ЛЕКЦІЯ 14

КОМБІНАТОРИКА

КОМБІНАТОРИКА

Вступ в комбінаторику

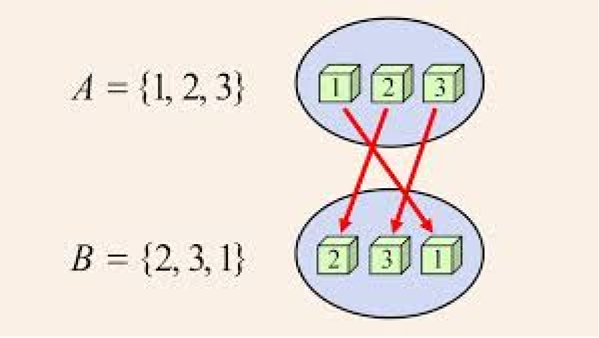
Термін «***комбінаторика***» походить від латинського слова «combina», що в перекладі українською означає – «поєднувати», «з'єднувати».

Термін «***комбінаторика***» був застосований у математиці вперше Лейбницем, який в 1666 році опублікував свою працю «Міркування про комбінаторне мистецтво» в 20 років. **Готфрид Вільгельм фон Лейбниц**
німецький філософ, математик, юрист, дипломат, механік, фізик, винахідник, мовознавець.
Перший описав двійкову систему числення.

Комбінаторика сьогодні

Комбінаторика або *комбінаторний аналіз* або *комбінаторна математика* — це галузь математики, яка вивчає **способи побудови підмножин** деякої скінченної множини,

причому таких, які відповідають заданим обмеженням.

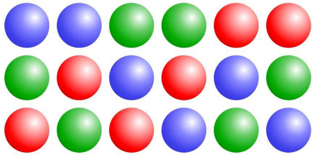


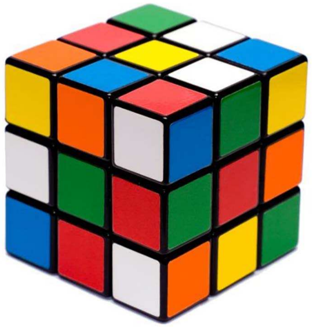
Згадані підмножини часто називають **комбінаторними конфігураціями** або **вибірками**.

Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей і її додатків.

Комбінаторика вивчає такі види задач:

1. Підрахунок кількості комбінаторних конфігурацій.





2. Знаходження умов існування комбінаторної конфігурації.

3. Розробка алгоритмів побудови комбінаторних конфігурацій.

4. Розв'язок оптимізаційних задач (екстремальних комбінаторних задач).

Проблема підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій часто використовується в програмних засобах. Такі задачі є предметом вивчення *рахункової комбінаторики.*

Основні поняття комбінаторики

У комбінаториці прийнято говорити про множину, вказуючи кількість її елементів. Наприклад, якщо є множина

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\},$$

яка складається з n елементів, то в цьому випадку її називають n**-множиною *A*.**

Визначення підмножини

Нагадаємо, що множину B називають *підмножиною* множини A и позначають $B \subset A$, якщо всі елементи множини B є також елементами множини *A*.

Визначення мультимножини

Якщо множина C має кілька екземплярів одного і того самого елемента, то таку множину називають **мультимножиною**.

Вибірка (комбінаторна комбінація)

Вибіркою **називають довільну мультимножину**, елементи якої вибираються з елементів множини A, тобто таку множину, яка, у загальному випадку, **може містити кілька екземплярів одного і того самого елемента** множини A.

$\{a, b, c, e, f\}$ 5-множина A

$\{a,a,b,b\}$ $\{a,c,e,e\}$ $\{b,c,f,f\}$ Приклади 4-вибірок

Обсяг r-вибірки: Кількість елементів r у вибірці визначають як її ***обсяг.***

Інший зміст поняття «вибірка»

Поняття «вибірка» використовується також для позначення **самого процесу відбору** елементів підмножини з початкової множини.

Які бувають вибірки?

1.Упорядкована вибірка

Вибірку називають *впорядкованою,* якщо порядок слідування елементів в ній заданий. Дві впорядковані вибірки, які різняться лише порядком проходження елементів, вважаються різними.

Визначення. Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ – множина з n елементів. Упорядкованою r-вибіркою з $n-$множини A називають будь-яку впорядковану підмножину з r її елементів.

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{b,a,c\}\{c,b,a\}\{b,c,a\}$$

Упорядковані 3-вибірки з 4-множини

Упорядковані вибірки відрізняються порядком слідування одних і тих самих елементів.

2.Неупорядкована вибірка

Якщо порядок слідування елементів не є істотним, то таку вибірку називають *неупорядкованою.*

$$\{a,b,c,d\}$$

$$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$$

Приклад неупорядкованої вибірки
3-вибірки з 4-множини

Неупорядковані вибірки відрізняються елементами, а не порядком їх слідування.

3.Вибірки з повтореннями й без повторень

Вибірки з повтореннями – це вибірки, які припускають повторення елементів

$\{a,b,c,d\}$

$\{a,a,b\}\{b,b,c\}\{c,c,d\}\{d,d,a\}$

Приклад 3-вибірок з повтореннями з 4-множини

Вибірки без повторень – це вибірки, які не допускають повторення елементів (упорядковані або неупорядковані)

$\{a,b,c,d\}$

$\{\underline{a,b,c}\}\{a,b,d\}\{\underline{a,c,b}\}\{a,c,d\}$

$\{a,b,c,d\}$

$\{a,b,c\}\{a,b,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}$

Упорядкована **неупорядкована**

Загальноприйняті назви вибірок

1. розміщення ($\widehat{A}_n^k$ з повторенням, A_n^k -без повторень)

(упорядкована вибірка з повтореннями або без повторень)

Набір елементів $\left\{x_{i_1}, x_{i_{12}}, \ldots, x_{i_k}\right\}$ з множини $X=\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$ називають $i-$ю вибіркою обсягом k з n елементів $k<n$ або, інакше, (n, k)-розміщенням.

Наприклад: $\{1,2,3,4\} \Rightarrow\{1,1,2\},\{2,1,1\},\{1,2,3\} \ldots$

$\{1,2,3,4\} \Rightarrow\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{4,2,1\} \ldots$

2. Сполука (C_n^k без повторень, $\widehat{C}_n^k$ з повтореннями)

(неупорядкована вибірка з повтореннями або без повторень)

Вибірки, у яких не враховуються порядок запису елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом, називають *сполуками або комбінаціями.*

Наприклад: $\{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\ldots$

$$\{1,2,3,4\} \Rightarrow \{1,1,3\},\{1,1,4\},\{4,2,1\}\ldots$$

3.Перестановка

(P_n без повторень, $P(k_1,\ldots,k_m)$ з повтореннями)

(упорядкована повна вибірка без повторень та з повтореннями)

Вибірки, у які складаються з одних і тих самих елементів і які відрізняються тільки порядком їх слідування, називають *перестановками.*

Наприклад: $\{1,2,3\} \Rightarrow \{1,2,3\},\{1,3,2\},\{3,2,1\}\ldots$

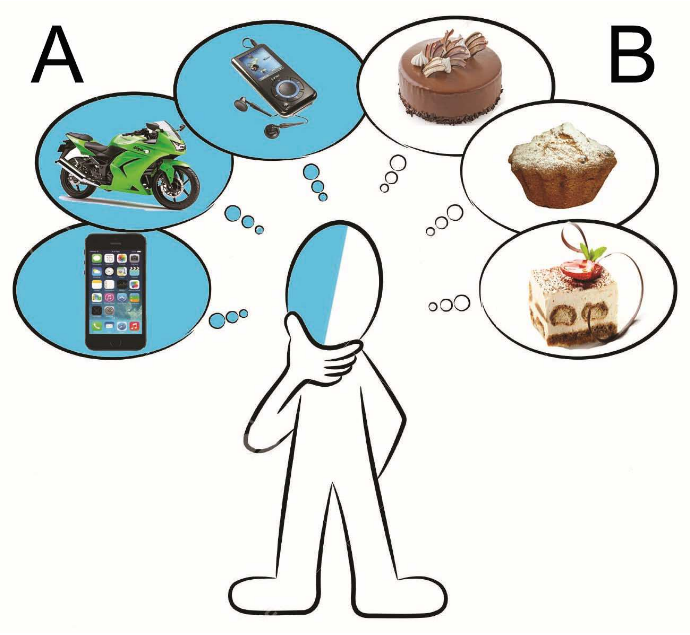
$$\{1,2,3\} \Rightarrow \{1,1,3\},\{3,1,1\},\{3,3,1\}\ldots$$

Основні правила комбінаторики

Розглянемо два основні правила, які використовують при розв'язуванні комбінаторних задач.

1. Правило суми — це основний комбінаторний принцип.

Ідея в тому, що якщо у нас $|A|$ способів зробити щось одне і $|B|$ способів зробити щось інше, і ми не можемо робити їх одночасно, то існує $|A|+|B|$ способів вибрати одну з дій.



$|A|=3$ $|B|=3$ $|A|+|B|=6$

Визначення правила суми

Правило суми — сума кількостей елементів скінченного набору попарно неперетинних множин дорівнює кількості елементів об'єднання цих множин. Тобто, якщо A та B попарно неперетинні множин, то ми маємо:

$$|A|+|B|=|A\cup B| \ \textbf{при} \ \ A\cap B=\varnothing$$

Приклад 1. *Нехай концерт «Океану Ельзи» та лекція відбуваються одночасно.*

На концерт «Океану Ельзи» пішли 15 студентів,

На лекції присутні 20 студентів.

Скільки всього студентів у групі?

Розв'язок. *Позначимо через* X *множину студентів, які були присутні на лекції, а через* Y *- множину студентів, які відвідали концерт. Оскільки* $n=\left|X\right|=20$, $m=\left|Y\right|=15$ *і* $X\cap Y=\varnothing$, *то за правилом суми:* $m+n=20+15=35$

2. Правило добутку

Кількість способів вибору елементів множини $A \times B$ дорівнює $n \cdot m$, де $\left|A\right| = n, \ \left|B\right| = m$

Приклад. *Космонавт, що працює на орбітальній станції, може зв'язатися із центром керування двома способами: за допомогою* ***радіозв'язку*** *і передачі повідомлення* ***космічним човником.***

У той же час працівники центру керування польотом можуть подзвонити рідним космонавта ***по стаціонарному телефону, по мобільному телефону, послати їм лист поштою, послати електронний лист, подзвонити по Skype, послати sms, подзвонити по Viber.***

Скількома способами може потрапити інформація від космонавта його рідним?

Розв'язок. $m = 2, \ n = 7$

Використовуючи правило множення, одержуємо $m \cdot n = 2 \cdot 7 = 14$.

3.Правило включень і виключень

Для двох множин

Нехай A і B -довільні скінченні множини. Визначимо, чому дорівнює потужність $|A \cup B|$ якщо відомі потужності $|A|$ і $|B|$.

Дотримуючись визначення операції об'єднання*:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{при } A \cap B \neq \varnothing$$

Пояснення. Сума $|A| + |B|$ включає всі елементи множини A й множини B. При цьому, загальні елементи множин A і B, а їх буде $|A \cap B|$, включаються в суму двічі. Тому для одержання суми об'єднання необхідно відняти один набір спільних елементів

Тому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трьох множин

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин $(B \cup C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| =$$

Застосували правило включень і виключень для множин

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$

Застосували дистрибутивний закон $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \left(|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|\right) =$$

Правило включень і виключень для множин $(A \cap B)$ і $(A \cap C)$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Розкрили дужки

Правило включень і виключень

Для n множин.

Нехай $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ *- деякі множини.*

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

Непарні Парні

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < k < \ldots < l \le n} \left|A_i \cap A_j \cap \ldots A_k \cap \ldots A_l \cap A_n\right|$$

Непарні

Правило підрахунку за даною формулою полягає в послідовному виконанні **операцій додавання і віднімання**, які чергуються між собою.

Звідси випливає назва: **правило включень і виключень.**

Приклад. Обчислення за правилом включень і виключень

Нехай дані множини

$$A=\{1,2,3,4,9\},\ B=\{3,4,5,6,9\} \text{ і } C=\{5,6,7,8,9\}.$$

Обчислити 1) $|A\cup B|$ 2) $|B\cup C|$ 3) $|A\cup C|$ 4) $|A\cup B\cup C|$.

Розв'язок. $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1) $A\cap B=\{3,4,9\},\ |A\cap B|=3,\ \ |A|=5,\ \ |B|=5$

Тому $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=5+5-3=7$

2) $B\cap C=\{5,6,9\},\ |B\cap C|=3.\ \ |B|=5,\ |C|=5$

Тому $|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=5+5-3=7$

3) $A\cap C=\{9\},\ |A\cap C|=1.$

Тому $|A\cup C|=|A|+|C|=5+5-1=9$

4) $(A\cap B\cap C)=\{9\},\ \ |A\cap B\cap C|=1$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$

$$|A\cup B\cup C|=5+5+5-3-1-3+1=9$$

Приклад. Записати правило включень і виключень для множин A, B, C і D.

Розв'язок. Скористаємося загальною формулою:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1}\sum_{1\le i<j<k<\ldots<l\le n}\left|A_i \cap A_j \cap \ldots A_k \cap \ldots A_l \cap A_n\right|$$

$$\left|A \cup B \cup C \cup D\right| = |A| + |B| + |C| + |D| -$$

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| +$$

$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| -$$

$$-|A \cap B \cap C \cap D|$$

Розміщення з повтореннями (з поверненнями)

Упорядковану (n,k)-вибірку, у якій елементи можуть повторюватися, називають (n,k)-розміщенням з повтореннями.

Іншими словами, розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називають упорядковані вибірки довжини k, складені з n елементів множини X.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k дорівнює кількості елементів декартового добутку X^k n-елементної множини X , позначають $\overset{\frown}{A}_n^k$ і обчислюють в такий спосіб:

$$\overset{\frown}{A}_n^k = n^k$$

Приклад. Нехай дано алфавіт із трьох букв $X=\{a,b,c\}$.

Тоді всі розміщення з повтореннями з цих трьох букв по два $\widehat{A}_3^2 = 3^2$ утворюють підмножини:

$$X\times X=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$$

Приклад. *У нашім розпорядженні є склад з комп'ютерами чотирьох типів: 1,2,3,4. Поставлена задача комп'ютеризувати 3 лабораторії, шляхом передачі їм по одному комп'ютеру довільного типу.*

Скількома способами можна виконати цю задачу?

Розв'язок. *Кожний спосіб оснащення – це вибірка з повтореннями* $(4,3)$, *тобто* $\widehat{A}_4^3 = 4^3 = 64$

Приведемо всі можливі способи оснащення кожної із трьох лабораторій одним із чотирьох типів комп'ютерів:

$$\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,1,3\},\{1,1,4\},\{1,2,1\},\{1,2,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}$$

$$\{1,3,1\},\{1,3,2\},\{1,3,3\},\{1,3,4\},\{1,4,1\},\{1,4,2\},\{1,4,3\},\{1,4,4\},$$

$$\{2,1,1\},\{2,1,2\},\{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\},\{2,2,4\},$$

$$\{2,3,1\},\{2,3,2\},\{2,3,4\},\{2,3,4\},\{2,4,1\},\{2,4,2\},\{2,4,3\},\{2,4,4\},$$

$$\{3,1,1\},\{3,1,2\},\{3,1,3\},\{3,1,4\},\{3,2,1\},\{3,2,2\},\{3,2,3\},\{3,2,4\},$$

$$\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{3,4,1\},\{3,4,2\},\{3,4,3\},\{3,4,4\},$$

$$\{4,1,1\},\{4,1,2\},\{4,1,3\},\{4,1,4\},\{4,2,1\},\{4,2,2\},\{4,2,3\},\{4,2,4\},$$

$$\{4,3,1\},\{4,3,2\},\{4,3,3\},\{4,3,4\},\{4,4,1\},\{4,4,2\},\{4,4,3\},\{4,4,4\}$$

Алгоритм формування розміщення з повтореннями:

Розміщення формуються послідовним рахунком в системі числення з основою 4.

Розміщення без повторень (без повернень)

У ряді задач необхідно визначити число вибірок довжини k з n елементів даної множини без повторення елементів.

Якщо елементи впорядкованої (n,k)*-вибірки попарно різні, то їх називають* (n,k)-розміщенням без повторень *або просто* (n,k)-розміщенням.

Кількість таких розміщень без повторень позначається A_n^k .

Вивід формули визначення кількості розміщень без повторень (без повернень)

Кожне (n,k)*-розміщення без повтореннь є впорядкованою послідовністю довжини* k*, елементи якої попарно різні і вибираються із множини з* n *елементами.*

Тоді **перший елемент** цієї послідовності **може бути обраний** n **способами**, після кожного вибору першого елемента послідовності **другий елемент може бути обраний** $(n-1)$ **способами** і т.д., k**-й елемент вибирається** $n-(k-1)$ **способом**:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

$$A_n^k = n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \left(k-1\right)\right).$$

Перетворимо цю формулу, помноживши та поділивши її на добуток чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)$:

$$A_n^k = \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \left(n-k\right)\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(n-k\right)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right) \cdot \left(n - \left(n-k\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(n-1\right) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left(n-k\right)} =$$

$$= \frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$

Окремі випадки виразів для розміщень без повторень (без повернень):

1. При $k = 0$ одержуємо $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

2. При $k = n$ одержуємо $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

3. При $k > n$ A_n^k =0.

4. **При** $k < n$ $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Приклад задачі на розміщення

Приклад.

Скількома способами можна розподілити 20 студентів на 5 комп'ютерів, за умови, що один студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер?

Розв'язок.

Обчислимо розміщення без повторень, оскільки студент може бути розподілений тільки на один комп'ютер:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для нашого випадку $n = 20, k = 5$: $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

Перестановки без повторень

Розглянемо задачу упорядкування n-елементної множини A (формування впорядкованої вибірки довжини n, складеної з n-елементної множини). Отримані при цьому вибірки будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів.

Такі вибірки називають *перестановками без повторень із n елементів.*

Число перестановок без повторень із n елементів позначається P_n. До перестановок без повторень можна прийти, вважаючи, що здійснюється розміщення без повторень із n елементів по n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Нагадаємо, що $0! = 1$. Таким чином, перестановки без повторень – це окремий випадок розміщень без повторень (див. вище).

Приклади на перестановки без повторень

Приклад. Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт 130 студентів?

$$P_3 = 130! = 6.466855489220473672573043955365e + 219.$$

Скільки існує послідовностей перевірки контрольних робіт 3 студентів?

$$P_3 = 3! = 6$$

$$\left(1,2,3\right),\left(2,3,1\right),\left(3,1,2\right),\left(2,1,3\right),\left(1,3,2\right),\left(3,2,1\right).$$

Приклад. Скільки існує можливих послідовностей відвідування туристом п'яти різних країн?

$P_n = n!$ При $n = 5$ одержуємо $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Перестановки з повтореннями

При визначенні **перестановок без повторень** ми розглядали ситуацію, коли у початковій n-множині A всі елементи унікальні.

Однак існують ситуації, коли *множина може містити деяку кількість однотипних елементів*.

Визначення. Число різних перестановок, які можна побудувати з n елементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу,..., k_m елементів m-го типу, дорівнює:

$$P\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Приклад для перестановок з повтореннями

Приклад. Скільки різних слів можна побудувати шляхом перестановки букв у слові «лаваш»?

Розв'язок. Слово «лаваш» включає по одному екземпляру букв «л», «в» і «ш», а також два екземпляри букви «а». Загальна кількість букв у слові дорівнює 5.

Використовуючи формулу $P\left(k_1, k_2, \ldots, k_m\right) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$

одержимо $P(1,1,1,2) = \dfrac{5!}{1!1!1!2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Приклад. Скільки слів з 3 букв можна побудувати за умови, що кількість букв «а» у цих словах може бути 1, 2 або 3?

Розв'язок. Зазначеним умовам будуть задовольняти слова, які

- мають одну букву «а», $P(1)$,
- мають дві букви «а», $P(2)$,
- мають три букви «а», $P(3)$.

Тоді загальна кількість слів дорівнює:

$$P(1)+P(2)+P(3)=\frac{3!}{1!}!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}=6+3+1=10$$

1) $(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b),(a,c,b),(c,b,a),(b,a,c)$

2) $(a,a,b),(a,b,a),(b,a,a)$

3) (a,a,a)

Сполуки (комбінації) без повторень

Сполуками без повторень з n елементів по k називають одмінні одна від одної хоча б одним елементом вибірки довжини k, складені з елементів n-множини.

Кількість сполук без повторень з n елементів по k, позначуване як C_n^k, визначають виходячи з числа розміщень без повторень A_n^k з урахуванням того, що різних неупорядкованих вибірок (підмножин вихідної множини) буде менше в число раз, яке дорівнює перестановці без повторень з k елементів P_k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад. Визначити кількість трьохелементних підмножин множини, яка складається з чотирьох елементів.

Розв'язок. Перераховуємо всі трьохелементні підмножини множини $A=\left\{a_1,a_2,a_3,a_4\right\}$:

$$\left\{a_1,a_2,a_3\right\},\left\{a_2,a_3,a_4\right\},\left\{a_1,a_3,a_4\right\},\ \left\{a_1,a_2,a_4\right\}$$

Їх кількість можна одержати, обчисливши кількість сполук з 4-х по 3.

$$C_4^3=\frac{4!}{3!\left(4-3\right)!}=\frac{24}{6}=4$$

Приклад. Збірна команда університету по волейболу нараховує 15 людей. Скільки варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру, за умови що в грі повинні брати участь тільки 6 гравців?

Розв'язок.

Число гравців волейбольної команди дорівнює 6. Виходить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, що складаються з шести елементів в множині з 15 елементів. Отже, використовуючи формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!};$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6!\left(15-6\right)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 5\cdot 7\cdot 13\cdot 11 = 5005$$

Сполуки (комбінації) з повтореннями

Визначення. Якщо кожному елементу деякої скінченної множини поставлена у відповідність кратність даного елемента, то говорять, що задана ***сполука з повтореннями***.

Суму k **кратностей** усіх елементів називають порядком сполуки.

Сполуку з повтореннями k-го порядку, що складена з множини, яка містить n елементів, називають також комбінацією з повторенням з n елементів по k.

Якщо $k_1, k_2, ..., k_n$ — кратності елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, то по визначенню $k_1 + k_2 + ... + k_n$ є порядок комбінації

$$\overbrace{a_1 a_1 a_1 \ldots a_1}^{k_1} \overbrace{a_2 a_2 a_2 \ldots a_2}^{k_2} \ldots \overbrace{a_n a_n a_n \ldots a_n}^{k_n}$$

Теорема. Кількість вибірок з повтореннями з n елементів по k виражають формулою

$$\widehat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Позначимо сполуки з повтореннями з n елементів по k як $\widehat{C}_n^k$.

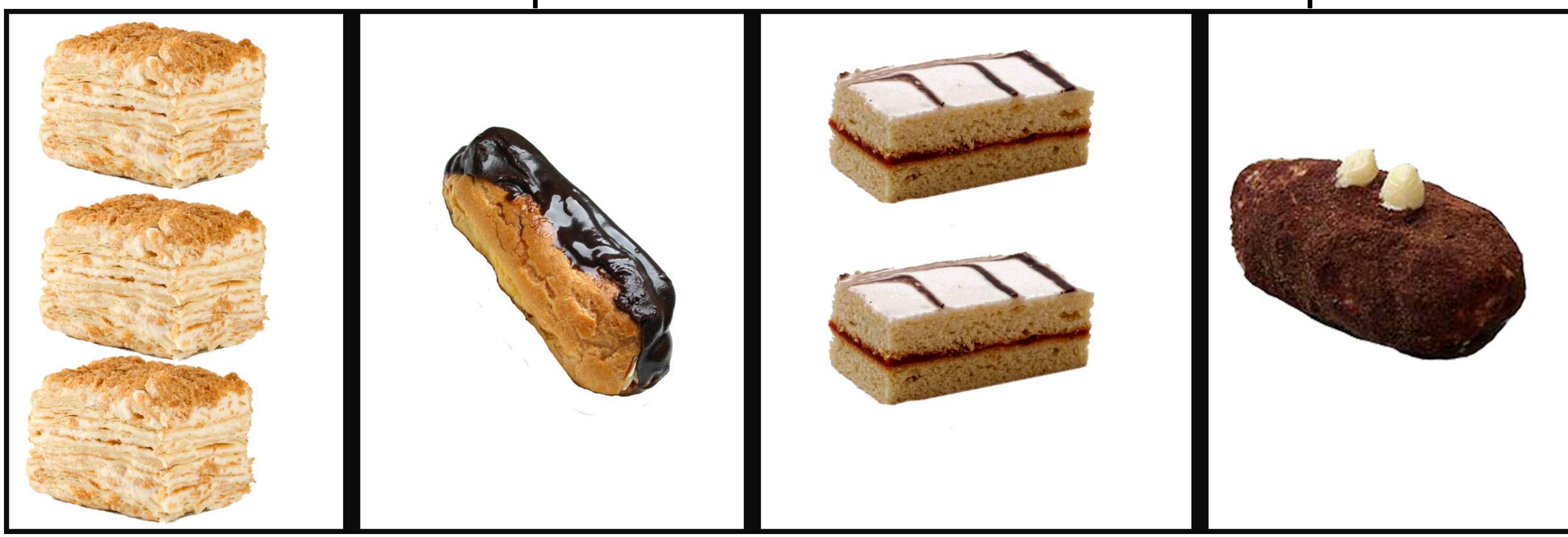
Приклад. У кондитерському магазині продавалися 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, бісквітні і картопля. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язок. Покладемо тістечка в коробку, а щоб вони не переплуталися, розділимо їх картонними роздільниками. Потрібно 3 роздільника. Позначення: 0 (картонки-роздільники) і 1 — тістечка.

Приклад покупки: 1110101101 — три наполеона, 1 еклер, 2 бісквітних і 1 картопля.

Отже два класи об'єктів: клас 1-(7 штук) і клас 0-(3 штуки) — покупка — 10 об'єктів.

Наполеони Еклери Бісквітні Картоплі



111 0 1 0 11 0 1

Задача зводиться до вибору місць для 7 тістечок (або для 3 роздільників) серед 10 об'єктів.

№	Наполеони		Еклери		Бісківтні		Картоплі	Усього
1	1	0	1	0	1	0	1111	7
2	1	0	1	0	11	0	111	7
3	1	0	1	0	111	0	11	7
4	1	0	1	0	1111	0	1	7
5	1	0	11	0	111	0	1	7
6	1	0	111	0	11	0	1	7
7	1	0	1111	0	1	0	1	7
7	11	0	111	0	1	0	1	7
9	111	0	11	0	1	0	1	7
10	1111	0	1	0	1	0	1	7
11	111	0	1	0	1	0	11	7
12	11	0	1	0	1	0	111	7
210	11	0	1	0	111		1	7

$$\overset{\frown}{C}{}_n^k = \overset{\frown}{C}{}_7^4 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(7+4-1)!}{4!(7-1)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24} = 210$$

Приклад. *Скількома способами 12 кульок можна розподілити по 3 урнах?*

Розв'язок.

Представимо, що три урни–це одна коробка із двома простінками. Тоді одержуємо два типи об'єктів:

Тип перший: кульки(12 штук)- кульку позначимо 1

Тип другої: простінки (2 штуки) – простінок позначимо 0.

Приклади розміщення:

11111011101111-$\{5,3,4\}$

10110111111111-$\{1,2,9\}$

11101110111111-$\{3,3,6\}$

$$\widehat{C}_n^k = \widehat{C}_{12}^3 = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(12+3-1)!}{3!(12-1)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14}{6} = 364$$

Приклади для комбінацій з повтореннями

Приклад. Нехай дана множина $A=\{a,b,c,d\}$. Тоді підмножини комбінацій з повтореннями $\overset{\frown}{C}{}_4^2$ включають:

$$\{a,a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,c\},\{c,d\},\{d,d\}$$

Їхня кількість

$$\overset{\frown}{C}{}_n^k=\overset{\frown}{C}{}_4^2=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=\frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!}=\frac{5!}{2!3!}=10.$$

Розбиття множини на підмножини

Нехай дана n-множина A. Говорять, що множина A розбита на k підмножин A_i, де$\left(1,2,\ldots,k\right)$, якщо:

1. $A_i \neq \varnothing, \quad i \in \left\{1,2,\ldots,k\right\}$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i,j \in \left\{1,2,\ldots,k\right\}$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = A$.

Позначимо число елементів у підмножині A_i через $n\left(A_i\right) = n_i$ Очевидно, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Кількість розбиттів множини на підмножини позначимо

$$C\left(n; n_1, n_2, \ldots, n_k\right).$$

Визначимо кількість розбиттів

Кількість способів вибору елементів підмножини A_1, дорівнює кількості сполук $C_n^{n_1}$.

Кількість способів вибору елементів підмножини A_2 дорівнює кількості сполук $C_{n-n_1}^{n_2}$.

Кількість способів вибору цих двох підмножин дорівнює $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2}$ і так далі.

Таким чином, кількість вибору всіх розбиттів дорівнює

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{k!}}.$$

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_{k!}}$$

Порівняємо даний вираз з формулою для перестановок з повтореннями.

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Можна зробити висновок, що операція **розбиття множини на підмножини** та **перестановки з повтореннями** – це ті самі комбінаторні дії з різною інтерпретацією.

Приклад. Із пропорції $C_x^y : C_x^{y-1} : C_x^{y-2} = 3:3:2$ знайти x й y .

Відповідь. Записавши окремо відношення першого члена пропорції до другого й другого до третього, після скорочення одержимо:

$$\frac{x!}{y!(x-y)!} : \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{(y-1)!(x-y+1)!}{y!(x-y)!} =$$

$$\frac{(y-1)!(x-y)!(x-y+1)}{y(y-1)!(x-y)!} = \frac{(x-y+1)}{y}$$

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} : \frac{x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = \frac{(y-2)!(x-y+2)!}{(y-1)!(x-y+1)!} =$$

$$= \frac{(y-2)!(x-y+1)!(x-y+2)}{(y-2)!(y-1)(x-y+1)!} = \frac{(x-y+2)}{(y-1)}$$

З умови задачі одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{(x-y+1)}{y}=1 \\ \dfrac{(x-y+2)}{(y-1)}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Розв’язуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$x-y+1=y;\; x=2y-1,$$
$$2x-2y+4=3y-3;\; 2x=5y-7.$$
$$4y-2=5y-7;\;\; y=5;\;\; x=9$$

Тотожності для сполук

Основна формула для кількості сполук

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

дозволяє одержати ряд простих тотожностей. Розглянемо деякі з них.

Теорема 1. $C_n^r = C_n^{n-r}$

Доведення. $C_n^{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\big(n-(n-r)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r.$

Теорема 2. $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Доведення.

$$C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\left(n-1-(r-1)\right)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r\cdot(r-1)!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)\cdot(r-1)!(n-r-1)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

Теорема 3. $C_n^i C_i^r = C_n^r C_{n-r}^{i-r}$

Доведення.

$C_n^i \cdot C_i^r =$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{r!(i-r)!} = \frac{n!}{r!(i-r)!(n-i)!} =$$

$$= \frac{n!(n-r)!}{r!(i-r)!(n-i)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r!)}{(i-r)!(n-r-i+r)!} =$$

$$= C_n^r \cdot \frac{(n-r!)}{(i-r)!((n-r)-(i-r))!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{i-r}$$

Теорема 4. Біном Ньютона: $\left(x+y\right)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r x^r y^{n-r}$.

$$\left(x+y\right)^2=\sum_{r=0}^{2}C_2^r x^r y^{2-r}=C_2^0x^0y^2+C_2^1x^1y^1+C_2^2x^2y^0=x^2+2xy+y^2$$

$$C_2^0=\frac{2!}{0!\left(2-0\right)!}=1;\ C_2^1=\frac{2!}{1!\left(2-1\right)!}=2;\ C_2^2=\frac{2!}{2!\left(2-2\right)!}=1$$

$$\left(x+y\right)^3=\sum_{r=0}^{3}C_3^r x^r y^{3-r}=C_3^0x^0y^3+C_3^1x^1y^2+C_3^2x^2y^1+C_3^3x^3y^0=x^3+3xy^2+3x^2y+y^3$$

$$C_3^0=1;\ C_3^1=\frac{3!}{1!\left(3-1\right)!}=\frac{6}{2}=3;\ C_3^2=\frac{3!}{2!\left(3-2\right)!}=\frac{6}{2}=3;\ C_3^3=1$$

$$\left(x+y\right)^4=\sum_{r=0}^{4}C_4^r x^r y^{4-r}=C_4^0x^0y^4+C_4^1x^1y^3+C_4^2x^2y^2+C_4^3x^3y^1+C_4^4x^4y^0$$

$$=y^4+4x^1y^3+12x^2y^2+24x^3y^1+x^4$$

$$C_4^0=1;\ C_4^1=\frac{4!}{1!\left(4-1\right)!}=\frac{4!}{3!}=4;\ C_4^2=\frac{4!}{1!\left(4-2\right)!}=\frac{4!}{2!}=12;\ C_4^3=\frac{4!}{1!\left(4-3\right)!}=\frac{4!}{1!}=24;$$

Наслідки теореми про біном Ньютона

Наслідок 1: Нехай $x=1$ **і** $y=1$

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r 1^r 1^{n-r} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^n = 2^n$$

Отже $\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$

Наслідок 2: Нехай $x=-1$ **і** $y=1$

$(-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r 1^{n-r} = 0$. Отже $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0$.

Отже $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r = 0$.

Наслідок 3. Нехай $y=1$

$\left(x+1\right)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r x^r$. Продиференціюємо: $n\left(x+1\right)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}r x^{r-1}C_n^r$

Підставимо $x=1$. Одержимо: $\sum_{r=0}^{n}rC_n^r=n2^{n-1}$

Теорема 5. $C_{n+r}^k=\sum_{i=0}^{k}C_n^i\cdot C_r^{k-i}$