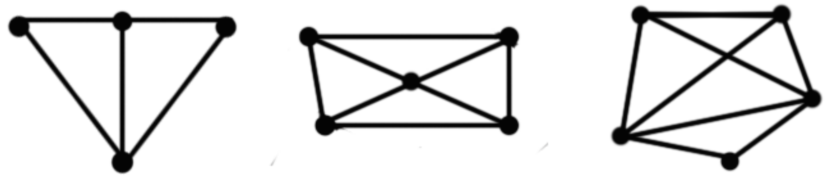
Припустимо, що теорема не вірна.

1. Якщо теорема не вірна, то існує непарна кількість вершин, степені яких непарні.
2. Якщо в графі немає вершин з парними ступенями, то відразу виникає протиріччя з першою теоремою.

Непарна кількість непарних степенів дає непарну загальну кількість.

Протиріччя полягає в тому, що кількість вершин у цьому випадку повинна бути парною, оскільки сума ступенів вершин графа завжди парна.

3. Якщо в графі є вершини з парними і непарними степенями, то очевидно, що сума степенів вершин з парними степенями парна.



4. Однак, оскільки сума всіх ступенів графа парна, то знову виникає протиріччя з початковим припущенням.

Загальна сума степенів вершин має бути парною, тому кількість вершин з непарними степенями завжди парна.

Кількість вершин з непарними степенями завжди парна

ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА. Сума степенів вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер:

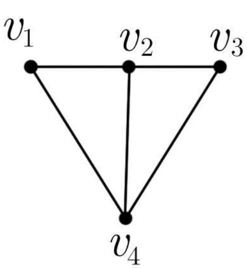
$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2q \text{ – для неорієнтованого графа,}$$

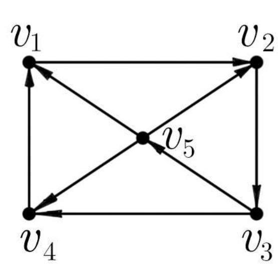
$$\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)+\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=2q \text{ – для орграфа,}$$

де $q=|E|$ – потужність множини ребер

Доведення. При підрахунку суми ступенів вершин кожне ребро враховується два рази: для одного кінця ребра і для іншого.

Приклад.

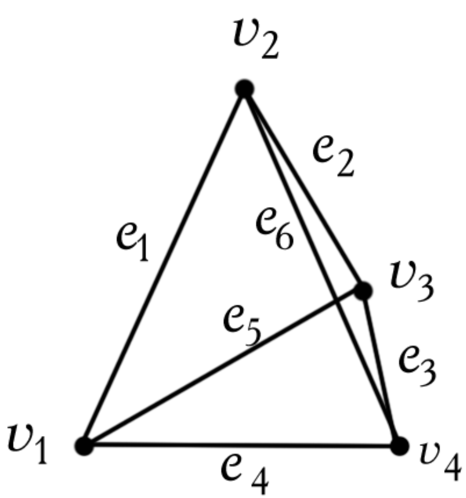




$$\sum_{i=1}^{3}\deg(v_i)=10,\ q=|E|=5,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\deg^{-}(v_i)=8,\ \sum_{i=1}^{5}\deg^{+}(v_i)=8,\quad q=|E|=8.$$

Графи з постійним і змінним степенем вершин



***Якщо граф регулярний, то говорять про степінь графа, а не степені вершини*.**

У регулярному графі степінь регулярності є *інваріантом* (постійною властивістю) графа і позначається $r(G)$.

Приклад. На рисунку показаний регулярний граф зі степенем 3.

Граф $G(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,

$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$.

$r(G)=\deg(v_1)=\deg(v_2)=\deg(v_3)=\deg(v_4)=3$.

Для нерегулярних графів, тобто графів зі змінним степенем вершин, значення $r(G)$ ***не визначене.***

Існують класичні приклади регулярних графів, що одержали назви:

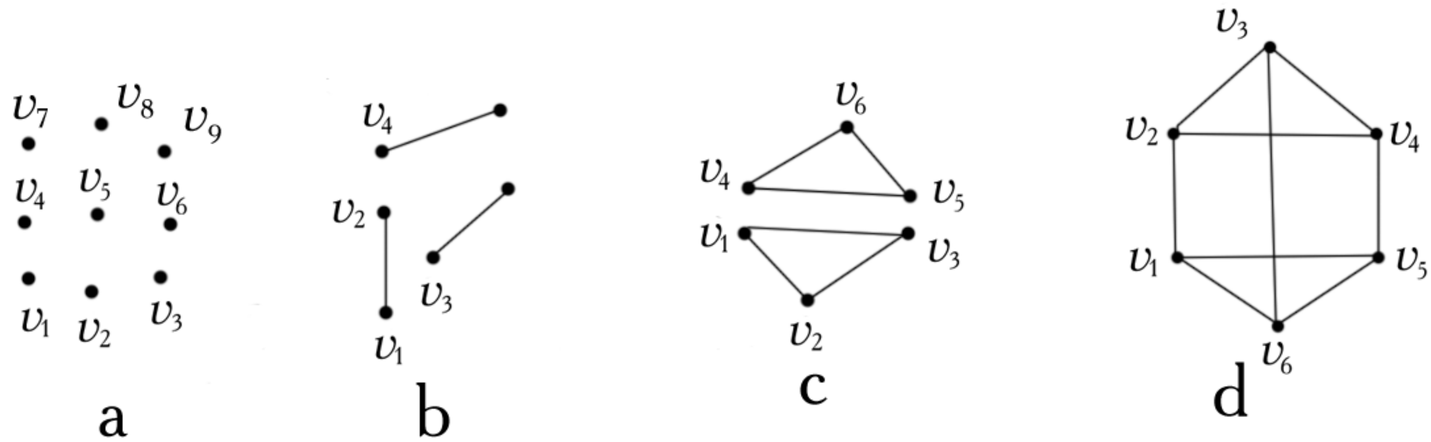
a) 0-регулярний граф,

b) 1-регулярний граф,

c) 2-регулярний граф,

d) 3-регулярний граф.

Зображення цих графів показані на рисунку



Підграф графа

Граф $G'(V',E')$ називають ***підграфом*** графа $G(V,E)$

$$G'(V',E')\preceq G(V,E)$$

якщо $V'\subseteq V$ і $E'\subseteq E$.

Отже

- кожна вершина в G' є одночасно вершиною в G,
- кожне ребро в G' є одночасно ребром в G.

Якщо $V'=V$ і $E'\subseteq E$,
то G' називають ***остовним підграфом*** G або **суграфом** графа G.

Граф $G'(V',E')$ при $V'\subset V$ називають ***правильним підграфом*** графа G, якщо G' містить усі можливі ребра G:

$$\forall u,v\in G'(u,v)\text{ таких,що }(u,v)\in E\Rightarrow(u,v)\in E'.$$

Правильний підграф утворюють шляхом виключення з гафа певної кількості вершин та інцидентних до них ребер

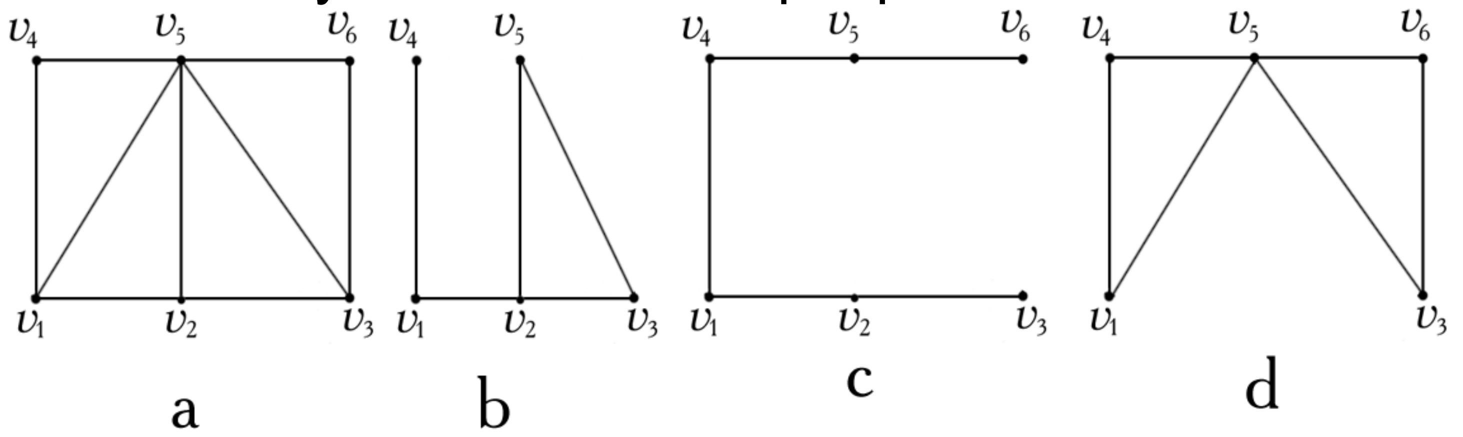
Приклад. Розглянемо рисунок

(**a**) Нехай дано деякий граф $G(V,E)$.

(**b**). На рисунку представлений **підграф** $G_1(V_1,E_1)$ графа$G(V,E)$, оскільки $V_1 \subset V$ і $E_1 \subset E$.

(**c**). Граф $G_2(V_2,E_2)$ є **остовним графом** або суграфом графа$G(V,E)$, тому що $V_2 = V$ й $E_2 \subset E$.

(**d**). Граф $G_3(V_3,E_3)$ є **правильним підграфом** графа$G(V,E)$, оскільки містить усі його можливі ребра.



Циркулянтні графи

Циркулянтні графи – це об'єкти, які знайшли широке застосування в сучасній комп'ютерній техніці і дискретній математиці.

Вони використовуються в *обчислювальних структурах, мережах передачі даних і розподілених обчисленнях*.

Циркулянтні графи реалізовані були вперше, як комунікаційні мережі в таких легендарних обчислювальних системах як ILLIAC-IV, MPP, Cray T3D.

Зараз циркулянтні графи розглядають як основи конфігурації різного роду **кластерних систем.**

Циркулянтні графи також застосовують в **теорії кодування** при створенні кодів, які виправляють помилки.

Визначення циркулянтного графа G.

Нехай $s_1, s_2, ..., s_m, ..., s_k, n$ – цілі числа, такі, що задовольняють умови:

$$1 \le s_1 < s_2 < ... < s_m < ... < s_k < n.$$

Циркулянтним графом будемо називати граф з множиною вершин

$$V = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

і множиною ребер, яка сформована за таким правилом:

$$E = \left\{ (i, j) \middle| \left(|i-j| \bmod n = s_m \right), m = 1, 2, ..., k \right\},$$

$$\text{де } i = 0, 1, ..., n-1,\ j = 0, 1, ..., n-1,\ s_m \in S$$

Цей запис означає, що між вершиною i та вершиною j тільки тоді існує ребро, якщо справедливий вираз $\left(|i-j| \bmod n = s_m \right)$, де s_m - це одна з заданих констант $s_m = \{1, 2, ...\}$

$$E=\left\{(i,j)\middle|\left(|i-j| \bmod n=s_m\right), m=1,2,\ldots,k\right\},$$

Число n називають порядком циркулянтного графа.

Число k – розмірність циркулянтного графа.

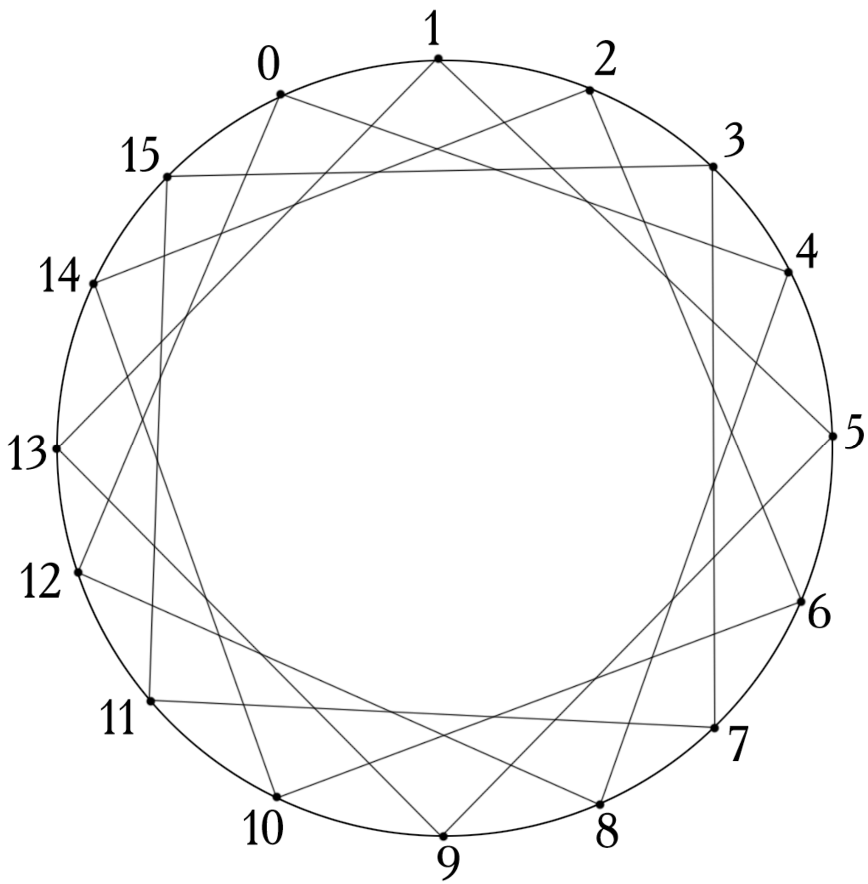
Елементи $s_m \in S$ – утворюючі циркулянтного графа (хорди).

Циркулянтний граф прийнято задавати у вигляді параметричного опису

$$G(n;S)=G(n;s_1,s_2,\ldots,s_k),$$

порядок, що задає, розмірність і значення утворюючих.

Приклад кільцевого циркулянтного графа.



$$V=\{0,1,2,\ldots,15\}$$
$$s_1=1,\ s_2=4,\ n=16$$
$$E=\{(0,1),(1,2),(2,3),$$
$$(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),$$
$$(7,8),\ldots,(14,15),(15,0),$$
$$(0,4),(1,5),(2,6),(3,7),$$
$$(4,8),\ldots,(11,15),(12,0)\}$$

$$E=\left\{(i,j)\middle|\left(\left|i-j\right|\bmod n=s_m\right),m=1,2,\ldots,k\right\},$$

Циркулянтний граф $G(16;1,4)$

Структурні характеристики графів

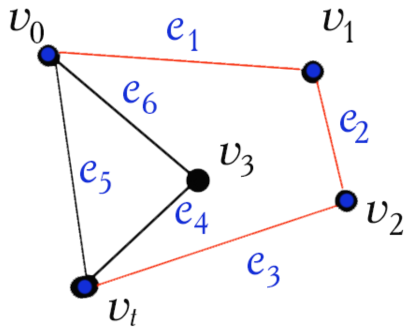
Маршрутом або ***шляхом*** у графі $G(V,E)$ називають **послідовність вершин і ребер, які чергується**:

$$v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_t, \text{ де } e_i = (v_{i-1}, v_i) \text{ при } 1 \le i \le t.$$

Такий маршрут коротко називають (v_0, v_t)-маршрутом і говорять, що він з'єднує v_0 **з** v_t, *які називають початковою кінцевою вершинами даного маршруту*.

Найчастіше маршрут зображують у вигляді:

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_t} v_t.$$



Відзначимо, що стрілки тут указують лише порядок проходження вершин у маршруті.

Довжиною маршруту (шляху) *називають кількість ребер, що входять в нього.*

Випадок, коли довжина маршруту **дорівнює нулю**, не виключається; у цьому випадку маршрут зводиться до однієї вершини.

У звичайному графі маршрут (шлях) **повністю визначається послідовністю** $v_0, v_1, ..., v_t$ своїх вершин.

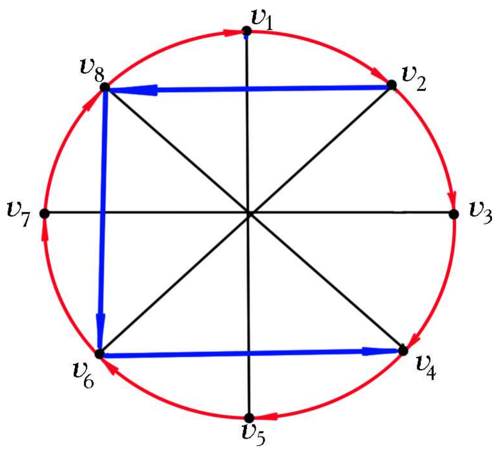
Якщо $v_0 = v_t$, то (v_0, v_t)-маршрут називають ***замкненим***.

У **довільному маршруті** (шляху) **будь-яке ребро і будь-яка вершина можуть повторюватися**. Накладаючи обмеження на число повторень вершин або ребер, ми приходимо до наступних окремих видів маршрутів (шляхів).

Ланцюг

Ланцюг — це шлях через ребра, які не повторюються.

Ланцюг називають ***простим ланцюгом***, якщо в ньому немає повторюваних вершин, крім, можливо, початкової і кінцевої вершин, які співпадають. Замкнений простий ланцюг називають ***циклом***.



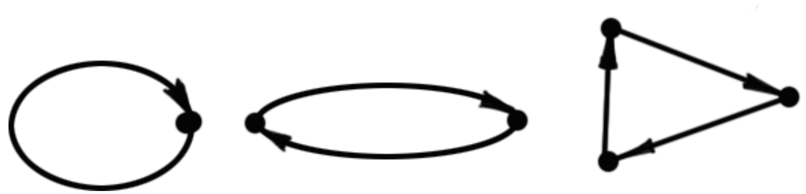
Цикл повністю визначають множиною його ребер.

Тому часто під циклом ми будемо розуміти відповідну йому множину ребер.

Петля дає цикл довжини 1.

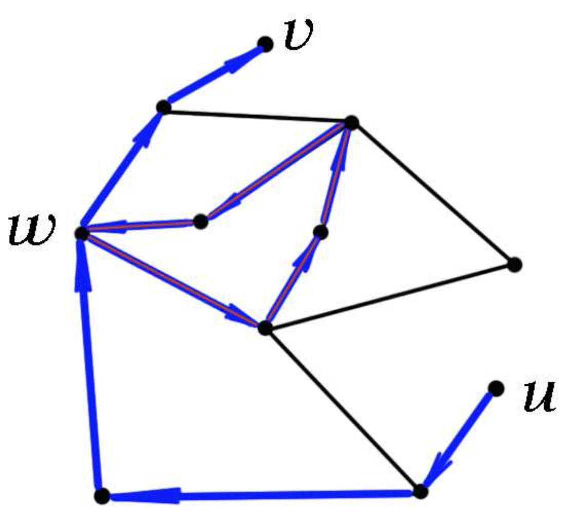
Пара кратних ребер утворює цикл довжини 2.

Цикли довжини 3 зазвичай називають *трикутниками.*



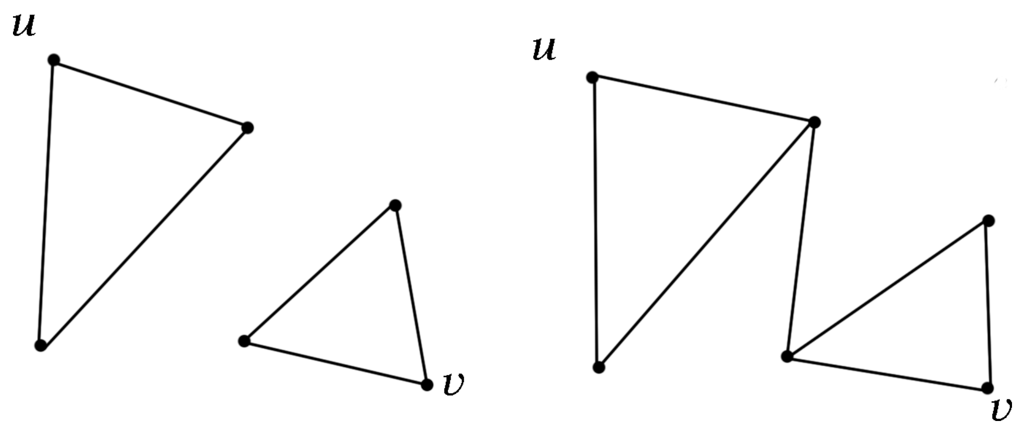
Лема. Якщо для деяких двох вершин u і v в графі існує (u,v)-маршрут, то існує і простий (u,v)- ланцюг.

Доведення. Розглянемо в графі (u,v)-маршрут найменшої довжини. Покажемо, що цей маршрут є простим ланцюгом. Якщо в ньому є повторювана вершина w, то, заміняючи частину маршруту від першого входження вершини w до її другого входження на одну вершину w, ми одержимо більш короткий (u,v)-маршрут.



Зв’язність графа

Граф G називають ***зв'язним***, якщо для будь-яких його двох різних вершин u і v існує (u,v)-маршрут.



Якщо для графа G можна вказати пари вершин u і v, між якими не існує маршруту, то такий граф називається **незв'язним**.

Теорема про незв'язний граф

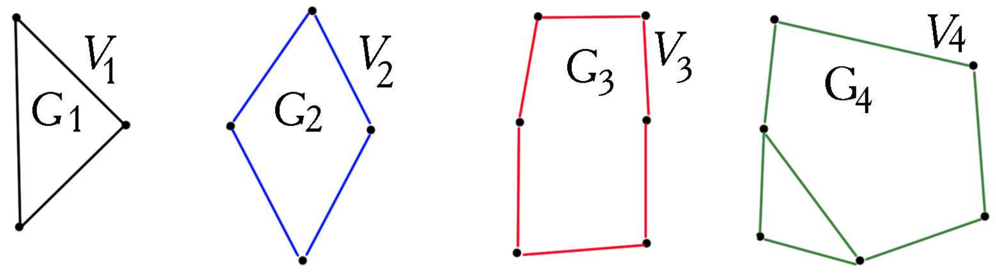
Граф є незв'язним тоді і тільки тоді, коли множину його вершин V можна розбити хоча б на дві непусті підмножини V_1 і V_2 так, щоб будь-яке ребро графа $e \in E$ з'єднувало тільки ті вершини, які належать одній підмножині.

На множині вершин V графа G визначимо *відношення зв'язності* ~ вважаючи, що

$u \sim v \Leftrightarrow$ існує (u,v)-маршрут.

Дане відношення є відношенням еквівалентності (рефлексивне, симетричне і транзитивне).

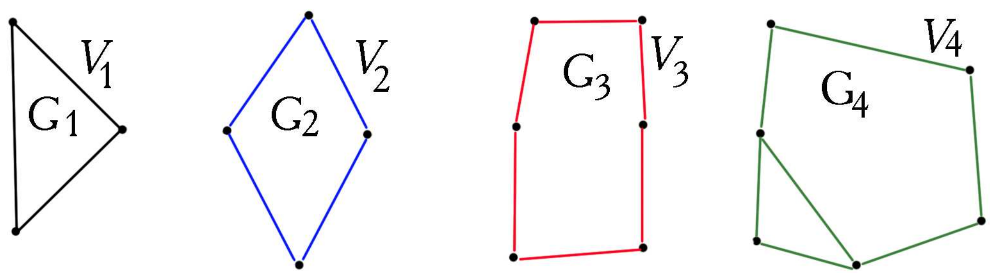
Позначимо через $G(V)$ – граф, породжений множиною вершин $V = \{V_i\}_{i=1}^{k}$.



Підрафи $G_1, G_2, ..., G_k$, називають *компонентами зв’язності* графа G.

Ясно, що кожний компонент зв’язності G_i є зв'язним підграфом.

Тому множина компонент зв’язності $G = \{G_1, ..., G_k\}$ – це множина всіх зв'язних підграфів даного графа, і будь-яке ребро належить деякому компоненту зв’язності.

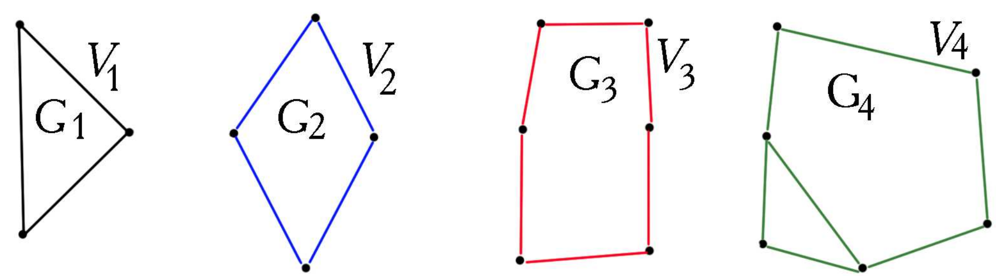


Таким чином справедливе твердження:

Кожний граф є диз'юнктним об'єднанням своїх компонентів зв’язності.

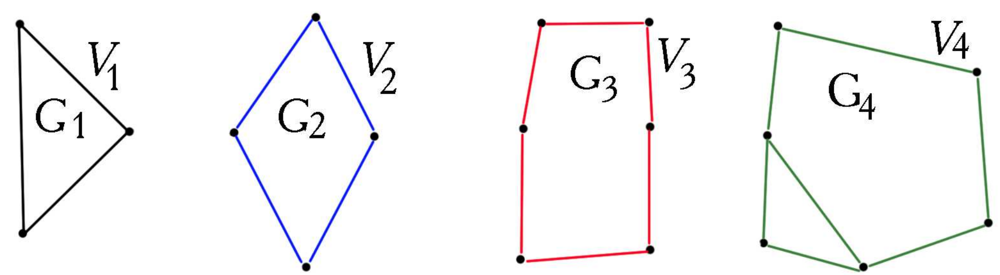
Властивості зв'язності графів

1. Кожна вершина графа входить в один і тільки в один компонент зв’язності.
2. Будь-який скінченний граф має скінченну кількість компонентів зв’язності.
3. Граф, що складається з єдиного компонента зв’язності, є зв'язним.
4. Кожний компонент зв’язності графа є його підграфом.
5. Для будь-якого графа або він сам, або його доповнення є зв'язним.



При явному визначенні компонентів зв'язності граф описують трійкою, як (p,q,k)-граф, де p – кількість вершин графа, q – кількість ребер графа, а k – кількість компонентів зв'язності.

Приклад.



Для даного графа G характерні такі параметри:

$$p = |V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4| = 3 + 4 + 6 + 6 = 19$$

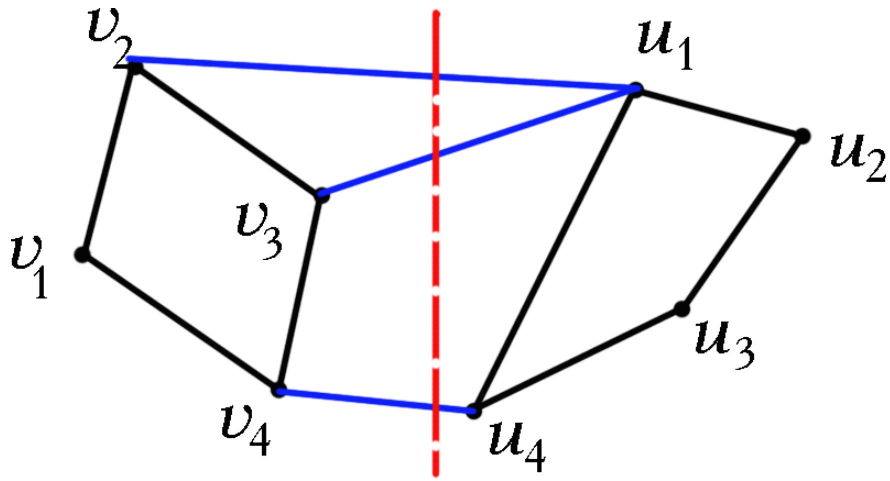
$$q = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = 3 + 4 + 6 + 7 = 20$$

$$k = 4$$

Отже, $G = G(19, 20, 4)$.

Множина розрізання, розріз і міст

Множиною розрізання називають множину ребер, видалення яких з графа приводить до збільшення компонентів зв'язності.

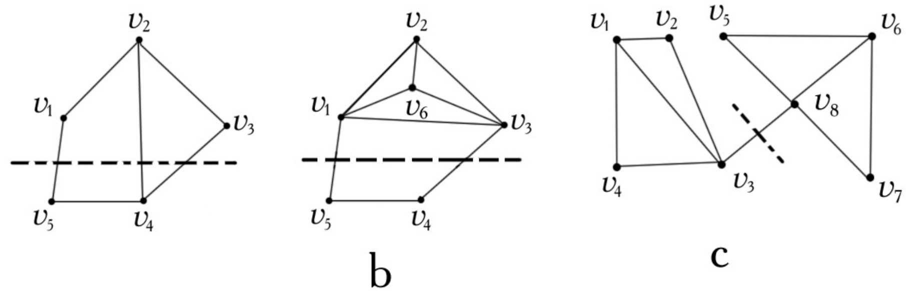


$$\{(v_2, u_1), (v_3, u_1), (v_4, u_4)\}$$

Мінімальну за включенням ребер множину називають ***розрізом*** графа.

Міст – це розріз, що складається з єдиного елемента.

На рисунку показані приклади:
а) множина розрізання; b)розріз; с) міст.



а) Множина розрізання графа складається з ребер $E_r = \{(v_1, v_5), (v_4, v_3), (v_2, v_4)\}$. Ця множина не є мінімальною за включенням, оскільки видаливши ребра $\{(v_1, v_2), (v_4, v_5)\}$ отримаємо два компоненти зв'язності.

b) Приклад розрізу графа, що містить множину розрізання, мінімальну за включенням $E_r = \{(v_1, v_5), (v_3, v_4)\}$.

c) Міст графа представлений множиною розрізання з одного елемента: $E_r = \{(v_3, v_8)\}$.