

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 2  
Вариант 62

Студент

Тимошкин Роман Вячеславович

Р3131

Преподаватель

Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023г

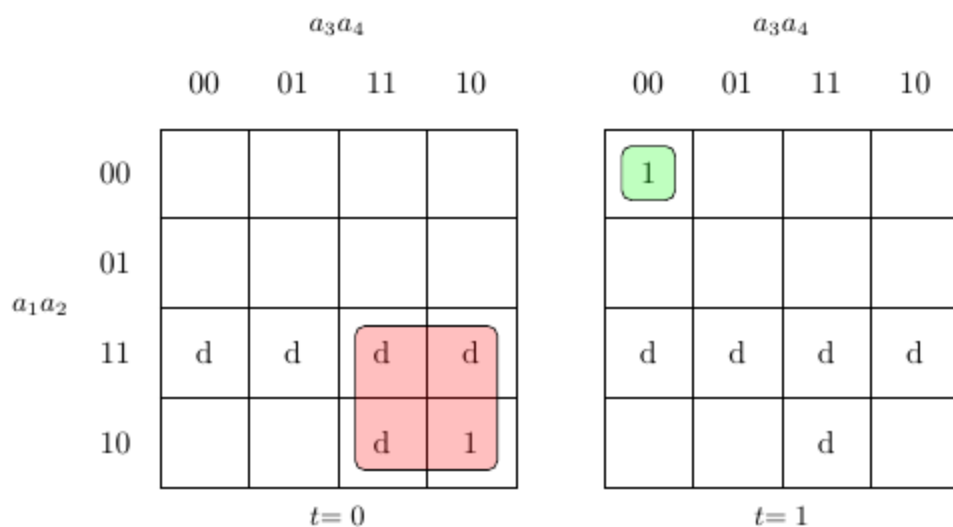
## Задание

Построить комбинационную схему, реализующую реверсивный двоичный счетчик  $C = (A \pm 1) \bmod 11$  (с фиксацией переполнения), где  $A$  — 4 битное беззнаковое число и  $C$  — 4 битное. При  $t = 0$  счетчик работает в суммирующем режиме, при  $t = 1$  — в вычитающем.

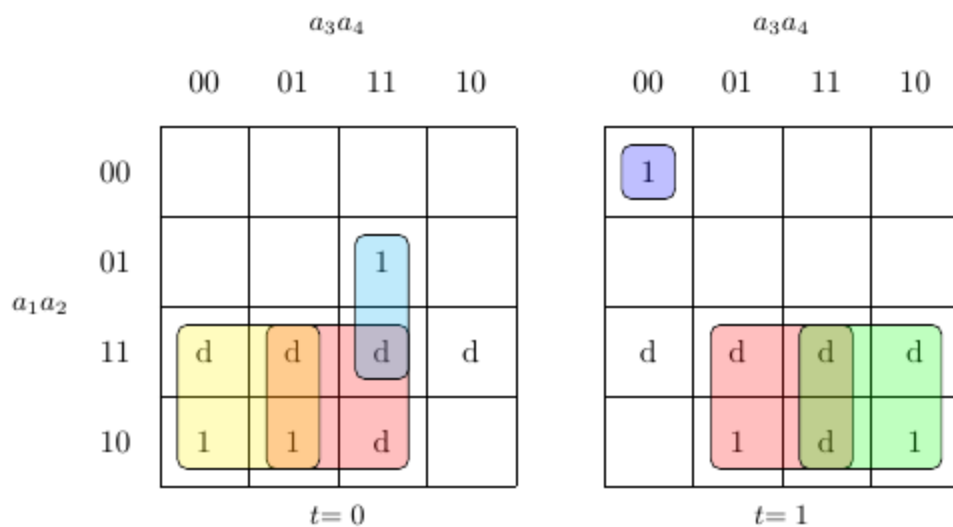
## Таблица истинности

№	$t$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$e$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
7	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
11	0	1	0	1	1	d	d	d	d	d
12	0	1	1	0	0	d	d	d	d	d
13	0	1	1	0	1	d	d	d	d	d
14	0	1	1	1	0	d	d	d	d	d
15	0	1	1	1	1	d	d	d	d	d
16	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
17	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
19	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
20	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
21	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
22	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
25	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
26	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
27	1	1	0	1	1	d	d	d	d	d
28	1	1	1	0	0	d	d	d	d	d
29	1	1	1	0	1	d	d	d	d	d
30	1	1	1	1	0	d	d	d	d	d
31	1	1	1	1	1	d	d	d	d	d

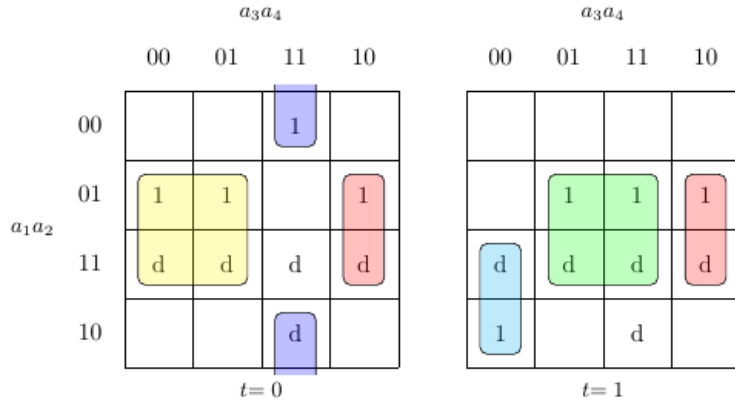
# Минимизация булевых функций на картах Карно



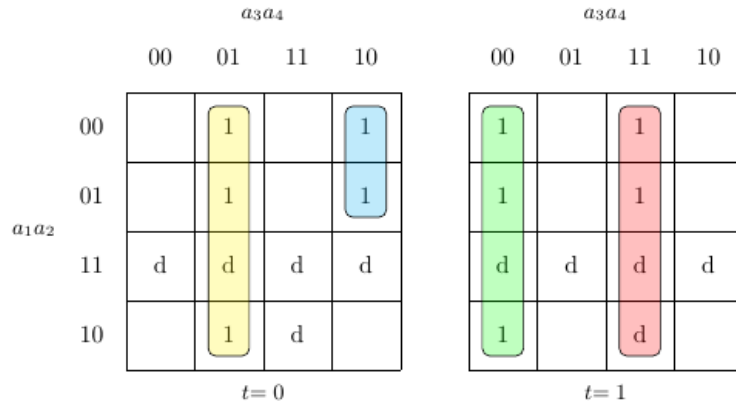
$$e = a_1 a_3 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \quad (S_Q = 10)$$



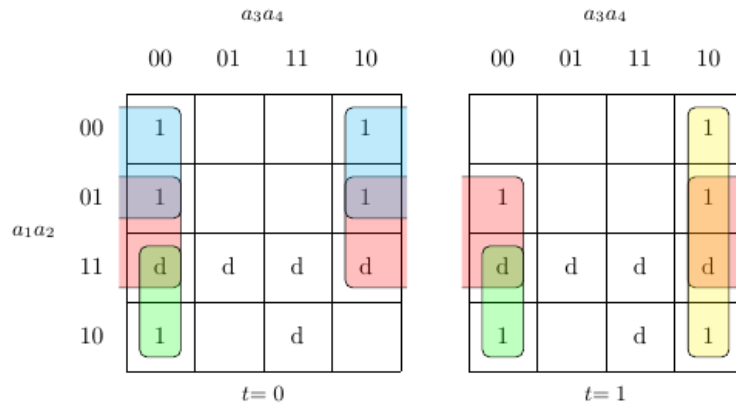
$$c_1 = a_1 a_4 \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \quad (S_Q = 22)$$



$$c_2 = a_2 a_3 \bar{a}_4 \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \bar{a}_3 \bar{t} \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} \quad (S_Q = 22)$$



$$c_3 = a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4 \bar{t} \quad (S_Q = 17)$$



$$c_4 = a_2 \bar{a}_4 \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \vee a_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4 \bar{t} \quad (S_Q = 15)$$

## Преобразование системы булевых функций

$$\begin{cases} e = a_1 a_3 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^e = 10) \\ c_1 = a_1 a_4 \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{c_1} = 22) \\ c_2 = a_2 a_3 \bar{a}_4 \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \bar{a}_3 \bar{t} \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 22) \\ c_3 = a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 17) \\ c_4 = a_2 \bar{a}_4 \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \vee a_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4 \bar{t} & (S_Q^{c_4} = 15) \end{cases} \quad (S_Q = 86)$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_0 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = a_1 a_4 \vee \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 20) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 a_3 \bar{a}_4 \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \bar{a}_3 \bar{t} \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = \varphi_0 \vee a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 14) \\ c_4 = a_2 \bar{a}_4 \vee a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \vee a_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4 \bar{t} & (S_Q^{c_4} = 15) \end{cases} \quad (S_Q = 80)$$

Проведем раздельную факторизацию системы.

$$\begin{cases} \varphi_0 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = a_1 (a_4 \vee a_3 t \vee \bar{a}_3 \bar{t}) \vee \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 19) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (a_3 \bar{a}_4 \vee a_4 t \vee \bar{a}_3 \bar{t}) \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = \varphi_0 \vee a_3 (a_4 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4 \bar{t}) \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 15) \\ c_4 = \bar{a}_4 (a_2 \vee a_1 \bar{a}_3 \vee a_3 t \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 12) \end{cases} \quad (S_Q = 77)$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (a_3 \bar{a}_4 \vee a_4 t \vee \bar{a}_3 \bar{t}) \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = \varphi_0 \vee a_3 (a_4 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4 \bar{t}) \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 15) \\ c_4 = \bar{a}_4 (a_2 \vee a_1 \bar{a}_3 \vee a_3 t \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 12) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee a_1 (a_4 \vee a_3 t \vee \bar{a}_3 \bar{t}) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 16) \end{cases} \quad (S_Q = 74)$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_0 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (\varphi_2 \vee a_3 \overline{a_4} \vee a_4 t) \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 18) \\ c_3 = \varphi_0 \vee \varphi_2 a_4 \vee a_3 (a_4 t \vee \overline{a_1} \overline{a_4} \bar{t}) & (S_Q^{c_3} = 14) \\ c_4 = \overline{a_4} (a_2 \vee a_1 \overline{a_3} \vee a_3 t \vee \overline{a_1} \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 12) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee a_1 (\varphi_2 \vee a_4 \vee a_3 t) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 14) \\ & (S_Q = 71) \end{array} \right.$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_3 = a_4 t$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_3 = a_4 t & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_0 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (\varphi_2 \vee \varphi_3 \vee a_3 \overline{a_4}) \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 16) \\ c_3 = \varphi_0 \vee \varphi_2 a_4 \vee a_3 (\varphi_3 \vee \overline{a_1} \overline{a_4} \bar{t}) & (S_Q^{c_3} = 12) \\ c_4 = \overline{a_4} (a_2 \vee a_1 \overline{a_3} \vee a_3 t \vee \overline{a_1} \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 12) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee a_1 (\varphi_2 \vee a_4 \vee a_3 t) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 14) \\ & (S_Q = 69) \end{array} \right.$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_4 = a_3 t$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_4 = a_3 t & (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ \varphi_3 = a_4 t & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_0 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (\varphi_2 \vee \varphi_3 \vee a_3 \overline{a_4}) \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 16) \\ c_3 = \varphi_0 \vee \varphi_2 a_4 \vee a_3 (\varphi_3 \vee \overline{a_1} \overline{a_4} \bar{t}) & (S_Q^{c_3} = 12) \\ c_4 = \overline{a_4} (\varphi_4 \vee a_2 \vee a_1 \overline{a_3} \vee \overline{a_1} \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 10) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee a_1 (\varphi_2 \vee \varphi_4 \vee a_4) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 12) \\ & (S_Q = 67) \end{array} \right.$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_5 = \overline{a_1} \bar{t}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_5 = \overline{a_1} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_5} = 2) \\ \varphi_4 = a_3 t & (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ \varphi_3 = a_4 t & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_0 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee a_2 (\varphi_2 \vee \varphi_3 \vee a_3 \overline{a_4}) \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 16) \\ c_3 = \varphi_0 \vee \varphi_2 a_4 \vee a_3 (\varphi_3 \vee \varphi_5 \overline{a_4}) & (S_Q^{c_3} = 11) \\ c_4 = \overline{a_4} (\varphi_4 \vee \varphi_5 \vee a_2 \vee a_1 \overline{a_3}) & (S_Q^{c_4} = 8) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee a_1 (\varphi_2 \vee \varphi_4 \vee a_4) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 12) \\ & (S_Q = 66) \end{array} \right.$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_6 = a_3 a_4 \bar{t}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_6 = a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{\varphi_6} = 3) \\ \varphi_5 = \overline{a_1} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_5} = 2) \\ \varphi_4 = a_3 t & (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ \varphi_3 = a_4 t & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_0 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 3) \\ c_2 = \varphi_0 a_1 \vee \varphi_6 \overline{a_2} \vee a_2 (\varphi_2 \vee \varphi_3 \vee a_3 \overline{a_4}) & (S_Q^{c_2} = 14) \\ c_3 = \varphi_0 \vee \varphi_2 a_4 \vee a_3 (\varphi_3 \vee \varphi_5 \overline{a_4}) & (S_Q^{c_3} = 11) \\ c_4 = \overline{a_4} (\varphi_4 \vee \varphi_5 \vee a_2 \vee a_1 \overline{a_3}) & (S_Q^{c_4} = 8) \\ \varphi_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ e = \varphi_1 \vee a_1 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_1 \vee \varphi_6 a_2 \vee a_1 (\varphi_2 \vee \varphi_4 \vee a_4) & (S_Q^{c_1} = 10) \\ & (S_Q = 65) \end{array} \right.$$

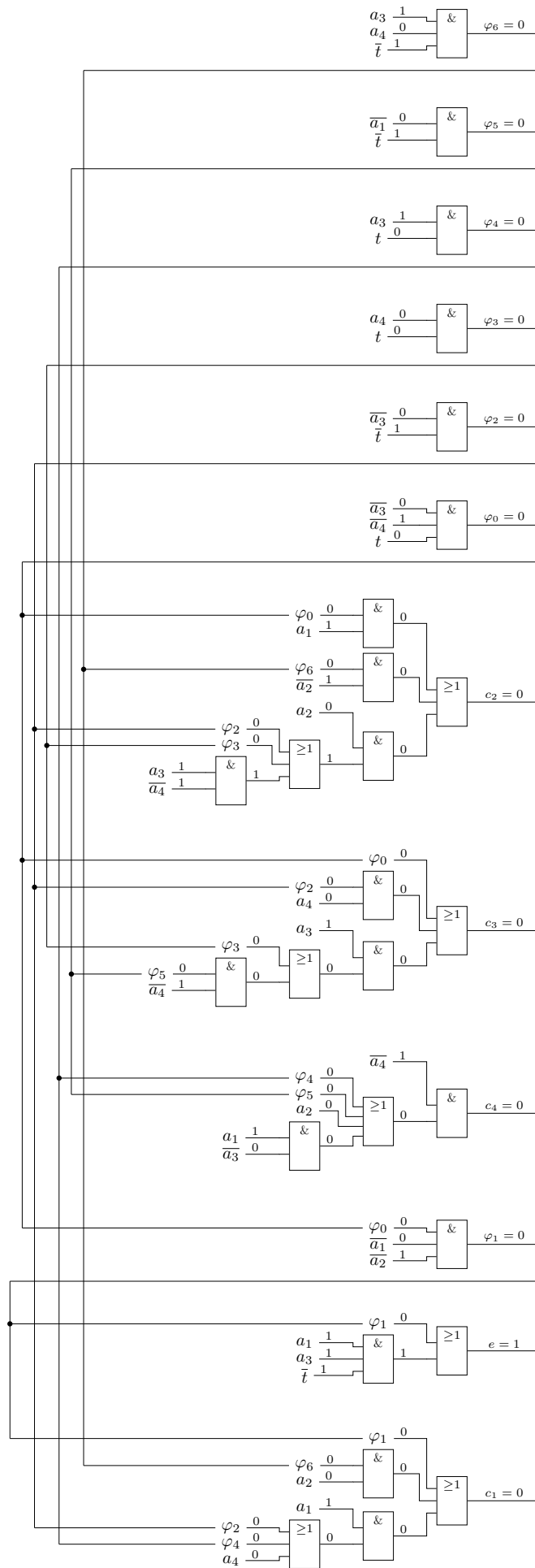
## Синтез комбинационной схемы в булевом базисе

Будем анализировать схему на следующем наборе аргументов:

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, t = 0$$

Выходы схемы из таблицы истинности:

$$e = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$$



Цена схемы:  $S_Q = 65$ . Задержка схемы:  $T = 5\tau$ .