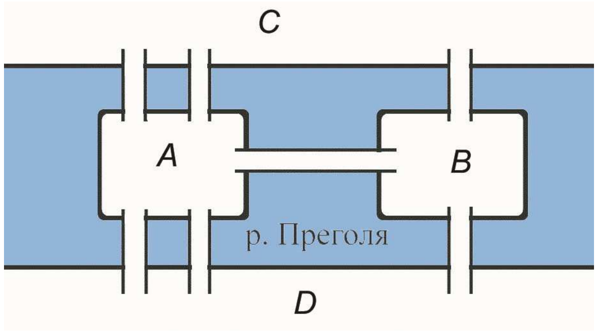
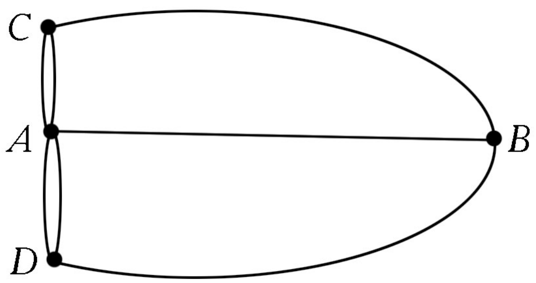
ЛЕКЦІЯ 13

ШЛЯХИ І ЦИКЛИ ЕЙЛЕРА
ГАМІЛЬТОНІВ ЦИКЛ У ГРАФІ

Задача про кенінгсбергські мости

Згадаймо задачу про кенігсбергські мости. Ця задача полягала у тому, що вийшовши з певного місця, необхідно пройти по кожному з мостів тільки один раз і повернутися у початкову точку.
Саме ця задача пов’язана з іменем швейцарського математика Леонарда Ейлера, який вперше долучився до вирішення цієї задачі, яка привела до створення теорії графів.

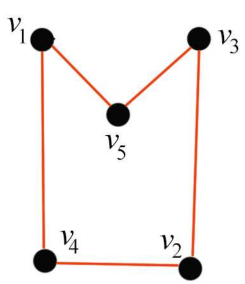




Шляхи і цикли Ейлера

Визначення 1. Ейлеровий шлях у графі $G(V,E)$ - це шлях, який проходить через кожне ребро даного графа тільки один раз, тобто існує така перестановка послідовністі ребер $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, що кожне ребро $e_i \in E, 1 \le e_i \le n$, яке інцедентне до сусідніх вершин даної послідовності, зустрічається тільки один раз.

Визначення. Ейлеровий цикл у графі $G(V,E)$ - це ейлеровий шлях, який починається і закінчується у одній і тій самій вершині



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

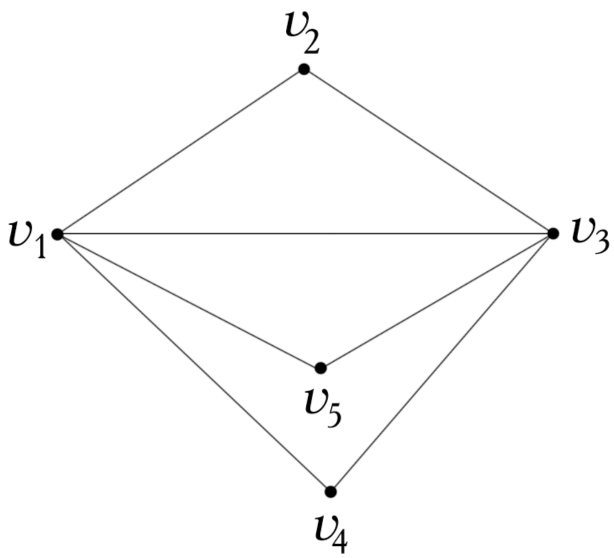
Ейлеровий цикл:

$$(v_1, v_5) \to (v_5, v_3) \to (v_3, v_2) \to (v_2, v_4) \to (v_4, v_1)$$

Теорема про ейлеровий цикл у неорієнтованому графі

Теорема. Граф (мультиграф) з більше, ніж однією вершиною має цикл Ейлера тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і кожна його вершина має парний степінь.

Приклад. Наведений на рисунку граф має цикл Ейлера, оскільки степінь кожної його вершини парна.



Якщо задати цикл, як послідовність проходження вершин, то можна отримати такі ейлерові цикли:

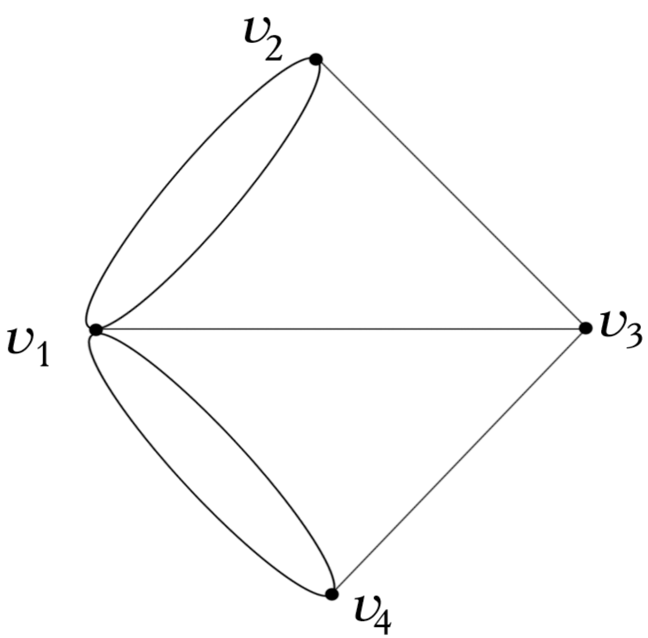
$\left(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_3, v_1\right)$,

$\left(v_4, v_3, v_2, v_1, v_3, v_5, v_1, v_4\right)$,

і т. д.

Застосування теореми про ейлеровий цикл до задачі про кенінгсбергські мости на мультиграфі

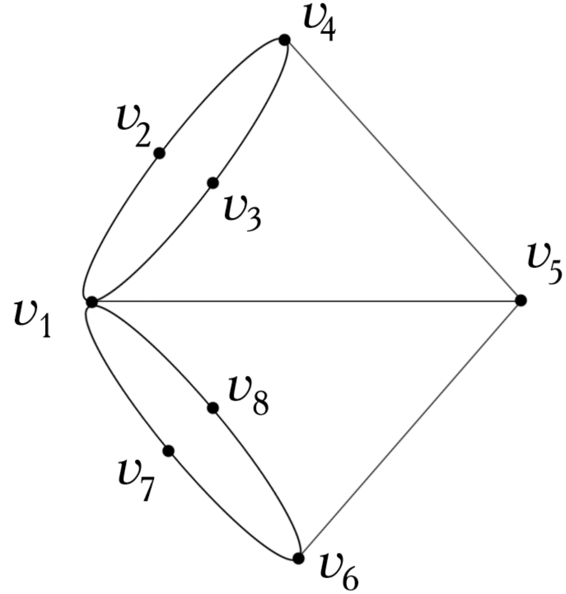
Розглянемо граф кенінгсбергських мостів.



Цей граф має непарні степені всіх його вершин. Отже, цей мультиграф не має циклу Ейлера, тому неможливо пройти кожний міст по одному разу і повернутися у початкову точку шляху відповідно до теореми.

Застосування теореми про ейлеровий цикл до задачі про кенінгсбергські мости на графі

Задачу про кенінгсбергські мости можна розв'язати, використовуючи простий граф. Для цього початковий мультиграф необхідно привести до простого графа шляхом введення додаткових вершин:

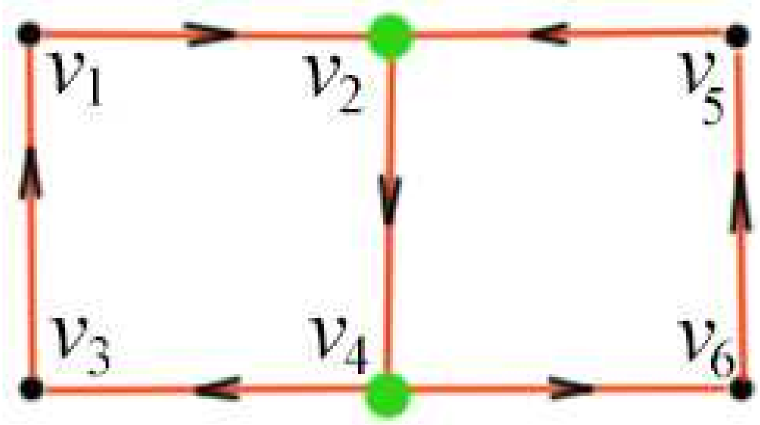


Якщо поставити задачу не повертатися у початкову точку, то попередня задача зводиться до пошуку шляху в графі.

Ейлеровий шлях

Нехай $G(V,E)$ — граф і існує шлях, який включає кожне ребро графа G тільки один раз. Ми називаємо такий шлях у графі G *шляхом Ейлера*.

У випадку, коли шлях Ейлера не є циклом Ейлера, його називають власним шляхом Ейлера.

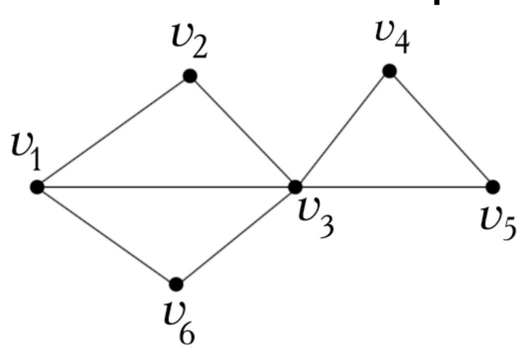


Теорема про власний шлях Ейлера у неорієнтованому графі

Теорема. Граф або мультиграф має власний шлях Ейлера тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь.

Оскільки граф для кенігсбергських мостів має чотири вершини з непарними степенями, можна зробити висновок про неможливість пройти кожний міст по одному разу, навіть якщо не потрібно повертатися у початкову точку маршруту.

Приклад. На рисунку показано граф, який має шлях Ейлера, оскільки дві його вершини мають непарний степінь.



Приклад шляху Ейлера:

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_6 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_3.$$

Цикл Ейлера в орієнтованому графі.

Визначення орієнтованого ейлерового шляху. Нехай $G=(V,E)$ — орієнтований граф. *Орієнтований ейлеровий шлях* – це шлях ненульової довжини, який включає всі дуги без їх повторення.

Визначення ейлерового циклу в орграфі.
Нехай $G=(V,E)$ — орієнтований граф. Орієнтований шлях Ейлера називають *циклом Ейлера, якщо він починається і закінчується в одній і тій же вершині.*

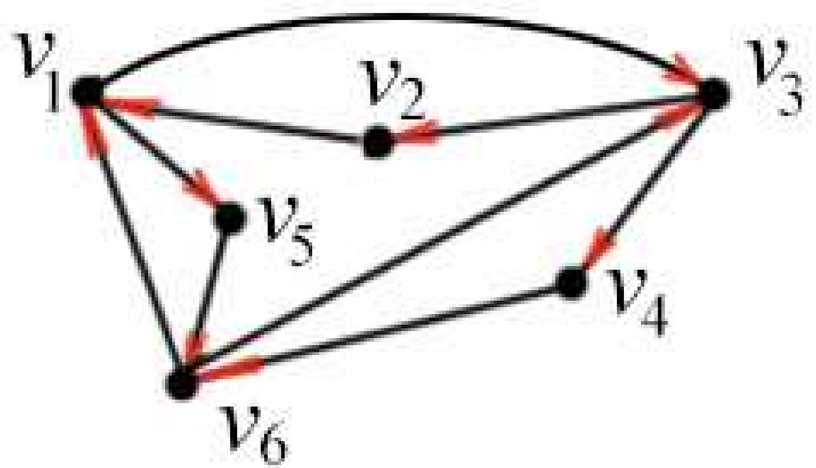
Визначення ейлерового графа
Граф називають ейлеровим, якщо він має ейлеровий цикл.
Ейлеровий граф є зв'язним графом оскільки ейлеровий цикл зв'язує всі вершини графа.

Теорема про ейлеровий цикл у орграфі

Теорема. Орієнтований граф має цикл Ейлера тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і напівстепінь входу кожного вузла дорівнює напівстепені виходу цього ж вузла.

Приклад. Розглянемо орієнтований граф $G(V, E)$ де

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$



Приклад ейлерового циклу у орграфі:

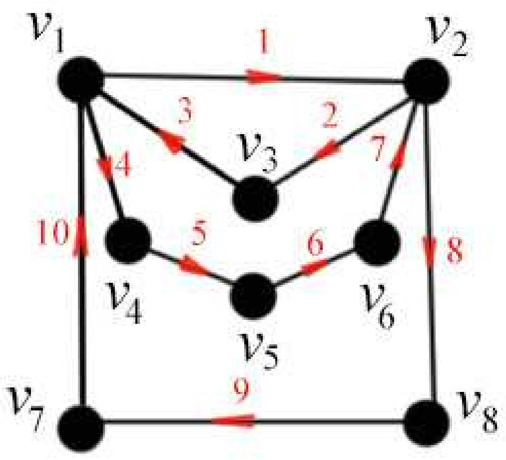
$$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_1 \to v_5 \to v_6 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_1$$

Алгоритм побудови циклу Ейлера

1.Виходимо з довільно обраної вершини v і кожне пройдене ребро закреслюємо.

2. Ніколи не йдемо по тому ребру e, яке в даний момент є мостом (тобто при видаленні якого граф, утворений незакресленими ребрами, розпадається на дві компоненти зв'язності, що мають хоча б по одному ребру).

3. Не вибираємо ребро, що веде в v, поки є інші можливості.



Псевдокод алгоритму знаходження циклу Ейлера

Рекурсивний варіант функції

```
def euler_loop_finder (v):
 Вибираємо ребро, що виходить з вершини v
```

Знайдене ребро видаляємо з графа

Викликаємо функцію Euler_loop_finder(вершина, на яку спирався другий кінець видаленого ребра)

```
  Додаємо вершину до відповіді.
```

Ідея полягає в об'єднанні всіх простих циклів в один.

Результуючим циклом і буде цикл Ейлера

Псевдокод алгоритму знаходження циклу Ейлера

Нерекурсивний варіант функції

```
def euler_loop_finder (v):
 Задаємо стек
 Вибираємо початкову вершину v і кладемо в стек
 while (стек не пустий):
    if deg(v)=0:
        додаємо вершину v до відповіді
        видаляємо вершину v зі стека
    else:
      знаходимо довільне ребро e,
      що виходить з v
      видаляємо ребро e з графа
      вершину, на яку спиралося ребро e,
      кладемо в стек
```

Код алгоритму пошуку ейлерового циклу на Python

```
def find_deg(v, g):
    deg = 0
    for (x, y) in g:
        if v == x or v == y:
            deg += 1

    return deg


def find_edge_and_index(v, g):
    edge = ();
    index = -1

    for i in range(len(g)):
        if (v == g[i][0] or v == g[i][1]):
            edge, index = g[i], i
            break

    return index, edge
```

```
def euler_loop(g):
    my_st = [];
    fin_path = []
    my_st.append(g[0][0])

    while len(my_st) > 0:
        v = my_st[len(my_st) - 1]
        deg = find_deg(v, g)
        if deg == 0:
            my_st.pop()
            fin_path.append(v)
        else:
            index, edge = find_edge_and_index(v, g)
            g.pop(index)
            my_st.append(edge[1] if v == edge[0] else edge[0])
    return fin_path
g = [(0, 3),(6, 5), (5, 1), (5, 9), (2, 1),
        (2, 8), (5, 0), (3, 9), (1, 7),
        (4, 2), (6, 2), (4, 1),  (8, 7)]

print((euler_loop(g)))
```

Цикли та послідовності де Брейна

Визначення. Послідовність де Брейна для двох натуральних чисел n і k це послідовність з k^n, цифр у системі числення з основою k.

Визначення. Циклом де Брейна називають циклічну послідовність де Брейна, в якій (послідовності) будь-яка можлива підпослідовність довжини n зустрічається рівно один раз.

Приклад. Розглянемо приклади циклів де Брейна для різних k і n .

1.$n = 1, k = 2$: Цикл де Брейна є послідовність 01, тому що

Перевірка: можливі підпослідовності довжини 1: «0» і «1».

2.$n = 2, k = 2$: послідовність 0011 є послідовність де Брейна

Перевірка: можливі підпослідовності довжини 2: 2^2

«01», «11», «00» і, завдяки циклічності, «10».

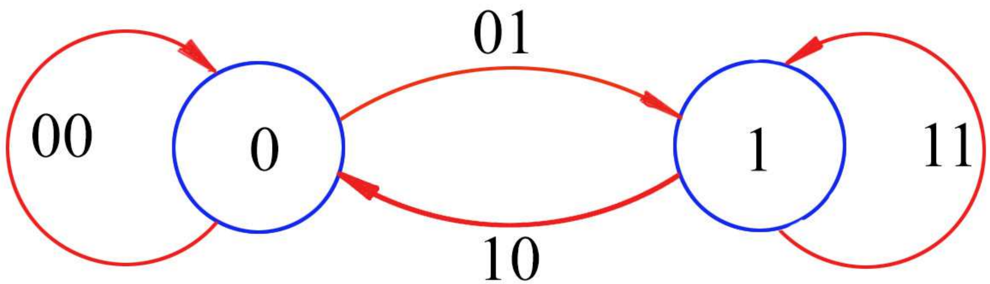
3. $n = 3, k = 2$: послідовність 00010111 є послідовнсть де Брейна

Перевірка: можливі підпослідовності довжини 3: $2^3 = 8$
«000», «001», «010», «101», «011», «111», «110», «100»

Визначення. Граф де Брейна.

Граф де Брейна для натуральних чисел k і n - це орієнтований граф, вершинами якого є всі можливі послідовності довжини n у системі числення з основою 2, а ребра з'єднують ті і тільки ті пари вершин, для яких останні $n-1$ цифр першого числа збігаються з першими $n-1$ цифрами другого числа.

Приклад графа де Брейна для $k = 2$ і $n = 1$

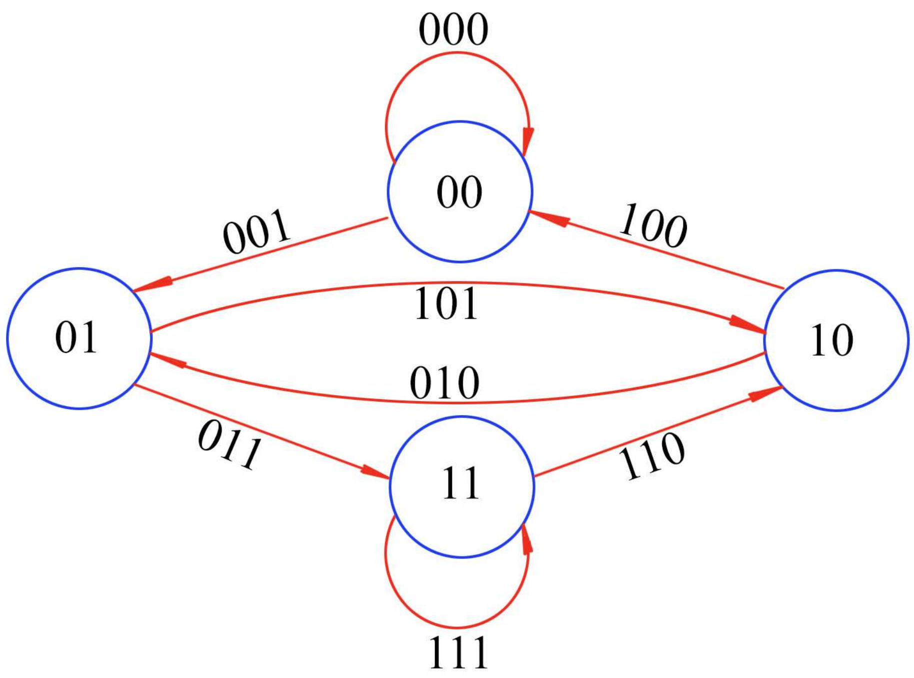


Множина вершин графа $V = \left\{0,1\right\}$

Множина ребер графа $E = \left\{(00),(01),(10),(11)\right\}$

Матриця суміжності: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Приклад графа де Брейна для $k = 2$ і $n = 2$



Множина вершин графа $V = \{00, 01, 10, 11\}$

Множина ребер графа
$E = \{(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}$

Цикли Гамільтона (Основні визначення)

Визначення. *Гамільтоновим ланцюгом* графа називають його простий ланцюг, який проходить через кожну вершину графа точно один раз.

Визначення. Цикл графа, що проходить через кожну його вершину, називають *гамільтоновим циклом*.

Визначення. Граф називають *гамільтоновим*, якщо він має гамільтонів цикл.

Визначення. Граф, який містить простий шлях, що проходить через кожну його вершину, називають *напівгамільтоновим.*

Це визначення можна поширити на орієнтовані графи, якщо шлях вважати орієнтованим. Гамільтонів цикл не обов'язково містить усі ребра графа. Ясно, що гамільтоновим може бути тільки зв'язний граф і що будь-який гамільтонів граф є напівгамільтоновим. Помітимо, що гамільтонів цикл існує далеко не в кожному графі.

Зауваження: Будь-який граф *G* можна перетворити в гамільтонів граф, додавши достатню кількість вершин. Для цього, наприклад, достатньо до вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа *G* додати вершини $u_1, \ldots, u_p$ і множину ребер $\{v_i, u_i\}$ і $\{u_i, v_{i+1}\}$.

Теорема. Нехай G має $|V| = p \geq 3$ вершин. Якщо справджуються дві умови:

1. Для будь-якого натурального n, що задовольняє нерівності $1 \leq n \leq \dfrac{p-1}{2}$, кількість вершин зі степенями, що не перевищують n менша за n, тобто

$$\left|\left\{v \in V \mid \deg(v) \leq n\right\}\right| < n \text{ при } 1 \leq n \leq (p-1)/2$$

2.Для непарного p кількість вершин зі степенем, що не перевищує $\frac{p-1}{2}$ у загальній кількості не перевищує $\frac{p-1}{2}$, то G – гамільтонів граф.

Наслідок 1. Якщо $p \geq 3$ і $\deg u + \deg v \geq p$ для будь-якої пари u і v несуміжних вершин графаG, то G – гамільтонів граф.

Наслідок 2. Якщо $p > 3$ і $\deg v \geq \frac{p}{2}$ для будь-якої вершини v графа G, то G – гамільтонів граф.

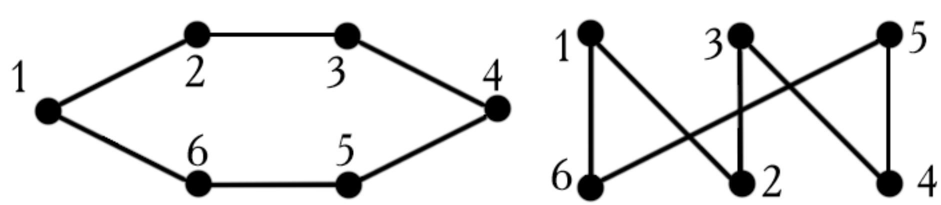
Теорема. У повному графі $G\left(V, E\right)$ завжди існує гамільтонів шлях.

Плоскі і планарні графи
Загальні поняття про плоский граф

У визначенні графа як геометричної фігури до цього ми не накладали ніяких обмежень на розташування фігури в просторі. Тепер же будемо говорити, що граф зображений на поверхні (площини, сфері, і т.п.), якщо всі його **вершини і ребра належать цій поверхні**.

Визначення. Граф, зображений на площині, називається *плоским,* якщо його ребра не перетинаються в точках, відмінних від вершин графа.

Відзначимо, що властивість графа ***бути або не бути плоским*** *— це властивість геометричного зображення, а не алгебраїчного об'єкта.*



G_1 і G_2-ізоморфні, G_1 - плоский, а G_2 - неплоский.

Загальні поняття про планарний граф

Таким чином, термін «плоский граф» завжди відноситься до **конкретного** (одного з багатьох) геометричного зображення графа.

Той самий граф (як множина вершин + множина ребер) може мати **як плоскі, так і не плоскі зображення**.

У той же час, принципове питання, на яке потрібно відповідати при розв'язуванні задач типу прокладки комунікацій: «Чи має даний граф хоча б одне плоске зображення?» Визначимо клас графів, для яких відповідь на це питання позитивна.

Визначення. Граф називають ***планарним***, якщо він ізоморфний плоскому графу.

Іншими словами. *Планарним графом* називають граф, який може бути зображений на площині, так що його ребра не перетинаються.

Укладання графа на поверхні

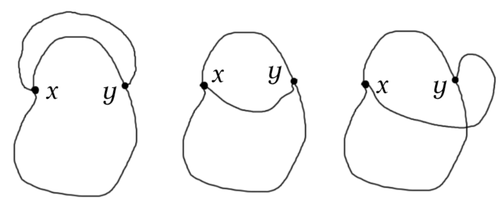
Про планарні графах говорять, що вони мають **плоске укладання**, або що вони **укладаються на площині**.

Можна визначити укладання графів не тільки на площині, але і на **інших поверхнях** у просторі.

Властивість графа укладатися на поверхні безумовно **залежить від виду цієї поверхні**.
Однак багато поверхонь з огляду на укладання графів нічим **не відрізняються від площини**.

Введемо поняття жорданової кривої.
Жордановою кривою на площині називають неперервну криву лінію без самоперетинань.
Замкненою жордановою кривою називають жорданову криву, початок і кінець якої збігаються.

Теорема Жордана. Якщо S – замкнена жорданова крива на площині, а x і y – дві різні точки цієї кривої, то будь-яка жорданова крива, що з'єднує точки x і y, або повністю лежить всередині S, крім точок x і y, або поза кривою S, окрім точок x і y, або перетинає криву S в деякій точці, відмінній від точок x і y.

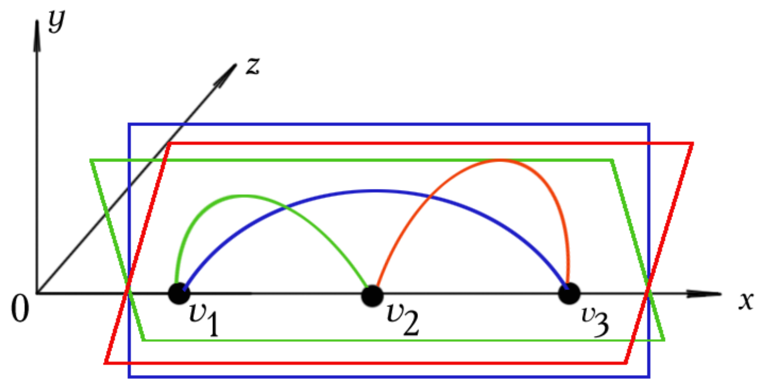


На рисунку показано три варіанти взаємного розташування жорданових кривих.

Будемо говорити, що граф G укладається в просторі L, якщо існує взаємно однозначне відображення графа G вершин у точки і ребер у жорданові криві цього простору таке, що криві, які відповідають різним ребрам, перетинаються в інцидентних даним ребрам вершинах. Зображений у такий спосіб граф G у просторі L називають укладанням графа G.

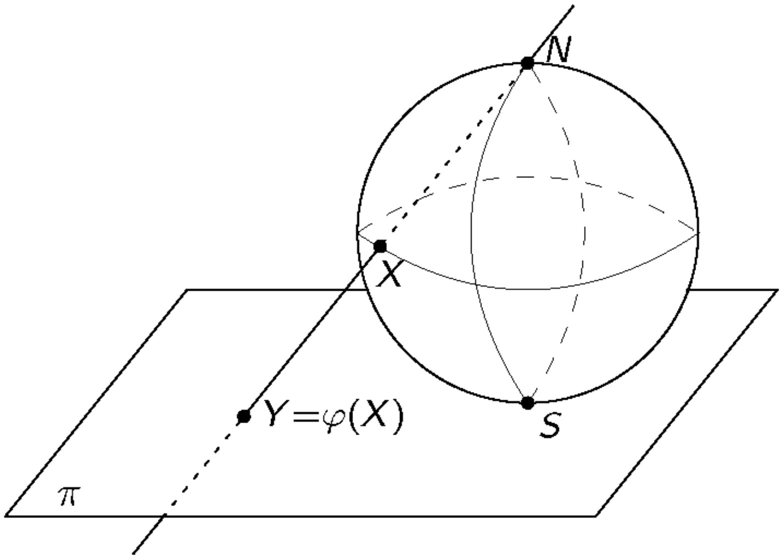
Теорема. Будь-який граф укладається в тривимірному просторі.

Доведення. Розмістимо всі вершини графа $G = \left(V, E\right)$ на осі OX. З пучка площин, що проходять через цю вісь, виберемо $\left|E\right|$ різних площин. Далі кожне ребро $\left(u, v\right) \in E$ зобразимо у відповідній площині півколом, що проходить через вершини u і v. Ясно, що в результаті одержимо укладення графа G в тривимірний простір, оскільки всі ребра лежать у різних площинах і тому не перетинаються ні в яких точках, крім вершин.



Теорема. Граф укладається на сфері тоді і тільки тоді, коли він планарний.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай граф G укладений на сфері; побудуємо його ізоморфізм на плоский граф. Для цього виберемо на сфері точку N, що не належить G, а в діаметрально протилежній до точки N точці S проведемо до сфери дотичну площину π (див. рис.). Розглянемо довільну пряму, що проходить через N не паралельно π. Ця пряма не є дотичною до сфери, оскільки дотичні площини до сфери в точках N і S паралельні. Отже, така пряма має лише одну спільну точку X зі сферою, відмінну від N, і лише одну спільну точку Y із площиною. Визначимо функцію φ, яка переводить будь-яку точку X сфери, що не збігається з N, у точку Y площини π, *що* лежить на прямій NX



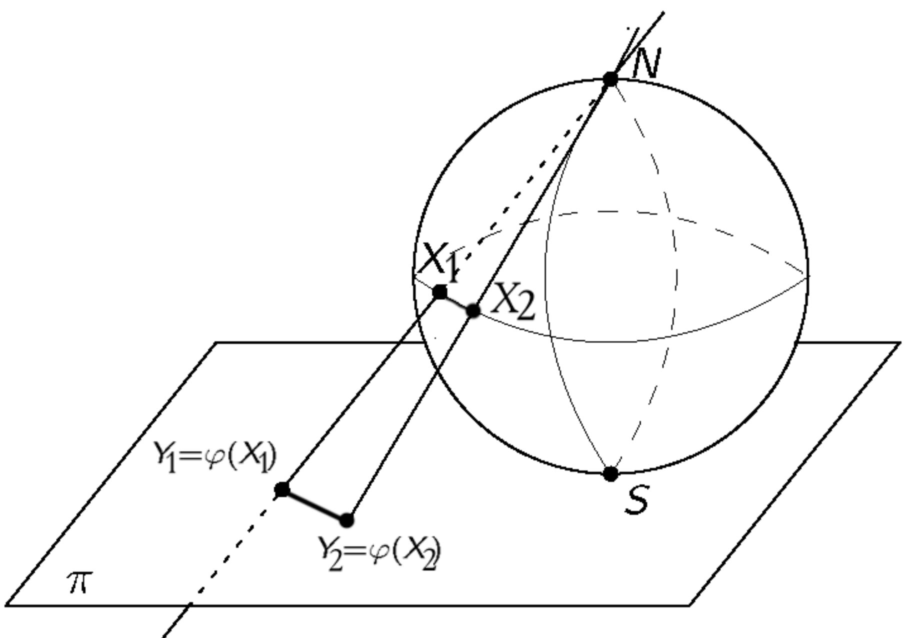
Доведення теореми про укладання на сфері (продовження)

Функцію φ називають *стереографічною проекцією сфери на площину* π *з точки* N.

Очевидно, що

1. φ — бієкція (різні точки сфери переходять у різні точки площини, а для будь-якої точки $Y \in \pi$ можна знайти її прообраз, провівши пряму YN).

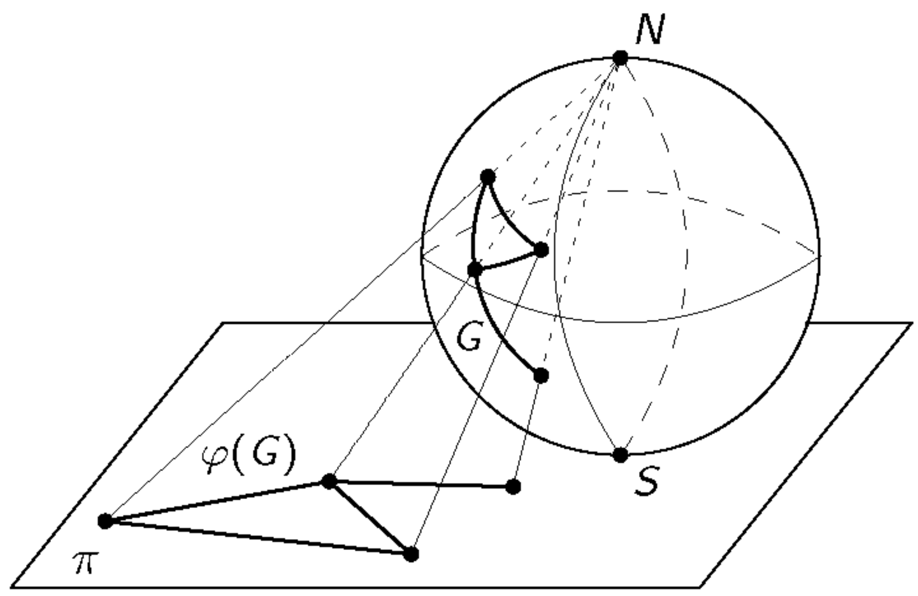
2. φ неперервна (стандартними засобами математичного аналізу легко показати, що близькі точки на сфері переходять у близькі точки на площині), а отже, образом відрізка неперервної лінії на сфері є відрізок неперервної лінії на площині.



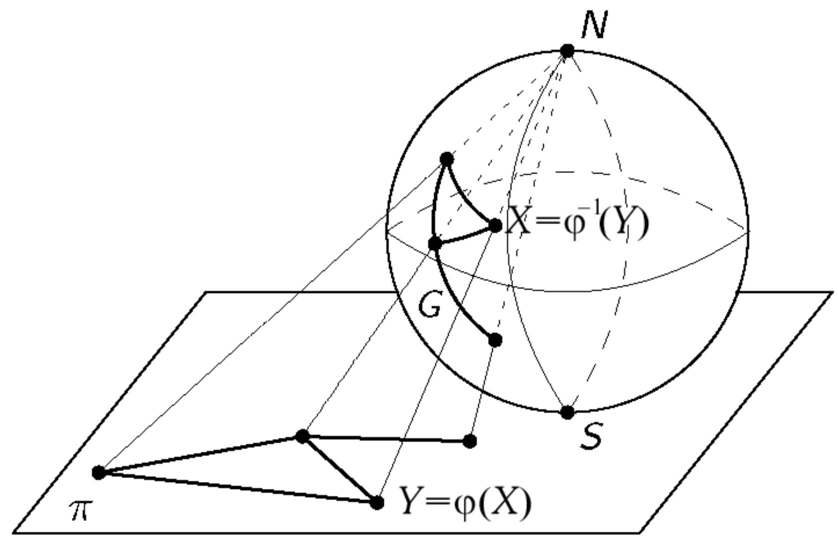
Доведення теореми про укладання на сфері (продовження)

З неперервності φ випливає, що геометрична фігура $\varphi(G)$, тобто образ графа G при функції φ, сама є графом, як показано на рисунку (вершини і ребра $\varphi(G)$ є образами вершин і ребер G).

Граф $\varphi(G)$ зображений на площині. Перевіримо, що він плоский.

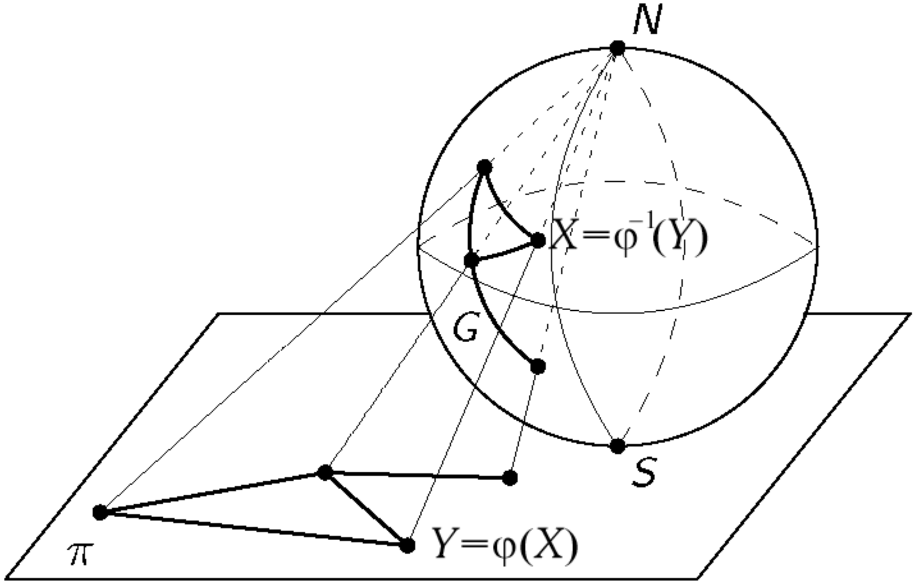


Нехай точка Y належить двом ребрам $\varphi(G)$. Тоді точка $X = \varphi^{-1}(Y)$ належить двом відповідним ребрам графа G, тобто за умовою є вершиною в G. Але тоді $Y = \varphi(X)$ — вершина в $\varphi(G)$, що, власне і було потрібно. Залишилося відмітити, що функція φ, яка розглядається тільки на множині вершин графа G, є ізоморфізмом G на $\varphi(G)$. Таким чином, ми довели, що граф G — планарний. Отже, планарний і будь-який граф, ізоморфний G. Необхідність доведена.



Доведення теореми про укладання на сфері (достатність)

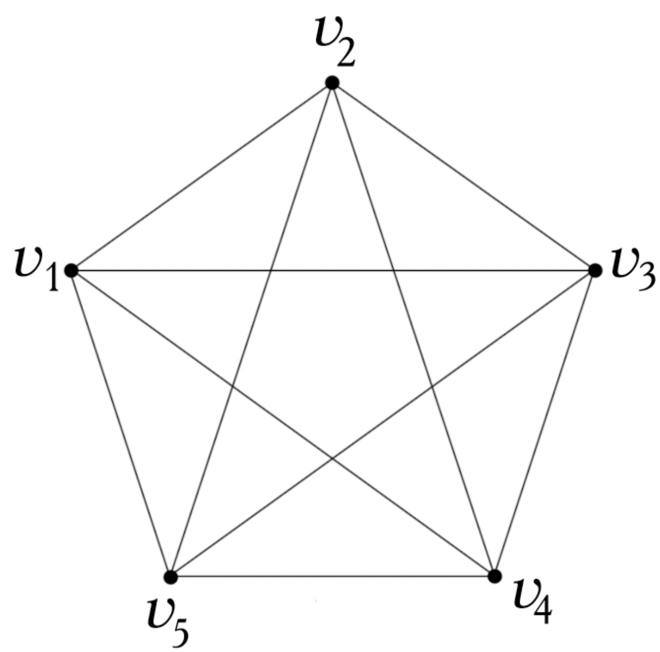
Достатність легко доводиться за допомогою тієї ж самої біекції φ (точніше, за допомогою біекції φ^{-1}). Змінюється тільки початок побудови: на площину, що містить заданий граф, довільним чином «ставимо» сферу, після чого за N беремо точку сфери, протилежну точці дотику із площиною.



Непланарні графи

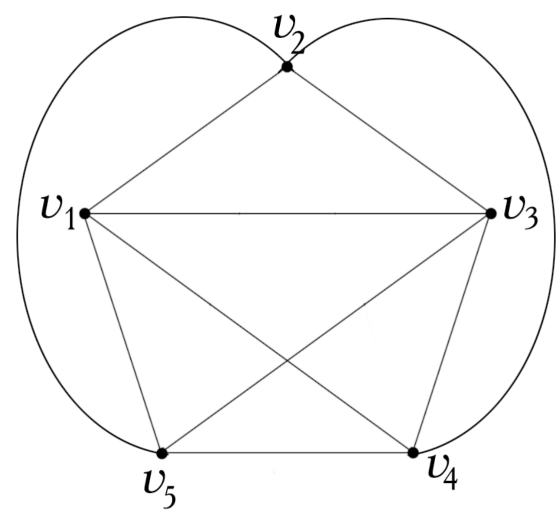
Теорема. *Графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними*.

Доведення. Припустимо протилежне, що граф K_5 планарний. Оскільки він має цикл довжини 5, наприклад, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$, то можна вважати, що при будь-якому укладанні цього графа на площині цей цикл зображується замкненою жордановою кривою. За теоремою Жордана ребро $\left(v_1, v_3\right)$ має лежати або цілком усередині цього п'ятикутника, або цілком поза ним. Третю можливість (коли ребро має спільну точку з п'ятикутником) ми не розглядаємо, оскільки маємо справу з укладанням на площині.

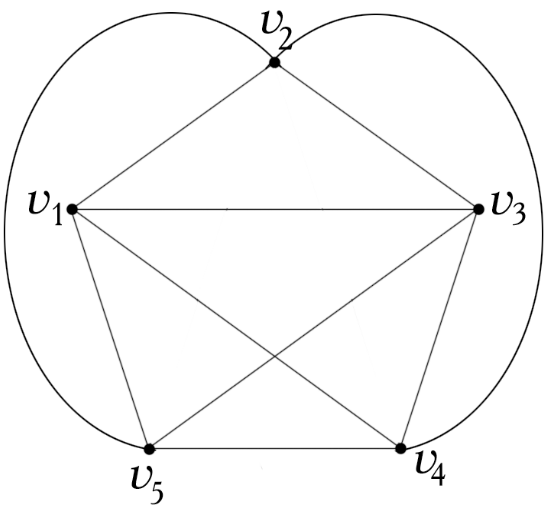


1. Розглянемо спочатку випадок, коли $\left(v_1, v_3\right)$ лежить усередині п'ятикутника. Оскільки ребра $\left(v_2, v_4\right)$ і $\left(v_2, v_5\right)$ не мають перетинати ребро $\left(v_1, v_3\right)$, то обидва ці ребра лежать поза п'ятикутником. Ця ситуація зображена на рисунку нижче.

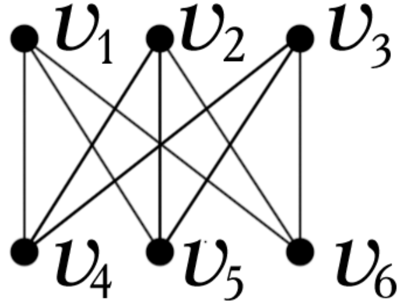
Ребро $\left(v_1, v_4\right)$ не має перетинати ребро $\left(v_2, v_5\right)$ і тому воно має лежати усередині п'ятикутника. Аналогічно ребро $\left(v_3, v_5\right)$ має лежати усередині п'ятикутника, оскільки не має перетинатися з ребром $\left(v_2, v_4\right)$. Однак ребра $\left(v_1, v_4\right)$ і $\left(v_3, v_5\right)$ обов'язково перетинаються, і тому згідно з теоремою Жордана, одне з них має лежати поза п'ятикутником.

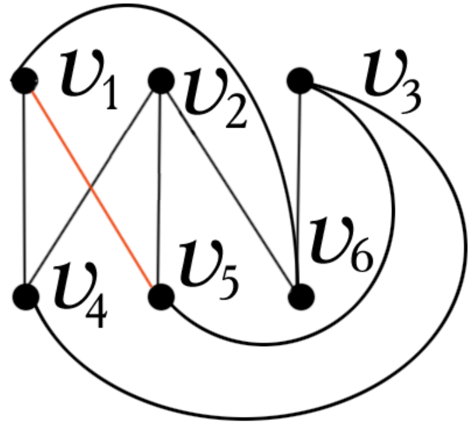


Таким чином, ми приходимо до протиріччя з нашим припущенням. Наявність даного протиріччя доводить помилковість початкового припущення, тобто граф K_5 не є планарним.



Аналогічно доводять, що граф $K_{3,3}$ не є планарним.

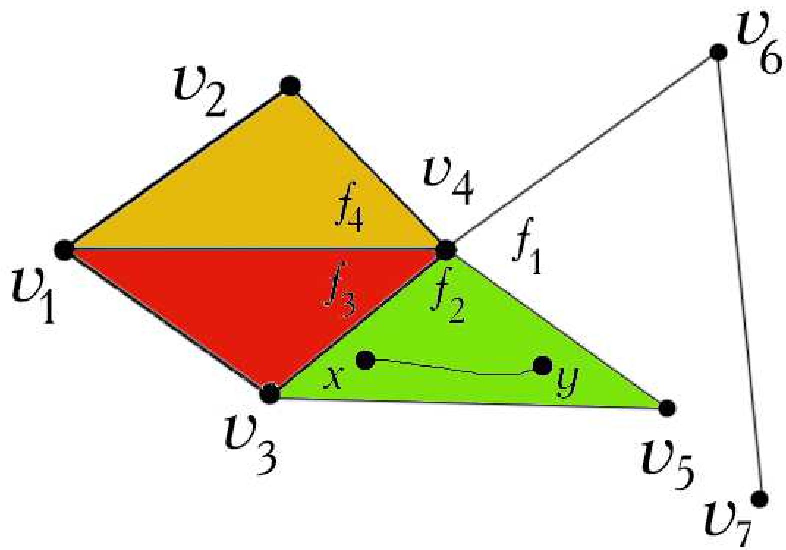




Грані плоского графа

Точку x площини S, на якій розміщено граф G, називають *диз'юнктною* з G, якщо ця точка не відповідає жодній вершині графа G і не лежить на жодному ребрі цього графа. Дві точки x і y площини S називають еквівалентними, якщо вони диз'юнктні з G і їх можна з'єднати такою жордановою кривою, усі точки якої диз'юнктні з G.

Введене відношення еквівалентності точок площини розбиває множину всіх точок площини S на класи еквівалентності, які називають гранями графа G. Наприклад, граф G, зображений на рисунку, має 4 грані: f_1, f_2, f_3, f_4. Причому грань f_1 – нескінченна.



Теорема Ейлера

Теорема. Нехай G – зв'язний плоский граф, у якому

n - число вершин,

m - число ребер

і f - число граней.

Тоді справедливе співвідношення:

$$n + f = m + 2.$$

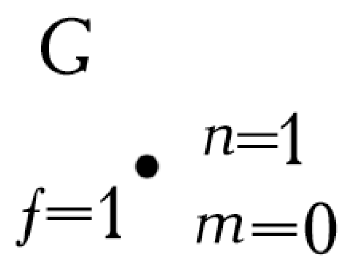
Доведення. План доведення ґрунтується на виконанні індукції за числом ребер у графі G.

1. Нехай $m = 0$, то $n = 1$

(оскільки за умовою теореми G – зв'язний) і $f = 1$ (нескінченна грань).

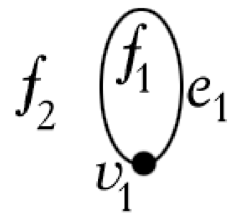
У цьому випадку теорема вірна, оскільки

$$n + f = 1 + 1 = 2 \text{ і } m + 2 = 0 + 2 = 2$$



2. Нехай граф G представлений такими параметрами:

ребро e_1 є петлею, і в цьому випадку число граней збільшується на одну, а число вершин залишається незмінним



Для розглянутого графа $G = (V, E)$ одержуємо

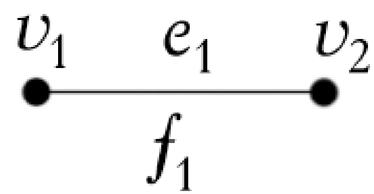
$$V = \{v_1\}, E = \{e_1\}, F = \{f_1, f_2\}.$$

Тому $n = |V| = 1, m = |E| = 1, f = |F| = 2$.

Звідси $n + f = 1 + 2 = 3$ і $m + 2 = 1 + 2 = 3$.

3. Нехай граф G представлений такими параметрами:

ребро e_1 з'єднує дві різні вершини в G.

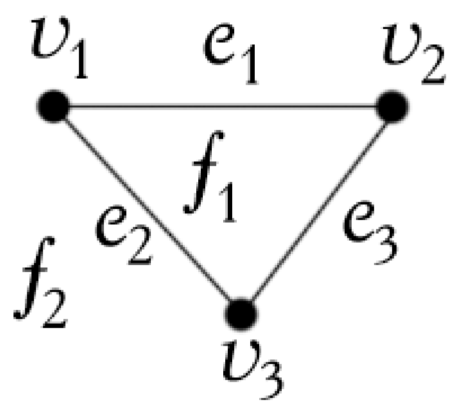


У даному графі $G = (V, E)$ одержуємо $V = \{v_1, v_2\}, E = \{e_1\}$, $F = \{f_1\}$. Тому $n = |V| = 2, m = |E| = 1,\ f = |F| = 1$.

Звідси $n + f = 2 + 1 = 3$ і $m + 2 = 1 + 2 = 3$.

4. Нехай граф G представлений такими параметрами:

- зв'язний граф G містить кілька вершин і ребер



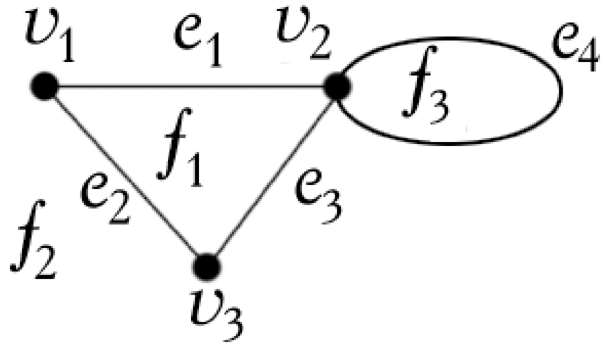
Граф $G = (V, E)$ характеризується параметрами $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $F = \{f_1, f_2\}$. Тому

$$n = |V| = 3, m = |E| = 3, \ f = |F| = 2.$$

Звідси $n + f = 3 + 2 = 5$ і $m + 2 = 3 + 2 = 5$.

4. До графа, показаного на попередньому рисунку, додамо петлю. У результаті одержимо

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},\ F = \{f_1, f_2, f_3\}.$$



Тоді $n = |V| = 3, m = |E| = 4,\ f = |F| = 3.$

Отже,

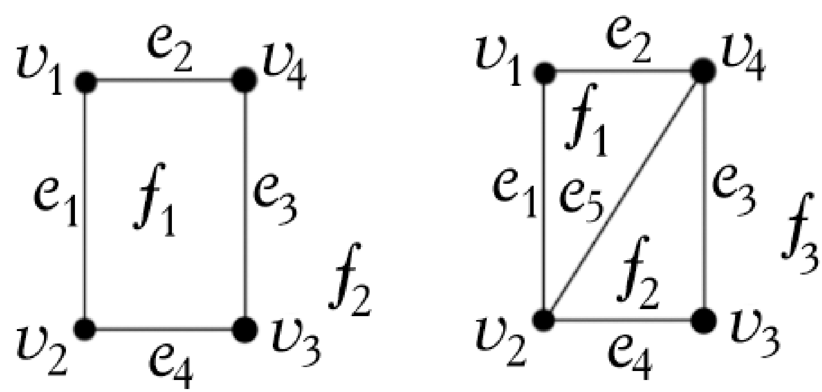
$$n + f = 3 + 3 = 6,\ m + 2 = 4 + 2 = 6.$$

5. Якщо до зв'язного графа

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},\ E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\ F = \{f_1, f_2\}$$

додати ребро, що з'єднує дві його вершини, одержимо граф

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},\ E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}\ F = \{f_1, f_2, f_3\}$$



Параметри нового графа $n = 4$, $m = 5$, $f = 3$. Отже,

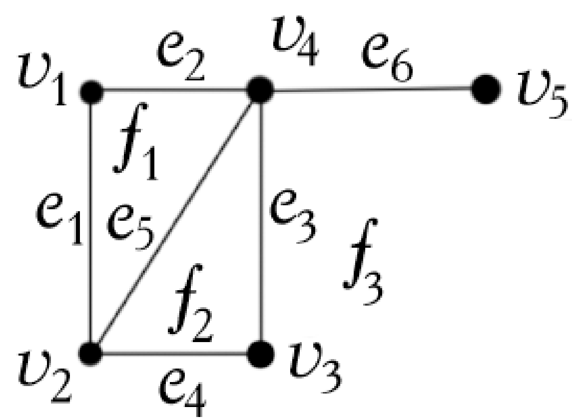
$$n + f = 4 + 3 = 7\ ,\ m + 2 = 5 + 2 = 7.$$

6. Якщо до зв'язного графа

$$V=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\},\ E=\left\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\right\}F=\left\{f_1,f_2,f_3\right\}$$

додати ребро, інцидентне тільки з однією з його вершин, одержимо граф

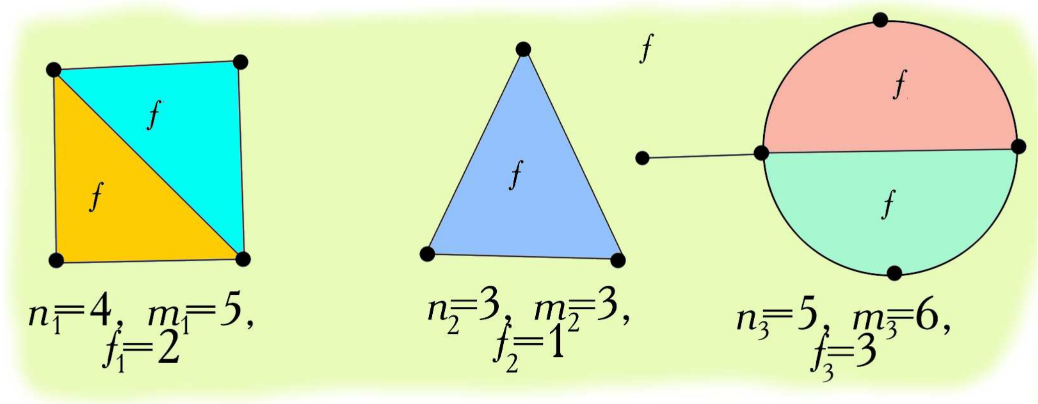
$$V=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\right\},\ E=\left\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\right\}F=\left\{f_1,f_2,f_3\right\}$$



Одержуємо $n+f=5+3=8$, $m+2=6+2=8$.

Наслідок. Нехай G – плоский граф з n вершинами, m ребрами, f гранями і k компонентами зв'язності; тоді

$$n + f = m + k + 1.$$



$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 3 + 5 = 12$$

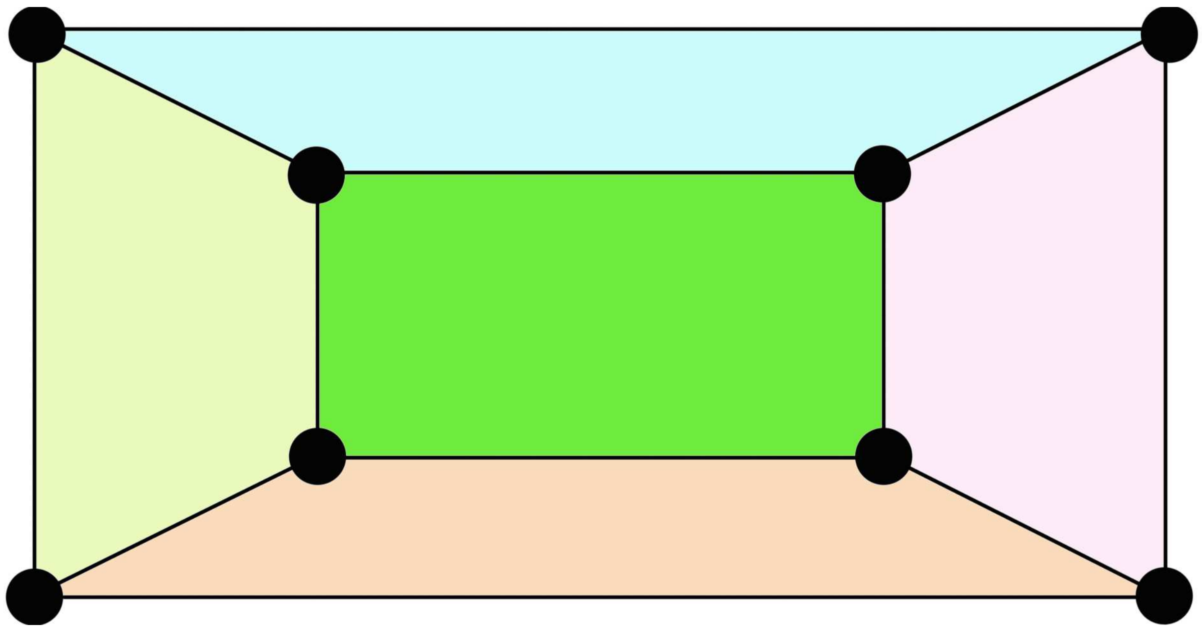
$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 5 + 3 + 6 = 14$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = 2 + 1 + 3 = 6$$

$$n + f = 12 + 6 = 18$$

$$m + k + 1 = 14 + 3 + 1 = 18$$

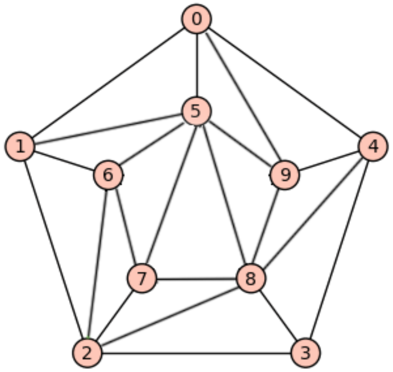
Наслідок. Якщо G – зв'язний планарний граф з m ребрами і $n \geq 3$ вершинами, то $m \leq 3n - 6$.



$$n = 8 > 3 \quad m = 12$$

$$m < 3n - 6, m < 3 \cdot 8 - 6, m < 24 - 6, \; 12 < 18$$

Наслідок. У будь-якому планарному графі існує вершина, степінь якої не більше п'яти.

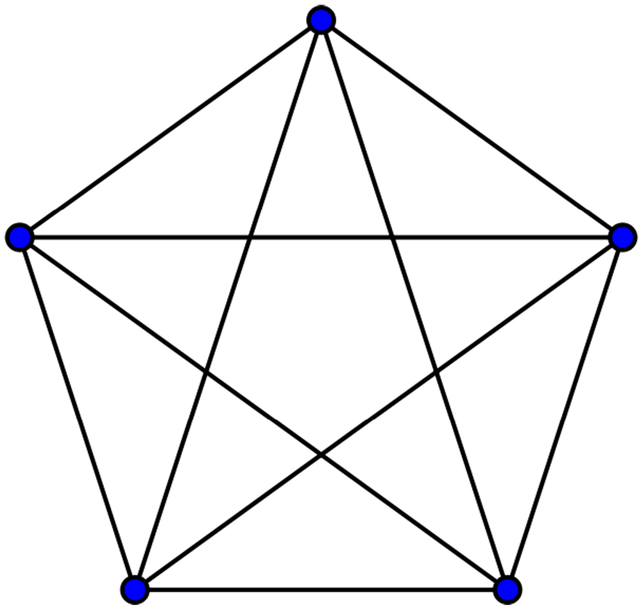


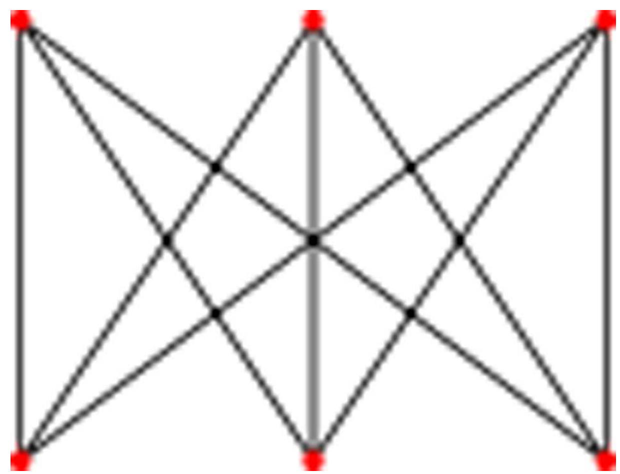
Твердження. Будь-який підграф планарного графа теж планарний.

Твердження. Якщо граф включає непланарний підграф, то і сам граф непланарний.

Наслідок. Будь-який підграф, що включає граф K_5 або $K_{3,3}$, не буде планарним.

Виявляється, що графи K_5 і $K_{3,3}$ – **єдині непланарні** графи в тому розумінні, що будь-який непланарний граф включає один з них як підграф.



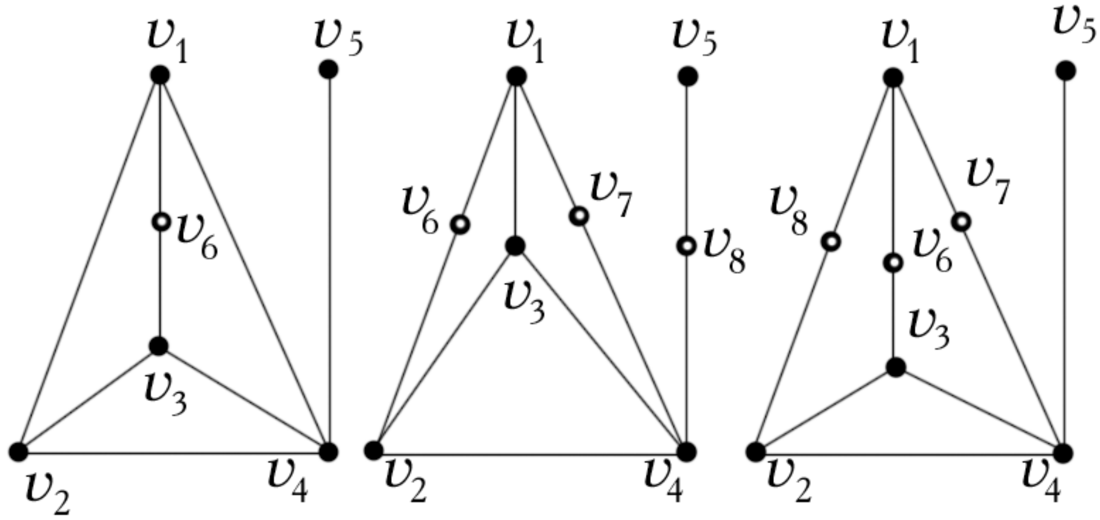


Для формулювання цього результату введемо поняття *гомеоморфності графів*.

Гомеоморфні графи

Визначення. Два графа називають *гомеоморфними* або *тотожними* з точністю до вершин степеня 2, якщо вони можуть бути отримані з того самого графа за допомогою операції введення вершини степеня 2 у ребро.

Наприклад, графи, зображені на малюнку, гомеоморфні.



Неважко переконатися, що гомеоморфізм є відношенням еквівалентності.

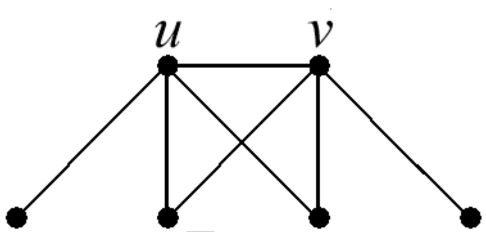
Теорема Понтрягіна-Куратовського

Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не має підграфів, гомеоморфних K_5 і $K_{3,3}$.

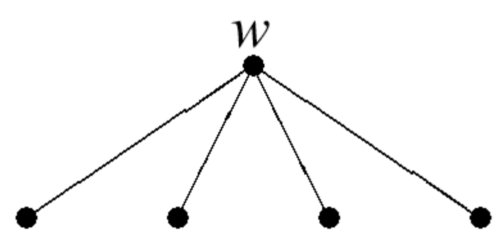
Доведення. З геометричної точки зору, додавання вершини степеня 2 — це додавання точки на ребрі, а стирання такої вершини поєднує два ребра із спільним кінцем в одне. Очевидно, що кожна із цих операцій, застосована до плоского графа, знову дасть плоский граф. Отже, за наслідками з теореми Ейлера, жодний плоский (а, отже, і планарний) граф не гомеоморфний графам K_5 і $K_{3,3}$. З урахуванням зауваження про непланарні підграфи, теорема доведена.

Операція стягування

Нехай (u,v) — ребро графа G. Вилучимо із графа G вершини u і v. Після цього додамо в граф G нову вершину w і з'єднаємо її ребрами з усіма вершинами, з якими була суміжна хоча б одна з вершин u і v (див. рис.).



Було



Стало

Позначимо отриманий граф через G'. Говорять, що граф G' отримано з G *стягуванням ребра* (u,v).

Якщо скінченним (можливо нульовим) числом операцій стягування ребра із графа G можна одержати граф G', то говорять, що G *стягується* до G'.

Теорема Вагнера

Теорема. Граф планарний тоді і тільки тоді, коли він не має підграфів, які стягуються графом K_5 і $K_{3,3}$.

Доведення необхідності. Якщо стягти ребро в плоскому графі, він, залишиться плоским. Отже, за наслідками з теореми Ейлера, жодний плоский (а отже, і планарний) граф не стягується ні до графа K_5, ні до графа $K_{3,3}$. З урахуванням зауваження про непланарні підграфи, необхідність доведена.

Процес стягування до $K_{3,3}$ і K_5