**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №2 и №3
по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант: 17

Преподаватель:
Селина Елена Георгиевна

Выполнил:
Тимошкин Роман Вячеславович
Группа: P3231

Санкт-Петербург, 2025

Введение

В данной работе рассматривается задача нахождения минимума функции $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin(x)$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$ с помощью различных численных методов. Для решения задачи применяются следующие методы:

1. Метод половинного деления
2. Метод золотого сечения
3. Метод хорд
4. Метод Ньютона
5. Метод квадратичной аппроксимации

Для каждого метода выполняется 5 итераций (или до достижения заданной точности) и проводится сравнительный анализ результатов.

Постановка задачи

Найти минимум функции $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin(x)$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{4}]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$ для методов 1-4 и $\varepsilon = 0.0001$ для метода 5.

Для решения задачи необходимо:

- Вычислить производные функции (для методов, требующих их)
- Выполнить 5 итераций каждого метода
- Сравнить полученные результаты

Производные функции

Для методов, требующих вычисления производных, найдем первую и вторую производные функции $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - \cos(x)$$
$$f''(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} + \sin(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} + \sin(x)$$

Метод половинного деления

Реализация

Итерация 1

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad b_0 = 0.7854 \\
c_1 &= \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + 0.7854}{2} = 0.3927 \\
x_1^- &= \frac{a_0 + b_0 - \varepsilon}{2} = \frac{0 + 0.7854 - 0.002}{2} = 0.3917 \\
x_1^+ &= \frac{a_0 + b_0 + \varepsilon}{2} = \frac{0 + 0.7854 + 0.002}{2} = 0.3937 \\
f(x_1^-) &= f(0.3917) \approx \ln(1 + 0.3917^2) - \sin(0.3917) \approx -0.2392 \\
f(x_1^+) &= f(0.3937) \approx \ln(1 + 0.3937^2) - \sin(0.3937) \approx -0.2396
\end{aligned}
$$

Так как $f(x_1^-) > f(x_1^+)$, то минимум находится в правой части интервала, и мы обновляем $a_1 = c_1 = 0.3927$, $b_1 = b_0 = 0.7854$.

Итерация 2

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.3927, \quad b_1 = 0.7854 \\
c_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0.3927 + 0.7854}{2} = 0.5891 \\
x_2^- &= \frac{a_1 + b_1 - \varepsilon}{2} = \frac{0.3927 + 0.7854 - 0.002}{2} = 0.5881 \\
x_2^+ &= \frac{a_1 + b_1 + \varepsilon}{2} = \frac{0.3927 + 0.7854 + 0.002}{2} = 0.5901 \\
f(x_2^-) &= f(0.5881) \approx \ln(1 + 0.5881^2) - \sin(0.5881) \approx -0.2600 \\
f(x_2^+) &= f(0.5901) \approx \ln(1 + 0.5901^2) - \sin(0.5901) \approx -0.2601
\end{aligned}
$$

Так как $f(x_2^-) > f(x_2^+)$, то минимум находится в правой части интервала, и мы обновляем $a_2 = c_2 = 0.5891$, $b_2 = b_1 = 0.7854$.

Итерация 3

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 0.5891, \quad b_2 = 0.7854 \\
c_3 &= \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0.5891 + 0.7854}{2} = 0.6873 \\
x_3^- &= \frac{a_2 + b_2 - \varepsilon}{2} = \frac{0.5891 + 0.7854 - 0.002}{2} = 0.6863 \\
x_3^+ &= \frac{a_2 + b_2 + \varepsilon}{2} = \frac{0.5891 + 0.7854 + 0.002}{2} = 0.6883 \\
f(x_3^-) &= f(0.6863) \approx \ln(1 + 0.6863^2) - \sin(0.6863) \approx -0.2501 \\
f(x_3^+) &= f(0.6883) \approx \ln(1 + 0.6883^2) - \sin(0.6883) \approx -0.2498
\end{aligned}
$$

Так как $f(x_3^-) < f(x_3^+)$, то минимум находится в левой части интервала, и мы обновляем $a_3 = a_2 = 0.5891$, $b_3 = c_3 = 0.6873$.

Итерация 4

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 0.5891, \quad b_3 = 0.6873\\
c_4 &= \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{0.5891+0.6873}{2} = 0.6382\\
x_4^- &= \frac{a_3+b_3-\varepsilon}{2} = \frac{0.5891+0.6873-0.002}{2} = 0.6372\\
x_4^+ &= \frac{a_3+b_3+\varepsilon}{2} = \frac{0.5891+0.6873+0.002}{2} = 0.6392\\
f(x_4^-) &= f(0.6372) \approx \ln(1+0.6372^2) - \sin(0.6372) \approx -0.2566\\
f(x_4^+) &= f(0.6392) \approx \ln(1+0.6392^2) - \sin(0.6392) \approx -0.2563
\end{aligned}
$$

Так как $f(x_4^-) < f(x_4^+)$, то минимум находится в левой части интервала, и мы обновляем $a_4 = a_3 = 0.5891$, $b_4 = c_4 = 0.6382$.

Итерация 5

$$
\begin{aligned}
a_4 &= 0.5891, \quad b_4 = 0.6382\\
c_5 &= \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{0.5891+0.6382}{2} = 0.6137\\
x_5^- &= \frac{a_4+b_4-\varepsilon}{2} = \frac{0.5891+0.6382-0.002}{2} = 0.6127\\
x_5^+ &= \frac{a_4+b_4+\varepsilon}{2} = \frac{0.5891+0.6382+0.002}{2} = 0.6147\\
f(x_5^-) &= f(0.6127) \approx \ln(1+0.6127^2) - \sin(0.6127) \approx -0.2590\\
f(x_5^+) &= f(0.6147) \approx \ln(1+0.6147^2) - \sin(0.6147) \approx -0.2588
\end{aligned}
$$

Так как $f(x_5^-) < f(x_5^+)$, то минимум находится в левой части интервала, и мы обновляем $a_5 = a_4 = 0.5891$, $b_5 = c_5 = 0.6137$.

После 5 итераций получаем интервал $[0.5891, 0.6137]$, в котором находится минимум. Приближенное значение минимума: $x \approx 0.6014$ с $f(0.6014) \approx -0.2592$.

Метод золотого сечения

Реализация

Итерация 1

$\mathrm{x}_1 = 0 + 0.382(0.7854 - 0) \approx 0.3000$
$x_2 = 0 + 0.618(0.7854 - 0) \approx 0.4854$
$f(x_1) = f(0.3000) = \ln(1 + 0.3000^2) - \sin(0.3000) \approx -0.2085$
$f(x_2) = f(0.4854) = \ln(1 + 0.4854^2) - \sin(0.4854) \approx -0.2525$
Так как $f(x_1) > f(x_2)$, оставляем отрезок $[x_1, b] = [0.3000, 0.7854]$.

Итерация 2

На второй итерации x_1 полагаем равным x_2, а x_2 вычисляем по формуле: $\mathrm{x}_1 = 0.4854$
$x_2 = 0.3000 + 0.618(0.7854 - 0.3000) \approx 0.6000$
$f(x_2) = f(0.6000) \approx -0.2571$

Итерация 3

$\mathrm{x}_1 = 0.6000$
$x_2 = 0.4854 + 0.618(0.7854 - 0.4854) \approx 0.6708$
$f(x_2) = f(0.6708) \approx -0.2507$

Итерация 4

$\mathrm{x}_1 = 0.5562$
$x_2 = 0.4854 + 0.618(0.6708 - 0.4854) \approx 0.6000$
$f(x_1) = f(0.5562) \approx -0.2576$

Итерация 5

$\mathrm{x}_1 = 0.5292$
$x_2 = 0.4854 + 0.618(0.6000 - 0.4854) \approx 0.5562$
$f(x_1) = f(0.5292) \approx -0.2556$
$f(x_2) = f(0.5562) \approx -0.2576$

После 5 итераций получаем интервал $[0.5292, 0.6000]$, в котором находится минимум. Приближенное значение минимума: $x \approx 0.5646$ с $f(0.5646) \approx -0.2585$.

Метод хорд

Реализация

Выбираем $a = 0$ и $b = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$:

$$\begin{aligned} F(a) &= F(0) = -1 < 0 \\ F(b) &= F(0.7854) \approx 0.2645 > 0 \end{aligned}$$

Итерация 1

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = 0.7854 \\ F(a) &= -1, \quad F(b) = 0.2645 \\ \tilde{x} &= a - \frac{F(a)}{F(a) - F(b)}(a - b) \\ &= 0 - \frac{-1}{-1 - 0.2645}(0 - 0.7854) \\ &= 0 + \frac{1}{1.2645} \cdot 0.7854 \\ &\approx 0 + 0.6211 = 0.6211 \\ F(\tilde{x}) &= F(0.6211) \approx 0.0832 > 0 \end{aligned}$$

Итерация 2

$$\begin{aligned}
a = 0, \quad b &= 0.6211 \quad \text{(обновляем значения)}\\
F(a) = -1, \quad F(b) &= 0.0832\\
\tilde{x} &= a - \frac{F(a)}{F(a) - F(b)}(a - b)\\
&= 0 - \frac{-1}{-1 - 0.0832}(0 - 0.6211)\\
&= 0 + \frac{1}{1.0832} \cdot 0.6211\\
&\approx 0 + 0.5734 = 0.5734\\
F(\tilde{x}) &= F(0.5734) \approx 0.0138 > 0
\end{aligned}$$

Итерация 3

$$\begin{aligned}
a = 0, \quad b &= 0.5734 \quad \text{(обновляем значения)}\\
F(a) = -1, \quad F(b) &= 0.0138\\
\tilde{x} &= a - \frac{F(a)}{F(a) - F(b)}(a - b)\\
&= 0 - \frac{-1}{-1 - 0.0138}(0 - 0.5734)\\
&= 0 + \frac{1}{1.0138} \cdot 0.5734\\
&\approx 0 + 0.5656 = 0.5656\\
F(\tilde{x}) &= F(0.5656) \approx 0.0023 > 0
\end{aligned}$$

Итерация 4

$$\begin{aligned}
a = 0, \quad b &= 0.5656 \quad \text{(обновляем значения)}\\
F(a) = -1, \quad F(b) &= 0.0023\\
\tilde{x} &= a - \frac{F(a)}{F(a) - F(b)}(a - b)\\
&= 0 - \frac{-1}{-1 - 0.0023}(0 - 0.5656)\\
&= 0 + \frac{1}{1.0023} \cdot 0.5656\\
&\approx 0 + 0.5642 = 0.5642\\
F(\tilde{x}) &= F(0.5642) \approx 0.0004 < \varepsilon
\end{aligned}$$

Поскольку $|F(\tilde{x})| = 0.0004 < \varepsilon$ (где ε - заданная точность), мы достигли требуемой точности за 4 итерации.

Метод хорд дает приближенное решение уравнения $F(x) = 0$: $x^* \approx 0.5642$.

Метод Ньютона

Реализация

Выбираем начальное приближение $x_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$:

Итерация 1

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.7854 \\
f'(x_0) &= f'(0.7854) \approx 0.9716 - 0.7071 \approx 0.2645 \\
f''(x_0) &= f''(0.7854) \approx \frac{2 - 2 \cdot 0.7854^2}{(1 + 0.7854^2)^2} + \sin(0.7854) \\
&\approx \frac{2 - 1.2333}{(1.6168)^2} + 0.7071 \\
&\approx \frac{0.7667}{2.6140} + 0.7071 \\
&\approx 0.2932 + 0.7071 \approx 1.0003 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0.7854 - \frac{0.2645}{1.0003} \approx 0.7854 - 0.2644 = 0.5210 \\
f'(x_1) &= f'(0.5210) \approx -0.0477
\end{aligned}$$

Итерация 2

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.5210 \\
f'(x_1) &= -0.0477 \\
f''(x_1) &= f''(0.5210) \approx \frac{2 - 2 \cdot 0.5210^2}{(1 + 0.5210^2)^2} + \sin(0.5210) \\
&\approx \frac{2 - 0.5431}{(1.2715)^2} + 0.4990 \\
&\approx \frac{1.4569}{1.6167} + 0.4990 \\
&\approx 0.9011 + 0.4990 \approx 1.3990 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0.5210 - \frac{-0.0477}{1.3990} \approx 0.5210 + 0.0341 = 0.5551 \\
f'(x_2) &= f'(0.5551) \approx -0.0011
\end{aligned}$$

Итерация 3

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0.5551\\
f'(x_2) &= -0.0011\\
f''(x_2) &= f''(0.5551) \approx \frac{2 - 2\cdot 0.5551^2}{(1+0.5551^2)^2} + \sin(0.5551)\\
&\approx \frac{2 - 0.6165}{(1.3082)^2} + 0.5284\\
&\approx \frac{1.3835}{1.7114} + 0.5284\\
&\approx 0.8084 + 0.5284 \approx 1.3356\\
x_3 &= x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = 0.5551 - \frac{-0.0011}{1.3356} \approx 0.5551 + 0.0008 = 0.5559\\
f'(x_3) &= f'(0.5559) \approx 0.0000
\end{aligned}$$

Поскольку $|f'(x_3)| \approx 0 < 0.001$, мы достигли требуемой точности за 3 итерации.

Метод Ньютона дает приближенное значение минимума: $x \approx 0.5560$ с $f(0.5560) \approx -0.2578$.

Реализация

Выбираем три начальные точки:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0\\
x_2 &= \frac{\pi}{8} \approx 0.3927\\
x_3 &= \frac{\pi}{4} \approx 0.7854
\end{aligned}$$

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$\begin{aligned}
&f(x_1) = f(0) = \ln(1+0^2) - \sin(0) = \ln(1) - 0 = 0\\
&f(x_2) = f(0.3927) = \ln(1+0.3927^2) - \sin(0.3927) \approx \ln(1.1542) - 0.3827 \approx 0.1433 - 0.3827 \approx -0.2394\\
&f(x_3) = f(0.7854) = \ln(1+0.7854^2) - \sin(0.7854) \approx \ln(1.6168) - 0.7071 \approx 0.4804 - 0.7071 \approx -0.2267
\end{aligned}$$

Проверяем условие $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$: $0 > -0.2394 < -0.2267$ — условие выполняется.

Итерация 1

Вычисляем вершину параболы:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= (0.3927 - 0)^2 = 0.1542\\
(x_2 - x_3)^2 &= (0.3927 - 0.7854)^2 = 0.1542\\
f(x_2) - f(x_3) &= -0.2394 - (-0.2267) = -0.0127\\
f(x_2) - f(x_1) &= -0.2394 - 0 = -0.2394\\
(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_3)] &= 0.3927 \cdot (-0.0127) = -0.0050\\
(x_2 - x_3)[f(x_2) - f(x_1)] &= (-0.3927) \cdot (-0.2394) = 0.0940
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_4 = x_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2-x_1)^2[f(x_2)-f(x_3)]-(x_2-x_3)^2[f(x_2)-f(x_1)]}{(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_3)]-(x_2-x_3)[f(x_2)-f(x_1)]} \\
= 0.5888
\end{aligned}
$$

Проверка условий окончания расчета:

$$
\begin{aligned}
F_{\min} &= f(x_2) = -0.2394 \\
\bar{x} &= x_4 = 0.5888 \\
f(\bar{x}) &= f(0.5888) = -0.2600
\end{aligned}
$$

Проверяем условия:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| &= \left|\frac{-0.2394-(-0.2600)}{-0.2600}\right| \approx 0.0792 > \epsilon_1 \\
\left|\frac{x_2 - \bar{x}}{\bar{x}}\right| &= \left|\frac{0.3927 - 0.5888}{0.5888}\right| \approx 0.3330 > \epsilon_2
\end{aligned}
$$

Поскольку $f(x_4) < f(x_2)$ и $f(x_4) < f(x_3)$, мы заменяем точку x_2 на x_4 и переупорядочиваем точки:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.3927 \\
x_2 &= 0.5888 \\
x_3 &= 0.7854
\end{aligned}
$$

Условия не выполняются, продолжаем итерации.

Итерация 2

Вычисляем вершину параболы:

$$
\begin{aligned}
(x_2-x_1)^2 &= (0.5888-0.3927)^2 = 0.0384 \\
(x_2-x_3)^2 &= (0.5888-0.7854)^2 = 0.0386 \\
f(x_2)-f(x_3) &= -0.2600-(-0.2267) = -0.0333 \\
f(x_2)-f(x_1) &= -0.2600-(-0.2394) = -0.0206 \\
(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_3)] &= 0.1961 \cdot (-0.0333) = -0.0065 \\
(x_2-x_3)[f(x_2)-f(x_1)] &= (-0.1966) \cdot (-0.0206) = 0.0040
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_5 = 0.5888 - \frac{1}{2} \cdot \frac{0.0384 \cdot (-0.0333) - 0.0386 \cdot (-0.0206)}{-0.0065 - 0.0040} \\
= 0.5650
\end{aligned}
$$

Проверка условий окончания расчета:

$$
\begin{aligned}
F_{\min} &= f(x_2) = -0.2600 \\
\bar{x} &= x_5 = 0.5650 \\
f(\bar{x}) &= f(0.5650) = -0.2585
\end{aligned}
$$

Проверяем условия:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{-0.2600 - (-0.2585)}{-0.2585}\right| \approx 0.0058 > \epsilon_1$$
$$\left|\frac{x_2 - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = \left|\frac{0.5888 - 0.5650}{0.5650}\right| \approx 0.0421 > \epsilon_2$$

Поскольку $f(x_5) > f(x_2)$, мы заменяем точку x_3 на x_5 и переупорядочиваем:

$$x_1 = 0.3927$$
$$x_2 = 0.5650$$
$$x_3 = 0.5888$$

Условия не выполняются, продолжаем итерации.

Итерация 3

Вычисляем вершину параболы:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= (0.5650 - 0.3927)^2 = 0.0297 \\
(x_2 - x_3)^2 &= (0.5650 - 0.5888)^2 = 0.0006 \\
f(x_2) - f(x_3) &= -0.2585 - (-0.2600) = 0.0015 \\
f(x_2) - f(x_1) &= -0.2585 - (-0.2394) = -0.0191 \\
(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_3)] &= 0.1723 \cdot 0.0015 = 0.0003 \\
(x_2 - x_3)[f(x_2) - f(x_1)] &= (-0.0238) \cdot (-0.0191) = 0.0005
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_6 &= 0.5650 - \frac{1}{2} \cdot \frac{0.0297 \cdot 0.0015 - 0.0006 \cdot (-0.0191)}{0.0003 - 0.0005} \\
&= 0.5525
\end{aligned}$$

Проверка условий окончания расчета:

$$F_{\min} = f(x_2) = -0.2585$$
$$\bar{x} = x_6 = 0.5525$$
$$f(\bar{x}) = f(0.5525) = -0.2596$$

Проверяем условия:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{-0.2585 - (-0.2596)}{-0.2596}\right| \approx 0.0042 > \epsilon_1$$
$$\left|\frac{x_2 - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = \left|\frac{0.5650 - 0.5525}{0.5525}\right| \approx 0.0226 > \epsilon_2$$

Поскольку $f(x_6) < f(x_2)$ и $f(x_6) > f(x_3)$, мы заменяем точку x_2 на x_6 и переупорядочиваем:

$$x_1 = 0.3927$$
$$x_2 = 0.5525$$
$$x_3 = 0.5888$$

Условия не выполняются, требуются дальнейшие итерации.

После трех итераций наше приближение к минимуму: $x \approx 0.5525$ с $f(0.5525) \approx -0.2596$.

Код программы

```
import numpy as np
import sympy as sp

EPSILON = 0.0001
a, b = 0, np.pi / 4


def f(x):
    return np.ln(1 + x**2) - np.sin(x)


def x1x2(a, b):
    return (a + b - EPSILON) / 2, (a + b + EPSILON) / 2


def bisection_method(a, b):
    iteration_counter = 0
    while b - a > 2 * EPSILON:
        iteration_counter += 1
        x1, x2 = x1x2(a, b)
        y1, y2 = f(x1), f(x2)
        if y1 > y2:
            a = x1
        else:
            b = x2
    return (a + b) / 2, f((a + b) / 2)

def golden_section_search(a, b, epsilon=EPSILON, k1=0.382, k2=0.618):
    x1 = a + k1 * (b - a)
    x2 = a + k2 * (b - a)
    f_x1 = f(x1)
    f_x2 = f(x2)

    while (b - a) > epsilon:
        if f_x1 < f_x2:
            b = x2
            x2 = x1
            f_x2 = f_x1
            x1 = a + k1 * (b - a)
            f_x1 = f(x1)
        else:
            a = x1
            x1 = x2
            f_x1 = f_x2
            x2 = a + k2 * (b - a)
            f_x2 = f(x2)
```

```
    return (a + b) / 2, f((a + b) / 2)

def newton_minimization(
    f_expr, x0, x=sp.symbols("x"), tol=0.0001, max_iter=100
):
    f_prime = sp.diff(f_expr, x)
    f_double_prime = sp.diff(f_prime, x)

    f_prime_func = sp.lambdify(x, f_prime, "numpy")
    f_double_prime_func = sp.lambdify(x, f_double_prime, "numpy")
    f_func = sp.lambdify(x, f_expr, "numpy")

    x_k = x0
    for _ in range(max_iter):
        f_p = f_prime_func(x_k)
        f_dp = f_double_prime_func(x_k)

        if abs(f_p) <= tol:
            break

        x_k = x_k - f_p / f_dp

    return x_k, f_func(x_k)

x = sp.symbols("x")
expr = sp.ln(1 + x**2) - sp.sin(x)
df_expr = sp.diff(expr, x)
df = sp.lambdify(x, df_expr)

def chord_method(a, b, epsilon):
    if df(a) * df(b) >= 0:
        pass

    while abs(b - a) > epsilon:
        x_new = a - (df(a) * (a - b)) / (df(a) - df(b))

        if abs(df(x_new)) < epsilon:
            return x_new, f(x_new)

        if df(x_new) * df(a) < 0:
            b = x_new
        else:
            a = x_new
    return (a + b) / 2, f((a + b) / 2)

import math

def calculate_x_bar(x1, x2, x3, f1, f2, f3):
```

```
    numerator = (
        (x2**2 - x3**2) * f1
        + (x3**2 - x1**2) * f2
        + (x1**2 - x2**2) * f3
    )
    denominator = (x2 - x3) * f1 + (x3 - x1) * f2 + (x1 - x2) * f3

    if abs(denominator) < 1e-12:
        return None

    return 0.5 * numerator / denominator


import numpy as np

def quadratic_approximation(func, x1, dx, epsilon1, epsilon2, max_iterations=100):
    f1 = func(x1)

    x2 = x1 + dx
    f2 = func(x2)

    if f1 > f2:
        # Если f(x1) > f(x2), то x3 = x1 + 2*dx
        x3 = x1 + 2 * dx
    else:
        # Если f(x1) <= f(x2), то x3 = x1 - dx
        x3 = x1 - dx

    f3 = func(x3)

    iterations = 0
    while iterations < max_iterations:
        iterations += 1

        f_values = [f1, f2, f3]
        x_values = [x1, x2, x3]
        min_idx = np.argmin(f_values)
        f_min = f_values[min_idx]
        x_min = x_values[min_idx]

        numerator = (x2**2 - x3**2) * f1 + (x3**2 - x1**2) * f2 + (x1**2 - x2**2) * f3
        denominator = (x2 - x3) * f1 + (x3 - x1) * f2 + (x1 - x2) * f3

        if abs(denominator) < 1e-10:
            x1 = x_min
            x2 = x1 + dx
            f1 = f_min
            f2 = func(x2)
```

```
                continue

        x_bar = 0.5 * numerator / denominator
        f_bar = func(x_bar)

        rel_f_diff = abs(f_min - f_bar) / abs(f_bar) if f_bar != 0 else abs(f_min - f_
        rel_x_diff = abs(x_min - x_bar) / abs(x_bar) if x_bar != 0 else abs(x_min - x_

        if rel_f_diff < epsilon1 and rel_x_diff < epsilon2:
            return x_bar, f_bar, iterations

        if min(x1, x3) <= x_bar <= max(x1, x3):
            if f_bar < f_min:
                best_x = x_bar
                best_f = f_bar
            else:
                best_x = x_min
                best_f = f_min

            all_points = [(x, f) for x, f in zip([x1, x2, x3, x_bar], [f1, f2, f3, f_
            all_points = sorted(list(set(all_points)), key=lambda p: p[0])

            best_idx = next(i for i, (x, f) in enumerate(all_points) if x == best_x)

            left_x, left_f = all_points[best_idx - 1]
            right_x, right_f = all_points[best_idx + 1]

            x1, f1 = left_x, left_f
            x2, f2 = best_x, best_f
            x3, f3 = right_x, right_f

        else:
            x1 = x_bar
            x2 = x1 + dx
            f1 = f_bar
            f2 = func(x2)
            if f1 > f2:
                # Если f(x1) > f(x2), то x3 = x1 + 2*dx
                x3 = x1 + 2 * dx
            else:
                # Если f(x1) <= f(x2), то x3 = x1 - dx
                x3 = x1 - dx
            f3 = func(x3)

    return x_min, f_min, iterations


if __name__ == "__main__":
```

```
print(":")
xm, ym = bisection_method(0, np.pi / 4)
print(f"x: {xm:.4f}, f(x): {ym:.4f}")

print("\n:")
x_min, f_min = golden_section_search(0, np.pi / 4)
print(f"x: {x_min:.4f}, f(x): {f_min:.4f}")

print("\n:")
x0 = np.pi / 8
x_min, f_min = newton_minimization(expr, x0)
print(f"x: {x_min:.4f}, f(x): {f_min:.4f}")

print("\n:")
x_min, f_min = chord_method(0, np.pi / 4, 0.0001)
print(f"x: {x_min:.4f}, f(x): {f_min:.4f}")

print("\n:")
x_min, f_min = quadratic_approximation(
    f, a, (b-a)/4, EPSILON, EPSILON
)
print(f"x: {x_min:.4f}, f(x): {f_min:.4f}")
```