

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 72

Студент  
XXX XXX XXX  
Р31XX

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

Функция  $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $2 < |x_1x_2 - x_3x_4x_5| < 5$  и неопределенное значение при  $|x_1x_2 - x_3x_4x_5| = 2$ .

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	d
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	1
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	1
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	0
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	0
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
9	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	0	1	2	1	2	0
11	0	1	0	1	1	1	3	1	3	d
12	0	1	1	0	0	1	4	1	4	1
13	0	1	1	0	1	1	5	1	5	1
14	0	1	1	1	0	1	6	1	6	0
15	0	1	1	1	1	1	7	1	7	0
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	d
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	0
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	0
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	d
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	0
24	1	1	0	0	0	3	0	3	0	1
25	1	1	0	0	1	3	1	3	1	d
26	1	1	0	1	0	3	2	3	2	0
27	1	1	0	1	1	3	3	3	3	0
28	1	1	1	0	0	3	4	3	4	0
29	1	1	1	0	1	3	5	3	5	d
30	1	1	1	1	0	3	6	3	6	1
31	1	1	1	1	1	3	7	3	7	1

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$		$Z(f)$
$m_4$	00100	✓	$m_2-m_3$	0001X	0001X
$m_2$	00010	✓	$m_4-m_{12}$	0X100	0X100
$m_{16}$	10000	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	10X00
$m_3$	00011	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	1X000
$m_{12}$	01100	✓	$m_4-m_{20}$	X0100	X0100
$m_{24}$	11000	✓	$m_{12}-m_{13}$	0110X	0110X
$m_{20}$	10100	✓	$m_3-m_{11}$	0X011	0X011
$m_{13}$	01101	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	1010X
$m_{21}$	10101	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	101X0
$m_{22}$	10110	✓	$m_{24}-m_{25}$	1100X	1100X
$m_{11}$	01011	✓	$m_{25}-m_{29}$	11X01	11X01
$m_{25}$	11001	✓	$m_{21}-m_{29}$	1X101	1X101
$m_{30}$	11110	✓	$m_{22}-m_{30}$	1X110	1X110
$m_{29}$	11101	✓	$m_{13}-m_{29}$	X1101	X1101
$m_{31}$	11111	✓	$m_{30}-m_{31}$	1111X	1111X
			$m_{29}-m_{31}$	111X1	111X1

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы									
		0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
		1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
		1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
		3	4	12	13	21	22	24	30	31	
A	0001X	X									
B	0X100		X	X							
	10X00										
C	1X000							X			
D	X0100		X								
E	0110X			X	X						
F	0X011	X									
G	1010X					X					
H	101X0						X				
I	1100X							X			
	11X01										
J	1X101					X					
K	1X110						X		X		
L	X1101				X						
M	1111X								X	X	
N	111X1									X	

Ядро покрытия:  $T = \{\}$ .

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы								
		0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	1	1	0	0	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	0	1	1
		1	0	0	0	0	1	0	1	1
		1	0	0	1	1	0	0	0	1
		3	4	12	13	21	22	24	30	31
A	0001X	X								
B	0X100		X	X						
C	1X000							X		
D	X0100		X							
E	0110X			X	X					
F	0X011	X								
G	1010X					X				
H	101X0						X			
I	1100X							X		
J	1X101					X				
K	1X110						X		X	
L	X1101				X					
M	1111X								X	X
N	111X1									X

Все импликанты имеют одинаковую цену, поэтому легко выбрать минимальное покрытие из таблицы. Рассмотрим одно из них:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ 0X100 \\ 1X000 \\ 0110X \\ 1010X \\ 101X0 \\ 1111X \end{array} \right\}$$

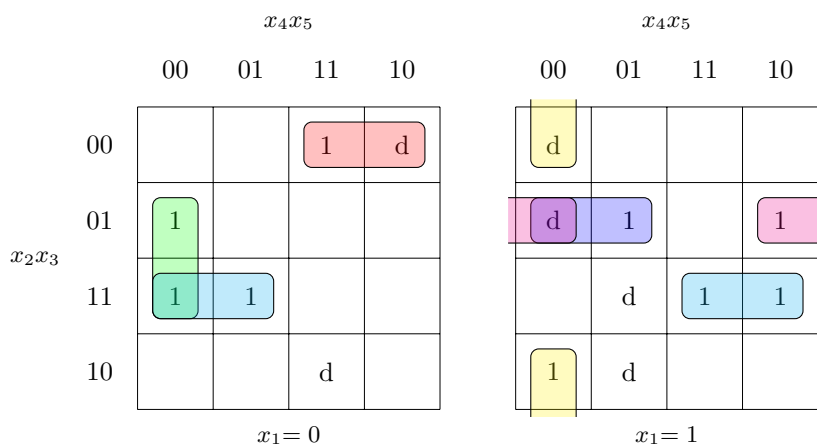
$$\begin{array}{l} S^a = 28 \\ S^b = 35 \end{array}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4$$

## Минимизация булевой функции на картах Карно

### Определение МДНФ

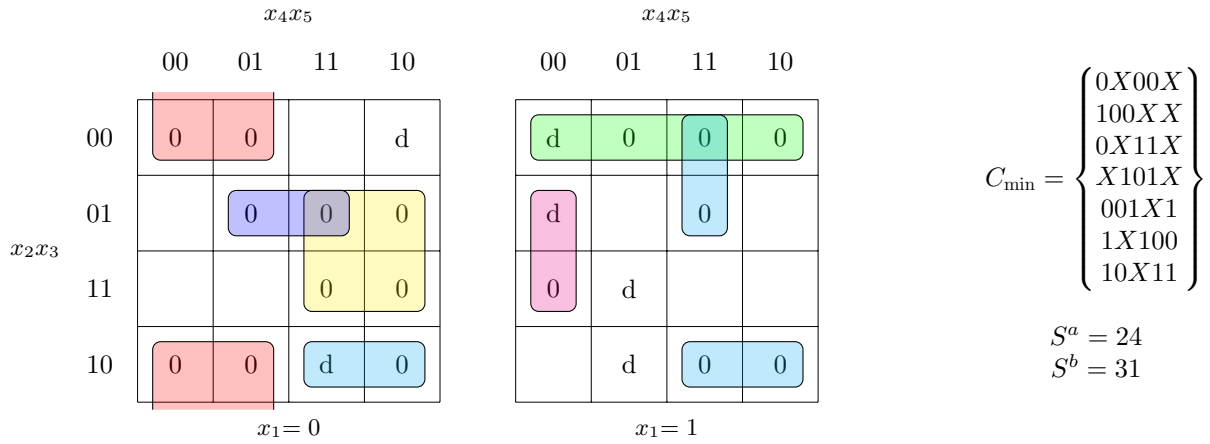


$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0001X \\ 0X100 \\ 1X000 \\ 0110X \\ 1010X \\ 101X0 \\ 1111X \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} S^a = 28 \\ S^b = 35 \end{array}$$

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4$$

## Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

## Преобразование минимальных форм булевой функции

### Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \quad S_Q = 35 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = x_1 \overline{x_2} x_3 (\overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \quad S_Q = 29 \quad \tau = 3$$

### Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 31 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} (x_2 \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 (\overline{x_4} \vee \overline{x_5})) (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \quad S_Q = 29 \quad \tau = 4$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$\begin{aligned} f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) &= 0 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) &= 0 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) &= 1 \\ f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) &= 1 \end{aligned}$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_2} x_3 (\overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (S_Q = 29, \tau = 3)$$

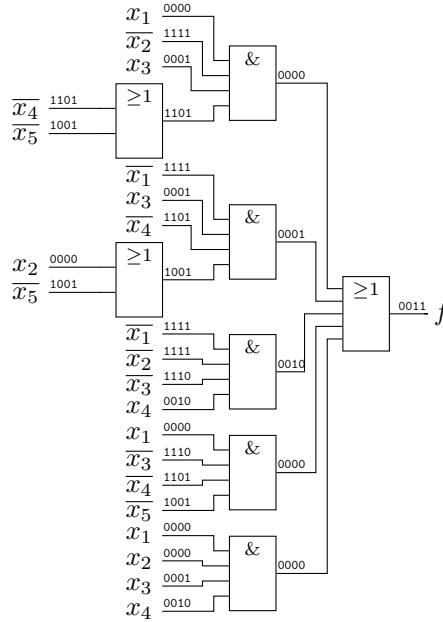
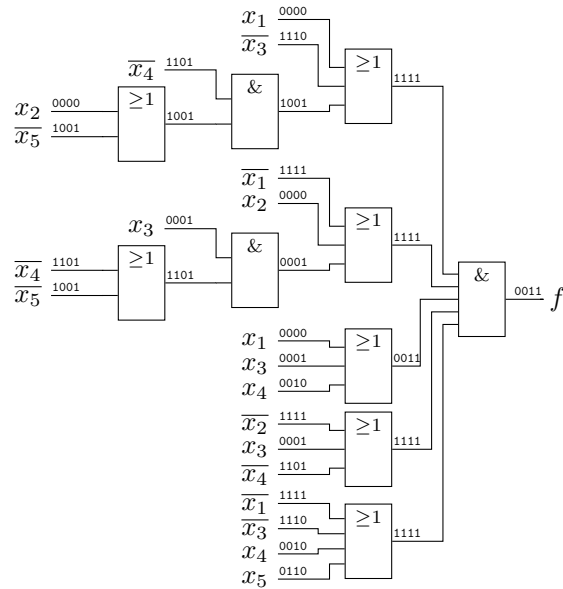


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} (x_2 \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 (\overline{x_4} \vee \overline{x_5})) (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \quad (S_Q = 29, \tau = 4)$$



## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5} \overline{x_1 x_3 x_4} \overline{x_2 x_5} \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} \overline{x_1 x_3 x_4 x_5} \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} \quad (S_Q = 37, \tau = 6)$$

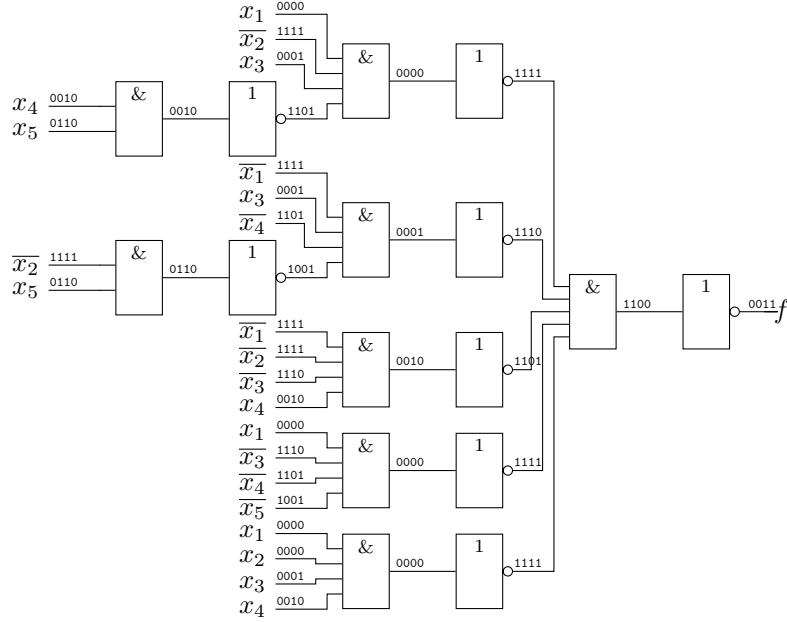
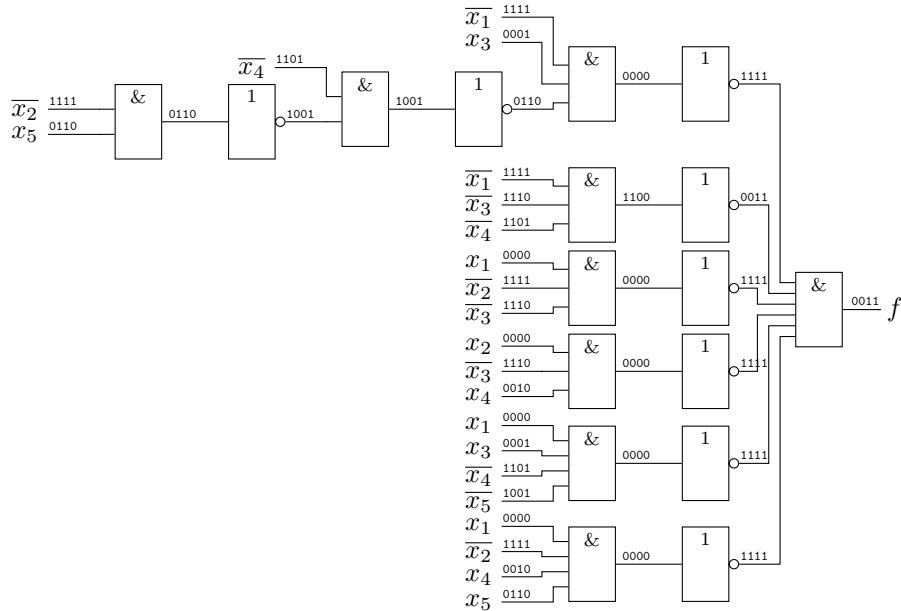


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 x_3 x_4 x_2 x_5} \overline{x_1 x_3 x_4} \overline{x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 x_4} \overline{x_1 x_3 x_4 x_5} \overline{x_1 x_2 x_4 x_5} \quad (S_Q = 38, \tau = 7)$$



## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_1 x_3 \overline{x_2} x_4 x_5 \overline{x_2} x_4 x_3 x_4 x_5 \overline{x_1} x_3 x_4 x_2 x_5 \overline{x_2} x_3 x_4 \quad (S_Q = 40, \tau = 7)$$

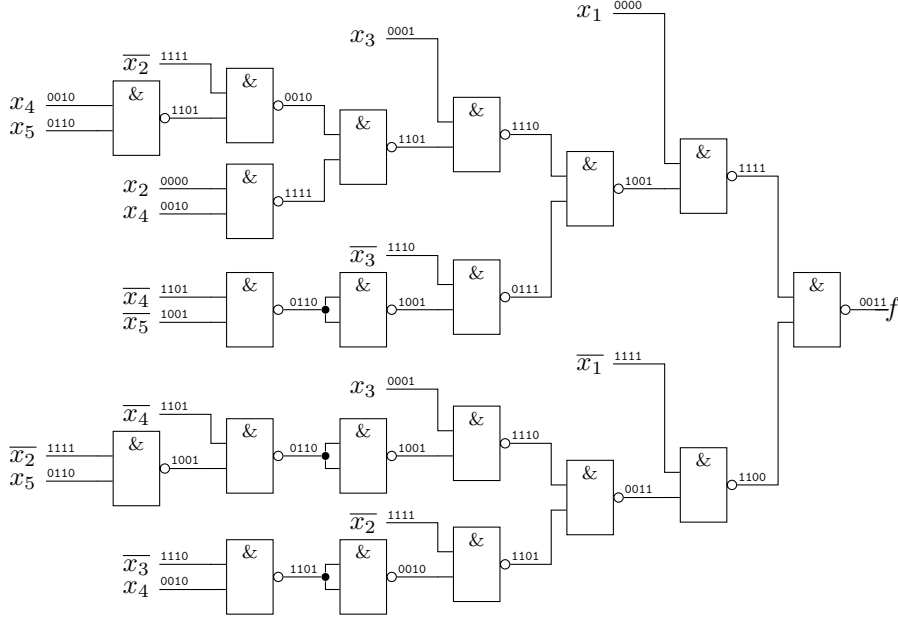


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_3 x_4 x_5 x_3 x_1 x_4 x_2 x_4 x_1 x_3 x_4 x_2 x_5 \quad (S_Q = 42, \tau = 9)$$

