



دینامیک سیالات عددی ۲

CFD II

پروژه دوم

Compressible Euler Equation

به روش Roe

رامبد مژگانی

9-179-40

استاد درس:

دكتر كريميان

۳۱ تیر ۱۳۹۱

فهرست

1	۱ صورت مساله و معادلات
1	۱.۱ معادله حاکم
۲	
٣	٣.١ شرايط مرزى
r	۱.۳.۱ شرط مرزی ورودی و خروجی
۴	
۵	۴.۱ انتخاب قدم زمانی
9	
۶	۱.۲ ماخ ۱/۲
۶	۲.۲ زاویه حمله صفر
۸	3.2 زاویه حمله °۷
جه	۴.۲ ماخ ۰/۸۵ و زاویه حمله صفر در-
17	۵.۲ ماخ ۱۵۰۰ و زاویه حمله [°] ۳/۵
14	۶.۲ مقایسه دوران هندسه
18	۳ مراجع
1٧	4 لىست فايا ھا4

فهرست اشكال

شکل ۱-۱ اثر شرط مرزی ریمان روی توزیع فشار (راست) و تارخچه همگرایی (چپ)
Δ $M_{\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ مقایسه توزیع فشار روی ایرفویل با دو نوع شرط روی دیواره، $M_{\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$
۶ $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ کانتور فشار، ۱-۲ کانتور فشار، ۱-۲
۷ $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ کانتور ماخ، ۲-۲ کانتور ماخ،
$M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ (راست و چپ)، شکل ۲-۳ کانتور سرعت افقی و عمودی (راست و چپ)،
Y $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ ،NACA-0012 شکل ۴-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح
$M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=0^{\circ}$ تاریخچه همگرایی،
$M_{_{\infty}}=1.2, lpha=7^{\circ}$ کانتور فشار، $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=7^{\circ}$ کانتور فشار،
۹ $M_{_{\infty}}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ کانتور ماخ، $V-Y$ کانتور ماخ،
۹ $M_{\scriptscriptstyle \infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ (راست و چپ)، $M_{\scriptscriptstyle \infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ مکل ۲-۸ کانتور سرعت افقی و عمودی (راست و پ
۹ $M_{_\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ ،NACA-0012 معادلات اویلر روی سطح ۹
۱۰ تاریخچه همگرایی، $M_{\infty}=1.2, lpha=7^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، ۱۰۰
۱۰ گانتور فشار، $M_{_{\infty}}=0.85, lpha=0^{\circ}$ کانتور فشار، ۱۱-۲ کانتور فشار،
۱۱ $M_{\scriptscriptstyle\infty}=0.85, \alpha=0^{\circ}$ کانتور ماخ، $^{\circ}$ کانتور ماخ،
۱۱ شکل ۱۳-۲ کانتور سرعت افقی و عمودی (راست و چپ)، $M_{_\infty}=0.85, lpha=0^\circ$
۱۱
۱۲ $M_{_{\infty}}=0.85, lpha=0^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، $M_{_{\infty}}=0.85, lpha=0^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، ۱۲
۱۲ $M_{\scriptscriptstyle \infty}=0.50, \alpha=3.5^\circ$ کانتور فشار، $M_{\scriptscriptstyle \infty}=0.50, \alpha=3.5^\circ$ کانتور فشار،
۱۳
۱۳ $M_{_\infty}=0.50, \alpha=3.5^{\circ}$ ،NACA-0012 معادلات اویلر روی سطح ۱۳
۱۳ $M_{_{\infty}}=0.50, lpha=3.5^{\circ}$ ،NACA-0012 شکل ۱۹-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح
۱۴ $M_{_\infty}=0.50, \alpha=3.5^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، $M_{_\infty}=0.50, \alpha=3.5^{\circ}$ تاریخچه همگرایی،
شکل ۲۱-۲ کانتور ماخ شرایط معادل زاویه حمله و دوران هندسی $M_{_\infty}=1.2$, (راست: $^{\circ}Angle\ of\ Rotation=7$ ، چپ
$\alpha = 7^{\circ}$
ان ۲۲-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح NACA-0012، "NACA-0012 اویلر روی سطح $M_{\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ هکل ۲۲-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح
فهرست جداول
جدول ۱-۱ شرایط حل
جدول ۴-۱ فایلهای برنامه، زیرروالها و توابع

۱ صورت مساله و معادلات

در این گزارش معادلات اویلر ٔ جریان تراکمپذیر ٔ به استفاده از الگوریتم Roe روی شبکه نامنظم ٔ یک ايرفويل NACA-0012 به روش حجم محدود ٔ حل می شود.

1.1 معادله حاکم

معادله اویلر جریان تراکمپذیر به فرم معادله ۱-۱ است،

$$\int_{V} \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \int_{V} \nabla . F \, dV = 0$$
 ۱-۱ معادله که در آن:

$$F = \begin{bmatrix}
ho ec{V} \\
ho u ec{V} + P \hat{i} \\
ho v ec{V} + P \hat{j} \\
ho h ec{V} \end{bmatrix}$$
 $\omega = \begin{bmatrix}
ho \\
ho u \\
ho v \\
ho v \\
ho a}$

که انرژی بر واحد جرم است و به عبارتی: e

$$E=
ho e$$
 ۴-۱ معادله

برای هر المان دلخواه، در صورتی که معادلات را عمود بر هر سطح المان تصویر کنیم، معادله ۱-۱ به صورت زیر نوشته میشود.

$$\int_{V} \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \int_{V} \nabla . F_n \, dV = 0$$
 معادله ۱-معادله

که در آن؛

$$F_{n} = egin{bmatrix}
ho U_{n} \\
ho u U_{n} + P n_{x} \\
ho v U_{n} + P n_{y} \\
ho h U_{n} \end{bmatrix}$$
 ۶-۱ معادله

¹ Euler Equation ² Compressible Flow

³ Unstructured Grid

⁴ Finite Volume

روابط زیر برای گاز کامل برقرار است و از آنهای استفاده شده است.

۲.۱ روش Roe

در این روش شار F_n از معادله ۱۱-۱ محاسبه میشود.

$$F_n=rac{1}{2}ig(F_{n_L}+F_{n_R}ig)-rac{1}{2}\sum_{i=1}^4ig|\lambda_iig|\delta\widetilde{\omega}_i\ddot{R}_i$$
 معادله ۱۱-۱ که در آن؛

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \widetilde{U}_n - \widetilde{C} \\ \widetilde{U}_n \\ \widetilde{U}_n \\ \widetilde{U}_n + \widetilde{C} \end{bmatrix}, \, \delta \widetilde{\omega}_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\widetilde{C}^2} \right) \! \left(\Delta P - \widetilde{\rho} \widetilde{C} \, \Delta U_n \right) \\ \widetilde{\rho} \Delta U_t \\ \left(\frac{-1}{\widetilde{C}^2} \right) \! \left(\Delta P - \widetilde{C}^2 \, \Delta \rho \right) \\ \left(\frac{1}{2\widetilde{C}^2} \right) \! \left(\Delta P + \widetilde{\rho} \widetilde{C} \, \Delta U_n \right) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{U} - \widetilde{C} n_x \\ \widetilde{V} - \widetilde{C} n_y \\ \widetilde{N}_o - \widetilde{C} \widetilde{U}_n \end{bmatrix}, \, \widetilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -n_y \\ n_x \\ \widetilde{N}_t \end{bmatrix}, \, \widetilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{U} \\ \widetilde{V} \\ (\widetilde{U}^2 + \widetilde{V}^2)/2 \end{bmatrix}, \, \widetilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \widetilde{U} + \widetilde{C} n_x \\ \widetilde{V} + \widetilde{C} n_x \\ \widetilde{K}_o + \widetilde{C} \widetilde{U}_n \end{bmatrix},$$

در این معادلات؛

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$$
 ۱۴-۱ معادله
$$\sigma = \frac{\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$
 ۱۵-۱ معادله
$$\widetilde{\rho} = \left(\frac{\sigma}{\rho_L} + \frac{1-\sigma}{\rho_R}\right)^{-1} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$
 ۱۶-۱ معادله
$$\widetilde{U} = u_L \sigma + u_R (1-\sigma)$$
 ۱۷-۱ معادله
$$\widetilde{V} = v_L \sigma + v_R (1-\sigma)$$
 ۱۸-۱ معادله ۱۹-۱ معادله ا

$$\widetilde{C}=\sqrt{\left(\gamma-1
ight)\!\left(\widetilde{h}-rac{\widetilde{U}^{\,2}+\widetilde{V}^{\,2}}{2}
ight)}$$
 معادله ۲۰-۱

همچنین باید توجه شود که در تمامی این تعاریف جهت حرکت روی اضلاع سلول پادساعتگرد است و منظور از بردارهای نرمال، عمود بر سطح به سمت خارج از سلول است.

$$\widetilde{U}_n = u\,n_x + v\,n_y$$
 معادله ۲۱-۱ معادله $\widetilde{U}_t = -u\,n_y + v\,n_x$

9

$$dS = \Delta S_x \hat{i} + \Delta S_y \hat{j} = (y_2 - y_1) \hat{i} - (x_2 - x_1) \hat{j}$$

$$n_x = \Delta S_x / |dS|$$

$$n_y = \Delta S_y / |dS|$$

۳.۱ شرایط مرزی

در مساله مورد نظر دو نوع شرط مرزی حاکم است. شرط مرزی دیواره و شرط مرزی ورودی و خروجی. در این بخش شرایط مرزی و نحوه اعمال آنها شرح داده شده است.

۱.۳.۱ شرط مرزی ورودی و خروجی

پارامترهای جریان دوردست در شرط مرزی ورودی و خروجی تعیین میشود. برای تعیین سلولهای ورودی و خروجی از زاویه بین جریان و بردار عمودی سطح بیرونی سلولهای مرزی استفاده شده است '، به این ترتیب که در مرز ورودی:

In Inlet:
$$\vec{V}.\vec{n} = (u, v)(n_v, n_v) \le 0$$

و در مرز خروجی:

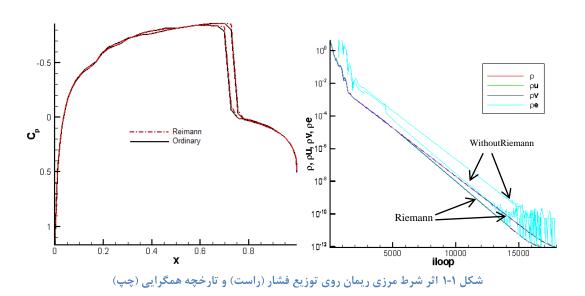
In Outlet:
$$\vec{V}.\vec{n} = (u,v)(n_x,n_y) > 0$$

در شرایط مافوق صوت تمامی پارامترها از بالادست روی مرزها قرار داده میشود به این ترتیب که روی سلولهای ورودی تمامی پارامترهای دوردست روی سلولهای مرزی قرار میگیرد و در سلولهای خروجی، پارامترهای دوردست از میان پایی سلولهای داخلی محاسبه میشود.

ا برای تمایز این سلولها در کد، پس تعیین نوع هر سلول، از رنگ سلول استفاده شده است، به این صورت که کد ۱۰– بیـانگر سلول مرز ورودی و کد ۲۰– بیانگر سلول مرز خروجی است.

در جریان زیر صوت در مرز ورودی سه پارامتر از جریان دوردست و یک پارامتراز داخل میدان و در مرز خروجی به صورت مخالف عمل میشود. استفاده از شرایط مرزی ریمان نیز انعکاس پارامترها روی مرز را از میدان خارج میکند.

برای مقایسه تأثیر شرط ریمان روی نتایج زیر صوت حل جریان در ماخ ۱/۸۵ و در زاویه حمله صفر با یکدیگر مقایسه شده است. توزیع فشار روی سطح ایرفویل در این دو حالت تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند ولی با استفاده از ریمان همگرایی با سرعت همگرایی در حدود ۵٪ افزایش داشته است (شکل ۱-۱). این نتایج نشان میدهد که دامنه حل مساله به اندازهای بزرگ انتخاب شدهاست که انعکاس روی مرز در تکرارها حذف میشوند و روی نتیجه تأثیرگذار نیستند.



۲.۳.۱ شرط مرزی دیواره

جریان روی دیواره تنها مؤلفه مماس بر سطح دارد و جریان روی دیواره سُر میخورد^۱. به عبارت دیگر برای سلولهای روی دیواره، شار انتقالی^۲ از سطح دیواره صفر است (معادله ۱-۲۵).

$$F_n = P_{wall} \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$
 معادله ۲۵-۱

برای محاسبه P_{wall} از مقادیر فشار در تکرار قبل استفاده شده است. دو رویکرد برای این کار در نظر گرفته شده است، اوّل استفاده از مقدار سلول در تکرار قبل (معادله ۱-۲۶) و دوم درون یابی از سلول های کناری (معادله ۱-۲۷) است.

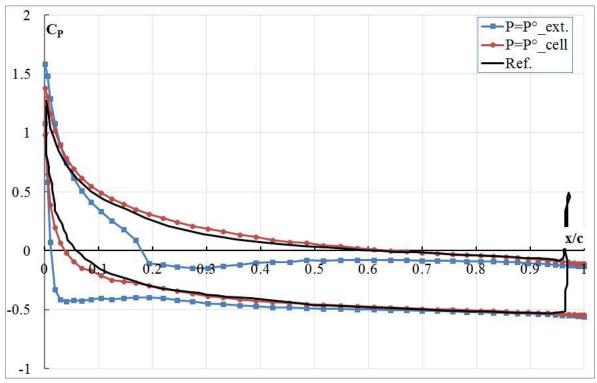
۴

¹ Slip Condition

² Convection

$$P_{wall}=P_0^\circ$$
 ۲۷-۱ معادله ۲۷-۱ معادله

رویکرد دوم نسبت به اول همگرایی را دشوارتر می کند، به طوری که برای جلوگیری از واگرایی حل لازم شد مقدار CFL کوچک تری انتخاب شود. توزیع فشار روی دیواره نیز با شرط اول دقیق تر محاسبه می شود. بنابراین در تمامی حالات از این روش استفاده شده است (شکل ۲-۱).



 $M_{\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ مقایسه توزیع فشار روی ایرفویل با دو نوع شرط روی دیواره، $^{\circ}$

۴.۱ انتخاب قدم زمانی

از آنجایی که از روش صریح برای حل معادلات استفاده شده است، لازم است تا قدمهای زمانی کوچکی انتخاب شود تا همگرایی حاصل شود. از آنجایی که جواب گذارای مساله مورد مطالعه نیست، بنابراین شرط CFL را برای هر سلول به طور جداگانه برقرار میکنیم تا روند همگرایی تسریع شود و سلولهای کوچکتر باعث کاهش سرعت کل حل نشوند.

$$CFL = rac{\Delta t \sqrt{Cell\ Area}}{\overline{V} + C}$$

که در آن C ، سرعت صوت، برابر است با:

$$C = \sqrt{\gamma RT}$$
معادله ۲۹-۱

۵

¹ Transient

۲ نتایج

در این بخش نتایج حاصل از کد حاضر ارائه شده است. شرایط حل در سه ماخ ۱/۲، ۰/۸۵ و ۰/۵۰ و زوایای حمله متفاوت است (جدول ۲-۱).

 No. M_{∞}
 α

 1
 1.20
 0.0°

 2
 1.20
 7.0°

 3
 0.85
 0.0°

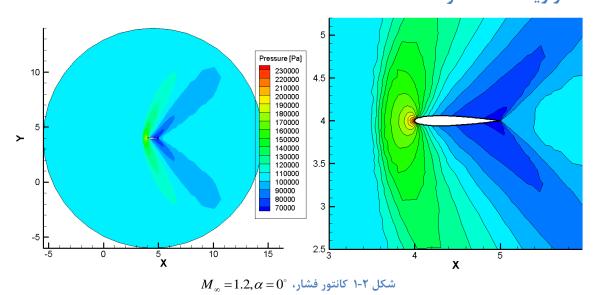
 6
 0.50
 3.5°

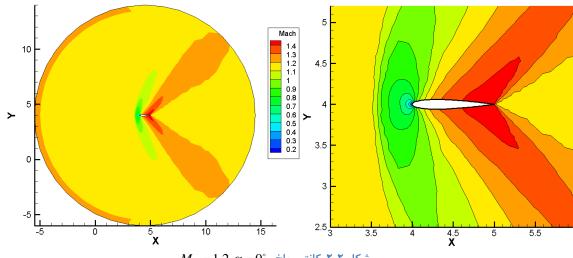
1.۲ ماخ ۱.۲

ماخ ۱/۲ از حد بحرانی ایرفویل مورد بررسی بیشتر بوده و جلوی ایرفویل شوک تشکیل میشود. ماخ جریان در قسمت مرکز شوک تشکیل شده به زیر صوت میرسد و در اطراف آن نیز کاهش می یابد. همچنین ماخ روی ایروفویل بالا می رود.

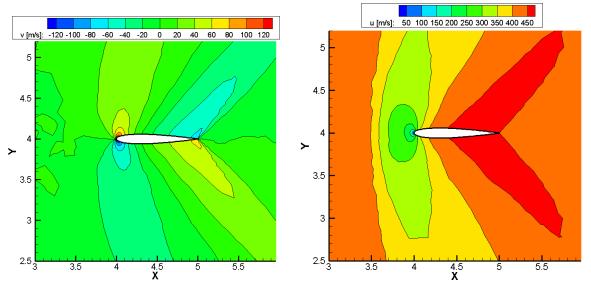
همگرایی تمامی پارامترهای جریان با روند خوبی به $1 \cdot 1 \cdot 1$ میرسد. توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل نیز برای هر دو زاویه حمله مورد بررسی (به جز در انتها) به نتایج مرجع (۱) نزدیک است.

۲.۲ زاویه حمله صفر

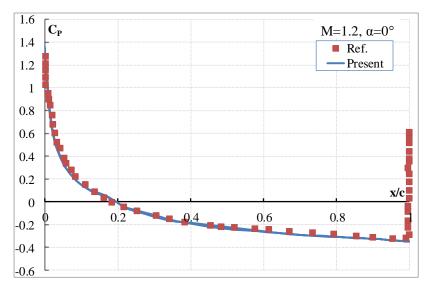




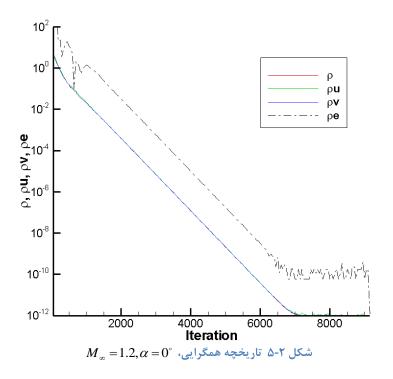
 $M_{\scriptscriptstyle \infty} = 1.2, \alpha = 0^\circ$ شکل ۲-۲ کانتور ماخ،



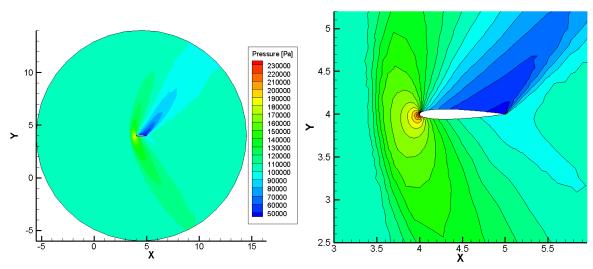
 $M_{_{\infty}}$ = 1.2, α = 0° ،(راست و چپ)، شکل ۳-۲ کانتور سرعت افقی و عمودی



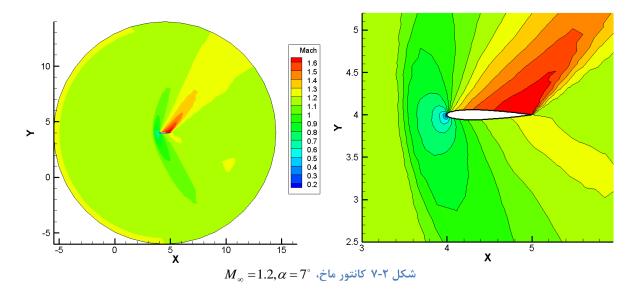
 $M_{\infty}=1.2, lpha=0^{\circ}$ ،NACA-0012 شکل ۴-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح

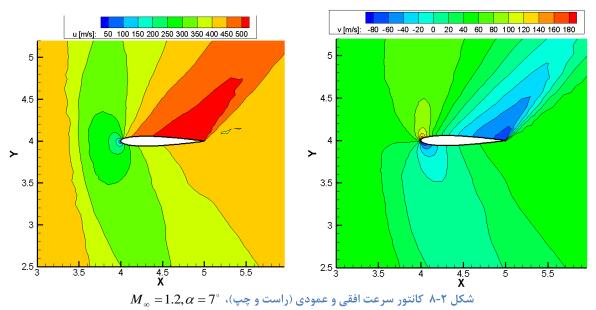


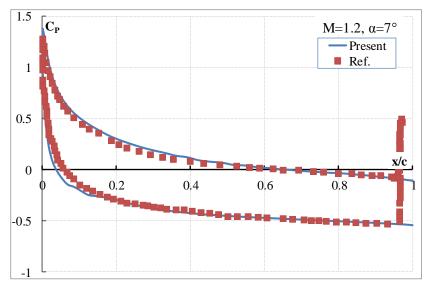
۳.۲ زاویه حمله °۷



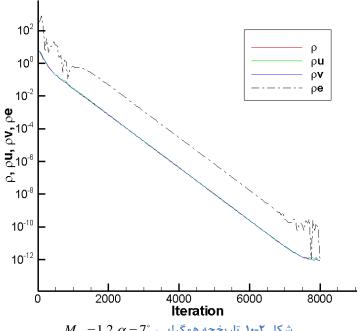
 $M_{\scriptscriptstyle \infty} = 1.2, \alpha = 7^\circ$ کانتور فشار، $^\circ$ کانتور







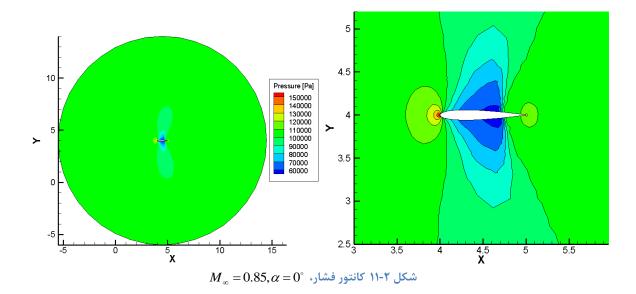
 $M_{\infty} = 1.2, \alpha = 7^{\circ}$ ،NACA-0012 شکل ۹-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح



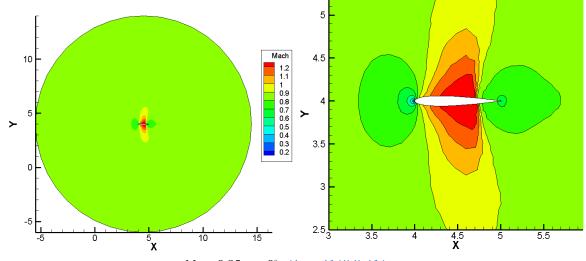
 $M_{_{\infty}}=1.2, lpha=7^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، ۱۰-۲ تاریخچه

۴.۲ ماخ ۸۵/۸و زاویه حمله صفر درجه

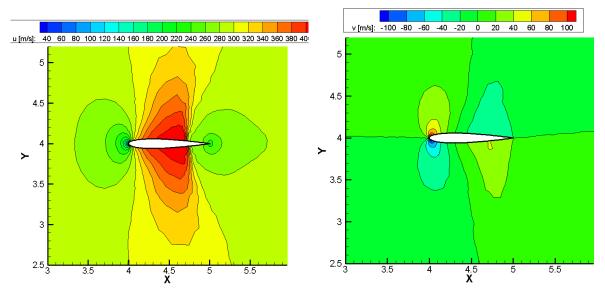
در این شرایط سرعت روی ایرفویل به ماخ میرسد و در حدود ۰/۷۵ وتر شوک تشکیل میشود. از آنجایی که ایروفیل متقارن است، انتظار میرود که جریان بالا و پایین ایرفویل یکسان باشد و محل شوک در سطح بالا و پایین ایرفویل یکسان باشد. امّا نتایج با این استنباط متفاوت است که نشان از ایراد در تعریف هندسه و یا عامل دیگری است.



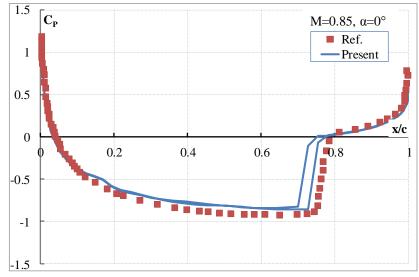
1.



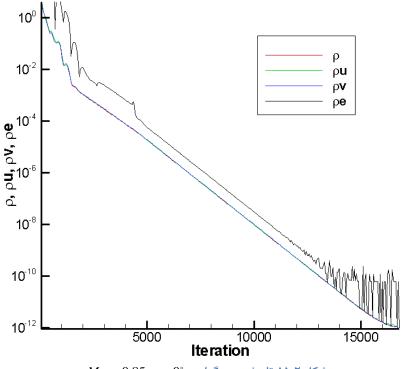
 $M_{_{\infty}}=0.85, lpha=0^{\circ}$ شکل ۲-۲۱ کانتور ماخ،



 $M_{_{\infty}}$ = 0.85, lpha = 0° ، (راست و چپ)، شکل ۱۳-۲ کانتور سرعت افقی و عمودی



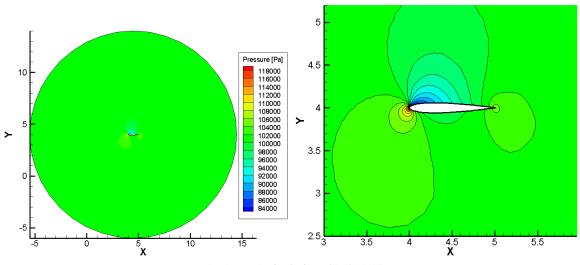
 $M_{_{\infty}}=0.85, lpha=0^{\circ}$ ،NACA-0012 شکل ۱۴-۲ توزیع فشار معادلات اویلر روی سطح



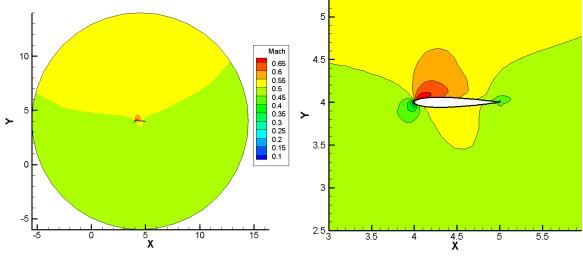
 $M_{\infty}=0.85, lpha=0^{\circ}$ شکل ۲-۱۵ تاریخچه همگرایی،

۵.۲ ماخ ۵۰/۰ و زاویه حمله °۳/۵

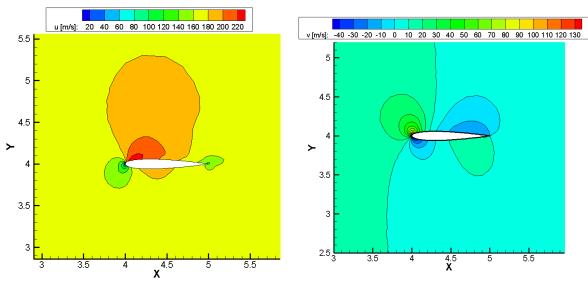
جریان در این شرایط به ماخ بحرانی نمی رسد و شوکی تشکیل نمی شود. تراکم پذیری نسبتاً پایین این این شرایط باعث می شود که در محاسبه تغییرات انرژی همگرایی سریعی نداشته باشد و عملاً از مرتبه $^{-4}$ کم تر نشود. همچنین برای همگرایی لازم است تا قدمهای زمانی کوچکی انتخاب شود. شیب تغییرات فشار نیز شدید تر از مقدار مرجع (۱) پیش بینی شده است.



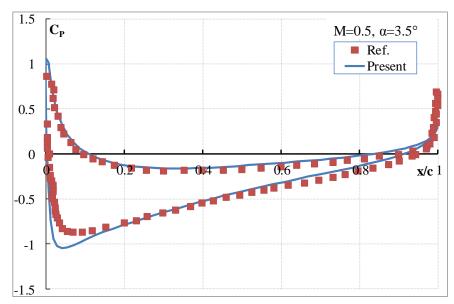
 $M_{\infty} = 0.50, \alpha = 3.5^{\circ}$ کانتور فشار، ۱۶-۲ کانتور



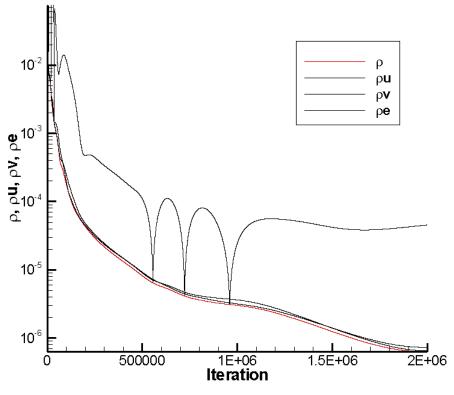
 $M_{\infty}=0.50, lpha=3.5^{\circ}$ شکل ۲-۲۱ کانتور ماخ،



 $M_{_{\infty}} = 0.50, \alpha = 3.5^{\circ}$ ،NACA-0012 شكل ۲-۱۸ توزيع فشار معادلات اويلر روى سطح



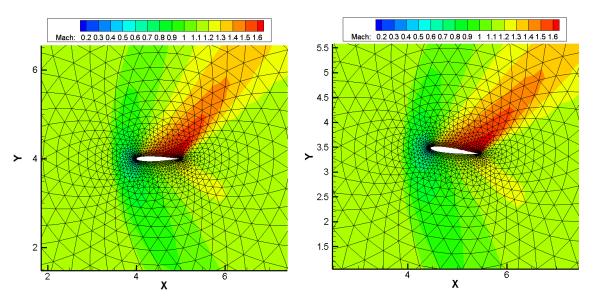
 $M_{\infty} = 0.50, \alpha = 3.5^{\circ}$ ،NACA-0012 شكل ۱۹-۲ توزيع فشار معادلات اويلر روى سطح



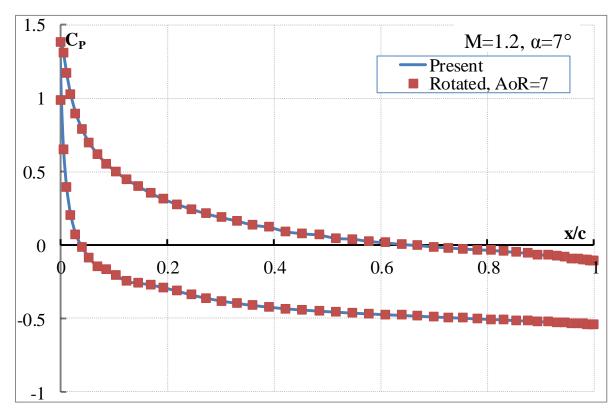
 $M_{\infty}=0.50, lpha=3.5^{\circ}$ تاریخچه همگرایی، ۲۰-۲ تاریخچه همگرایی

۶.۲ مقایسه دوران هندسه

در این بخش نتایج به دست آمده از دوران هندسه به همراه شبکه با زاویه حمله معادل جریان دوردست در شرایط $M_\infty=1.2\alpha=7^\circ$ شرایط $M_\infty=1.2\alpha=7^\circ$ شرایط نتایج بنابر انتظار یکسان است (شکل ۲۰۲۲، شکل ۲۲۰۲).



 $(\alpha=7^\circ$ چپ ، Angle of Rotation = 7° (راست: $M_\infty=1.2$, هندسی ، Engle of Rotation $M_\infty=1.2$) کانتور ماخ شرایط معادل زاویه حمله و دوران هندسی



 $M_{\infty}=1.2, \alpha=7^{\circ}$ & Angle of Rotation = 7° ، NACA-0012 شكل ۲-۲۲ توزيع فشار معادلات اويلر روى سطح

٣ مراجع

۱. *جزوه درس CFD II* دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده هوافضا، کلاس درس CFD II، مـدرس: دکتـر کریمیان. ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰.

2. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. Roe, P.L. s.l.: Journal of Computational Physics, 1981, Vol. 43.

۳. دادههای مرجع مقایسه. دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده هوافضا، کلاس درس CFD II، مدرس: دکتـر کریمیان.

۴ لیست فایلها

لیست فایلهای برنامه، زیرروالها و توابع مورد استفاده در جدول ۴-۱ ارائه شده است.

جدول ۴-۱ فایلهای برنامه، زیرروالها و توابع

	File name	Fortran Name	Description
1	RoeSolver.f90	PROGRAM RoeSolver	Main Program
2	CFL.f90	FUNCTION dtCFL	Computed Δt of specific CFL number
3	DEG2RAD.f90	FUNCTION DEG2RAD	Convert Angle from Deg. to Radians
4	ExtractProp.f90	SUBROUTINE ExtractProp	Calculated primary variables from euler standard variables
5	Roe.f90	SUBROUTINE RoeMat FUNCTION RoeM	Roe Scheme and Roe Mean Value
6	GeomPack.f90	FUNCTION distance FUNCTION triarea SUBROUTINE NormalVector	Geometrical Calculations: 1. Two Point Distans 2. Triangle Area 3. Calculates Normal Vector
7	ResidualCheck.f90	SUBROUTINE Rescheck	Checks for residual magnitude and convergence criteria
8	EulerExp.f90	SUBROUTINE EulerExp	Calculates Euler Explicit when all three edges of cell have flux
9	InletCond.f90	SUBROUTINE Inlet SUBROUTINE RiemannInlet	Enforce Inlet Boundary Condition (Riemann or Normal)
10	Writepack.f90	SUBROUTINE Writepack	Export answers to tecplot files
11	RotateXY.f90	SUBROUTINE RotateXY	To Ratate x and y location