ЛЕКЦІЯ 4

Спеціальні властивості відношень
Види відношень
Відношення еквівалентності

Спеціальні властивості відношень

Рефлексивність

Відношення $R \subset X \times X$**, де** $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ **називають** ***рефлексивним,*** якщо для <u>будь-якого елемента множини</u> X має місце $x_i R x_i$, тобто, кожний елемент $x_i \in X$ перебуває у відношенні R до самого себе.

Приклад 1.

Нехай $R_1 \subset A \times A$. $A = \{1, 2, 3\}$

$R_1 = \{(a, b) | a \leq b - \text{на множині натуральних чисел}\}$,

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_1x

$$1R_1 1 \equiv (1,1) \in R_1,$$

$$2R_1 2 \equiv (2,2) \in R_1$$

$$3R_1 3 \equiv (3,3) \in R_1$$

Приклад 2. Властивість рефлексивності

Нехай задано відношення $R_2 \subseteq A \times A$. $A = \{1,2,3,4\}$.

$R_2 = \{(a,b) | a\ i\ b$ – мають спільний дільник на множині цілих чисел $\}$

$(1,1) \to 1,\ (1,2) \to 1,\ (1,3) \to 1\ (1,4) \to 1$

$(2,1) \to 1,\ (2,2) \to 2\,і\,1,\ (2,3) \to 1,\ (2,4) \to 1\,і\,2$

$(3,1) \to 1,\ (3,2) \to 1\ (3,3) \to 1\,і\,3,\ (3,4) \to 1$

$(4,1) \to 1,\ (4,2) \to 2\,і\,1,\ (4,3) \to 1,\ (4,4) \to 1\,і\,4$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

В цьому відношенні присутні всі елементи типу xR_2x

$1R_21 \equiv (1,1) \in R_2,$

$2R_22 \equiv (2,2) \in R_2$

$3R_23 \equiv (3,3) \in R_2$

$4R_24 \equiv (4,4) \in R_2$

Представлення рефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для рефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 1.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_1),$$

$$(a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Представлення рефлексивного відношення графом

Визначення.

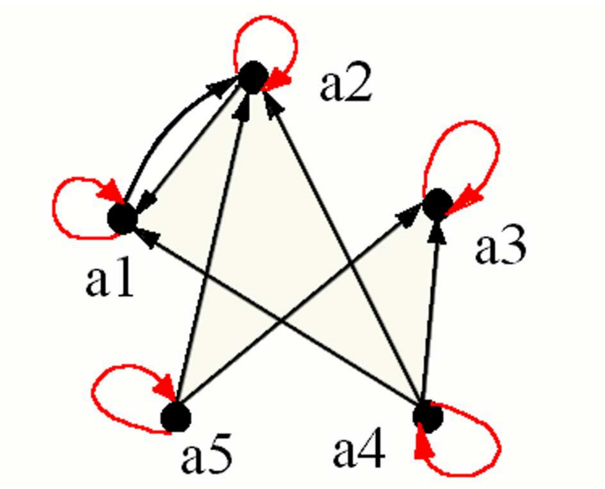
При задаванні відношенння *графом* кожний елемент має петлю – дугу **(*x*, *x*)**.

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_1),$$

$$(a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_5)\}$$



Антирефлексивність

Відношення R на множині $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots\}$ називають ***антирефлексивним***,

якщо <u>для довільних</u> x_i і x_j з $x_i R x_j$ випливає, що $x_i \neq x_j$.

Приклад 1. *Нехай задане відношення* $R \subset A \times A$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(a, b) | a < b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

В цьому відношенні всі елементи типу $(x_i, x_i) \notin R_1, (x_j, x_j) \notin R_1$

$$(1,1) \notin R_1, (2,2) \notin R_1, (3,3) \notin R_1, (4,4) \notin R_1,$$

якщо з $x_i R x_j$ випливає, що $x_i \neq x_j$.

$$1R_1 2 \equiv (1,2) \in R_1 \rightarrow 1 \neq 2 \quad 2R_1 3 \equiv (2,3) \in R_1 \rightarrow 2 \neq 3$$

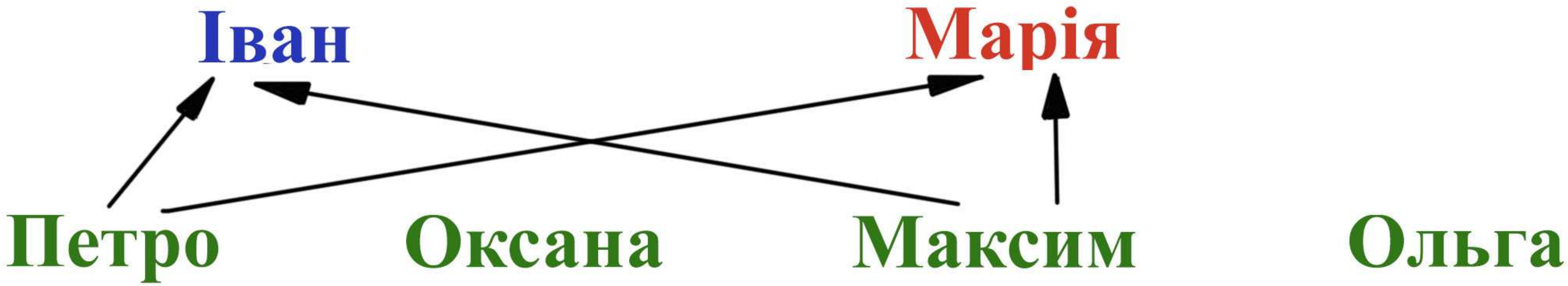
$$1R_1 3 \equiv (1,3) \in R_1 \rightarrow 1 \neq 3 \quad 2R_1 4 \equiv (2,4) \in R_1 \rightarrow 2 \neq 4$$

$$1R_1 4 \equiv (1,4) \in R_1 \rightarrow 1 \neq 4 \quad 3R_1 4 \equiv (3,4) \in R_1 \rightarrow 3 \neq 4$$

Приклад 2: з $x_i R x_j$ випливає, що $x_i \neq x_j$.

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}$.



$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \text{ на множині людей.}\}$

$R_2 = \{(\text{Петро},\text{Іван}),(\text{Петро},\text{Марія}),(\text{Максим},\text{Іван}),(\text{Максим},\text{Марія})\}$

$(\text{Петро},\text{Іван}) \in R_2 \to \text{Петро} \neq \text{Іван}$

$(\text{Максим},\text{Іван}) \in R_2 \to \text{Максим} \neq \text{Іван}$

$(\text{Петро},\text{Марія}) \in R_2 \to \text{Петро} \neq \text{Марія}$

$(\text{Максим},\text{Марія}) \in R_2 \to \text{Максим} \neq \text{Марія}$

Представлення антирефлексивного відношення матрицею

Визначення.

Для антирефлексивного відношення всі діагональні елементи *матриці* дорівнюють 0.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_4, a_1), (a_4, a_2)(a_4, a_3), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	1			
a_2	1	0			
a_3			0		
a_4	1	1	1	0	
a_5		1	1		0

Граф антирефлексивного відношення

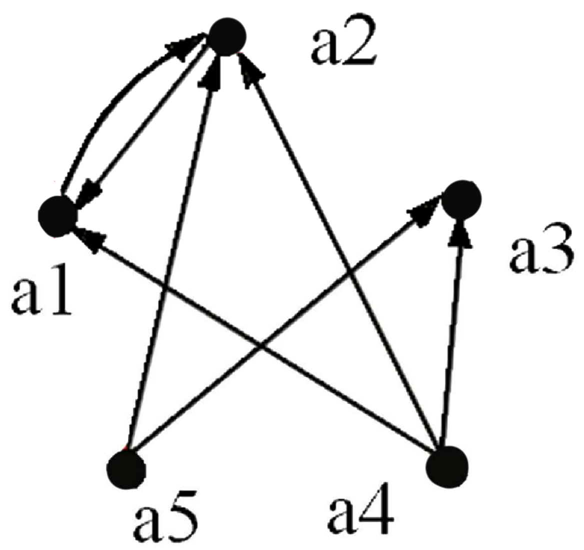
Визначення.

При задаванні відношення *графом* жодна з **вершина не має петлі** – немає дуг виду $\left(x_i, x_i\right)$.

Приклад 4. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$

$R = \left\{(a_1, a_2), (a_2, a_1), \left(a_4, a_1\right), \left(a_4, a_2\right)\left(a_4, a_3\right), \left(a_5, a_2\right), \left(a_5, a_3\right)\right\}$



Симетричність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення R на множині $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots\}$ називається

симетричним,

якщо для пари $(x_i, x_j) \in R$ з $x_i R x_j$ випливає $x_j R x_i$

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення $\boldsymbol{R}$ виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(a, b) | a \neq b - \text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(4,2),(2,4),(3,4)(4,3)\}$$

$$(1,2) \in R_1 \to (2,1) \in R_1 \quad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \in R_1$$

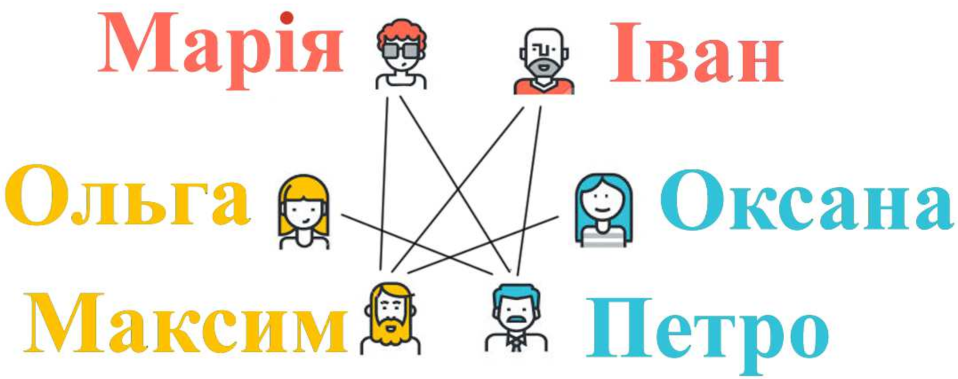
$$(1,3) \in R_1 \to (3,1) \in R_1 \quad (2,4) \in R_1 \to (4,2) \in R_1$$

$$(1,4) \in R_1 \to (4,1) \in R_1 \quad (3,4) \in R_1 \to (4,3) \in R_1$$

Приклад 2: з $x_i R x_j$ випливає $x_j R x_i$

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$.

$A = \{\text{Іван}, \text{Марія}, \text{Петро}, \text{Оксана}, \text{Максим}, \text{Ольга}\}$.



$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є родичем } b\}$

$(\text{Петро}, \text{Іван}) \in R_2 \to (\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Іван}) \in R_2 \to (\text{Іван}, \text{Максим}) \in R_2$

$(\text{Петро}, \text{Марія}) \in R_2 \to (\text{Марія}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Марія}) \in R_2 \to (\text{Марія}, \text{Максим}) \in R_2$

$(\text{Петро}, \text{Ольга}) \in R_2 \to (\text{Ольга}, \text{Петро}) \in R_2$

$(\text{Максим}, \text{Оксана}) \in R_2 \to (\text{Оксана}, \text{Максим}) \in R_2$

Представлення симетричного відношення матрицею

Визначення.

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_4), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_3, a_5), (a_5, a_3)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	x	1		1	
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1	0	1	x	
a_5		0	1		x

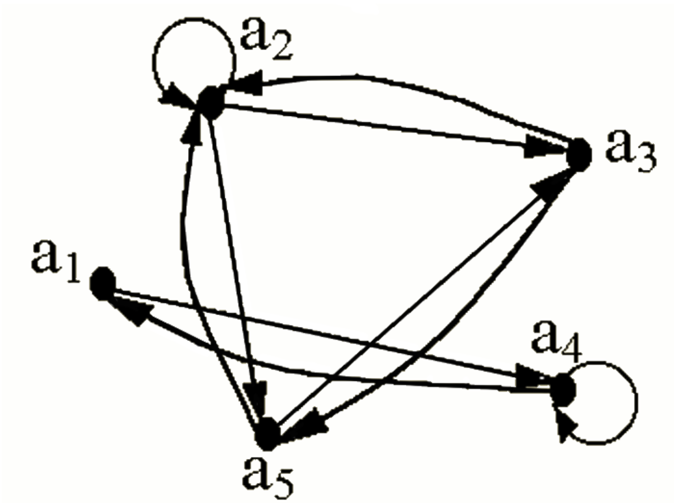
Представлення симетричного відношення графом

Визначення.

У графі для кожної дуги з x_i в x_j **існує протилежно спрямована дуга** з x_j в x_i.

Нехай задане відношення $R \subset A \times A$. $A = (1, 2, 3, 4, 5)$

$$R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_5), (a_3, a_5), (a_3, a_2), (a_4, a_4), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\}$$



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1			1	
a_5		1	1		

Антисиметричність

Відношення R на множині $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots\}$ називається антисиметричним,

якщо з існування $x_i R x_j$ і $x_j R x_i$ випливає, що $x_i = x_j$.

Антисиметричність не є оберненою до симетричності.

Приклад 1. Нехай $R_1 \subset A \times A$, $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - \text{на множині натуральних чисел}\},$$

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$$(1,1) \in R_1 \to (1,1) \in R_1, \qquad (1,2) \in R_1 \to (2,1) \notin R_1$$

$$(2,2) \in R_1 \to (2,2) \in R_1, \qquad (1,3) \in R_1 \to (3,1) \notin R_1$$

$$(3,3) \in R_1 \to (3,3) \in R_1, \qquad (2,3) \in R_1 \to (3,2) \notin R_1$$

Приклад 2.. з існування $x_i R x_j$ і $x_j R x_i$ випливає, що $x_i = x_j$

Нехай задано відношення $R_2 \subset A \times A$. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R_2 = \{(a, b) | a \text{ є дільником } b \text{ на множині дійсних чисел}\}$$

$(1,1) \to 1$, $(1,2) \to 1$, $(1,3) \to 1$ $(1,4) \to 1$,

$(2,2) \to 2$, $(2,4) \to 2$,

$(3,3) \to 3$, $(4,4) \to 4$.

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}.$$

В цьому відношенні з aR_1b і bR_1a випливає, що $a = b$.

$(1,1) \in R_2 \to (1,1) \in R_2$,

$(2,2) \in R_2 \to (2,2) \in R_2$,

$(3,3) \in R_2 \to (3,3) \in R_2$,

$(4,4) \in R_2 \to (4,4) \in R_2$

$(1,2) \in R_2 \to (2,1) \notin R_2$

$(1,3) \in R_2 \to (3,1) \notin R_2$

$(2,4) \in R_2 \to (4,2) \notin R_2$

Представлення антисиметричного відношення матрицею

Визначення.

1.Матриця антисиметричного відношення може мати одиниці на головній діагоналі.

2.Повністю відсутня симетрія відносно головної діагоналі.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_4, a_4)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5)\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1				
a_2	1	x			
a_3			x	1	1
a_4	1			1	
a_5					x

Представлення антисиметричного відношення графом

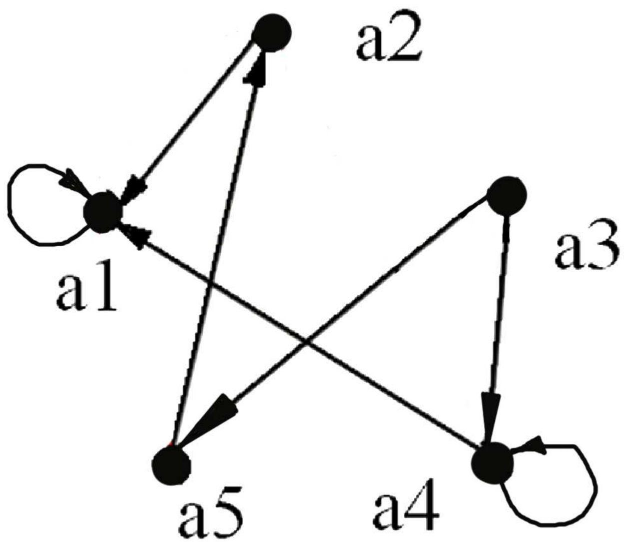
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_j не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_j в x_i при $x_i \neq x_j$.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_4, a_4)(a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_5, a_2)\}$



Асиметричність

Відношення R на множині $X=\{x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots\}$ називається

асиметричним,

якщо для довільної пари x_iRx_j не виконується x_jRx_i

включаючи $x_i=x_j$

(інакше кажучи, для будь-якої пари відношення ***R*** виконується або в одну сторону, або не виконується взагалі).

Приклад 1.

$$A=\{1,2,3,4\}\ \ R_1=\{(a,b)\,|\,a>b-\text{на множині цілих чисел}\}$$

$$R_1=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

$$(2,1)\in R_1\to(1,2)\notin R_1$$

$$(3,1)\in R_1\to(1,3)\notin R_1$$

$$(3,2)\in R_1\to(2,3)\notin R_1$$

$$(4,1)\in R_1\to(1,4)\notin R_1$$

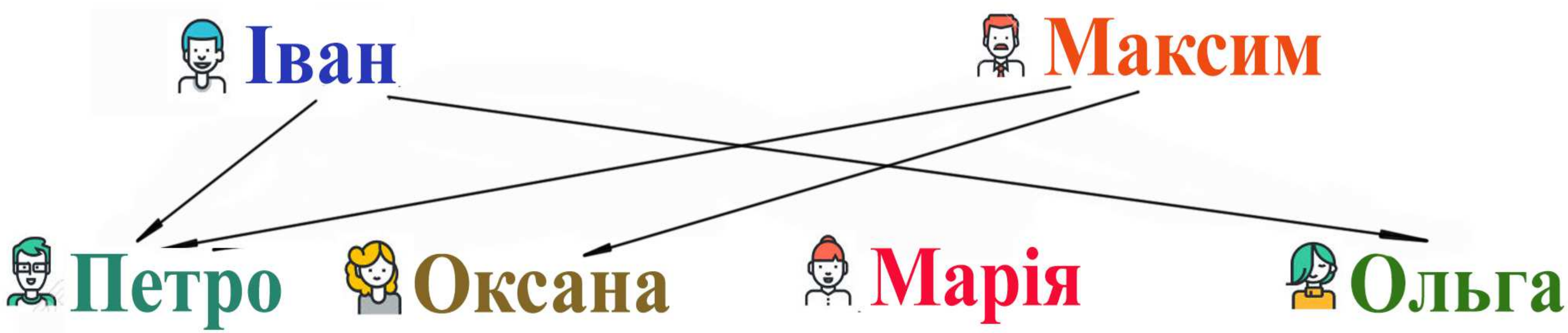
$$(4,2)\in R_1\to(2,4)\notin R_1$$

$$(1,1)\notin R_1,(2,2)\notin R_1,(3,3)\notin R_1,\ (4,4)\notin R_1$$

Приклад 2. для $x_i R x_j$ не виконується $x_j R x_i$ включаючи $x_i = x_j$

$$R_2 = \{(a,b) | a \text{ є сином } b \quad \text{на множині людей.}\}$$

$$\text{A}=\{\text{Іван,Марія,Петро,Оксана, Максим,Ольга}\}$$



$$(\text{Іван,Петро}) \in \text{R}_2 \rightarrow (\text{Петро,Іван}) \notin \text{R}_2$$
$$(\text{Іван, Ольга}) \in \text{R}_2 \rightarrow (\text{Ольга,Іван}) \notin \text{R}_2$$

$$(\text{Максим,Петро}) \in R_2 \rightarrow (\text{Петро,Максим}) \notin R_2$$
$$(\text{Максим,Оксана}) \in R_2 \rightarrow (\text{Оксана,Максим}) \notin R_2$$

Представлення асиметричного відношення матрицею

Визначення.

1.Матриця асиметричного відношення не містить одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі.

2. Відсутня симетрія

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \left\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\right\}$$

$$R = \left\{(a_2, a_1)\left(a_4, a_1\right)\left(a_3, a_4\right), \left(a_3, a_5\right), \left(a_2, a_5\right)\right\}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1					
a_2	1	x			1
a_3			x	1	1
a_4	1				
a_5					x

Представлення асиметричного відношення графом

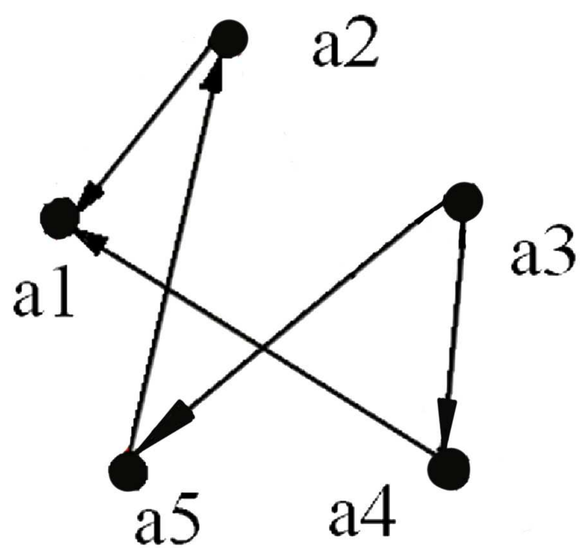
Визначення

У графі для кожної дуги з x_i в x_k не **існує протилежно спрямованої дуги** з x_k в x_i.

Приклад 3. Нехай задано відношення $R \subset A \times A$,

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$R = \{(a_2, a_1), (a_4, a_1)(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_5, a_2)\}$$



Граф орієнтований без петель

Транзитивність

Нехай задане відношення $R \subseteq X \times X$

Відношення R на множині $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots\}$ називають

транзитивним,

якщо для будь-яких x_i, x_j, x_k з $x_i R x_j$ і $x_j R x_k$ випливає $x_i R x_k$.

Приклад1.

$$R_1 = \{(a,b) | a \le b - \text{на множині натуральних чисел}\}$$

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R_1 = \{(2,3),(1,1),(2,4),(1,2),(2,2),(1,3),(1,4),(3,4),(3,3),(4,4)\}$$

$$(1,1,2) - (1,1),(1,2) \to (1,2),$$

$$(1,2,3) - (1,2),(2,3) \to (1,3)$$

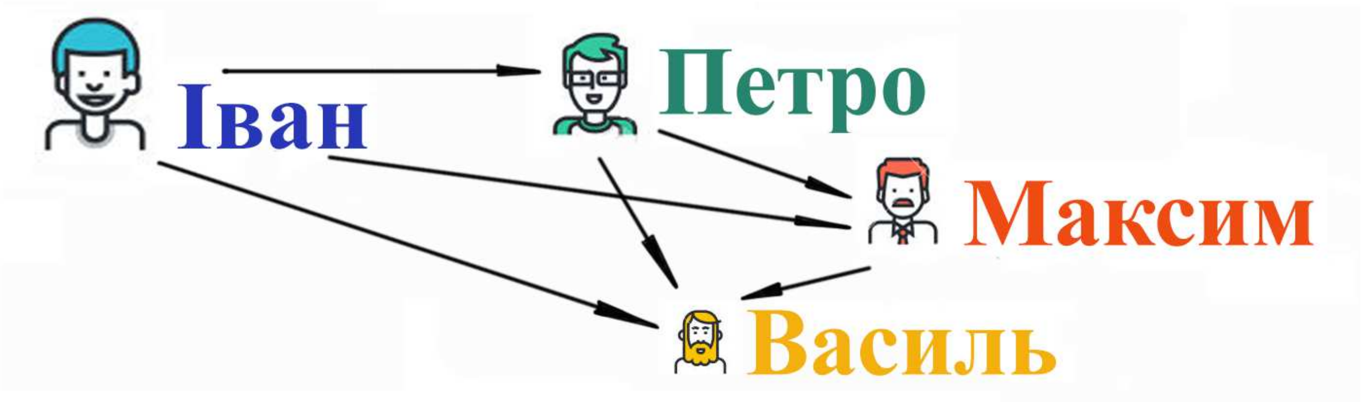
$$(1,3,4) - (1,3),(3,4) \to (1,4)$$

$$(3,4,4) - (3,4)(4,4) \to (3,4)$$

Приклад 2.

$$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ нащадок } b\}$$

$$A = \{\text{Іван}, \text{Петро}, \text{Василь}, \text{Максим}\} \quad R_2 \subseteq A \times A$$



$$R_2 = \{(\text{Іван}, \text{Петро}), (\text{Іван}, \text{Максим}), (\text{Іван}, \text{Василь}), (\text{Петро}, \text{Максим}), (\text{Петро}, \text{Василь}), (\text{Максим}, \text{Василь})\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Іван}, \text{Петро}) \in R_2 \\ (\text{Петро}, \text{Максим}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Іван}, \text{Максим}) \in R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Іван}, \text{Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим}, \text{Василь}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Іван}, \text{Василь}) \in R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{Петро}, \text{Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим}, \text{Василь}) \in R_2\end{array}\right. \Rightarrow (\text{Петро}, \text{Василь}) \in R_2$$

Задавання *графом*

У графі, що задає транзитивне відношення ***R***, для всякої пари дуг таких, що кінець першої збігається з початком другої, існує третя дуга, що має початок в спільній вершині з першою і кінець у спільній вершині з другою.

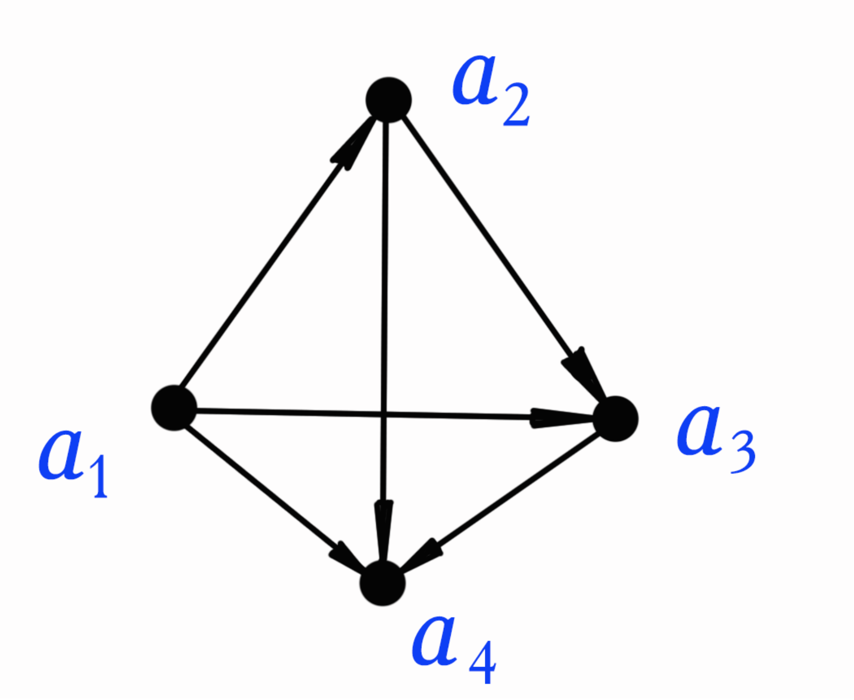
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $R_3 \subseteq A \times A$

$R_3 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_1, a_4), (a_2, a_4)\}$

$$\begin{matrix} (a_1, a_2) \in R_3 \\ (a_2, a_3) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_1, a_3) \in R_3$$

$$\begin{matrix} (a_1, a_3) \in R_3 \\ (a_3, a_4) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_1, a_4) \in R_3$$

$$\begin{matrix} (a_2, a_3) \in R_3 \\ (a_3, a_4) \in R_3 \end{matrix} \Rightarrow (a_2, a_4) \in R_3$$



Антитранзитивність

Відношення R на множині $X=\{x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_k,\ldots\}$ називають ***антитранзитивним***,

якщо для будь-яких x_i, x_j, x_k з $x_i R x_j$ і $x_j R x_k$ не існує $x_i R x_k$.

Приклад 1

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ є наступним роком за } b \text{ на множині років}\}$$

$$A = \{2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016\}$$

$$R_1 = \{(2010,2011),(2011,2012),(2012,2013),(2013,2014),$$
$$(2014,2015),(2015,2016)\}$$

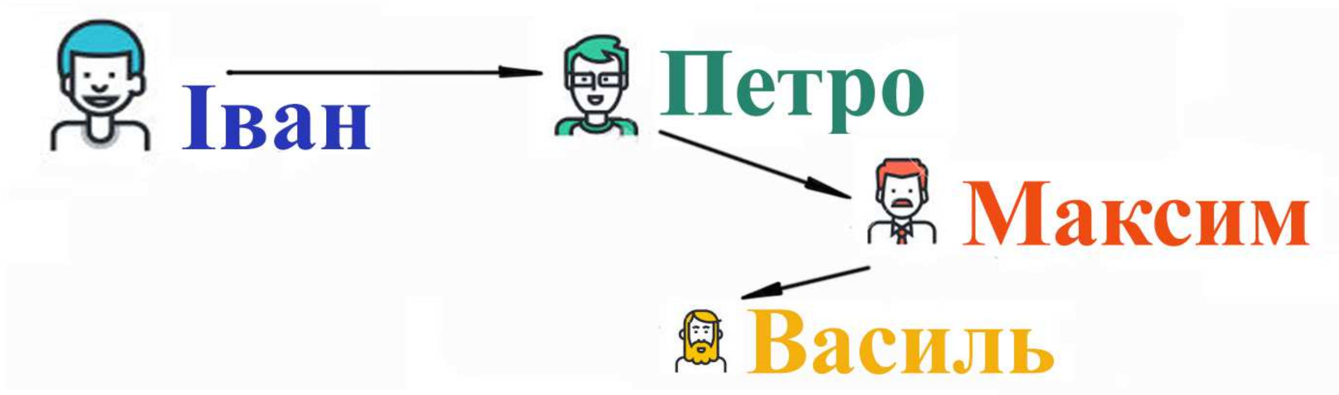
$$\begin{matrix}(2010,2011)\in R_1\\(2011,2012)\in R_1\end{matrix} \Rightarrow (2010,2012)\notin R_1$$

$$\begin{matrix}(2014,2015)\in R_1\\(2015,2016)\in R_1\end{matrix} \Rightarrow (2014,2016)\notin R_1$$

Приклад 2

$$A = \{\text{Іван}, \text{Петро}, \text{Василь}, \text{Максим}\},\ R_2 \subseteq A \times A$$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ є батьком } b\}$$



$$R_2 = \{(\text{Іван},\text{Петро}),(\text{Петро},\text{Максим}),(\text{Максим},\text{Василь})\}$$

$$\begin{array}{l}(\text{Іван},\text{Петро}) \in R_2 \\ (\text{Петро},\text{Максим}) \in R_2\end{array} \Rightarrow (\text{Іван},\text{Максим}) \notin R_2$$

$$\begin{array}{l}(\text{Петро},\text{Максим}) \in R_2 \\ (\text{Максим},\text{Василь}) \in R_2\end{array} \Rightarrow (\text{Петро},\text{Василь}) \notin R_2$$

Приклад визначення властивостей відношення

Нехай $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Нехай $R \subseteq X \times X$ визначене у вигляді:

$$R = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\delta,\alpha),(\delta,\delta),(\gamma,\delta),(\gamma,\gamma)\}.$$

1. R не є рефлексивним, оскільки $\beta \in X$, але $(\beta,\beta) \notin R$.
2. R не є антирефлексивним оскільки $(\alpha,\alpha) \in R$.
3. R не є симетричним, оскільки $(\gamma,\delta) \in R$, але $(\delta,\gamma) \notin R$.
3. R не є антисиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ й $(\beta,\alpha) \in R$, але $\alpha \neq \beta$.
4. R не є асиметричним, оскільки $(\alpha,\beta) \in R$ та $(\beta,\alpha) \in R$
5. R не є транзитивним, оскільки $(\beta,\alpha) \in R, (\alpha,\delta) \in R$, але $(\beta,\delta) \notin R$.
6. R не є антитранзитивним, оскільки $(\alpha,\alpha) \in R$ та $(\alpha,\beta) \in R$

Види відношень

1. Відношення еквівалентності

Елементи називають еквівалентними, якщо довільний з них може бути замінений іншим.

У цьому випадку говорять, що дані елементи перебувають у відношенні еквівалентності.

Властивості відношення еквівалентності

Відношення R на множині X є **відношенням еквівалентності,** якщо воно

рефлексивне,

симетричне,

транзитивне.

У чому проявляються властивості еквівалентності?

1. Властивість **рефлексивності** проявляється в тому, що кожний елемент еквівалентний самому собі або $x \equiv x$.

2. Висловлювання про те, що два елементи є еквівалентними, не вимагає уточнення, який з елементів розглядається першим, а який – другим, тобто має місце $x \equiv y \to y \equiv x$ – властивість **симетричності.**

3. Два елементи, які еквівалентні третьому, також є еквівалентними між собою, або має місце $x \equiv y$ і $y \equiv z \to x \equiv z$ – властивість **транзитивності.**

Позначення відношень еквівалентності

Як загальний символ відношення еквівалентності використовується символ «$\equiv$» .

Для окремих відношень еквівалентності використовуються інші символи:

«=» – для позначення рівності;

«$\|$» – для позначення паралельності;

«$\leftrightarrow$» або «$\rightleftarrows$» – для позначення логічної еквівалентності.

Приклад. Розглянемо приклади множин еквівалентності

$R_1 = \{(a,b) | a \text{ еквівалентне } b \text{ на множині чисел}\}$.

Нехай задане відношення $R_1 \subseteq X \times X$ на множині $X = \{1,2,3\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Визначимо його властивості:

1. Рефлексивність:

Кожний елемент еквівалентний самому собі: $1R_1 1, 2R_1 2, 3R_1 3$.

2. Симетричність:

з $1R_1 2$ випливає, що $2R_1 1$,

з $1R_1 3$ випливає, що $3R_1 1$,

з $2R_1 3$ випливає, що $3R_1 2$.

3. Транзитивність:

Якщо $1R_1 2$ і $2R_1 3$, то $1R_1 3$. Якщо $1R_1 3$ і $3R_1 2$, то $1R_1 2$.

Якщо $2R_1 1$ і $1R_1 3$, то $2R_1 3$. Якщо $2R_1 3$ і $3R_1 1$, то $2R_1 1$.

Якщо $3R_1 1$ і $1R_1 2$, то $3R_1 2$. Якщо $3R_1 2$ і $2R_1 1$, то $3R_1 1$.

Приклад

Нехай задане відношення $R_2 \subseteq X \times X$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ вчиться в одній групі з } b \text{ на множині студентів}\}$$

Нехай $X = \{Іван, Ольга, Максим\}$

$$R_2 = \{(Іван, Ольга), (Іван, Максим), (Іван, Іван),$$
$$(Ольга, Іван), (Ольга, Ольга), (Ольга, Максим)$$
$$(Максим, Іван), (Максим, Ольга), (Максим, Максим)\}$$

Рефлексивність: «Іван вчиться в одній групі із самим собою»

Симетричність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою»$\equiv$ «Ольга вчиться в одній групі з Іваном».

Транзитивність: «Іван вчиться в одній групі з Ольгою » і «Ольга вчиться в одній групі з Максимом» $\rightarrow$ «Іван вчиться в одній групі з Максимом»

Отже, відношення R_2 є еквівалентним.

Класи еквівалентності

Відношення еквівалентності R на множині A **розбиває** його **на підмножини**, елементи яких еквівалентні один одному й не еквівалентні елементам інших підмножин.

Визначення*.*

.

Класами еквівалентності називають підмножини, що не перетинаються та отримані в результаті розбиття множини A відношенням еквівалентності R

Визначення*.* Множину класів еквівалентності множини A відносно R називають **фактор-множиною і** позначають $[A]_R$.

Приклад

Нехай множина K — це набір різнокольорових повітряних кульок.

1. Відношення R_1 задамо умовою: $(a,b) \in R_1$ якщо «a одного кольору з b».*Одержимо класи еквівалентності з кульок одного кольору.*

2. Відношення R_2 задамо умовою:

$(a,b) \in R$ якщо «a одного розміру з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок одного розміру

3. Відношення R_3 задамо умовою:

$(a,b) \in R$ якщо «a однакової форми з b»

Одержимо класи еквівалентності з кульок однакової форми.

Множина К

$A =$ {*колір, розмір, форма*}

Визначення класу еквівалентності

Нехай $a_i \in A$ – *елемент множини* $A=\{a_1,a_2,...,a_i,...,a_n\}$. Тоді $[a_i]$ позначає підмножину множини X для елементів якої $x \in X$ справедливе відношення $R_i = \{x | (x, a_i)\}$*де* $R_i \in R$. *Множину* $[a_i]$ називають ***класом еквівалентності відносно*** a_i.

$[A]_R = \{[a_1],[a_2],...,[a_n]\}$- множина всіх класів еквівалентності. *Отже,* $[A]_R$ *- фактор-множина.*

Приклад. Нехай дано множини A={“парне”,”непарне”} і дано множину $X = \{1,123,16,34,67,73,80,25\}$

Класи еквівалентності $[a_i]$ отримаємо шляхом визначення класу еквівалентності кожного елемента множини A:

$$\left[\text{парне}\right] = \left\{x \middle| \text{парне число}\right\} = \left\{16, 34, 80\right\}$$ де

$$16 \in \left[\text{парне}\right] \Rightarrow 16 \bmod 2 = 0$$

$$34 \in \left[\text{парне}\right] \Rightarrow 34 \bmod 2 = 0$$

$$80 \in \left[\text{парне}\right] \Rightarrow 80 \bmod 2 = 0$$

Так само одержуємо

$$\left[\text{непарне}\right] = \left\{x \middle| \text{непарне число}\right\} = \left\{1, 123, 67, 73, 25\right\}$$

$$1 \in \left[\text{непарне}\right] \Rightarrow 1 \bmod 2 = 1$$

$$123 \in \left[\text{непарне}\right] \Rightarrow 123 \bmod 2 = 1$$

$$67 \in \left[\text{непарне}\right] \Rightarrow 67 \bmod 2 = 1$$

$$73 \in \left[\text{непарне}\right] \Rightarrow 73 \bmod 2 = 1$$

$$25 \in \left[\text{непарне}\right] \Rightarrow 25 \bmod 2 = 1$$

$$\left[A\right]_R = \left\{\left\{16, 34, 80\right\}, \left\{1, 123, 67, 73, 25\right\}\right\}$$

Приклад. Нехай Q – множина раціональних чисел.

Розіб'ємо Q на класи еквівалентності, для яких a/b – раціональний дріб, де $a \in Z, b \in N$.

Будь-який дріб c/d буде віднесений до одного класу еквівалентності з a/b тоді й тільки тоді, коли $a\big/b = c\big/d$ або

$ad = bc$. (Наприклад: $2/4 \equiv 3/6$ бо $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12$).

Властивості такого відношення.

1. **Рефлексивність.** Для будь-якого дробу a/b виконується рівність $ab = ba$. Отже, $a/bRb/a$ тобто $a=b$.

2. **Симетричність.** Якщо $a/bRc/d$, то $ad=bc$, у той же час $bc = ad$. Звідси $c/d\ Ra/b$.

3. **Транзитивність.** Нехай $a/bRc/d$ і $c/dRm/n$. Доведемо, що $a/bRm/n$, тобто $an = bm$. Дійсно, оскільки $a/bRc/d$, то $ad = bc$ і $c/dRm/n$, те $cn = dm$. Домножимо першу рівність на n, а другу на b, одержимо $and = bcn$ і $bcn = bmd$. В обох рівностях присутнє bcn. Тому $and = bmd$ або $an = bm$.

Замикання множини

Визначення. Множину A називають замкнутою відносно деякої операції, якщо результатом виконання даної операції над елементами множини A завжди буде елемент, який належить множині A.

Приклад. Нехай множина N - це множина натуральних чисел. Розглянемо операцію «+» на множині N. Чи є множина N замкнутою відносно операції «+».

Розв'язок. Нехай $n \in N$ і $m \in N$. Тоді $n + m = k \in N \ \forall \ n, m \in N$

Приклад. Нехай множина Z є множиною цілих чисел, а множина N - це множина натуральних чисел.

Довести, що замиканням для множини N відносно операції «-» є множина Z.

Розв'язок. Нехай $n \in N$ і $m \in N$.

Тоді $\begin{cases} n - m = k \in N \ \forall \ n > m \rightarrow k \in Z \\ n - m = k \in N \ \forall \ n = m \rightarrow k \in Z \ \forall \ n, m \in N \\ n - m = k \in N \ \forall \ n < m \rightarrow k \in Z \end{cases}$

Завдання 1

Нехай приміщення лабораторії складається із трьох кімнат. Усього співробітників у лабораторії – 8.

Множина всіх співробітників: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

Множина співробітників в 1-й кімнаті: $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

Множина співробітників в 2-й кімнаті: $X_2 = \{x_4\}$

Множина співробітників в 3-й кімнаті: $X_1 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$

$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

Питання 1.

Записати матрицю відношення R, заданого предикатом:

$R = \{(x, y) \mid "x \ \textit{працює в одній кімнаті з} \ y"\}$

ВІДПОВІДЬ НА ЗАПИТАННЯ 1

Відношення

$$R = \{(x, y) \mid "x \ \textit{працює в одній кімнаті з} \ y"\}$$

Представлене матрицею

$$\begin{array}{cc}
R & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Питання 2

Визначите властивості відношення R і його вид