ЛЕКЦІЯ 6

Функції

ВІДПОВІДНІСТЬ $\Rightarrow$ **ВІДНОШЕННЯ** $\Rightarrow$ **ФУНКЦІЯ** $\Rightarrow$ **ФУНКЦІОНАЛ** $\Rightarrow$ **ОПЕРАТОР**

ФУНКЦІЇ

Функція — математичне поняття, що відображає зв'язок між елементами множин. Можна сказати, що функція — це «закон», за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність деякий елемент іншої множини.

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_n, y_n),\}$$

Значення y_i в кожній з пар $(x_i, y_i) \in f$ називається функцією від x_i, що у загальному випадку записується у вигляді:

$$y = f(x).$$

Отже, функція – це множина, представлена у вигляді:

$$f = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, y = f(x)\}.$$

Формальне визначення функції.

Відношення f на $X \times Y$ називають ***функцією*** з X в Y і позначають через $f : X \to Y$, якщо для $x \in X$ існує елемент $y \in Y$ такий, що $(x, y) \in f$.

Якщо $f : X \to Y$ — функція, і $(x, y) \in f$, то говорять, що

$$y = f(x).$$

Як видно з визначення, символ f використовується у двох змістах:

1. f – це множина, елементами якої є пари, які беруть участь у відношенні.

2. $f(x)$ – це позначення для $y \in Y$, яке відповідає даному $x \in X$.

Область визначення й область значень. Образ.

Якщо задана функція $f : X \to Y$, то множину X називають ***областю визначення*** функції f, а множину Y називають ***областю потенційних значень***.

Образ підмножини.

Нехай дана підмножина $E \subseteq X$. Образом підмножини E називають множину всіх значень функції f на всіх елементах підмножини E. Отже, образ підмножини E позначається $f\left(E\right)$:

$f\left(E\right) = \left\{ f\left(x\right) \middle| x \in E \right\}$ або рівнозначно:

$$f\left(E\right) = \left\{ y \in Y \middle| \left(x, y\right) \in f \text{ для деякого } x \in E \right\}$$

Образ елемента.

Елемент $f\left(x\right)$ називають **образом** елемента x.

Визначення області значень через образ

Областю значень Y функції f називають образ множини $f\left(X\right)$ на усій множині X.

Прообраз. Відображення

Прообраз підмножини. Прообразом підмножини $F \subseteq Y$ називають підмножину всіх елементів $x \in X$, для яких $f\left(x\right) \in F$.

Прообраз позначається: $f^{-1}\left(F\right)$:

$$f^{-1}\left(F\right) = \left\{x \middle| f\left(x\right) \in F\right\}$$

Елемент-прообраз

Елемент x називають **прообразом** $f\left(x\right)$

Визначення відображення

Функцію $f : X \to Y$ називають також ***відображенням***; при цьому говорять, що f відображає X в Y.

Отже, *функція* та *відображення* – синоніми.

Однак термін «функція» частіше використовується для того, щоб вказати на відношення між елементами множин, а відображення – для визначення відношення між множинами.

Властивості відображень множини

Властивість 1. Якщо A_1 й A_2 – підмножини X, то образ об'єднання дорівнює об'єднанню образів:

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right).$$

Приклад.

$$\begin{cases} A_1 = \{1,2,3\}, f\left(A_1\right) = \{11,12,13\}, \\ A_2 = \{3,4,5\}, f\left(A_2\right) = \{13,14,15\} \end{cases}$$

$$A_3 = A_1 \cup A_2 = \{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$f\left(A_3\right) = \{11,12,13,14,15\}$$

$$f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right) = \{11,12,13\} \cup \{13,14,15\} = \{11,12,13,14,15\}$$

Властивість 2. Для взаємо-однозначного відображення образ перетину дорівнює перетину образів:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) = f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right).$$

Приклад.

$$\begin{cases} A_1 = \{1,2,3\}, f\left(A_1\right) = \{11,12,13\}, \\ A_2 = \{2,3,4\}, f\left(A_2\right) = \{12,13,14\} \end{cases}$$

$$A_3 = A_1 \cap A_2 = \{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$$

$$f\left(A_3\right) = \{12,13\}$$

$$f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right) = \{11,12,13\} \cap \{12,13,14\} = \{12,13\}$$

Властивість 3. Для довільного образа відображення перетину входить у перетин образів:

$$f\left(A_1 \cap A_2\right) \subseteq f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$$

Приклад.

$$\begin{cases} A_1 = \{1,2,3\}, \quad f\left(A_1\right) = \{\underline{11},12,13\}, \\ A_2 = \{3,4,5\}, \quad f\left(A_2\right) = \{13,12,\underline{11}\} \end{cases}$$

$$A_3 = A_1 \cap A_2 = \{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$$

$$f\left(A_3\right) = \{13\}$$

$$f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right) = \{11,12,13\} \cap \{13,12,11\} = \{11,12,13\}$$

Узагальнення властивостей 1 і 3:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(A_i\right), \quad f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f\left(A_i\right).$$

Композиція функцій

Композицією двох функцій $f:A\to B$ і $g:B\to C$ називають функцію $h:A\to C$, яка задана співвідношенням

$$h(x)=g\big(f(x)\big)$$

Інакше кажучи, h являє собою множину двійок (a,c)

$$h=\Big\{(a,c)\Big|(a,b)\in f \text{ и } (b,c)\in g \text{ для деякого } b\in B\Big\}$$

Композиція функцій позначається: $f\circ g$.

Нехай $f:A\to B$, $g:B\to C$ і $k:C\to D$

Композиція (як операція над функціями) *асоціативна*, тобто

$$f\circ(g\circ k)=(f\circ g)\circ k.$$

Тому в композиції декількох функцій, які ідуть підряд, можна опускати дужки.

Композиція відображень на одній множині

Нехай дані відображення $Q : X \to X$ і $G : X \to X$.

Композиція відображень –

це відображення $Q \circ G$, обумовлене співвідношенням:

$$Q\left(G\right) = Q \circ G.$$

Q - відображення для відображення G.

У випадку, коли $Q = G$ можливо одержати відображення:

$Q^2 = Q\left(Q\right) = Q \circ Q$,

$Q^3 = Q\left(Q^2\right) = Q \circ Q \circ Q$,...,

$Q_X^m = Q\left(Q_X^{m-1}\right) = Q \circ Q \circ Q \circ ... \circ Q$.

Якщо $Q^0 = X$ то $Q^0 = Q\left(Q^{-1}\right) = X$.

Оскільки Q^{-1} – зворотне відображення, то

$Q^{-1} = Q\left(Q^{-2}\right)$,$Q^{-2} = Q\left(Q^{-3}\right)$, і т.ін.

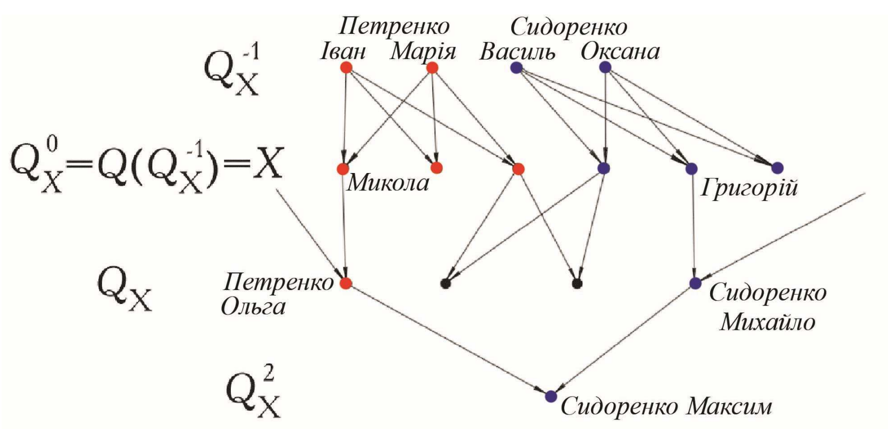
Приклад. Нехай X – множина людей.

Для кожної людини x із множини $x \in X$ множину його дітей визначимо як $Q_X = Q\left(X\right)$.

Тоді $Q_X^2 = Q\left(Q\left(X\right)\right)$ буде представляти множину його онуків,

$Q_X^3 = Q\left(Q\left(Q\left(X\right)\right)\right)$ - множина його правнуків,

$Q_X^{-1} = Q^{-1}\left(X\right)$ - множина батьків.

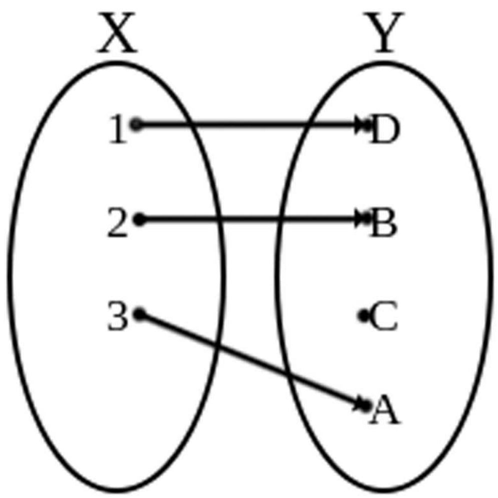


Зобразимо множину людей точками, а стрілками представимо відповідності між X, Q_X, Q_X^2 і т.ін. Тоді одержуємо родовід або генеалогічне дерево для даної множини людей.

Ін'єктивні відображення й функції

Визначення 1.Відображення множини X в множину Y називають **ін'єктивним,** якщо образ $f(x)$ може мати лише один прообраз x.

Отже, має місце *одно-однозначна* відповідність.



$$f: X \to Y \qquad f = \{(1,D),(2,B),(3,A)\}$$

При цьому, не всі елементи Y - образи

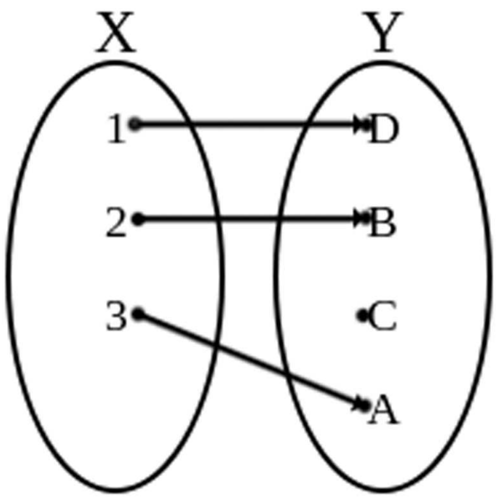
Наприклад: Елемент C не має прообразу

Визначення 2.

Функцію $f: X \to Y$ називають ***ін'єктивною***, або ***ін'єкцією***, якщо з $f(x) = f(x')$ випливає $x = x'$.

Визначення 3. Ін'єкція (ін'єктивне відображення, ін'єктивна функція) — таке співвідношення між елементами двох множин, в якому двом різним елементам області визначення X ніколи не співставляється один і той самий елемент області значень Y.

Приклади ін'єктивних функцій



$f : N \to N,\ y = x^2$ – **ін'єктивне**

$f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$,…

Але для елементів множини $N = \{3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ...\}$ **немає прообразів**

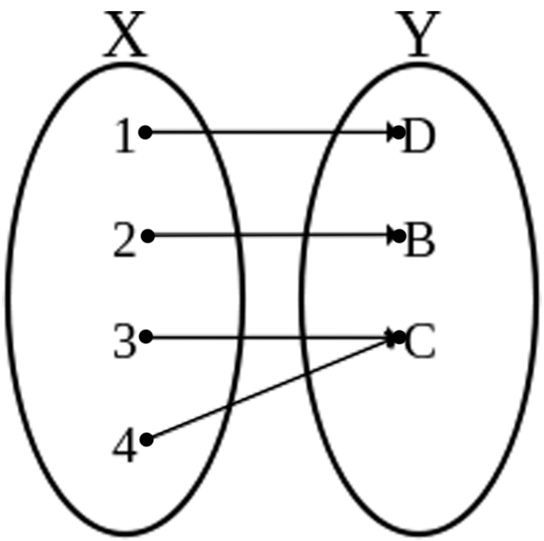
$f : Z \to Z, y = x^2$ – **не ін'єктивне, оскільки**

$f(-2) = f(2) = 4$, $f(-3) = f(3) = 9$,…

Образи $Y = \{4, 9, 16, 25, ...\}$ **мають по два прообрази**

Сюр'єктивні відображення й функції

Визначення 1. Відображення множини X в множину Y називають **сюр'єктивним,** якщо кожний елемент з Y має принаймні один прообраз із X.



Отже, має місце багато-однозначна відповідність.

Визначення 2. Функцію $f : X \to Y$ називають ***сюр'єктивною функцією***, або ***сюр'єкцією***, якщо кожний елемент множини Y є образом хоча б одного елемента множини X, тобто

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

Визначення 3. Сюр'єкція (сюр'єктивне відображення, сюр'єктивна функція) — співвідношення між двома множинами, в якій з кожним елементом множини Y асоціюється щонайменше один (або більше) елементів множини X.

Приклади сюр'єктивних функцій

1. **Трансцендентні функції**

$f: R \rightarrow [-1;1],\ y=\sin(x)$ – сюр'єктивна функція

2. **Округлення до цілого**

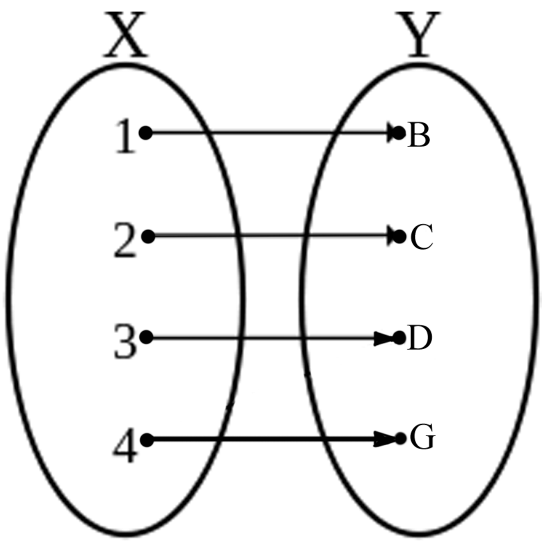
$f: R \rightarrow Z, y=\lfloor x \rfloor,\ y=\lceil x \rceil$ – сюр'єктивні функції

Приклад функції, яка не є сюр'єктивною

$f: R \rightarrow Z,\ y=\lfloor x^2 \rfloor$ – не сюр'єктивна, оскільки не існує такого $x \in R$, що $y<0$.

Бієкція

Визначення 1. Функцію яка задає взаємно однозначну відповідність між елементами множин X і Y, називають бієкцією. Вона є одночасно ін'єктивною, і сюр'єктивною.



$$f : X \to Y$$

$$f = \{(1, B), (2, C), (3, D), (4, G)\}$$

Якщо $X = Y$ і $f : X \to X$ є взаємно однозначною відповідністю, то f називається ***перестановкою*** множини X.

Визначення 2. Бієкція- відповідність, яка асоціює один елемент множини X з одним і тільки одним елементом множини Y і навпаки, одному елементу множини Y співставляється один і лише один елемент множини X.

Приклади бієктивних функцій

1. f: **R** → **R** має вигляд: f(x) = 2x + 1.

Ця функція є бієктивною, тому що для будь-якого y ∈ *R*, існує єдиний розв'язок рівняння y = 2x + 1 відносно x:

$$\forall y \in Y \ \exists x = (y-1)/2,$$

2. f: **R** → **R** $y = x$

Ця функція бієктивна, оскільки $\forall y \in Y \ \exists x = y,$.

3. f: **R** → **R** $y = x^3$

Ця функція бієктивна, оскільки $\forall y \in Y \ \exists \ x = \sqrt[3]{y}$

Способи задавання функцій.

1. Табличний спосіб задавання функції.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

У даній таблиці стовпці являють собою множину впорядкованих пар:

$$y = f(x) = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36),(7,49),(8,64),(9,81)\},$$

що відповідає визначенню функції, представленому раніше.

2. Аналітичний спосіб задавання функції

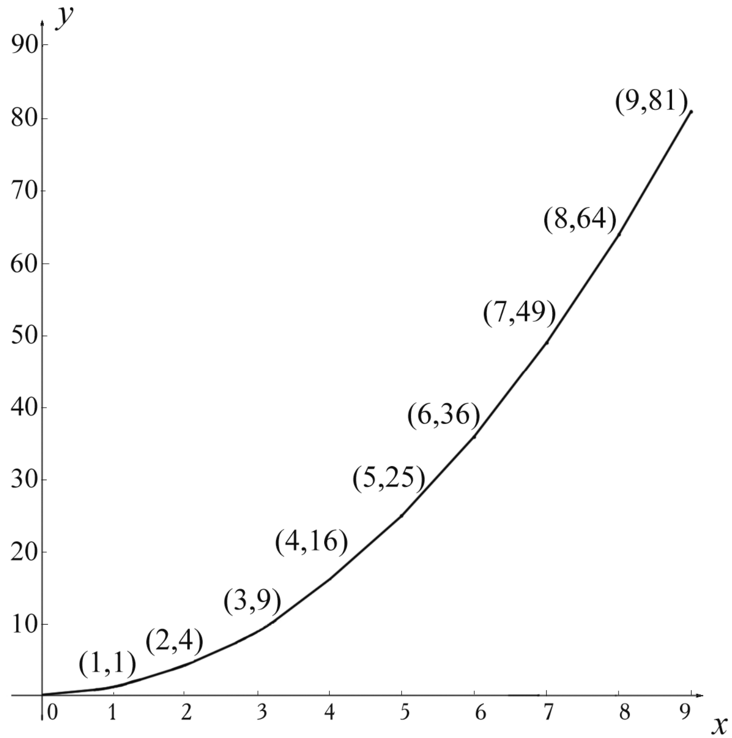
При аналітичному задаванні функція представлена у вигляді формули, тобто математичного виразу, що включає математичні операції, які необхідно виконати над $x \in X$, щоб одержати $y \in Y$:

$$y = f\left(x\right) = x^2$$

$$y = \left\{\left(x, y\right) \in R^2 \middle| y = x^2\right\}$$

3. Графічний спосіб задавання функції.

Якщо $X \subseteq R$ і $Y \subseteq R$, тобто X і Y є підмножинами множини дійсних чисел, то пари $\left(x, y\right) \in R^2$ можливо представити у вигляді точок на площині. Повна сукупність точок буде являти собою графік функції.



Питання: Як задати функцію в R^3 ?

Спеціальні функції

1. Тотожна функція.

Нехай $I : X \to X$ визначене співвідношенням $f\left(x\right) = x$ для всіх $x \in X$. Функцію I називають ***тотожною функцією*** на X.

2. Округлення до нижнього цілого

Функцію $f : X \to Y$, де X — множина дійсних чисел, а Y — множина цілих чисел, називають ***округленням до нижнього цілого*** й позначають $f\left(x\right) = \left\lfloor x \right\rfloor$, якщо вона кожному $x \in X$ ставить у відповідність найбільше з цілих чисел, яке є меншим або дорівнює x.

Приклад:

Для додатних чисел: $\left\lfloor 2{,}3 \right\rfloor = 2;\ \left\lfloor 3{,}899 \right\rfloor = 3;\ \left\lfloor 10 \right\rfloor = 10;$

Для від’ємних чисел: $\left\lfloor -11{,}1 \right\rfloor = -12;\ \left\lfloor -10{,}99 \right\rfloor = -11;$

3. Округлення до верхнього цілого

Функцію $f : F \to B$ називають ***округленням до верхнього цілого*** й позначають $f\left(x\right) = \left\lceil x \right\rceil$, якщо вона кожному $x \in X$ ставить у відповідність найменше з цілих чисел, яке більше або дорівнює x.

Приклад:

Для додатних чисел: $\lceil 11{,}1 \rceil = 12$; $\lceil 45{,}9 \rceil = 46$; $\lceil 22 \rceil = 22$;

Для від'ємних чисел: $\lceil -45 \rceil = -45$ $\lceil -145{,}4 \rceil = -145$;

4. Факторіал

Нехай X і Y збігаються із множиною невід'ємних цілих чисел. ***Факторіалом*** назвемо функцію $f : X \to Y$, позначувану через $f\left(n\right) = n!$ і обумовлену наступними співвідношеннями:

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

5. Бінарна (двомісна) операція

Нехай X, Y, Z — трійка непустих множин. **Бінарною операцією** або **двомісною операцією** у парі (x, y), $x \in X$ і $y \in Y$ зі значенням в $z \in Z$ називають функцію $b : P \to Z$, де $P \subset X \times Y$.

Бінарну операцію позначають знаком дії, який ставиться зазвичай між операндами.

Нехай $\bullet$ – довільна операція. Тоді існують види записів:

1. Інфіксна форма запису: $x \bullet y$. *Наприклад*: $x + y$
2. Префіксна форма запису: $\bullet xy$. *Наприклад*: $+xy$
3. Постфіксна форма запису: $xy \bullet$. *Наприклад*: $xy +$

Приклад: «+», «-», «$\times$» – бінарні операції на множині раціональних чисел.

Послідовність

Визначення. Нехай дана множина $Y=\{y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_n\}$ довільної природи. Усяке відображення $f:N\to Y$ множини натуральних чисел N у множину Y називають **послідовністю** (елементів множини Y).

Образ натурального числа i, а саме, елемент $y_i=f(i)$, називають i-**м членом** або **елементом послідовності**, а порядковий номер члена послідовності – її індексом.

Позначення

Послідовність $y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots$ записують у вигляді

$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ якщо нестрогий порядок, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ якщо строгий.

Для скінченних послідовностей: $(y_i)_{i=1}^{n}$ або $\{y_i\}_{i=1}^{n}$

Сума і добуток елементів послідовності: $S=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,\quad D=\prod\limits_{i=1}^{n}y_i$

Приклади послідовностей

1. Послідовність $\{x_i\}_{i=1}^{8} = \left\{ x_i \middle| x_i = i+1,\ i = \overline{1,8} \right\}$

$i \in N$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = i+1$	2	3	4	5	6	7	8	9

2. Послідовність $\{x_i\}_{i=1}^{8} = \left\{ x_i \middle| x_i = i^2,\ i = \overline{1,8} \right\}$

$i \in N$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = i^2$	1	4	9	16	25	36	49	64

3. Послідовність $\{x_i\}_{i=1}^{8} = \left\{ x_i \middle| x_i = \dfrac{i+2i}{2i-i},\ i = \overline{1,8} \right\}$

$i \in N$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = \dfrac{i+2i}{2i-i}$	3	3	3	3	3	3	3	3

Функція двох змінних

Визначення. Якщо **кожній парі** (x, y) елементів деякої множини $D = X \times Y$ **відповідає єдиний елемент** $z \in Z$, а **кожному елементу** z **відповідає хоча б одна пара** (x, y), то ми говоримо, що z є функція двох незалежних змінних x і y, визначена в D.

Функція двох змінних $f : D \to Z$ є відображенням декартового добутку $D = X \times Y$ в множину Z.

Формальне визначення функції двох змінних має такий вид:

$$f = \left\{ \left(x, y, z \right) \in X \times Y \times Z \middle| z = f\left(x, y \right) \right\}.$$

Матриця

Нехай є дві скінченні множини:

$M = \{1, 2, ..., m\}$ і $N = \{1, 2, ..., n\}$,

де m і n — натуральні числа.

Функція

$$A : M \times N \to D$$

представляє матрицю розміру $m \times n$ *, або масив* $m \times n$ *(*m *на* n *)*

Множина D — це, як правило, множина дійсних, комплексних, раціональних або цілих чисел.

Елементи D називають ***скалярами.***

Таким чином, для кожного $i, 1 < i < m$, і кожного $j,\ 1 < j < n$, є елемент $A(i, j) \in D$, який перебуває в i-му рядку і j-му стовпці відповідної прямокутної таблиці.

Елемент матриці $A(i,j)$ *представляє собою образ* елемента області визначення (i,j) і скорочено позначається через $A_{i,j}$. Отже, $m \times n$ матриця A зображується прямокутною таблицею, де образи впорядкованих пар $(i,j) \in \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\}$ можуть бути представлені в такому виді:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Матриця A містить m рядків і n стовпців і є матрицею розміру $m \times n$. Скорочено матрицю записують $A = \left[A_{ij}\right]$ або $A = \left[a_{ij}\right]$.

Значення a_{ij} називають ***компонентом***, або ***елементом*** матриці А.

Види матриць

1. ***Матриця-стовпець.*** Матрицю розміру $m \times 1$ називають матрицею-***стовпцем*** ***або*** ***вектором-стовпцем***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2.***Матриця-рядок***. Матрицю розміру $1 \times n$ називають матрицею-рядком або ***вектором-рядком.***

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Якщо A — матриця-рядок або матриця-стовпець, то індекс рядка або, відповідно, стовпця, звичайно опускають.

3. ***Квадратична матриця.*** Якщо в матриці кількість рядків і кількість стовпців збігається: $m = n = k$, то її називають ***квадратною матрицею.***

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

4. ***Діагональна матриця*. Це квадратична матриця, усі елементи якої, крім діагональних, нульові.

$$\forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0. \qquad A = diag(A_1, A_2, \dots, A_k).$$

5. ***Одинична матриця*.** Це діагональна матриця з одиничними елементами на діагоналі.

$$\begin{cases} \forall (i \neq j) \Rightarrow A_{ij} = 0, \\ \forall (i = j) \Rightarrow A_{ij} = 1 \end{cases} \qquad A = diag(1, 1, \dots, 1)$$

Операції над матрицями

Рівність матриць

Дві матриці $A=\left[A_{ij}\right]$ і $B=\left[B_{ij}\right]$ розміру $m\times n$ ***рівні***, якщо рівні їхні відповідні елементи; тобто $A=B$ тоді й тільки тоді, коли $A_{ij}=B_{ij}$ для всіх $i, 1<i<m$, і всіх $j, 1<j<n$.

Множення матриці на скаляр

Якщо d — скаляр, а $A=\left[A_{ij}\right]$ — матриця $m\times n$, то dA- це матриця $D=\left[D_{ij}\right]$ розміром $m\times n$, де $D_{ij}=dA_{ij}$, тобто кожний компонент є добуток відповідного компонента A на d . Добуток числа d й матриці A називають ***множенням матриці на скаляр.***

Сума і різниця матриць

Додавати і віднімати можна тільки матриці одного розміру !!

Сума

Якщо $A = \left[A_{ij}\right]$ і $B = \left[B_{ij}\right]$ — $m \times n$-матриці, тоді $A + B$ є $m \times n$ матрицею $C = \left[C_{ij}\right]$, де $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, інакше кажучи, матриці додаються ***покомпонентно***. Матрицю C називають ***сумою матриць*** A і B.

Різниця

Різницю двох матриць визначимо через їх суму.

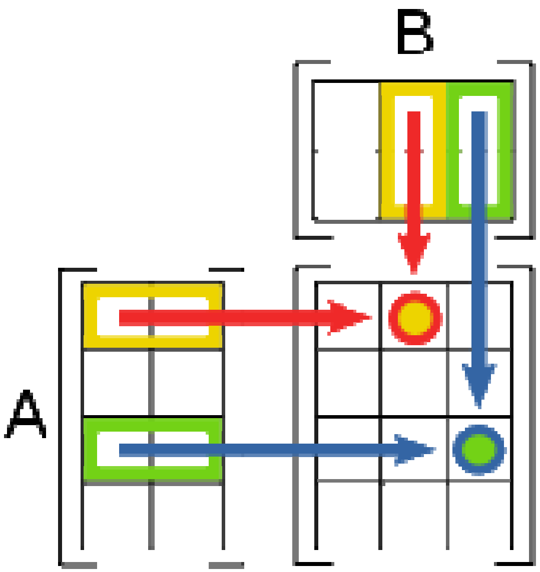
Запис $A - B$ означає $A + \left(-1\right) \cdot B$.

Отже, якщо $A = \left[A_{ij}\right]$ й $B = \left[B_{ij}\right]$ — $m \times n$-матриці, тоді $A - B$ є $m \times n$-матриця $C = \left[C_{ij}\right]$, де $C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$.

Добуток матриць

Добуток матриць $A \cdot B$ - це операція обчислення такої матриці C, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків у відповідному рядку першого співмножника та стовпці другого:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$



$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$
$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$$

1. **Множення матриці на матрицю-стовпець**

Матриця повинна бути ліворуч, а матриця-стовпець – праворуч:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 + \dots A_{1n}B_n \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 + \dots A_{2n}B_n \\ \dots \\ A_{m1}B_1 + A_{m2}B_2 + \dots A_{mn}B_n \end{bmatrix}$$

2. **Множення матриці-рядка на матрицю**

Матриця-рядок повинна бути ліворуч, а матриця-праворуч:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \dots A_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{m} A_k B_{k1},\ \sum_{k=1}^{m} A_k B_{k2},\ \dots,\ \sum_{k=1}^{m} A_k B_{kn} \right]$$

Б) Нехай A матриця $m \times p$: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix}$

Нехай B матриця $p \times n$: $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & B_{p3} & \cdots & B_{pn} \end{bmatrix}$

Тоді добутком матриць A і B називається матриця $C = \left[C_{ij} \right]$ розміром $m \times n$, де C_{ij} - це скалярний добуток i-го рядка матриці A на j-й стовпець матриці B. $C=AB$

$$C_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ip} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ B_{3j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} .$$

Транспонована матриця

Нехай *A* — матриця $m \times n$.

Її ***транспонованою матрицею*** називають матриця A^t розміром $n \times m$ таку, що $A_{ij}^t = A_{ji}$, де A_{ij} — елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці A.

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \\ c & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Симетрична матриця

Якщо A — матриця $n \times n$ і $A_{ij} = A_{ji}$ для всіх $1 \leq i$, $j \leq n$, то матрицю A називають ***симетричною.*** Іншими словами, матриця A симетрична тоді й тільки тоді, коли $A = A^t$.

Матричне представлення відношень

Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ і $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$, і нехай R — відношення на $A \times B$.

Матричним представленням R називають матрицю $M = [M_{ij}]$ розміром $m \times n$, елементи якої визначають

із співвідношення $M_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$

Приклад. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $m = 4, n = 4$

Тоді матриця відношення , якщо

$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4)\}$

$$M = \begin{pmatrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця перестановок

Нехай M — матриця розміром $n \times n$, у кожному рядку і у кожному стовпці якої тільки один елемент, який дорівнює 1, а всі інші дорівнюють 0. Таку матрицю M називають ***матрицею перестановок.***

Приклад. Нехай дана перестановка 4-го порядку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідна матриця перестановок:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Множення перестановочної матриці на довільну міняє місцями рядки в довільній матриці

Множення довільної матриці на перестановочну міняє місцями стовбці в довільній матриці

Поняття функціонала

Поняття функціонала є більш широким, ніж поняття функції.

Функція

Функція у загальному випадку : $f : X \to Y$, де

X – множина дійсних чисел.

Y – множина дійсних чисел.

Кожна пара $\left(x, y\right) \in f$ ставить у відповідність одному дійсному числу x інше дійсне число y.

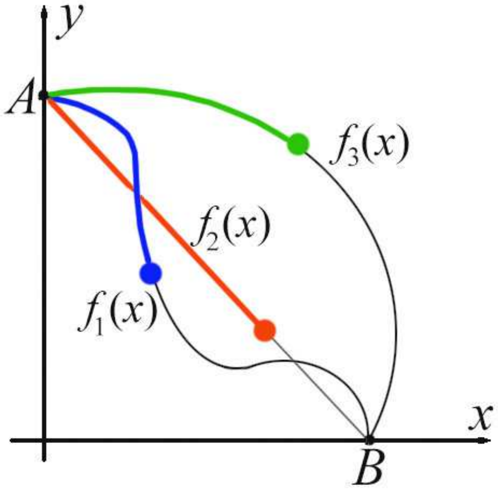
Функціонал

Функція у загальному випадку : $F : \left\{f\left(x\right)\right\} \to Y$, де

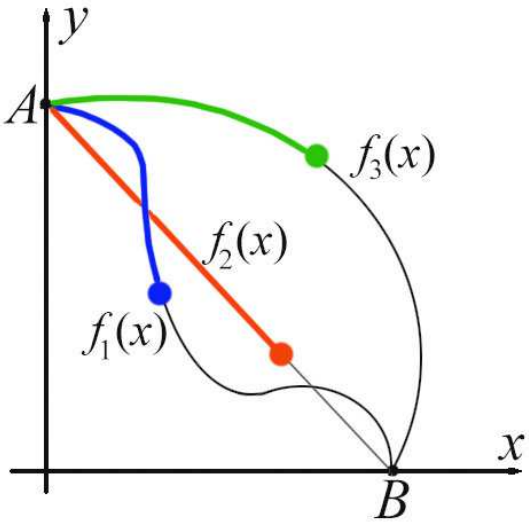
$\left\{f\left(x\right)\right\}$ – множина функцій.

Y – множина дійсних чисел

Розглянемо деякий набір кривих (траєкторій) $y = f_i(x)$, що з'єднують фіксовані точки A и B, як показано на рисунку.



Нехай по кожній із цих траєкторій може відбуватися вільне переміщення точки. Позначимо через t час, який потрібно на переміщення із точки A в точку B. Цей час очевидний залежить від характеру траєкторії AB, тобто від виду функції $f_i(x)$.



Позначимо через $F(x)$ множину з n різних функцій, що зображують траєкторію AB,

$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x)\},$$

а через T множину дійсних чисел $t \in T$, що визначають час переміщення точки, то залежність часу руху від виду функції може бути записана як відображення.

Функціонал – це відображення J, що має таке формальне представлення:

$$J : F(x) \to T,$$

або $J = \{(f(x), t) | f(x) \in F(x), t \in T, t = J[f(x)]\}$.

Оператор

Поняття оператора. Оператор представляє більш загальне поняття в порівнянні з функціоналом.

Оператор у загальному випадку: $L : X \to Y$, де

$X = \{x(t) | t - \text{аргемент функції}\}$-множина функцій,

$Y = \{y(t) | t - \text{аргемент функції}\}$- множина функцій.

$x(t) \in X$ і $y(t) \in Y$ - функції, що є елементами множин.

Отже елементами множини L є пари$(x(t), y(t))$, а оператор L перетворить функцію $x(t)$ у функцію $y(t)$.

$$y(t) = L[x(t)],$$

Таким чином, оператор встановлює відповідність між двома множинами функцій, так, що кожній функції з одного множини відповідає функція з іншої множини.

Приклад. Позначимо через p оператор диференціювання. Тоді зв'язок між похідною $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ і функцією $f(x)$ може бути представлений в операторному вигляді:

$$f'(x) = p[f(x)].$$

Приклад створення несуперечливих відношень S і R

aSb якщо а сестра b і aRb якщо а дружина b.

Із двох відношень першим будуємо більш строге.

aRb – більш строге в порівнянні з aSb:
- a_i – жінка;
- a_i – може входити тільки 1 раз в a_iRb_j
- b_j – чоловік;
- b_j – може входити тільки 1 раз в a_iRb_j

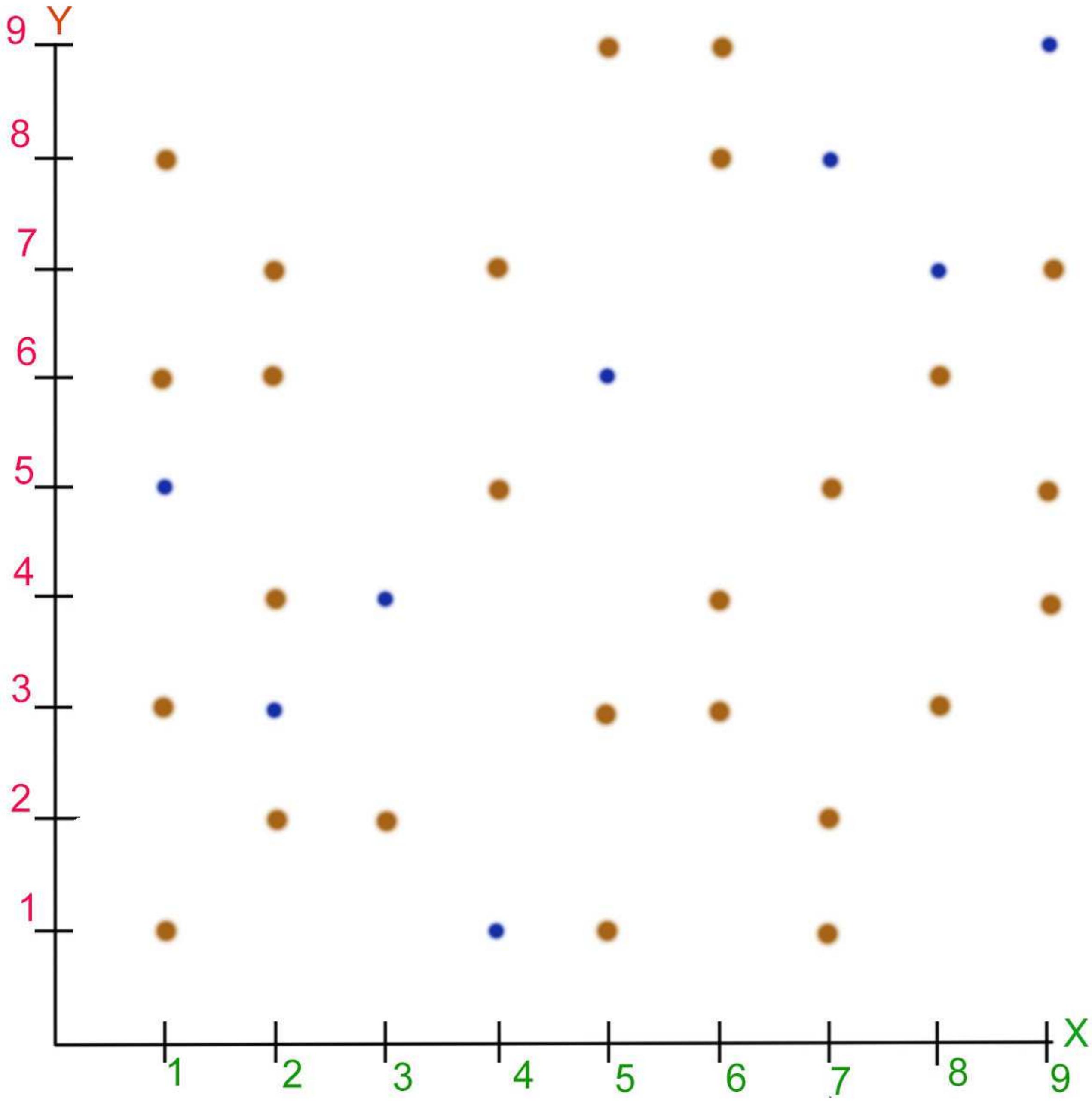
aSb – менш строге в порівнянні з aRb:
- a_i – жінка;
- a_i – може входити багато разів в a_iRb_j
- b_j – чоловік або жінка;
- b_j – може входити багато разів в a_iRb_j

$$X = \{\text{Анна,Ольга,Марта,Світлана,Віра,Аліна,Ксенія,Марія,Юлія}\}$$
$$Y = \{\text{Іван,Адам,Максим,Сергій,Василь,Петро,Ігор,Олег,Григорій}\}$$

$$R \subset X \times Y \qquad S \subset X \times Y$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	R	Іван	Адам	Максим	Сергій	Василь	Петро	Ігор	Олег	Григорій
1	Анна					1				
2	Ольга			1						
3	Марта				1					
4	Світлана	1								
5	Віра						1			
6	Аліна		1							
7	Ксенія								1	
8	Марія							1		
9	Юлія									1

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S	Іван	Адам	Максим	Сергій	Василь	Петро	Ігор	Олег	Григорій
1	Анна	1		1		X	1		1	
2	Ольга		1	X	1					
3	Марта		1		X		1	1		
4	Світлана	X				1		1		
5	Віра	1		1			X			1
6	Аліна		X	1	1				1	1
7	Ксенія	1	1			1			X	
8	Марія			1			1	X		
9	Юлія				1	1		1		X


Y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
X
1
2
3
4
5
6
7
8
9