По традиции на первых заседаниях научного семинара В. И. Арнольда для студентов Московского университета его участникам предлагается несколько новых задач — точнее, тем для исследования. Среди них иногда встречаются чрезвычайно красивые задачи, формулировки которых понятны даже школьнику. Вот одна из этих тем.

МЕАНДРЫ

Академик В. АРНОЛЬД

Шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада также на восток. *Занумеруем мосты в порядке их следования* вдоль шоссе (с запада на восток). Проплывая под мостами вниз по реке, мы будем встречать их, вообще говоря, в другом порядке. Так, например, река на рисунке 1 проходит мосты в порядке 3, 4, 5, 2, 1. Таким образом, эта река определяет перестановку чисел от 1 до 5: (3 4 5 2 1). Ясно, что другая река могла бы протекать иначе и задавать другую перестановку. Но далеко не любая перестановка чисел (мостов) может быть реализована таким образом. (Попробуйте, например, придумать реку, проходящую мосты в порядке 2, 1, 3, 4, 5.) Мы будем называть перестановку *меандром*, если ее можно задать с помощью подходящей реки.

Основной вопрос для нас будет такой: сколько существует различных меандров (т. е. сколько перестановок номеров реализуется), если общее число мостов равно n? Обозначим число *различных меандров с n мостами* через $a(n)$. Легко видеть, что $a(1) = a(2) = 1$, $a(3) = 2$, $a(4) = 3$ (рис. 2).

Задача 1. *Найдите следующие члены последовательности $a(n)$.*

Ответ: 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, 262, 538, 1828, 3926, 13820,...

Общая формула для $a(n)$ неизвестна. Неизвестны даже асимптотики $a(n)$ и $a(n+1)/a(n)$ при $n \to \infty$.

Задача 2. *Докажите, что река впервые пересекает шоссе под мостом, номер которого нечетен.*

Задача 3. *Докажите, что номера 1-го, 3-го, 5-го,... мостов (вдоль реки) нечетны, если нумеровать мосты вдоль шоссе, а номера 2-го, 4-го,... мостов — четны.*

Начнем классифицировать меандры с того, что зафиксируем первый вдоль реки мост. Обозначим через $a_i(n)$ число меандров с n мостами, для которых река впервые пересекает шоссе под i-м (вдоль шоссе) мостом. Согласно задаче 2,

Рис. 1.

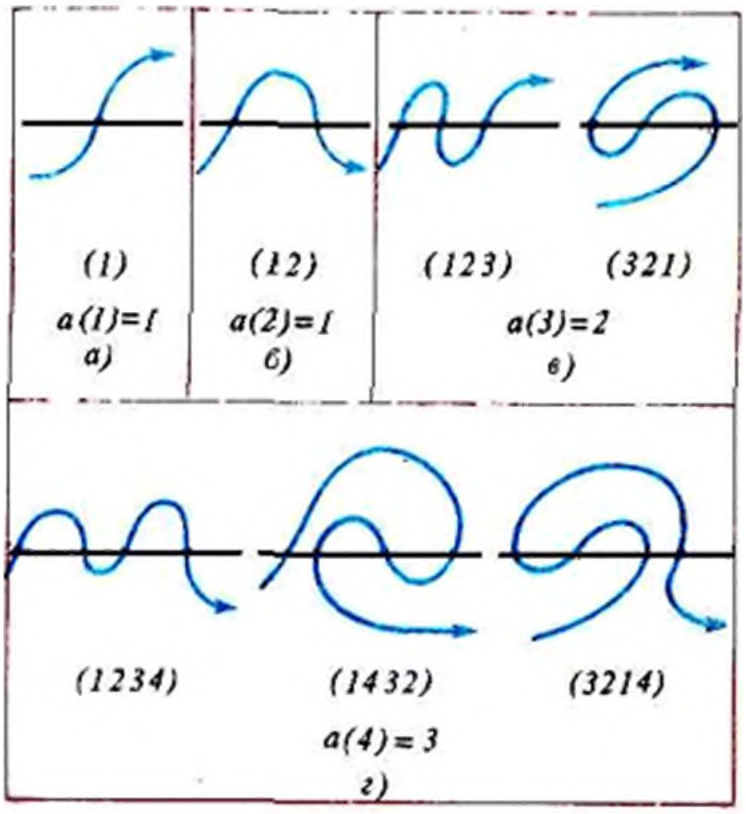

Рис. 2.

$$a(n)=a_1(n)+a_3(n)+\ldots+a_{2k-1}(n),$$

где $n=2k-1$ или $n=2k$.

Задача 4. *Составьте таблицу меандрических чисел $a_i(n)$ при небольших n.*

Ответ: для i, $n \leqslant 10$ см. таблицу.

$a_i(n)$ \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	1	1	2	3	8	14	42	81	262	538
$a_1(n)$	1	1	1	2	3	8	14	42	81	262
$a_3(n)$			1	1	2	3	7	14	36	81
$a_5(n)$					3	3	7	11	28	57
$a_7(n)$							14	14	36	57
$a_9(n)$									81	81
$a_{11}(n)$										
$a_{13}(n)$										

Задача 5. *Найдите в этой таблице закономерности. Случайно ли число 14 появилось пять раз?*

Задача 6. *Докажите, что*

1) $a(n)=a_1(n+1)$,

2) $a_i(n)=a_j(n)$, если $i+j=n+1$ четно,

3) $a_i(n)=a_j(n)$, если $i+j=n+2$ четно, $i\geqslant 3$, $j\geqslant 3$,

4) $a_1(2k-1)=a_3(2k)$, 5) $a(2k+1)$ четно.

Задача 7. *Четно ли $a(16)$?*

Задача 8. *Докажите, что $a(n)$ нечетны только, если $n=2^l$.*

Задача 9. *Исследуйте поведение при $k\to\infty$ распределений $a_i(2k+1)$, где $i\geqslant 1$ и $a_i(2k)$, где $i\geqslant 3$.*

Задача 10. *Докажите, что всякая перестановка n мостов может быть реализована меандрирующей рекой, если шоссе и река находятся не на плоскости, а на подходящей поверхности, скажем на плоскости с приклеенными к ней ручками (рис. 3).*

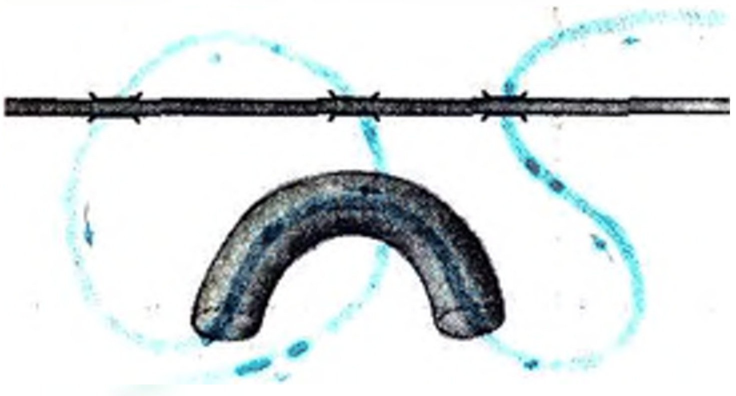

Рис. 3.

Рис. 4.

Минимальное число ручек такой поверхности назовем родом перестановки. Таким образом, все перестановки распределяются по родам. Обычные меандры — это перестановки рода нуль.

Задача 11. *Исследуйте распределение перестановок из n элементов по родам при $n\to\infty$.*

Задача 12. *Перенесите предыдущие рассмотрения на меандры, образованные несколькими реками.*

Замечания

1. Число таких обобщенных меандров, образованных системами замкнутых рек, на проективной плоскости при пересечении с бесконечно удаленным шоссе — это известные числа Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42,...

Число Каталана $c(n)$ проще всего определить как число способов расстановки скобок в произведении из n сомножителей. Например, $c(3)=2$. Два способа расстановки скобок — это $(ab)c$ и $a(bc)$. В произведении четырех сомножителей скобки можно расставить пятью способами:

$$((ab)c)d,\ (ab)(cd),\ (a(bc))d,$$
$$a((bc)d),\ a(b(cd)).$$

Поэтому $c(4)=5$ и т. д.

Числа Каталана обладают замечательным свойством неожиданно возникать в самых разных задачах. Подробнее об этом можно узнать из статьи М. Гарднера «Числа Каталана» («Квант», 1978, № 7, с. 20).

2. С задачей о меандрах связана следующая «задача о марках»: сколькими способами можно сложить в стопку ленту, состоящую из n марок (рис. 4; вверху показан один из способов складывания полоски). Об этой задаче рассказано в книге М. Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 1972, с. 344—353).

(Окончание см. на с. 14)