ЛЕКЦІЯ 3

Відношення

Операції над відношеннями

Композиція.
Властивості композиції

Поняття відношення

Теорія відношень реалізує в математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами.

Відношення між **парою** об'єктів називається **бінарним**.

Бінарне відношення використовується для того, щоб вказати вид зв'язку між парою об'єктів, розглянутих у певному порядку.

При цьому **відношення дає критерій** для **відмінності** одних упорядкованих пар від інших. Для **відповідності** такого **критерію не існує**.

У цьому відмінність **відношення** від **відповідності.**

Приклад №1. Відповідність. Розглянемо 2 множини:

$A=\{a|a-студент\ ФІОТ\}\quad B=\{b|b-номер\ телефону\}$.

Відповідність $q=(A,B,Q)$ визначає пари $Q\subseteq A\times B$, але не існує загальної ознаки, за якою ці пари встановлюються.

$$Q=(ab|-?)$$

Приклад №2. Відношення. Розглянемо 2 множини:

$A=\{батько(180см,56\,років),мати(175см,50\,років)\}$

$B=\{син(185см,18\,років),\ дочка(170см,17\,років)\}$

Бінарні віднощення $R\subset A\times B$ і $S\subset A\times B$, задані предикатами

1. R=$\{(a,b)|$ "a *має вищий зріст*, ніж b" $\}$.
2. S=$\{(a,b)|$ "а старше, ніж b" $\}$

$A\times B=\{$(батько,син),(батько, дочка),(мати, син),(мати,дочка)$\}$

$R=\{(батько,дочка)\}$,

$S=\{(батько,син),(батько,дочка),(мати,син),(мати,дочка)\}$

Визначення відношення

Відношенням R множин X і Y називають довільну підмножину $X \times Y$.

Отже відношення R – це множина, елементами якої є упорядковані пари $(x, y) \in R$.

Множина R ***є підмножиною декартового добутку***

$$R \subseteq X \times Y$$

Якщо $(x, y) \in R$, то елемент відношення можна записати як xRy. Говорять, що x і y перебувають у відношенні R, або просто, що x відноситься до y.

Якщо $X = Y$, то відношення є підмножиною $X \times X$. Таке відношення також входить до класу ***бінарних відношень*** на X.

Приклад відношень

Приклад №3.

$X=\{2, 3\}$, $Y=\{3, 4, 5\}$.

$X\times Y= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R\subseteq X\times Y$ *(Відношення – це відповідність, для якої задане правило)*

$R_1=\{(x,y) \mid "x<y"\}$ $R_1=\{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

$R_2=\{(x,y) \mid "x\geq y"\}$ $R_2=\{(3,3)\}$

$R_3=\{(x,y) \mid "x>y"\}$ $R_3=\varnothing$

$R_4=\{(x,y) \mid x+y=2n, де\ n=\overline{1,4}\}$ $R_4=\{(2,4),(3,3),(3,5)\}$

Приклад №4.

$A=\{2,3,5,7\}$; $B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),$
$(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$, $R=\{(a,b) \mid$ "a є дільником b" $\}$,

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

Такі неповні речення (предикати, твердження) можуть задавати критерій відношення:

- x відбувається раніше (або пізніше), ніж y, $x \prec y$

- X входить (або строго входить) в Y, $X \subseteq Y$, $X \subset Y$

- x паралельне (або перпендикулярне) до y, $x \| y$, $x \perp y$

- x дорівнює (або еквівалентне) y, $x = y$, $x \equiv y$

- x є братом y, "*x брат y*"

- x знаходиться у стані війни з y і т. ін.

Графік відношення подільності

При створені графіків відношень будемо позначати:

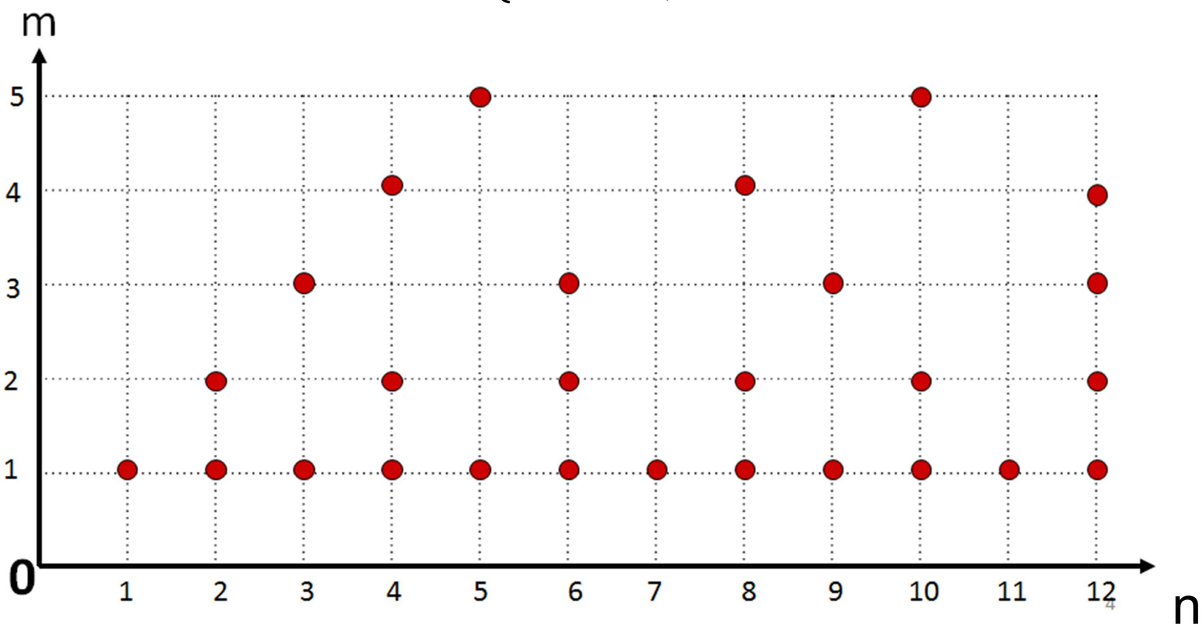
R – множина дійсних чисел;

R^+ – множина додатних дійсних чисел

R^- – множина від'ємних дійсних чисел

Z^+ – множина цілих додатних чисел

Нехай на $D \subset Z^+ \times Z^+ \to \ D = \left\{ \left(n, m\right) \middle| "n \text{ ділиться націло на } m" \right\}$

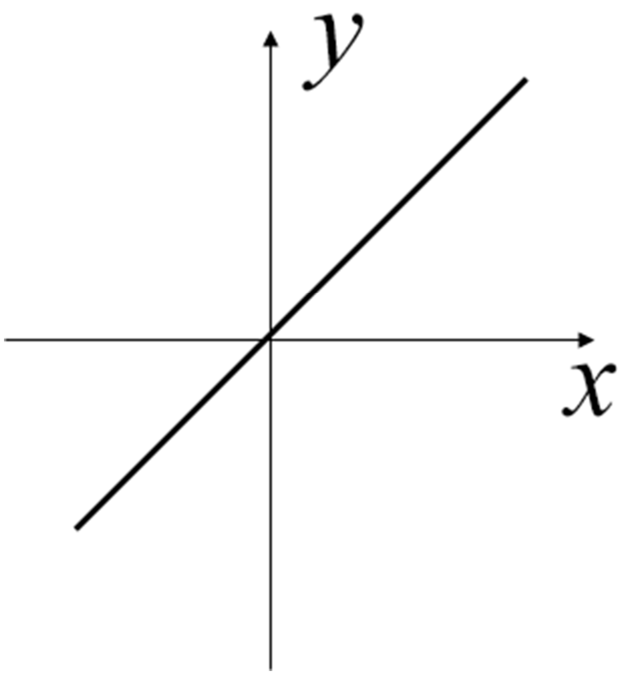


$$D = \left\{ \left(1,1\right), \left(2,1\right), \left(2,2\right), \ldots, \left(12,3\right), \left(12,4\right) \right\}$$

Графік відношення рівності

$$M \subset R \times R$$

R— ***множина*** **дійсних чисел**



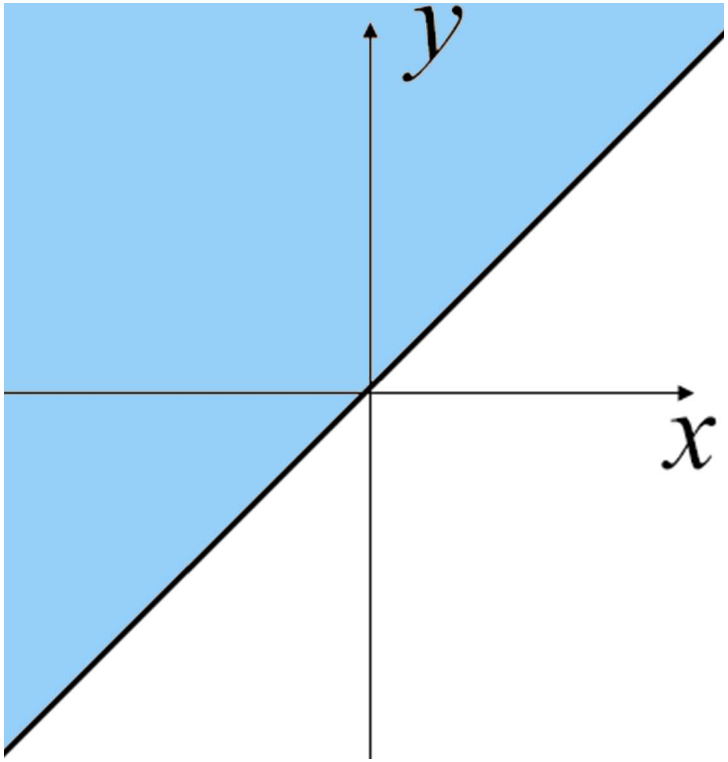
$$M = \{(x, y) | x = y\}$$

$$M = \{(-100, -100), \ldots, (-10, -10), \ldots, (0, 0), \ldots, (1, 1), \ldots\}$$

Графік відношення нерівності

$$L \subset R \times R$$

R— *множина* **дійсних чисел**



$$L = \left\{ \left(x, y \right) \middle| x \leq y \right\}$$

$$L = \left\{ \left(-100, -99 \right), \ldots, \left(-10, -9 \right), \ldots, \left(0, 0 \right), \ldots, \left(1, 2 \right), \ldots . \right\}$$

Область визначення й множина значень

Область визначення відношення R на X і Y – це множина елементів $x \in X$ таких, що для деяких $y \in Y$ маємо $(x, y) \in R$.

Інакше кажучи, область визначення R це множина всіх перших координат упорядкованих пар з R.

Множина значень відношення R на X і Y – це множина елементів $y \in Y$ таких, що для деяких $x \in X$ маємо $(x, y) \in R$.

Інакше кажучи, множина значень R – це множина всіх других координат упорядкованих пар з R.

Приклад №5

Якщо $R = X \times Y$, то:

Область визначення – множина X

Множина значень – множина Y.

Способи задавання бінарних відношень

1. Задавання явно або предикатом

Бінарне відношення можна задати:

А. Явно, перерахувавши всі пари, які до нього входять (якщо відношення складається з скінченної кількості пар)

Б. Предикатом, вказавши загальну властивість пар, що належать цьому відношенню (згадайте способи задавання множин).

Приклад №6. Приклад явного задавання.

Нехай дана множина $X = \{p, r, s, q\}$.

Задамо відношення $R \subseteq X \times X$ перерахуванням пар

$$R = \{(p, p), (p, r), (p, s), (r, p), (s, r), (s, q)\}$$

Приклад №7. Приклад задавання предикатом.

Нехай дано N – множина натуральних чисел.

Задамо відношення, вказавши загальну властивість пар, що належать відношенню:

$$R_1 = \{(n, m) \in N \times N \mid n \text{ є дільником } m\}$$

2. Задавання графом

Спосіб задавання бінарного відношення за допомогою графа.

Нехай $R \subset X \times X$. $X = \left\{ x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n \right\}$

1. Елементи множини X – точки на площині (їх називають вершинами графа).

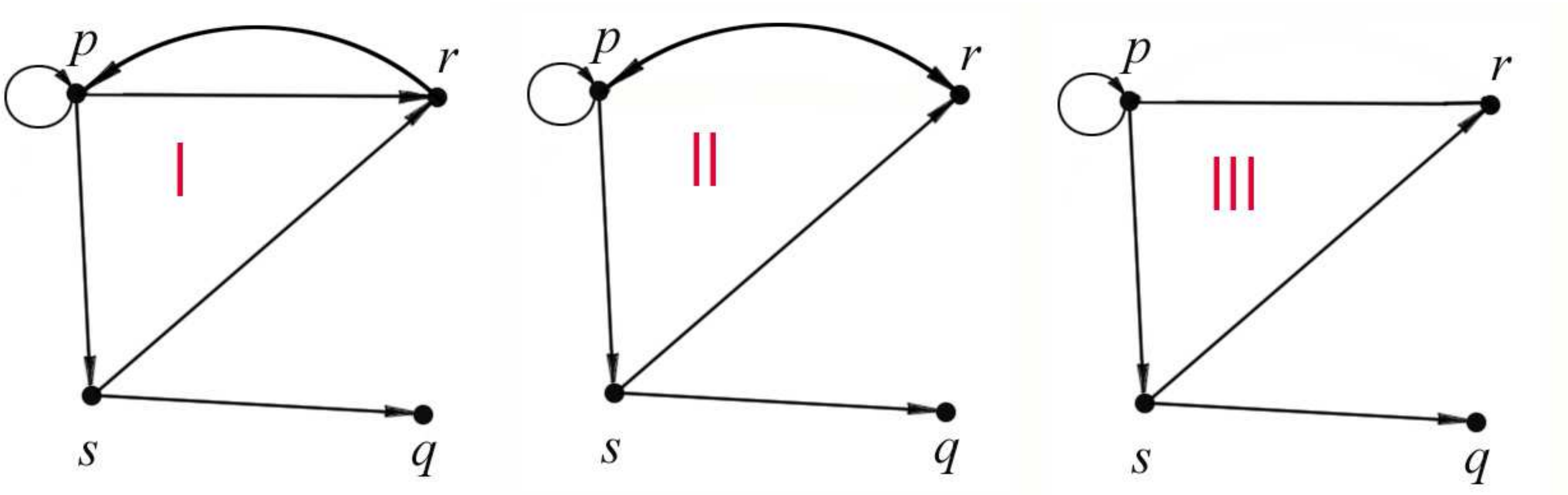
2. Точки x_i, x_j з'єднані стрілкою $\to$ від x_i до x_j тоді й тільки тоді, коли $\left(x_i, x_j \right) \in R$.

3. Якщо одночасно $\left(x_i, x_j \right) \in R$ та $\left(x_j, x_i \right) \in R$ то точки x_i і x_j з'єднують двома лінями зі стрілками: $\rightleftarrows$, двонаправленою лінією: $\leftrightarrow$, або лінією без стрілок: —.

4. Якщо $\left(x_j, x_j \right) \in R$, то в точці x_j зображують петлю.

Приклад №8. Приклад задавання відношення графом

На рисунку зображено можливі зображення графа бінарного відношення R:



Орієнтований змішаний змішаний

Відношення R також задаємо перерахуванням:

$$R=\{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}.$$

3. Задавання за допомогою булевих матриць

Нехай $R \subseteq X \times Y$, де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n\}; \; Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_j, \dots, y_m\}.$$

Тоді відношення R у вигляді матриці – це таблиця з n рядками і m стовпцями.

$$|X| = n \;, \; |Y| = m$$

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \hline x_1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

1. В нульовий стовпець (який не рахуємо) виписані елементи множини X.

2. В нульовий рядок (який не рахуємо) виписані елементи множини Y.

3. На перетині рядка елемента x_i й стовпця елемента y_j записують 1, якщо пари $(x_i, y_j) \in R$, і 0 – якщо $(x_i, y_j) \notin R$.

Таку таблицю називають **булевою матрицею відношення**

Приклад №9. Задавання відношення матрицею

Нехай дано множини $X = \{p, q, r, s\}$ і $Y = \{a, b, c, d\}$.

Розглянемо відношення R_1 і R_2, які задані перерахуванням та булевими матрицями :

$$R_1 \subset X \times Y: \; R_1 = \{(p,a),(p,c),(p,d),(r,a),(s,b),(s,c)\}$$

R_1	*a*	*b*	*c*	*d*
p	1	0	1	1
q	0	0	0	0
r	1	0	0	0
s	0	1	1	0

$$R_2 \subset X \times Y: \; R_2 = \{(p,\mathrm{a}),(s,\mathrm{b}),(r,\mathrm{d}),(\mathrm{q},\mathrm{d}),(r,a)\}$$

R_2	*a*	*b*	*c*	*d*
p	1	0	0	0
q	0	0	0	1
r	1	0	0	1
s	0	1	0	0

Зріз (перетин) відношення R через елемент

Нехай $R \subseteq X \times Y$, де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n\};\ Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_j, \ldots, y_m\}.$$

R - довільне бінарне відношення між елементами множин X і Y.

Розглянемо довільний елемент x_i множини X

Означення. ***Множину тих елементів, з якими елемент x_i перебуває у відношенні R, називають зрізом (перетином) відношення R через елемент x_i і позначають $R(x_i)$.***

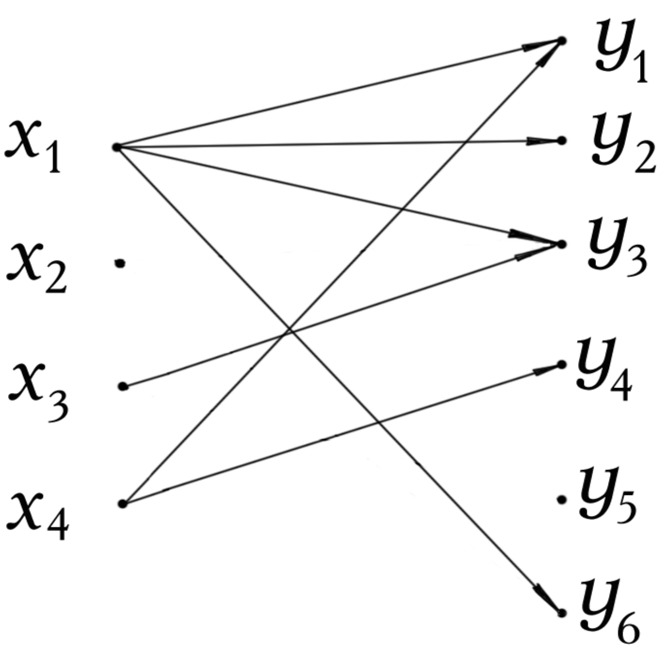
Якщо бінарне відношення R представлене за допомогою графа, то $R(x_i)$ складається з тих вершин множини Y, у які з вершини x_i йде стрілка.

Якщо бінарне відношення R представлене матрицею, то $R(x_i)$ складається з тих вершин множини Y, для яких у рядку x_i стоїть 1.

Зріз в ідношення через елемент – це множина, яка може містити **кілька елементів, один елемент і жодного елемента (бути порожньою).**

Приклад №10. Задавання зрізу відношення R через елемент x_i

Нехай дані множини $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$ та відношення $R\subset X\times Y$, яке задане графом.



Зріз відношення R через елемент x_1:

$$R(x_1)=\{y_1,y_2,y_3,y_6\}$$

Зріз відношення R через x_2:

$$R(x_2)=\{\varnothing\}$$

Зріз відношення R через x_3:

$$R(x_3)=\{y_3\}$$

Зріз відношення R через x_4:

$$R(x_4)=\{y_1,y_4\}$$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} R \\ \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} R & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline x_1 & {\color{red}1} & {\color{red}1} & {\color{red}1} & 0 & 0 & {\color{red}1} \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & {\color{blue}1} & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & {\color{green}1} & 0 & 0 & {\color{green}1} & 0 & 0 \end{array}$$

$$|R(x_1)|={\color{red}4}$$
$$|R(x_2)|=0$$
$$|R(x_3)|={\color{blue}1}$$
$$|R(x_1)|={\color{green}2}$$

Операції над відношеннями

Оскільки бінарні відношення представляють множини (пар), то до них застосовні поняття рівності, включення, а також операції об'єднання, перетину, різниці і доповнення.

Для двох бінарних відношень R і S визначимо такі операції:

Включення $R \subset S$ розуміють таким чином, що будь-яка впорядкована пара елементів, яка належить відношенню R, належить і відношенню S.

Визначення. Нехай дано множини $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $Y = \{y_i\}_{i=1}^{m}$ та відношення $R \subset X \times Y, S \subseteq X \times Y$. Тоді відношення R строго включене у відношення S, $R \subset S$, якщо кожний елемент (x_i, y_j), $i = \overline{1,n}$, $y_j = \overline{1,m}$, який належить R одночасно належить відношенню S. Але не всі елементи $(x_i, y_j) \in S$ належать відношенню R.

Приклад №11. Приклад включення.

Дано множини: $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$

Нехай існують відношення на даних множинах:

$$R \subset X \times Y,\ S = X \times Y,$$

Задамо відношення R та S перерахуванням:

$S = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\},$

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\},$

Розглянемо елементи відношення R.

Ми можемо стверджувати, що $R \subset S$ оскільки

$(1,a) \in R \ \wedge \ (1,a) \in S,$	$(1,b) \notin R \wedge (1,b) \in S$
$(2,a) \in R \ \wedge \ (2,a) \in S,$	$(1,c) \notin R \wedge (1,c) \in S$
$(3,a) \in R \ \wedge \ (3,a) \in S$	....
	$(3,c) \notin R \wedge (3,c) \in S$

Рівність відношень

Рівність $R = S$ означає, що відношення R і S складаються з тих самих упорядкованих пар.

Визначення.

Нехай дано множини $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $Y = \{y_i\}_{i=1}^{m}$ та відношення:

$$R \subset X \times Y, S \subset X \times Y.$$

Тоді відношення R дорівнює відношенню S, тобто $R = S$, якщо

1. $\forall \left(x_i, y_j\right) \to \left(x_i, y_j\right) \in R \wedge \left(x_i, y_j\right) \in S$
2. $|R| = |S|$

Приклад №12. Приклад рівності.

$X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$,

$S = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R = S$ оскільки $(1,a) \in R \ \wedge \ (1,a) \in S$, $(2,a) \in R \ \wedge \ (2,a) \in S$, $(3,a) \in R \ \wedge \ (3,a) \in S$, а також $|R| = |S|$.

Приклад №13. Приклад рівності.

$X = \{Іван, Василь, Петро\}$, $Y = \{Марія, Оксана, Світлана\}$

$|R| = |S|$, $R \subset X \times Y$, $S \subset X \times Y$

$S = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$,

$S = ((a,b) | \text{вік a + вік b} \leq 50)$

$R = \{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$.

$R = ((a,b) | a \ і \ b - \text{студенти})$

Тоді $R = S$

Об’єднання відношень

Об'єднання $R \cup S$ відношень R і S складається з упорядкованих пар, що належать хоча б одному із цих відношень.

Визначення

Нехай дано множини $X = \left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$, $Y = \left\{y_i\right\}_{i=1}^{m}$ та відношення:

$$R \subset X \times Y, S \subset X \times Y.$$

Тоді відношення Z є об’єднанням відношень R і S, тобто $Z = R \cup S$, якщо

$$\forall \left(x_i, y_j\right) \in Z \to \left(x_i, y_j\right) \in R \vee \left(x_i, y_j\right) \in S$$

Приклад №14. Приклад об'єднання.

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$,

$S=\{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R\cup S=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(3,a)\}$

Приклад №15. Приклад об'єднання.

$X=\{Іван, Василь, Петро\}$, $Y=\{Марія, Оксана, Світлана\}$

$S=\{(Іван, Марія),(Петро, Оксана)\}$,

$R=\{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді

$R\cup S=\{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$

Перетин відношень

Перетин $R \cap S$ відношень R і S є новим відношенням, що складається з упорядкованих пар , які належать одночасно обом відношенням.

Визначення

Нехай дано множини $X = \left\{ x_i \right\}_{i=1}^{n}$, $Y = \left\{ y_i \right\}_{i=1}^{m}$ та відношення:

$$R \subset X \times Y, S \subset X \times Y.$$

Тоді відношення Z є перетином відношень R і S, тобто $Z = R \cap S$, якщо

$$\forall \left(x_i , y_j \right) \in Z \to \left(x_i , y_j \right) \in R \wedge \left(x_i , y_j \right) \in S$$

Приклад №16. Приклади перетину.

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$,

$S=\{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$R\cap S=\{(1,a)\}$

Приклад №17.

$X=\{Іван, Василь, Петро\}$, $Y=\{Марія, Оксана, Світлана\}$

$R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$

$S=\{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$,

$R=\{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді $R\cap S=\{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$

Різниця відношень

Різниця $R-S$ відношень R і S є множиною впорядкованих пар, що належать відношенню R і не належать відношенню S.

Визначення

Нехай дано множини $X=\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $Y=\{y_i\}_{i=1}^{m}$ та відношення:

$$R\subset X\times Y,\ S\subset X\times Y.$$

Тоді відношення Z є різницею відношень R і S, тобто $Z=R-S$, якщо

$$\forall\left(x_i,y_j\right)\in Z\rightarrow\left(x_i,y_j\right)\in R\wedge\left(x_i,y_j\right)\notin S$$

Приклад №18. Приклад різниці.

$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$,

$S=\{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$R=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$,

$Z=R-S=\{(2,a),(3,a)\}$

Приклад №19. Приклад різниці.

$X=\{Іван, Василь, Петро\}$, $Y=\{Марія, Оксана, Світлана\}$

$R\subset X\times Y$, $S\subset X\times Y$

$S=\{(Іван, Марія),(Василь, Світлана)\}$,

$R=\{(Іван, Марія),(Петро, Оксана),(Василь, Світлана)\}$.

Тоді $Z=R-S=\{(Петро, Оксана)\}$

Доповнення відношення

Доповнення. Якщо R – бінарне відношення між елементами множин X і Y, то його **доповненням** $\overline{R}$ (відносно $X \times Y$) називають різницю $\left(X \times Y\right) - R$

Визначення

Нехай дано множини $X = \left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$, $Y = \left\{y_i\right\}_{i=1}^{m}$ та відношення:

$$R \subset X \times Y.$$

Тоді відношення $\overline{R}$ є доповненням відношення R, якщо

$$\forall\left(x_i, y_j\right) \in \overline{R} \rightarrow \left(x_i, y_j\right) \in \left(X \times Y\right) - R$$

Приклад №20. Приклад доповнення

$$X=\{1,2,3\},\ Y=\{a,b,c\},\ R\subset X\times Y,$$

$$X\times Y=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\},$$

$$R=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$$

$$\overline{R}=\{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(3,c)\},$$

Приклад №21. Приклад доповнення

$$X=\{Іван, Василь\},\ Y=\{Марія, Оксана\}$$

$$X\times Y=\{(Іван, Марія),(Іван, Оксана),(Василь, Марія),(Василь, Оксана)\}$$

$$R=\{(Іван, Марія),(Василь, Марія)\},$$

$$\overline{R}=\{(Іван, Оксана),(Василь, Оксана)\}.$$

Операція об'єднання довільних сімейств відношень

Нехай $\left\{ R_i \right\}_{i \in I}$ – сімейство відношень, яке утворює множину відношень, де I – *додатне натуральне число*.

Тоді відношення Z є об'єднанням сімейства $\left\{ R_i \right\}_{i \in I}$, якщо $Z = \bigcup_{i \in I} R_i$, тобто відношення Z складається з упорядкованих пар, які належать хоча б одному з відношень R_i.

Приклад №22. Об'єднання сімейств відношень

$X = \{a, b, c\}, Y = \{k, l, m\}$,

$X \times Y = \{(a,k),(a,l),(a,m),(b,k),(b,l),(b,m),(c,k),(c,m),(c,l)\}$

$R_1 = \{(a,k),(c,l),(a,m)\}$, $R_2 = \{(a,m),(b,k),(c,k)\}$

$R_3 = \{(a,m),(c,k),(c,l)\}$

$$Z = \bigcup_{i=1}^{3} R_i = \{(a,k),(c,l),(a,m),(b,k),(c,k)\}$$

Операція перетину довільних сімейств відношень

Перетин сімейства $\left(R_i\right)_{i\in I}$ – це відношення $Z=\bigcap\limits_{i\in I} R_i$, що складається з упорядкованих пар, які належать одночасно усім відношенням R_i.

Приклад №23. Перетин сімейств відношень

$X=\{a,b,c\},Y=\{k,l,m\}$,

$X\times Y=\{(a,k),(a,l),(a,m),(b,k),(b,l),(b,m),(c,k),(c,m),(c,l)\}$

$R_1=\{(a,k),(c,l),(a,m)\}$, $R_2=\{(a,m),(b,k),(c,k)\}$

$R_3=\{(a,m),(c,k),(c,l)\}$

$$Z=\bigcap_{i=1}^{3} R_i=\{(a,m)\}$$

Додаткові операції

Для відношень задають деякі **додаткові операції**, які пов'язані з їх специфічною структурою, яка проявляється в тому, що **всі елементи відношень є упорядкованими парами**. Розглянемо дві такі операції.

1. Обернене відношення

Якщо в кожній упорядкованій парі, яка належить відношенню R, поміняти місцями перший і другий компонент, то одержимо нове відношення, яке називають **оберненим** до відношення R і позначають через R^{-1}.

Приклад №24. Для відношення R

$$R=\{(p,r),(s,q),(r,p),(p,p),(s,r),(p,s)\}$$

обернене відношення R^{-1} має вигляд:

$$R^{-1}=\{(r,p),(q,s),(p,r),(p,p),(r,s),(s,p)\}$$

Представлення R^{-1} графом, матрицею та предикатом

Граф. Граф відношення R^{-1} одержують із графа відношення R шляхом переорієнтації всіх стрілок.

Матриця. Відношення R задане за допомогою булевої матриці перетворюємо у відношення R^{-1} міняючи місцями рядки і стовпці.(ТРАНСПОНУВАННЯ)

Предикат. Нехай $R \subseteq X \times Y$ є відношенням на $X \times Y$. Тоді відношення R^{-1} на $Y \times X$ визначають у такий спосіб:

$$R^{-1} = \left\{ \left(y, x \right) \middle| \left(x, y \right) \in R \right\}.$$

Інакше кажучи, $\left(y, x \right) \in R^{-1}$ тоді й тільки тоді, коли $\left(x, y \right) \in R$ або, що рівнозначно, $yR^{-1}x$ тоді й тільки тоді, коли xRy**.**

Відношення R^{-1} називають ***оберненим відношенням*** до даного відношення R**.**

Приклад №25. Задавання перерахуванням

Нехай $R = \left\{\left(1,r\right),\left(1,s\right),\left(3,s\right)\right\}$,

тоді $R^{-1} = \left\{\left(r,1\right),\left(s,1\right),\left(s,3\right)\right\}$.

Приклад №26. Задавання предикатом

Нехай R={$\left(a,b\right)\middle| b$ є чоловіком a}, тоді R^{-1}={$\left(b,a\right)\middle| a$ є дружиною b}

Приклад №27. Випадок рефлексивних відношень

Нехай

R = {$\left(a,b\right)\middle| b$ є родичем a}, тоді $R = R^{-1}$

Нехай

R — відношення $\left\{\left(a,b\right)\middle| a^2 + b^2 = 4\right\}$, тоді також $R^{-1} = R$.

Теорема про двічі обернене відношення.

Обернене відношення від оберненого відношення дорівнює прямому відношенню, тобто $\left(R^{-1}\right)^{-1}=R$.

Доведення.

Нехай існують дві множини: X та Y.

На декартовому добутку цих множин задано відношення $R\subset X\times Y$.

Припустимо, що $\left(x,y\right)\in\left(R^{-1}\right)^{-1}$. Тоді у відповідності з означенням оберненого відношення $\left(y,x\right)\in R^{-1}$.

Знову застосуємо означення оберненого відношення: $\left(x,y\right)\in R$.

Отже $\left(x,y\right)\in\left(R^{-1}\right)^{-1}\Leftrightarrow\left(x,y\right)\in R$

Композиція відношень (множення відношень)

Розглянемо 3 множини: X, Y та Z

Нехай $R \subseteq X \times Y$ — відношення на $X \times Y$,

а $S \subseteq Y \times Z$ — відношення на $Y \times Z$.

Композицією відношень S і R називають відношення

$$T \subseteq X \times Z,$$

визначене в такий спосіб:

$T = \{ \left(x, z \right) \Big|$ існує такий елемент $y \in Y$, що $\left(x, y \right) \in R$ і $\left(y, z \right) \in S$ }.

Цю множину позначають $T = R \circ S$.

Приклад №28

Нехай $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ і $Z=\{\alpha,\beta,\lambda,\mu\}$.

Також задані відношення
$R\subset X\times Y$ та $S\subset Y\times Z$

$R=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$,
$S=\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\lambda),(b,\mu)\}$,
Тоді $R\circ S=\{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\lambda),(2,\mu),(3,\lambda),(3,\mu)\}$
оскільки
з $(1,a)\in R$ і $(a,\alpha)\in S$ випливає, що $(1,\alpha)\in R\circ S$,
з $(1,a)\in R$ і $(a,\beta)\in S$ випливає, що $(1,\beta)\in R\circ S$,
…..
з $(3,b)\in R$ і $(b,\mu)\in S$ випливає, що $(3,\mu)\in R\circ S$.

Властивості композиції відношень

Розглянемо композиції відношень за умови, що X,Y і Z — множини і якщо
$R \subseteq X \times Y$,
$S \subseteq Y \times Z$ і
$T \subseteq Z \times D$
тоді

Асоціативність: $R \circ \left(S \circ T \right) = \left(R \circ S \right) \circ T$.

Обернена композиція: $\left(R \circ S \right)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$